

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 1 (1932)

Artikel: Diskussion

Autor: Ros, M.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-494>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

on a :

$$w_M = 0$$

tant que ψ reste inférieur à 1. Pour $\psi = 1$, on obtient, suivant la première approximation du calcul, un état d'équilibre indifférent. Dans ce cas, w_M ne peut nullement constituer une mesure de la déformation. La figure 3 représente la déformation au quart de la barre w_V , en fait pour

$$w_2 = - 0,99 w_1$$

et pour le cas limite :

$$w_2 = - w_1$$

Cette déformation tend vers la valeur limite $w_V = 0,707 w_1$ lorsque la charge augmente, $\psi \rightarrow 1$.

Pour la charge d'Euler elle-même, on arrive à un point de bifurcation des conditions d'équilibre élastique. Il existe par suite une limite de stabilité, par opposition au cas de la flexion par suite de contraintes de compression suivant des excentricités différentes.

La figure 2 se rapporte à la première approximation, suivant laquelle on néglige l'accentuation de la courbe de flexion par rapport à 1^4 . Un calcul plus précis n'accuse aucune modification sensible, si ce n'est au voisinage du point de bifurcation, ainsi qu'il est représenté d'une manière schématique sur la figure 3. Ces figures sont établies en supposant une limite de proportionnalité suffisamment élevée. Lorsque l'élasticité est limitée, on obtient des relations analogues sous une forme moins simple. Voir à ce sujet les calculs de L. Karner² et de Chwalla³ pour le cas particulier correspondant à $w_2 = w_1$.

Dr. Ing. h. c. M. ROŠ,

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule und Direktor
der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt, Zürich.

Zu den Diskussionsbeiträgen der Herren Professoren M. Broszko (Warschau), F. Hartmann (Wien), E. Chwalla (Brno), L. Baes (Bruxelles) und A. Mesnager (Paris) beehre ich mich, auch namens der wissenschaftlichen Mitarbeiter der E.M.P.A., Dr. Ing. J. Brunner und Dipl. Ing. A. Eichinger, mich wie folgt zu äussern.

Zu Prof. M. Broszko. Alle bisherigen Veröffentlichungen des Herrn Broszko die « Allgemeine Lösung des Knickproblems » betreffend, sowie die Behauptungen in den Diskussionsbeiträgen der Kongresse Wien (1928) und Paris (1932) beruhen auf mathematisch unrichtigen Ableitungen und physikalisch nicht zutreffenden Annahmen.

Im Schlusswort des Wiener Berichtes (Verlag Julius Springer Wien, 1929),

1. K. VON SANDEN et F. TÖLKE, Über Stabilitätsprobleme dünner kreiszylindrischer Schalen. — Ingenieur-Archiv 3, 1932.

2. L. KARNER, Premier Congrès, Rapport Préliminaire, 1932.

3. E. CHWALLA, Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl Wien. Akad. Vienne, 1928.

Seiten 338-343, ist die Unrichtigkeit der mathematischen Ableitung Broszkos, welcher damals die genau gleichen physikalischen Ansätze zugrunde lagen, wie der Knicktheorie von Engesser-Jasinski-Kármán, nachgewiesen. Im Mai 1931 überreichten wir Herrn Mesnager, Membre de l'Institut de France, die mathematisch genaue Integration der Broszko'schen Grundgleichung (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1928, vol. 186, p. 1041), auf welche er seine Theorie stützt, und erbrachten den Beweis, dass Broszkos Lösung infolge eines mathematischen Fehlers unrichtig ist und dass die richtige Lösung mit derjenigen von Engesser-Jasinski-Kármán genau übereinstimmt. Die mathematische Unrichtigkeit der von Broszko gegebenen Auflösung der Grundgleichung wurde auch von Dr. J. Fritsche, Prag, nachgewiesen. — Siehe « Der Bauingenieur » 1930, Heft 17, Seiten 298-300 « Zur Berechnung der Knicklast eines geraden Stabes ausserhalb des Gültigkeitsbereiches der Euler-Formel ». Ebenso wurde die Theorie Broszko's von Prof. Dr. E. Chwalla und Prof. Ing. Dr. P. Fillunger abgelehnt (Bericht über die II. Inter. Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1928, S. 613 & 330).

Die ursprünglichen physikalischen Annahmen von Broszko in der Pariser Veröffentlichung sind mit denjenigen von Engesser-Jasinski-Kármán identisch. Aber bereits im Diskussionsbeitrage zum Wiener Kongress (1929) bemängelt Broszko den physikalischen Ansatz der Engesser-Jasinski-Kármán'schen Knickungstheorie, indem er die Gültigkeit des E-Gesetzes für die entlastete Zone der dem Knickzustande entsprechenden Spannungsverteilung des virtuell ausgebogenen Stabes als fehlerhaft bezeichnete und später am Pariser Kongress (1932) auch die Betrachtungen über die Abhängigkeit der Grösse der Verformung von der Geschwindigkeit der Verformung anstellt. Broszko stützt sich dabei auf die an sich richtigen Ewingschen Versuchsergebnisse, zieht jedoch für die Beweisführung der Richtigkeit seiner Knicktheorie Grenzwerte der Verformungsgeschwindigkeiten heran, welche bei der statischen Knickstabilität, von welcher allein die Rede ist und welche die Konstruktionspraxis in erster Linie interessiert, weder für die Belastungs- noch Entlastungszonen in Frage kommen. Zur ersten Bemängelung ist zu sagen, dass das Verformungs-Spannungs-Gesetz für wirklich eintretende Entlastungen, welche sich mit den in Frage stehenden Verformungsgeschwindigkeiten vollziehen, in Wirklichkeit dem E-Gesetz folgt. Das Material behält seinen elastischen Kern, wie dies Versuche einwandfrei beweisen.

