

La stabilité de l'âme des poutres sollicitées à la flexion

Autor(en): **Timoshenko, S.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht**

Band (Jahr): **1 (1932)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-444>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

than $9/16$ in. and the thickness $t = 5/8$ in. should be used. The American specification for the same depth gives $t = .548$ in. and $9/16$ in. thickness should be used. The distance of stiffeners, for $\tau = 9000$ lbs per sq. in., is, from figure 9, $d = 112t = 70$ in. For $\tau = 6000$ lbs. per sq. in. $d = 144t = 90$ in. The American specifications give in this case 42 in. and 72 in. respectively. In this case the suggested manner of proportioning plate girders gives slightly larger thickness of the web, but the stiffening is lighter for both values of working stress. The distance between the stiffeners determined above for the maximum shearing stress can be increased with increasing distance from the supports. In this changing of stiffeners figure 9 also can be used, although the web stresses at intermediate cross sections are different from pure shear and for a more satisfactory solution of the problem the stability of the plate under combined bending and shearing stress should be considered.

In proportioning stiffeners table 10 may be used. From practical considerations the cross-sectional moment of inertia J will be taken, for smaller depths, larger than it is given in the table.

For further improvement of the design of plate girders from the point of view of elastic stability it is desirable: 1) To develop the theory of buckling of rectangular plates with fixed edges. 2) To consider buckling of rectangular plates under combined bending and shearing stress. 3) To investigate in more detail the question of required flexural rigidity of stiffeners.

Experiments with large size model girders will give a chance to check the theory and to investigate such important points as stress distribution in the web and in the rivets after buckling begins.

TRADUCTION,

par M. GOSSIEAUX, Ing., Paris.

Introduction.

Pour le calcul d'une poutre composée, il faut prendre en considération non seulement les charges, mais également la stabilité élastique du système. On sait¹ qu'une poutre en I qui subit un fléchissement dans le plan de l'âme peut accuser une stabilité insuffisante et subir un flambage latéral. La valeur critique de la charge pour laquelle ce flambage peut se produire dépend non seulement de la rigidité latérale des ailes, mais également de la rigidité à la torsion de la poutre, ainsi que du rapport entre la longueur de la portée et la hauteur de cette poutre. Pour éliminer cette cause d'instabilité, il est nécessaire de prévoir un dispositif approprié réalisant un renforcement latéral².

Un autre problème lié à la stabilité élastique se pose pour le calcul des poutres composées : c'est la détermination de l'épaisseur de l'âme et de l'écartement des pièces de renforcement de cette âme. On pourra constater souvent qu'il est nécessaire de pousser l'épaisseur de l'âme au delà d'une valeur cor-

1. L. PRANDTL. Le phénomène du flambage. Thèse, Nuremberg, 1899.

2. L'accident survenu à un pont situé près de Tarbes fournit un exemple de la rupture d'une poutre à la suite d'un flambage latéral (La Revue Technique, 15 novembre 1897).

respondant au cisaillement simple, par suite précisément de cette tendance au flambage. Au lieu d'augmenter l'épaisseur de l'âme, et pour répondre à la même nécessité d'assurer la stabilité de cette âme, on peut prévoir des pièces de renforcement spéciales disposées à des endroits judicieusement choisis.

Le but de la présente étude est d'étudier les problèmes que pose le flambage latéral d'une poutre en I et le flambage d'une poutre composée.

I. Stabilité latérale d'une poutre.

1. Notations adoptées.

Les notations qui suivent ont été adoptées dans cette étude :

- $2l$ portée de la poutre composée ;
 h hauteur de la poutre composée ;
 $B_1 = El_1$ rigidité à la flexion dans le plan de l'âme ;
 $B_2 = El_2$ rigidité à la flexion dans la direction perpendiculaire au plan de l'âme ;
 Q_{cr} charge totale à partir de laquelle la poutre commence à devenir instable et le flambage latéral s'amorce ;
 σ_{cr} effort de flexion maximum correspondant à la charge Q_{cr} ;
 C rigidité de la poutre à la torsion ;

$$\alpha = \frac{C}{B_2} \left(\frac{2l}{h} \right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\beta = \frac{B_2}{B_1} \left(\frac{h}{2l} \right)^2 \dots \dots \dots (2)$$

2. Charge critique.

Dans tous les cas, la charge critique peut être représentée par l'équation¹ :

$$Q_{cr} = K \frac{\sqrt{B_2 \cdot C}}{(2l)^2} \dots \dots \dots (3)$$

expression dans laquelle K est un coefficient numérique qui dépend :

- a) de la grandeur de la quantité α telle qu'elle est définie ci-dessus par l'équation (1) ;
- b) de la nature de la charge ;
- c) du dispositif de fixation des extrémités de la poutre.

On voit que Q_{cr} peut être facilement déterminé si l'on connaît le coefficient K . Il faut remarquer qu'une modification dans la valeur de C n'exerce qu'une influence relativement faible sur la charge critique ; il en résulte que pour le calcul de C , on peut employer des formules approximatives. Dans le cas d'une section droite en I, telle que celle qui est représentée sur la figure 1, on peut admettre que la rigidité à la torsion de la poutre est approximativement égale à la somme des rigidités à la torsion des trois éléments rectangulaires dans lesquelles on peut décomposer cette poutre, et l'on peut écrire :

$$C = G \left(\frac{2}{3} l z^3 + \frac{1}{3} h z_1^3 \right) \dots \dots \dots (4)$$

expression dans laquelle G désigne le module de rigidité.

1. S. TIMOSHENKO. Zeitschrift f. Math. u. Phys. Vol. 58, 1910 ; S. TIMOSHENKO. Annales des Ponts et Chaussées, 1913-IV.

D'une manière plus générale, C peut être déterminé en employant l'équation approchée de SAINT-VENANT :

$$C = \frac{1}{40} \cdot \frac{A^4}{J_p} \cdot G \dots \dots \dots (5)$$

expression dans laquelle A désigne la valeur de la section droite et

$$J_p = \frac{B_1 + B_2}{E}$$

le moment polaire d'inertie de la section droite.

3. Poutre uniformément chargée et posée librement à ses extrémités.

Dans ce cas, on suppose que les extrémités peuvent subir librement un mouvement de rotation par rapport à l'axe de symétrie des sections d'extrémités, mais qu'elles ne peuvent pas subir un mouvement de rotation autour de l'axe coïncidant avec l'axe de la poutre. Le processus de flambage de la poutre est indiqué sur la figure 2. On remarquera que, par suite du mode de fixation des extrémités, le flambage latéral de la poutre est accompagné d'une torsion. Ceci explique pourquoi la stabilité de la poutre ne dépend pas seulement de la rigidité latérale à la flexion B₂ mais également de la rigidité à la torsion C ainsi que le fait ressortir l'équation (3).

Tableau 1.

Facteur K et charges critiques en kg par mm ² pour une poutre uniformément chargée et posée simplement à ses extrémités							
α	0,1	1	2	4	6	8	12
K	143	53	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5
σ _{cr}	6	7	7,9	9,5	10,9	12,1	14,2
σ' _{cr}	3,85	4,75	5,65	7,2	8,55	9,7	11,75
σ'' _{cr}	9,25	10,1	11	12,6	14	15	17,2
α	16	20	32	50	70	90	100
K	30,5	30,1	29,4	29	28,8	28,6	28,6
σ _{cr}	16,1	17,6	21,8	27	31,7	35,7	37,6
σ' _{cr}	13,6	15,1	19,6	24,5	29,1	33,2	35
σ'' _{cr}	19	20,6	24,7	29,8	34,4	38,6	40,3

Les valeurs du coefficient K de l'équation (3), calculées pour ce cas (1), sont indiquées dans le tableau 1 en fonction de la quantité α telle qu'elle est définie par l'équation (1). Si l'on connaît les dimensions de la poutre composée, on peut calculer facilement les valeurs de C et de B₂. On déduira ensuite α de

l'équation (1) et on tirera du tableau la valeur correspondante de K . En reportant cette valeur dans l'équation (3), on obtiendra la charge critique Q_{cr} .

La valeur correspondante de l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = \frac{Q_{cr} E h l}{8 B_1}$$

ou, en faisant intervenir les équations (1) et (2) :

$$\sigma_{cr} = \frac{K E}{16} \beta \sqrt{x} \quad (6)$$

A partir de cette équation, on peut facilement calculer les valeurs de σ_{cr} à condition de connaître K . La troisième ligne du tableau 1 donne les valeurs de σ_{cr} calculées à partir de l'équation (6) en supposant :

$$\beta = 10^{-4} \quad \text{et} \quad E = 21 \cdot 10^3 \text{ kg. par mm}^2.$$

Les efforts critiques correspondant à une poutre admettant toute autre valeur de β et un module E_1 peuvent être obtenus en multipliant le nombre correspondant du tableau 1 par

$$10^4 \beta \frac{E_1}{E}.$$

Il y a lieu de remarquer que la stabilité latérale d'une poutre composée varie avec la position de la charge. Les valeurs de K que donne le tableau 1 ont été calculées en supposant que la charge est répartie le long de l'axe de la poutre. Si l'on suppose une charge uniformément répartie le long de l'aile supérieure de cette poutre, la stabilité se trouve réduite et il en résulte corrélativement que les valeurs du coefficient K deviennent plus faibles. Les valeurs correspondantes des efforts critiques, désignées par σ'_{cr} sont données dans la quatrième ligne du tableau 1. La ligne 5 de ce même tableau donne les valeurs des efforts critiques σ''_{cr} lorsque l'on suppose une charge uniformément répartie le long de l'aile inférieure de la poutre.

4. Exemples numériques.

Considérons, à titre de premier exemple, un profilé en I ayant les dimensions suivantes :

Portée	$2l = 20$	ft. = 6,096 m.
Hauteur	$h = 24$	in. = 609,6 mm.
Largeur d'aile	$b = 7$	in. = 177,8 mm.
Épaisseur d'âme	$\hat{z}_1 = 0,5$	in. = 12,7 mm.
Épaisseur moyenne des ailes ...	$\hat{z} = 0,87$	in. = 22,1 mm.
	$\hat{z} = 1/2(0,6 + 1,14)$ in.	
Section droite	$A = 23,3$	sq. in. = 150,3 cm ²
Rigidité à la flexion	$B_1 = 2.087$	E
	$B_2 = 42,7$	E

La rigidité à la torsion, déduite de l'équation (5), est :

$$C = \frac{23,3^4 G}{40(2.087 + 42,7)} = 3,46 G.$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$\alpha = 3,24 \quad \beta = 205 \cdot 10^{-6}.$$

Le tableau donne pour $\alpha = 3,24$, par interpolation :

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= 11.300 + 1/2(13.600 - 11.300) \cdot 1,24 = 12.700 \text{ lb/sq. in.} \\ &= 8,9 \text{ kg. par mm}^2. \end{aligned}$$

Cette valeur correspond à l'effort critique pour $\beta = 10^{-4}$; dans le cas qui nous occupe, l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = 12.700 \cdot \beta \cdot 10^4 = 26.000 \text{ lb/sq. in.} = 18,2 \text{ kg. par mm}^2.$$

Si, au lieu de partir de l'équation (5), on part de l'équation (4) pour déterminer la rigidité à la torsion, on trouve :

$$C = 4,07 G.$$

On a alors : $\alpha = 3,80$ et le tableau 1 donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= 11.300 + 1/2(13.600 - 11.300) \cdot 1,80 = 13.400 \text{ lb/sq. in.} \\ &= 9,4 \text{ kg. par mm}^2. \end{aligned}$$

Pour le cas qui nous occupe, l'effort critique est :

$$\sigma_{cr} = 13.400 \cdot \beta \cdot 10^4 = 27.400 \text{ lb/sq. in.} = 19,2 \text{ kg. par mm}^2,$$

valeur supérieure d'environ 5,5 % à l'effort trouvé précédemment.

La méthode approchée ordinaire pour le calcul des efforts critiques dans les poutres non munies d'appuis latéraux consiste à considérer l'aile supérieure comprimée de la poutre comme un poteau. Étant donné que l'effort de compression qui s'exerce dans l'aile est proportionnel au moment de flexion et suit la loi parabolique, il y a lieu de substituer la longueur réduite

$$L = 0,694 \cdot 20 \cdot 12 = 167 \text{ in.} = 4,242 \text{ m.}$$

à la longueur effective. Le rayon de giration de la section droite de l'aile est :

$$r = \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2,02 \text{ in.} = 51,4 \text{ mm.}$$

Par suite, on a :

$$\frac{L}{r} = 83.$$

Pour de telles conditions, la formule d'Euler donne un effort critique qui se trouve au delà de la limite d'élasticité de l'acier de construction ordinaire. Si l'on prend la formule linéaire courante, on trouve :

$$\sigma_{cr} = 52.500 - 220 \frac{L}{r} = 34.300 \text{ lb/sq. in.} = 24 \text{ kg. par mm}^2,$$

effort supérieur de 32 % à celui que l'on avait obtenu ci-dessus en employant l'équation (3).

Comme deuxième exemple, considérons une poutre composée constituée par une tôle d'âme de $26 \times 3/8$ in. ($660,4 \times 9,5$ mm.) avec ailes constituées par des cornières de $5 \times 31/2 \times 1/2$ in. ($127 \times 88,9 \times 12,7$ mm.). Les dimensions de la poutre sont :

$$\begin{aligned}
 2l &= 480 \text{ in.} = 12,20 \text{ m.} \\
 h &= 26 \frac{1}{2} \text{ in.} = 673 \text{ mm.} \\
 A &= 25,75 \text{ sq. in.} = 166 \text{ cm}^2 \\
 B_1 &= 3.000 E \quad B_2 = 95 E.
 \end{aligned}$$

La rigidité à la torsion, déduite de l'équation (4), est :

$$C = 3,55 G.$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$\alpha = 4,91 \quad \beta = 0,967 \cdot 10^{-4}.$$

Du tableau 1, on déduit par interpolation :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{cr} &= 13.600 + \frac{1}{2}(15.600 - 13.600) \cdot 0,91 = 14.500 \text{ lb/sq. in.} \\
 &= 10,2 \text{ kg. par mm}^2.
 \end{aligned}$$

Dans le cas considéré :

$$\sigma_{cr} = 14.500 \cdot \beta \cdot 10^4 = 14.000 \text{ lb/sq. in.} = 9,8 \text{ kg. par mm}^2.$$

Afin de mettre en évidence les variations des efforts critiques en fonction des rapports $\frac{2l}{h}$ et $\frac{h}{b}$ on a fait les calculs pour des poutres en I (figure 1), avec :

$$\frac{\delta}{\delta_1} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{b}{\delta} = 10.$$

Les valeurs des efforts critiques considérés en fonction du rapport $\frac{2l}{h}$ pour trois différentes valeurs du rapport $\frac{h}{b}$, à savoir : 3, 4 et 5, sont indiquées sur la figure 3, au moyen des courbes I, II et III. On a tracé en pointillé la courbe reliant les points correspondant à $\frac{2l}{b} = \text{Cte.}$

On remarquera que, pour une valeur constante du rapport $\frac{2l}{b}$, l'effort critique diminue lorsque la hauteur de la poutre augmente. On ne tient pas compte de ce fait dans la méthode approchée courante, qui a été mentionnée ci-dessus et dans laquelle l'aile comprimée est considérée comme un poteau. Dans le tableau ci-dessous, on trouvera les efforts critiques obtenus par la méthode approchée d'une part et à partir de l'équation (3) d'autre part, à titre de comparaison et dans le cas où

$$\frac{h}{b} = 3$$

$\frac{2l}{b}$	54	48	42	36
σ_{cr} approché	12,5	15,9	21,2	23,5
σ_{cr} exact	10,1	11,8	14	17,6

Lorsque le rapport $\frac{h}{b}$ augmente, l'écart entre la valeur exacte et la valeur approchée augmente également.

5. Efforts dépassant la limite d'élasticité.

L'équation (3) est basée sur cette hypothèse que le métal de la poutre suit la loi de Hooke. Par suite, les efforts critiques déterminés d'après le tableau 1, ou d'après la figure 3, ne représentent les vraies valeurs de ces efforts que s'ils ne sont pas supérieurs à la limite élastique du métal. Dans le cas contraire, les efforts critiques ainsi déterminés sont trop élevés. Pour un calcul approché des efforts critiques au delà de la limite d'élasticité, on peut employer la formule linéaire des poteaux. Si l'on suppose, par exemple, que la limite d'élasticité de l'acier de construction est de 21 kg. par mm², on pourra en conclure que les courbes I, II et III de la figure 3 ne peuvent être utilisées qu'au-dessous des points N. Pour des efforts plus considérables, ces courbes doivent être remplacées par les lignes droites MN. On a pris, pour la résistance de l'acier à l'écrasement dans la figure 3, la valeur de 35,7 kg. par mm².

Si l'on possède la courbe d'essai de traction du métal constituant la poutre, pour des efforts supérieurs à la limite d'élasticité, on pourra effectuer une détermination plus précise des efforts critiques en dehors de la zone élastique. Pour ce faire, on tiendra compte de la diminution de la rigidité latérale B_2 provoquée par le chargement des ailes au delà de la limite d'élasticité. Des calculs de cette nature¹ montrent que l'emploi des droites MN (figure 3) donne des valeurs de sécurité.

6. Influence des contraintes additionnelles imposées aux poutres.

Toute contrainte additionnelle imposée à une poutre provoque un accroissement de sa stabilité, c'est-à-dire une augmentation du facteur K dans l'équation (3). Supposons, par exemple, une poutre ayant ses extrémités encastées. Dans le cas d'un flambage latéral, la courbe élastique prend la forme indiquée sur la figure 4 (a). La valeur critique de la charge uniformément répartie est donnée par l'équation (3). Les valeurs du facteur K, ainsi que les efforts critiques σ_{cr} calculés d'après l'hypothèse correspondant à :

$$E = 21.10^3 \text{ kg. par mm}^2 \text{ et } \beta = 10^{-4}$$

sont donnés par le tableau ci-dessous.

Tableau 2.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm², pour une poutre supportant une charge uniformément répartie et encastée à ses deux extrémités, avec :

$$E = 21.10^3 \text{ kg. par mm}^2 \text{ et } \beta = 10^{-4}$$

α	0,1	1	2	4	8	24	32	50	100
K	488	161	119	91,3	73	58	55,8	53,5	51,2
σ_{cr}	13,5	14,1	14,8	16	18,1	24,9	27,6	33	44,8

1. S. TIMOSHENKO. Amer. Soc. of Civil Engineers, Volume 87, 1924, page 1247.

Pour le calcul des valeurs indiquées dans ce tableau, on a supposé que la charge est répartie sur la longueur de l'axe de la poutre.

Si la poutre est entretoisée latéralement, au milieu de sa portée, de telle manière que sa section médiane ne puisse pas subir un déplacement latéral, ou une rotation autour de l'axe de la poutre, la courbe élastique résultant de la déformation latérale prendra la forme de la figure 4 (b). Le tableau 3 donne les valeurs du coefficient K dans l'équation (3) ainsi que les valeurs des efforts critiques σ_{cr} , σ'_{cr} et σ''_{cr} correspondant à une charge uniformément répartie :

1. Le long de l'axe de la poutre ;
2. Le long de l'aile supérieure ;
3. Le long de l'aile inférieure.

Tableau 3.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm ² , pour une poutre supportant une charge uniformément répartie avec appui latéral en son milieu, avec :								
$E = 21.10^3$ kg. par mm ² et $\beta = 10^{-4}$								
α	0,1	1	2	4	8	24	32	50
K	673	221	164	126	101	79,5	76,4	72,8
σ_{cr}	27,9	29,1	30,5	32,9	37,3	51	56,6	67,6
σ'_{cr}	24,4	25,5	26,9	29,4	33,8	47,5	53,2	64
σ''_{cr}	32,1	33,2	34,4	37	41,3	55	60,6	71,4

7. Charges concentrées en un point.

L'équation (3) est également valable pour une charge concentrée, Q_{cr} étant alors la valeur critique de cette charge. Si la charge est appliquée au milieu de la portée d'une poutre posée simplement sur ses appuis, le tableau 4 ci-dessous donne les valeurs du facteur K, ainsi que celles des efforts critiques dans les trois différentes conditions de charge ci-dessous :

1. Charge appliquée au milieu de la section ;
2. Charge appliquée sur l'aile supérieure ;
3. Charge appliquée sur l'aile inférieure.

Lorsque α augmente, la valeur du facteur K se rapproche de la valeur 16,9 que nous avons obtenue pour une poutre ayant une section rectangulaire très étroite. Pour une telle poutre, le problème de l'instabilité élastique est résolu¹ pour toute position de la charge concentrée sur la longueur de la poutre. Si on désigne par c la distance entre le point d'application de la charge et le support le plus proche, dans le cas d'une poutre simplement posée, les valeurs du facteur K sont indiquées dans le tableau 5 ci-après.

1. A. KOBOROFF. Bulletin de l'Institut Polytechnique, Kiew, 1911;
A. DINNIK. Bulletin de l'Institut Polytechnique du Don, 1913.

Tableau 4.

Facteur K et efforts critiques en kg. par mm²,
pour une charge concentrée au milieu d'une poutre simplement posée, avec :
 $E = 21. 10^3$ kg. par mm² et $\beta = 10^{-4}$

α	0,1	1	2	4	6	8	12
K	86,4	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	19
σ_{cr}	7,14	8,4	9,6	11,5	13,1	14,5	17
σ'_{cr}	4,25	5,3	6,3	8,1	9,7	11	13,4
σ''_{cr}	12,1	13,1	14,2	15,9	17,6	25,9	21,3
α	16	20	24	40	60	80	100
K	18,3	18,1	17,9	17,5	17,4	17,2	17,2
σ_{cr}	19,3	21,2	23	29,1	35,2	40,5	45,2
σ'_{cr}	15,7	17,6	19,3	25,4	31,5	36,7	41,4
σ''_{cr}	23,5	25,4	27,1	33,2	39,3	44,5	49,2

Tableau 5.

$\frac{c}{2l} =$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25
K =	16,9	17,2	17,8	19,0	21,0	24,1

$\frac{c}{2l} =$	0,20	0,15	0,10	0,05
K =	29,1	37,9	56	112

On constate que le facteur K ne varie pas considérablement tant que le point d'application de la charge reste dans le tiers médian de la poutre. Par suite, si nous nous trouvons en présence de plusieurs charges agissant tout le long de ce tiers médian, nous pouvons les remplacer par une charge unique appliquée au milieu de la poutre et calculer la valeur critique de cette charge en partant du tableau 4. Si des charges concentrées sont réparties sur toute la longueur de la poutre, on peut les remplacer par une charge uniforme et ses valeurs critiques pourront être déterminées en faisant emploi des tableaux 1, 2 et 3.

II. Stabilité de l'âme d'une poutre composée.

8. Essais.

Les premiers essais de flambage sur des âmes minces supportant des efforts de cisaillement et de flexion ont été exécutés par Wm. FAIRBAIRN, à propos de la construction des célèbres ponts tubulaires Britannia et Conway. Ces essais,

devenus classiques¹, ont, jusqu'à nos jours, présenté le plus grand intérêt pour les ingénieurs ayant à s'occuper de constructions comportant des parois minces. Le pont Britannia, qui est tubulaire, a une section transversale rectangulaire. Les plus grands éléments ont une portée de 137 mètres et leurs sections ont des dimensions de $8,23 \times 4,88$ mètres. A cette époque, de telles dimensions sortaient nettement de la normale. Pour déterminer des dimensions susceptibles de donner toutes garanties de sécurité, et pour fixer la meilleure répartition à adopter pour le métal, on décida de procéder à des essais sur des modèles. Après de nombreuses expériences préliminaires, on fut amené à étudier des modèles d'assez grandes dimensions, soit environ le sixième des dimensions effectives du pont projeté. Les parois latérales des tubes utilisés comme modèles se composaient de tôles de 1,15 mètre ayant une épaisseur de 2,5 millimètres seulement. Les premiers essais montrèrent que, pour une charge relativement faible, il se produisait sur les côtés des ondulations de la tôle, allant jusqu'à former des angles de 45° avec le plan du fond. « Il était évident, d'après ces expériences, que les efforts de tension qui s'exerçaient sur toute la surface du fond et les efforts de compression sur toute la partie supérieure se combinaient en une action et une réaction, par l'intermédiaire des parois latérales, qui avaient ainsi à supporter des efforts diversement orientés. » « Une ligne d'ondulation oblique mettait nettement en évidence la direction de l'effort maximum. Il était évident que les parois latérales se trouvaient exposées à des efforts sévères par suite de la modification de forme qui résultait de la tendance au rapprochement entre les parois supérieure et inférieure ; la résistance des tôles aurait été suffisante, si elles avaient pu seulement conserver leur forme initiale. On décida, par suite, de modifier la construction des parois latérales. Ceci fut réalisé par l'addition, sur toute la hauteur des parois, de montants en cornières rivés, jouant le rôle de pièces de renforcement pour les tôles des parois latérales et maintenant en même temps l'écartement des parois supérieure et inférieure. Ces pièces constituèrent les prototypes des montants en profilés en T qui furent employés sur les ponts eux-mêmes. » Les essais ultérieurs montrèrent l'importance du rôle de ces montants, étant donné que pour une faible addition au poids du métal du tube, les parois supérieure et inférieure étaient exactement maintenues en place, tandis que la charge de rupture de l'ensemble était considérablement augmentée. C'est par ces expériences que l'on apprit que « lorsque la hauteur de l'âme augmente, les précautions nécessaires pour maintenir les parois de la tôle deviennent extrêmement importantes ». Les fers à T, goussets et plaques de renforcement employés à cet effet pour l'un des tubes du pont Britannia pèsent 215 tonnes, soit plus du tiers du poids total des parois latérales.

Les tubes d'essai ont été soumis à une charge concentrée placée au milieu, l'effort tranchant étant constant sur toute la longueur de la portée. Pour l'étude du pont lui-même, on a tenu compte du fait que l'effort tranchant maximum diminue vers le milieu ; on a adopté une épaisseur d'âme de 12,7 millimètres au milieu et de 16 millimètres aux extrémités.

1. Wm. FAIRBAIRN. Conway and Britannia Tubular Bridges, 1849 ;
Edwin CLARK. Brit. and Conway Tub. Bridges, Londres, 1850.

Différentes études expérimentales furent également effectuées à cette époque sur des poutres composées¹. L'épaisseur de l'âme de la poutre d'étude était de 6,35 mm. d'un bout à l'autre ; la hauteur totale était de 3 mètres au centre et de 1,80 m. aux extrémités, la distance entre appuis étant de 19,8 m. La poutre céda par flambage sur l'âme. Elle fut réparée ultérieurement, l'âme étant renforcée par adjonction de montants en cornières à chaque assemblage vertical des tôles. La résistance de l'ensemble fut ainsi considérablement augmentée ; la rupture se produisit en définitive pour une charge beaucoup plus élevée et par écrasement sur toute la hauteur.

Des essais furent effectués ultérieurement par un ingénieur belge, M. HOUBOTTE², sur deux poutres composées ayant une portée de 1,50 m., une épaisseur d'âme de 5 mm., et des hauteurs respectives de 0,30 et 0,40 m. Ces deux poutres ont été chargées en leur milieu ; toutes les deux ont cédé par flambage de l'âme, cette dernière ne comportant aucun renforcement. La poutre ayant la plus forte hauteur a cédé pour une charge plus faible que l'autre, quoique son module soit deux fois plus élevé que celui de la poutre ayant la plus petite hauteur.

Plus récemment, le professeur W. E. LILLY³ a effectué quelques travaux sur les poutres composées. Il a construit une poutre ayant les dimensions suivantes :

Hauteur : 241,3 mm. ; longueur : 1,60 m. Les ailes étaient constituées par deux tôles de $50,8 \times 9,5$ mm. et par deux cornières de $31,75 \times 6,35$ mm. Les semelles de cette poutre ont été montées par moitiés séparées et boulonnées sur l'âme. Ce montage a permis d'adopter successivement différentes épaisseurs d'âme dans le cours des essais. Un grand nombre d'essais ont été ainsi effectués avec différentes épaisseurs d'âme, et avec des écartements divers des pièces de renforcement.

On a obtenu la déformation ondulatoire de la tôle d'âme en appliquant la charge au milieu. « On a constaté que la longueur d'onde de la déformation ondulatoire est à peu près indépendante de l'épaisseur de cette tôle, lorsque les pièces de renforcement présentent une résistance très élevée par rapport à celle de l'âme. L'obliquité de la direction des ondulations dépend de la distance qui sépare entre eux les éléments de renforcement, ainsi que de la hauteur de la poutre. Les pièces de renforcement entravent la formation des ondulations et des efforts locaux sévères prennent naissance près des extrémités de ces renforcements, provoquant un froissement dans cette région de l'âme. La photographie de la figure 5 représente la formation ondulatoire qui s'est produite sur une poutre renforcée seulement en son milieu, la charge ayant été appliquée à cet endroit.

9. Épaisseur d'âme et écartement des éléments de renforcement.

Des essais qui ont été effectués, il résulte qu'une poutre composée peut transmettre les efforts tranchants à ses appuis de deux manières différentes :

1. Edwin CLARK. *Britannia and Conway Tubular Bridges*, Londres, 1850.
2. M. HOUBOTTE. *Der Civilingenieur*, 1856, volume 4.
3. W. E. LILLY. *Calcul des poutres composées et des poteaux*, 1908 ;
W. E. LILLY. *Engineering*, volume 83, 1907, page 136.

1. Si la charge n'est pas suffisante pour produire une déformation ondulatoire, l'âme de la poutre transmet l'effort de cisaillement en travaillant au cisaillement.

2. Pour des charges plus fortes, et produisant la déformation ondulatoire, une fraction de l'effort tranchant est transmise à l'âme sous forme d'efforts tranchants, comme précédemment, tandis que l'autre fraction se comporte comme dans une ferme, dans laquelle l'âme jouerait le rôle d'entrait et les éléments de renforcement le rôle de contrefiches. La valeur de la charge à partir de laquelle commence à se produire la déformation ondulatoire dépend de l'épaisseur de l'âme, ainsi que de l'écartement et des dimensions des éléments de renforcement. Si l'épaisseur de l'âme est suffisante et si le renforcement est satisfaisant, une poutre composée peut supporter la totalité de la charge pour laquelle elle est conçue, sans qu'il se produise aucun flambage dans l'âme. On réalise normalement de telles proportions dans les ponts. Il existe d'autre part des exemples de construction dans lesquelles des âmes très minces ont tendance à subir le flambage dès le début de la charge de sorte que la charge totale se trouve agir pratiquement comme dans une ferme. On trouve ces exemples dans la construction aéronautique¹.

Quoique le flambage de l'âme n'implique pas la mise hors service immédiate de la poutre, on adopte généralement dans la construction des ponts des dimensions qui permettent de l'éviter dans les conditions normales de service. La méthode habituelle consiste à adopter une certaine valeur pour l'effort de cisaillement et à déterminer l'épaisseur de l'âme en partant de cette base². L'écartement des éléments de renforcement est ensuite déterminé de manière à permettre à l'âme de transmettre les efforts tranchants sans flambage.

Si l'on remarque que dans les poutres de ponts de chemins de fer, la charge totale varie approximativement comme la portée, et si l'on admet que le rapport entre la hauteur de la poutre et la portée est constant, on peut se rendre compte que le point de vue ci-dessus aboutit à peu près à la même épaisseur pour toutes les portées. Si l'on peut admettre que cette épaisseur est suffisante pour les petits ponts, elle sera toutefois certainement insuffisante pour les ponts de plus grande portée et il deviendra nécessaire d'augmenter l'épaisseur pour parer à la tendance de l'âme au flambage. Quelques cahiers des charges tiennent compte de ce fait. Par exemple, les cahiers des charges de l'American Railway Engineering Association³ imposent que l'épaisseur de l'âme ne soit pas inférieure à

$$\frac{1}{20} \sqrt{h}$$

h désignant dans cette expression la distance entre les ailes, exprimée en pouces (1 pouce = 25,4 millimètres).

D'autres raisons pratiques limitent l'épaisseur, à savoir la corrosion et le

1. H. WAGNER. Zeitschrift für Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, volume 20, 1929, page 200; H. RODE. Der Eisenbau, volume 7, 1916, page 217; Engineering News, volume 40, 1899, pages 154, 399.

2. L'effort en service est parfois déterminé au moyen d'une variante de la formule de Rankine. — American Institute of Steel Construction Specifications, New-York, 1928, p. 156.

3. Troisième édition, 1925.

fait que les tôles trop minces sont très difficiles à transporter, lorsqu'elles sont hautes et longues. L'épaisseur de 9,5 millimètres est généralement considérée comme le minimum admissible pour assurer contre la corrosion et pour permettre une manutention facile pour la construction et l'expédition.

En ce qui concerne l'écartement et les dimensions des éléments de renforcement, diverses spécifications prévoient certaines règles qui sont, dans une large mesure, d'un caractère empirique. Les spécifications américaines indiquées ci-dessus, par exemple, prévoient que la distance entre les éléments de renforcement ne doit pas dépasser :

1. six pieds (1,83 mètre) ;
2. la hauteur de l'âme ;
3. une valeur d donnée par la formule :

$$d = \frac{t}{40} (12.000 - \tau)$$

expression dans laquelle t désigne l'épaisseur de l'âme en pouces (1 pouce = 25,4 mm) et τ l'effort tranchant en lb. par sq. in. au point considéré (1 livre par pouce carré = 0,0007 kg. par mm²). Si la hauteur de l'âme entre les cornières d'ailes est inférieure à 50 fois l'épaisseur de l'âme, on peut supprimer une pièce de renforcement sur deux. Ces pièces de renforcement doivent être rivées par paires sur l'âme de la poutre. L'aile saillante de chaque cornière ne doit pas être inférieure à 2 pouces (51 mm.) plus 1/30 de la hauteur de la poutre, et ne doit pas dépasser 16 fois son épaisseur. Les éléments de renforcement sont parfois calculés de manière à leur faire jouer le même rôle que les montants verticaux d'une poutre triangulaire ; en pareil cas, il suffit de s'assurer que ces éléments seront, en fin de compte, assez résistants pour supporter la totalité des efforts tranchants sur la section considérée¹.

Les règles concernant la détermination des épaisseurs des âmes et l'écartement des éléments de renforcement aboutissent généralement à des proportions satisfaisantes, étant donné qu'elles sont le résultat d'une longue expérience. Elles sont en même temps assez souples et laissent une assez grande part à l'appréciation individuelle pour permettre d'obtenir toute une gamme de dimensions dans le calcul des poutres composées, pour une même portée et une même charge. Si l'on considère, par exemple, des poutres composées ayant une portée de 30 mètres, et une hauteur de 3 mètres, on constate que l'épaisseur de l'âme peut varier de 11 à 16 millimètres². La comparaison de deux poutres composées d'une portée de 27 mètres pour un réseau américain d'une part et pour un réseau anglais d'autre part, montre que les éléments de renforcement rentrent, dans le poids total de métal correspondant à l'ensemble de l'âme et des renforcements, pour 25 % dans le type américain et pour 40 % dans le type anglais³.

De la discussion qui précède, il résulte que la détermination des dimensions des poutres composées est basée, dans une large mesure, sur des règles empiriques. Pour baser leur calcul sur des considérations théoriques, il est néces-

1. W. H. THORPE. Engineering, volume 78, 1905.
 2. H. RONE. Der Eisenbau, volume 7, 1916, page 217.
 3. H. M. GIBB. Engineering, volume 90, 1910.

saire de procéder à l'étude de la stabilité élastique des âmes en tôle mince. La discussion du flambage de l'âme doit être faite en considérant deux cas extrêmes :

1. Près des appuis, l'effort tranchant constitue le facteur le plus important, et la partie de l'âme qui se trouve entre deux éléments de renforcement peut être considérée comme une plaque rectangulaire soumise à une action uniforme de cisaillement (figure 6).

2. Au milieu de la portée, les efforts tranchants peuvent être négligés par rapport aux efforts normaux. La partie de l'âme qui se trouve entre deux éléments de renforcement sera alors considérée comme soumise à une flexion simple, ainsi qu'il est indiqué sur la figure 7.

La discussion de ces deux cas fait l'objet des lignes qui suivent.

10. Stabilité de plaques rectangulaires soumises à un cisaillement simple.

L'étude de la stabilité des plaques rectangulaires sous l'action d'efforts de cisaillement (figure 6) montre que les valeurs de l'effort critique de cisaillement pour lesquelles le flambage se produit peuvent être représentées par la formule suivante¹ :

$$\tau_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{d^2 t} \dots \dots \dots (7)$$

formule dans laquelle K désigne un coefficient dépendant de la manière dont sont montées les arêtes de la plaque et du rapport $\frac{h}{d}$ entre les côtés du rectangle.

La rigidité de la plaque à la flexion est donnée par :

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)}$$

Si h est très grand en comparaison de d^2 , le facteur K ne dépendra pratiquement que des conditions régnant en bordure des côtés de la plaque rectangulaire³. Si la plaque est simplement appuyée sur ses bords, $K = 5,35$. Si les bords longitudinaux sont fixés par serrage, $K = 8,98$.

Si les côtés de la plaque ont à peu près les mêmes dimensions, le calcul de K devient plus compliqué⁴. Le tableau ci-après donne quelques valeurs approchées de ce facteur dans le cas où les bords de la plaque sont simplement posés⁵.

1. S. TIMOSHENKO. Bulletin de l'Institut Polytechnique de Kiew, 1910, dont on trouvera la traduction française dans les Annales des Ponts et Chaussées, 1913; S. TIMOSHENKO. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147.

2. Le cas s'est produit, en particulier, pour le pont tubulaire Britannia dont il est parlé plus haut.

3. R. V. SOUTHWELL et S. W. SKAN. Proceedings of the Royal Society, Londres, volume 105, A, 1924; R. V. SOUTHWELL. Phil. Mag. volume 48, 1924, page 540.

4. S. TIMOSHENKO. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147.

5. On admet que d dans l'équation (7) désigne le plus petit côté du rectangle.

De l'équation (7), et en tenant compte de la valeur de D en fonction de t , on déduit que les valeurs critiques de l'effort tranchant sont proportionnelles à

$$\left(\frac{t}{\bar{d}}\right)^2$$

Par suite, la stabilité d'une plaque diminue rapidement lorsque l'épaisseur de cette plaque diminue.

Tableau 6.

Valeurs du facteur K , de l'équation (7), pour des plaques rectangulaires simplement posées.									
$\frac{h}{\bar{d}}$	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2	2,5	3
K	9,42	8	7,3	7,1	7	6,8	6,6	6,3	6,1

Si l'on applique les valeurs de K telles qu'elles sont données par le tableau 6 à des plaques d'acier, pour lesquelles $E = 21.10^3$ et $\nu = 0,3$, et si l'on suppose que l'écartement entre les éléments de renforcement est égal à 1,50 mètre, les valeurs critiques de l'effort de cisaillement pour différentes hauteurs h et différentes épaisseurs t sont celles que donne le tableau 7 ci-après.

Tableau 7.

Efforts tranchants critiques, en kg. par mm ² , pour différentes valeurs de h et de t et pour $d = 1,525$ m.				
t . mm. h . m.	9,5	11,1	12,7	14,3
1,525	7	9,5	12,4	15,7
1,83	5,9	8,05	10,5	13,3
2,133	5,4	7,35	9,6	12,2
2,44	5,25	7	9,25	11,8
2,743	5	6,85	8,95	11,3
3,048	4,9	6,65	7,3	11

Il faut remarquer que la partie de l'âme située entre les ailes et deux renforcements successifs se trouve dans de meilleures conditions que précédemment. Les bords sont en effet partiellement fixés et les efforts critiques seront par suite quelque peu supérieurs aux valeurs indiquées dans le tableau 7.

11. Stabilité des plaques rectangulaires soumises à une simple flexion

Si une plaque rectangulaire est soumise à une simple flexion dans le plan

de la plaque (figure 7), la valeur critique de l'effort maximum de flexion est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 D}{h t} \quad (8)$$

expression dans laquelle K est un facteur numérique; les autres symboles ayant les mêmes significations que dans l'équation (7). Pour une plaque simplement posée, les valeurs de K sont indiquées dans le tableau 8 ci-dessous ¹.

Tableau 8.

Valeurs du coefficient K de l'équation (8), pour des plaques rectangulaires simplement posées.											
$\frac{d}{h}$	0,4	0,5	0,6	0,67	0,75	0,8	0,9	1	1,5	2	3
K	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,1	23,9	24,1

Si d est plus grand que h , K ne varie que faiblement lorsque le rapport $\frac{d}{h}$ varie, et lorsque d augmente, la valeur de K se rapproche du minimum de 23,9 qu'elle atteint pour $\frac{d}{h} = 0,67$. Ceci résulte du fait qu'une plaque ayant une dimension d importante subit un flambage en plusieurs ondulations avec lignes nodales orientées verticalement et le rapport de la longueur d'onde à la hauteur h se rapproche de la valeur 0,67. Par exemple, pour $\frac{d}{h} = 2$, on aura trois ondulations, chacune d'elles se trouvant dans la même condition qu'une plaque pour laquelle le rapport $\frac{d}{h}$ serait égal à 2/3. Pour $\frac{d}{h} = 3$, on aura quatre ondulations, avec un rapport entre la longueur d'onde et la hauteur égal à 0,75.

Si l'on prend pour K la valeur minimum de 23,9 et si l'on suppose que

$$\frac{t}{h} = \frac{1}{100}$$

on tire de l'équation (8), pour l'acier :

$$\sigma_{cr} = 45,5 \text{ kg. par mm}^2.$$

Pour toute autre valeur du rapport $\frac{t}{h}$, la valeur critique de l'effort sera alors :

$$\sigma_{cr} = 45,5 \cdot 10^4 \frac{t^2}{h^2}.$$

Si on a, par exemple : $t = 12,7 \text{ mm. } h = 3,05 \text{ m.}$, on aura :

$$\sigma_{cr} = 45,5 \cdot 10^4 \frac{1}{240^2} = 7,84 \text{ kg. par mm}^2.$$

1. S. TIMOSHENKO. Der Eisenbau, volume 12, 1921, page 147; J. BOOBNOFF. Théorie de la construction des navires, volume 2, page 525, 1914, Saint-Petersbourg.

Si, au lieu de considérer d comme très important, on se place dans un cas où $d = 1/2 h$ (éléments verticaux de renforcement écartés de 1,50 mètre), on déduit du tableau : $K = 25,6$ et

$$\sigma_{cr} = 7,84 \frac{25,6}{23,9} = 8,4 \text{ kg. par mm}^2.$$

On constate que, pour les proportions considérées, l'effort critique est plus faible que celui qui est considéré normalement comme un effort de flexion sans danger pour les poutres composées. Dans le calcul du tableau 8, on a supposé que les bords de la plaque étaient simplement posés ; en pratique, ils sont montés d'une manière rigide avec des ailes. Par suite, les efforts critiques effectifs seront plus élevés que les valeurs théoriques. Néanmoins, il est probable que dans le cas d'âmes minces de grande largeur, il pourra se produire un certain flambage dans les conditions ordinaires de charge. Ce flambage est si faible qu'il peut passer inaperçu. Il ne représente pas, pour la poutre, un danger immédiat. Il indique seulement que lorsque la charge dépasse la valeur critique et que le flambage commence, l'âme de la poutre ne participe plus suivant la proportion qui lui incombe à la transmission des efforts de flexion qui se traduisent par une compression, ce qui provoque une certaine surcharge dans l'aile comprimée.

12. Les éléments de renforcement.

Considérons maintenant une fraction de l'âme comprise entre deux éléments de renforcement consécutifs. Nous avons supposé, dans la discussion qui précède, que les éléments de renforcement ont une rigidité de flexion suffisante et qu'ils restent droits pendant le flambage de l'âme elle-même. Si cette rigidité n'est pas suffisante, les ondulations obliques de l'âme en cours de flambage s'étendent au travers des éléments de renforcement et le flambage de l'âme s'accompagne d'une flexion de ces éléments. Il était évident que l'on se trouvait en présence d'une telle déformation dans quelques-uns des essais de FAIRBAIRN discutés précédemment (chapitre 8). Pour déterminer la rigidité de flexion nécessaire pour prévenir les déformations des éléments de renforcement pendant le flambage des âmes, considérons le cas que représente la figure 8 : une plaque rectangulaire de longueur $2d$ et de largeur h , simplement posée sur ses bords, est soumise à un simple cisaillement. Pour prévenir le flambage latéral, la plaque est renforcée au moyen d'un montant. Si la rigidité de flexion de ce montant est faible, son influence sur la valeur de l'effort tranchant critique sera également faible. Les déformations ondulatoires de la plaque au cours du flambage se transmettront au montant, qui subira un fléchissement. En augmentant progressivement la rigidité du montant, nous arriverons finalement à des conditions telles que chaque moitié de la plaque flambera comme une plaque rectangulaire ayant les dimensions de $h \times d$ avec bords simplement posés, et le poteau restera rectiligne. La valeur limite correspondante B de la rigidité du montant à la flexion peut être déterminée en considérant l'énergie nécessaire à la déformation par flexion de la plaque et du montant¹.

1. S. TIMOSHENKO. Der Eisenbau, volume 12, page 147.

Le tableau 9 ci-après donne plusieurs valeurs du rapport entre cette rigidité et la rigidité $2dD$ de l'âme, déformée jusqu'à prendre la forme d'une surface cylindrique.

Tableau 9.

$\frac{2d}{h}$	2	1,5	1,25	1
$\frac{B}{2dD}$	0,83	2,9	6,3	15

Pour calculer les chiffres ci-dessus, on a supposé que seul le montant AB de la figure 8 était flexible et que les montants CD et FG étaient absolument rigides. Si les trois montants ont tous la même flexibilité, la rigidité limite B doit être plus élevée que ne l'indiquerait le tableau 9. Supposons que cette valeur soit deux fois plus élevée que la valeur calculée, nous obtenons alors les valeurs indiquées dans le tableau 10 pour le moment d'inertie que doit posséder la section droite des éléments de renforcement, pour différentes dimensions des poutres composées et pour $d = 1,50$ mètre.

Tableau 10.

Valeurs des moments d'inertie des éléments de renforcement, pour les dimensions de poutres indiquées ci-dessous et pour $d = 1,50$ mètre (en cm^4).

h. m.	1,525	2,032	2,44	3,048
$\frac{2d}{h}$	2	1,5	1,25	1
$\frac{B}{2dD}$	1,7	5,8	12,6	30
t. mm.				
9,5	41,2	140	304	725
11,1	65	222	483	1.145
12,7	98	333	725	1.720
14,3	140	480	1.040	2.470

On constate que pour les plus faibles hauteurs, le moment d'inertie calculé, de la section droite, est beaucoup plus faible que celui que l'on adopte effectivement. Pour de plus grandes hauteurs, les valeurs calculées de J se rapprochent des valeurs courantes. Par exemple, dans le cas où $h = 3$ mètres, l'élément de renforcement, suivant le règlement américain¹, se compose de deux cornières de $152,4 \times 88,9 \times 9,5$ mm. Le moment d'inertie de cet élé-

1. H. A. L. WADDELL. Construction des ponts, New York, 1916, page 1670.

ment pour $t = 14,3$ mm., est $J = 2.600$ cm⁴, valeur voisine de celle de 2.470 que donne le tableau ci-dessus.

Dans la discussion qui précède, nous avons considéré une plaque soumise à une action de cisaillement, telle que celle qui s'exerce dans l'âme d'une poutre composée, près des appuis. Au milieu de la poutre, les efforts dans l'âme consistent principalement en efforts de flexion ; de la discussion du chapitre 11, on peut conclure que les éléments verticaux de renforcement n'augmentent pas d'une manière notable la stabilité de l'âme à cet endroit. Un effet de renforcement beaucoup plus sensible peut être obtenu en prévoyant dans la zone comprimée de l'âme un élément de renforcement disposé parallèlement à l'aile comprimée de la poutre composée.

Conclusions.

Les résultats obtenus dans les études précédentes, en ce qui concerne la stabilité élastique des plaques, peuvent être utilisés comme suit, pour le calcul des poutres composées.

Dans la détermination de l'épaisseur de l'âme, considérer non seulement les efforts tranchants aux appuis et l'épaisseur minimum admissible pour assurer la sécurité contre la corrosion, mais également la stabilité élastique de l'âme. Dans la discussion sur le flambage des plaques, sous l'influence d'une simple flexion (chapitre 11), on a montré que les éléments de renforcement verticaux n'avaient pas une influence notable sur la stabilité de l'âme ; et il paraît logique de choisir l'épaisseur de cette âme de manière à éliminer les possibilités de flambage résultant de la flexion dans les conditions normales de service. On peut dans ce but, utiliser l'équation (8).

En remplaçant σ_{cr} par l'effort maximum admissible de compression, soit 10,50 kg. par mm² et en adoptant pour K la valeur minimum de 23,9 déduite du tableau 8, nous trouvons pour l'acier, pour lequel $E = 21.10^3$ et $\mu = 0,3$:

$$\frac{h}{t} = 208. \dots \dots \dots (9)$$

Par suite, pour éliminer les risques de flambage au milieu des poutres, le rapport entre la hauteur et l'épaisseur de l'âme ne doit pas dépasser la valeur indiquée en (9). Il n'est pas nécessaire, en ce cas, de prévoir un facteur de sécurité supplémentaire ; on obtient en effet une marge de sécurité supplémentaire en fixant les bords de l'âme sur les ailes.

Lorsque l'on a décidé de la valeur à adopter pour l'épaisseur de l'âme, l'écartement des éléments de renforcement doit être déterminé de manière à permettre à l'âme de transmettre les efforts tranchants sans flambage. Pour ce faire, on peut utiliser les résultats du chapitre 10. Ces résultats peuvent être mis en évidence ainsi qu'il est indiqué sur la figure (9). En partant de l'équation (7) et du tableau 6, pour chaque valeur de l'effort tranchant critique, on trace une courbe admettant pour ordonnées les rapports $\frac{h}{d}$ de la hauteur de la poutre à l'écartement des éléments de renforcement et admettant pour abscisses

les rapports correspondants $\frac{d}{t}$ de l'écartement des éléments de renforcement à l'épaisseur de l'âme. En utilisant ces courbes, on peut obtenir la distance nécessaire d entre les éléments de renforcement, si l'on a fixé la valeur critique de l'effort tranchant.

Considérons la courbe correspondant à l'effort critique :

$$\sigma_{cr} = 20000 \text{ lb./sq. in.} = 14 \text{ kg par mm}^2$$

on voit que pour les valeurs élevées du rapport $\frac{h}{d}$, c'est-à-dire lorsque l'écartement des éléments de renforcement est faible par comparaison avec la hauteur de la poutre, le rapport $\frac{d}{t}$ approche de 90. Lorsque le rapport $\frac{h}{d}$ est faible, h prend la place de d dans la discussion qui précède et le rapport $\frac{h}{t}$ approche de la même valeur numérique de 90. On peut en déduire la conclusion pratique suivante : des efforts de cisaillement de 14 kg par mm² peuvent être considérés comme limites pratiques des efforts de cisaillement dans le cas de l'acier de construction ordinaire. Par suite, si $\frac{h}{t}$ n'est pas supérieur à 90, la résistance de l'âme au flambage n'est pas inférieure à la résistance au cisaillement et les éléments de renforcement ne sont nécessaires qu'aux endroits où se trouvent appliquées des charges concentrées.

En choisissant l'effort critique sur la figure 9, il y a lieu de tenir compte d'un certain facteur de sécurité, parce que, dans ce cas :

1. l'immobilisation des bords de l'âme aux ailes n'influe pas considérablement sur la valeur critique de l'effort tranchant pour $\frac{h}{d} > 2$;

2. le flambage modifie les conditions de travail de l'âme (voir chapitre 9) ; il en résulte des efforts supplémentaires de traction dans cette âme et la surcharge inopportune de certains rivets. Il serait bon d'adopter, comme efforts « de sécurité » une fraction de 0,6 des efforts critiques¹. Les efforts correspondants sont indiqués entre parenthèses dans la figure 9.

Si maintenant on applique les courbes de la figure 9 à la détermination des écartements des éléments de renforcement pour des poutres ayant des hauteurs de 1,80 et de 3 mètres, dans le cas de $h = 1,80$ et d'après l'équation (9), on trouve que l'épaisseur t doit être égale à 9,5 mm. Si l'on admet un taux de travail de 9000 lb./sq. in., soit 6,3 kg. par mm², on trouve alors, sur la figure 9 :

$$\frac{d}{t} = 112 \quad \text{et} \quad d = 42'' = 1,07 \text{ mètres.}$$

Si l'on prend un taux de travail de 6000 lb./sq. in., soit 4,2 kg par mm², on trouve de la même manière :

$$\frac{d}{t} = 144 \quad \text{et} \quad d = 45'' = 1,37 \text{ mètres.}$$

1. Ce qui donnerait le même coeff. de sécurité qu'en travaillant au cisaillement à 12 pour une limite d'élast. de 20 kg./mm².

Si l'on applique à ce même exemple les prescriptions prévues dans les spécifications américaines (chapitre 9), on trouve :

$$t = \frac{1}{20} \sqrt{h} = 0,424'' = \text{env. } 7/16'' = 11,1 \text{ mm.}$$

La distance entre les éléments de renforcement, pour le taux de travail de 9000 lb./sq. in., soit 6,3 kg. par mm², est :

$$\frac{d}{t} = 75 \quad \text{et} \quad d = 33'' = 0,84 \text{ mètre.}$$

Pour le taux de travail de 6000 lb./sq. in., soit 4,2 kg. par mm², on a

$$\frac{d}{t} = 150 \quad \text{et} \quad d = 66'' = 1,68 \text{ mètre.}$$

La méthode qui a été proposée pour établir les proportions des poutres composées donne dans ce cas une épaisseur d'âme plus faible. Le renforcement est également un peu plus léger pour le taux de travail de 9000 lb./sq. in. Pour 6000 lb./sq. in., le renforcement proposé est un peu plus fort que celui que l'on obtient en partant des spécifications américaines.

Dans le cas de $h = 3$ mètres, on trouve, à partir de l'équation (9), $t = 0,575''$, soit un peu plus de $9/16$ et il faudra prendre $5/8''$, soit 15,6 mm. Pour la même hauteur, les prescriptions américaines donnent $t = 0,548''$ et il faudra prendre $9/16''$ soit 14,3 mm. En ce qui concerne l'écartement des éléments de renforcement, pour $\tau = 9000$ lb./sq. in. soit 6,3 kg. par mm², on trouve, d'après la figure 9, $d = 112 t$ soit $d = 70'' = 1,78$ mètre ; pour $\tau = 6000$ lb./sq. in., soit 4,2 kg. par mm², on trouve $d = 145 t = 90'' = 2,28$ mètres.

Les prescriptions américaines donnent respectivement 42'' et 72'', soit 1,067 et 1,83 mètres.

Pour le cas considéré, la méthode proposée pour établir les proportions des poutres composées donne donc une épaisseur légèrement plus forte, mais le renforcement est plus léger, pour les deux conditions de travail. L'écartement déterminé ci-dessus entre les éléments de renforcement pour l'effort tranchant maximum peut être augmenté lorsque leur éloignement des appuis augmente. Pour cette modification du renforcement, on peut également employer la figure 9, quoique les efforts dans l'âme dans les sections intermédiaires ne consistent pas en un simple cisaillement ; pour résoudre le problème d'une manière plus satisfaisante, il faut faire intervenir la stabilité de l'âme pour des efforts de flexion et de cisaillement combinés.

Pour établir les proportions du renforcement, on peut employer le tableau 10. Pour des considérations pratiques, on prendra pour les sections droites, et pour les faibles hauteurs de poutres, un moment d'inertie J plus important que celui que donne le tableau.

Pour améliorer le calcul des poutres composées, en ce qui concerne leur stabilité élastique, il serait désirable :

1. d'étudier d'une manière plus approfondie la théorie du flambage des plaques rectangulaires dont les bords font l'objet d'une fixation ;
2. d'étudier le flambage des plaques rectangulaires sous l'action d'efforts combinés de flexion et de cisaillement ;

3. de faire des recherches plus approfondies sur la rigidité à la flexion qu'il est nécessaire de demander aux éléments de renforcement.

Des essais sur des modèles de poutres de grandes dimensions donneront l'opportunité de contrôler la théorie mise en avant et d'élucider des points importants, tels que la distribution des efforts dans l'âme et dans les rivets lorsque le flambage commence.

Summary.

In dimensioning the webs of plate girders not only must the shearing stress at the supports and the danger from rust be considered, but also the elastic equilibrium of the webs.

If only pure bending stresses come into consideration, vertical stiffening angles will have no essential influence on the buckling of the stiffened web and it is more preferable to choose the thickness of the stiffened web in such a way that buckling is quite impossible under the working load. For instance, in the middle of the beam the proportion should be

$$\frac{h = \text{height of the web}}{t = \text{thickness of the web}} < 208.$$

When the thickness of the stiffened web has been determined, the distance of its stiffening angles are to be dimensioned so that the stiffened web may also be able to withstand shearing stresses without bulging. With $h/t < 90$, there is the same security against bulging and reaching the elastic limit in consequence of shearing stresses, so that stiffenings are only necessary at those places where single loads act.

In selecting the critical stresses, the factor of safety 0.6 must be introduced, since the holding of the edges of the stiffened web in the flange angle will have little influence on the critical shearing stress, as soon as the height of the stiffened web is greater than twice the distance between the stiffening angles, and since at the commencement of bulging additional tensile stresses in the plate and overstraining of individual rivets are caused.

For a stiffened web 6ft. high, the thickness is $3/8$ in. With a stress of 9,000 lbs per sq. in. the distance between the stiffening angles is 42 in. with a stress of 6000 lbs. per sq. in. it is 54 in.

In order to throw further light on the question of stability of the stiffened web, it would be desirable to carry out further tests to determine the resistance to buckling of rectangular plates with supported edges, especially when submitted simultaneously to bending and shearing stresses, and also for detailed determination of the required resistance to bending of the stiffening angles.

Résumé.

Pour la détermination des dimensions des tôles de l'âme des poutres composées, il faut tenir compte non seulement des efforts tranchants aux appuis,

ainsi que des risques de corrosion, mais également des conditions élastiques d'équilibre des tôles minces.

Même s'il s'agit uniquement d'un simple effort de flexion, des cornières verticales de renforcement ne suffisent pas pour éviter le flambage de l'âme en tôle ; il est préférable de choisir des épaisseurs de tôle telles qu'elles éliminent tout risque de flambage sous la charge correspondant au service normal.

En désignant par h la hauteur de l'âme et par t son épaisseur, on devra avoir dans le milieu de la poutre la relation :

$$\frac{b = \text{hauteur de l'âme}}{t = \text{épaisseur de l'âme}} < 208.$$

Si l'épaisseur des tôles d'âme est déterminée à l'avance, il y aura lieu d'adopter entre les cornières de renforcement un écartement tel que l'âme puisse supporter également, sans se voiler, les efforts tranchants.

Si le rapport $\frac{h}{t}$ est inférieur à 90, on réalise la même marge de sécurité d'une part, par rapport au taux de charge qui correspond au flambage, d'autre part, par rapport à la limite d'écoulement, de sorte que la présence des éléments de renforcement n'est nécessaire qu'aux endroits qui correspondent aux points d'application des charges isolées.

En ce qui concerne le choix des efforts critiques, il faut adopter le facteur de sécurité de 0,6 ; car l'encastrement des bords des tôles sur les membrures d'ailerons n'a que peu d'influence sur la valeur critique des efforts tranchants dès que la hauteur de l'âme est supérieure au double de l'écartement entre les cornières de renforcement et parce que, lorsque le flambage commence à se manifester dans la tôle de l'âme, les rivets se trouvent soumis à des efforts additionnels de traction et à des surcharges.

Pour une hauteur d'âme de 1,80 mètre, on arrive à une épaisseur de tôle de 9,5 mm. Pour un taux de travail de 6,3 kg. par mm², on obtient un écartement de 1,1 m. pour les cornières de renforcement. Pour un taux de travail de 4,2 kg. par mm², on arrive à 1,65 m.

Pour élucider plus complètement la question de la stabilité des âmes en tôle des poutres composées, il serait désirable de faire porter les investigations sur la détermination de la sécurité au flambage des plaques rectangulaires dont les bords sont encastres, particulièrement lorsqu'il s'agit simultanément d'efforts tranchants et d'efforts de flexion, et d'étudier d'une manière plus poussée la rigidité de flexion que doivent posséder les cornières de renforcement.

Zusammenfassung.

Bei der Bemessung von Stehblechen ist nicht nur die Schubbeanspruchung an den Auflagern zu berücksichtigen sowie die Rostgefahr, sondern auch das elastische Gleichgewicht der Blechplatten.

Wenn es sich nur um reine Biegebungsbeanspruchung handelt, vermögen vertikale Aussteifungswinkel das Knicken der Stehbleche nicht wesentlich zu beeinflussen, und es ist zweckmässiger, die Stehblechstärke so zu wählen, dass

Knicken unter der Betriebslast ausgeschlossen ist. So soll z. B. in der Balkenmitte das Verhältnis :

$$\frac{h = \text{Stehblechhöhe}}{t = \text{Stehblechstärke}} < 208 \text{ sein.}$$

Wenn die Stehblechstärke festgelegt worden ist, ist die Entfernung der Stehblechversteifungswinkel so zu bestimmen, dass das Stehblech ohne Ausbeulung auch die Schubspannungen zu übertragen vermag. Wenn das Verhältnis $h/t < 90$ ist, so ergibt sich gleiche Sicherheit gegen Ausbeulen und Erreichen der Fließgrenze infolge Schubbeanspruchung, sodass Stehblechversteifungen nur an denjenigen Stellen nötig sind, wo Einzellasten angreifen.

Bei der Wahl der kritischen Spannungen muss der Sicherheitsfaktor 0,6 eingeführt werden, da die Einspannung der Stehblechränder in den Gurtwinkeln die kritische Schubspannung wenig beeinflusst, sobald die Stehblechhöhe grösser als die doppelte Entfernung der Aussteifungswinkel ist, und weil bei beginnendem Ausbeulen im Stehblech zusätzliche Zugspannungen und Ueberbeanspruchungen einzelner Niete entstehen.

Für eine Stehblechhöhe von 1,8 m ergibt sich eine Stehblechstärke von 10 mm. Bei einer vorhandenen Spannung von 630 kg/cm^2 ergibt sich ein Abstand der Versteifungswinkel von 1,1 m, bei einer Spannung von 420 kg/cm^2 ein solcher von 1,65 m.

Zwecks weiterer Abklärung der Frage der Stabilität der Stehbleche von Blechträgern wären Versuche wünschenswert zur Feststellung der Knicksicherheit rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern, besonders bei gleichzeitiger Biegungs- und Schubbeanspruchung, sowie zur einlässlichen Feststellung der erforderlichen Biegesteifigkeit der Versteifungswinkel.