Die Einflüsse der Dauer und Geschwindigkeit von Verformungen sind nachträglich hineingelegte Interpretationen von Broszko, die auch in seinen mathematischen Ansätzen in keiner Weise enthalten sind.

Die Ableitung der Broszko'schen Knicklast P_k für zentrisches Knicken

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k) \tilde{E}_k \cdot J_k}{l_k^2}$$

beruht auf einer mathematisch falschen Ableitung und physikalisch unzutreffenden Annahme. Diese Theorie liefert für Eisen zufällig zahlenmässig brauchbare Werte; für andere Baustoffe, z. B. Leichtmetalle steht sie auch mit den Versuchsergebnissen in Widerspruch. — Abb. 1.

*
**

Prof. M. Broszko zieht zur Beweisführung der Richtigkeit seiner Knicktheorie die Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle (Bericht des Ausschusses für Versuche im Stahlbau des D.St.V., Verlag Julius Springer, Berlin 1930) heran, über welche Prof. W. Rein Bericht erstattet. Wir haben uns bereits in der Wiener Diskussion — Seite 345 — zu den damaligen Ausführungen von Prof. Memmler geäußert und denselben zugestimmt. Die Berliner Versuchsergebnisse stimmen, bei sinngemässer Auslegung, mit den Zürcher theoretischen Ableitungen und Ergebnissen gut überein.

Nicht ganz einverstanden sind wir mit den theoretischen Ableitungen von Prof. Rein. Die Zimmermann'sche Fehlerhebel-Theorie für Stäbe schwacher anfänglicher Krümmung ist für den elastischen Bereich einwandfrei, für den plastischen Bereich bietet die genaue Lösung Schwierigkeiten, welche nur durch streng nicht zutreffende Annahmen überwunden werden können.

Die Berichtigung, welche Rein der Knicktheorie angedeihen lässt und schliesslich in Form eines Zusatzgliedes ΔT zu dem Knickmodul T nach Engesser-Jasinski-Kármán zusammenfasst :

$$\Delta T = \sum_1^{n-1} \frac{\rho_n}{\rho_r} (T_r - T_{r+1})$$

bei der « genaueren Entwicklung des Spannungs- und Verformungsbildes beim Knickvorgang » — Abb. 8 seines Berichtes — beruht auf unzutreffender Annahme der Entlastungszonen an der konvexen Seite anfänglich schwach gekrümmter, mit Zimmermann'schen Fehlerhebeln behafteter Stäbe, was bei nicht zu krummen Stäben bis zur Knicklast nicht erfolgt. Für den Grenzfall z. B. der Rein'schen Betrachtung, für den genau geraden, zentrisch belasteten Stab treten bis zum Erreichen der Knicklast offensichtlich keine solchen Rein'schen Spannungsentwicklungen auf, sondern die Spannungen lagern sich für die verschiedenen Spannungsstufen über den Querschnitt gleichmässig und linear. Wird dies berücksichtigt, so ergibt sich, dass auch im Sinne Zimmermanns die Knicklast nach Engesser-Jasinski-Kármán einem Maximum entspricht, somit ΔT kleiner als Null oder im Grenzfall = 0 sein muss, im Gegensatz zu Rein, welcher im unelastischen Bereich ΔT grösser als Null findet.

Die Knicktheorie nach Engesser-Jasinski-Kármán setzt ideale Verhältnisse

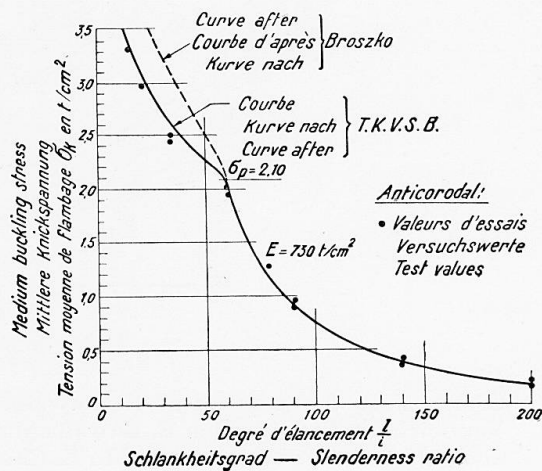


Fig. 1. — Essais avec des barres d'anticorodal. Valeurs d'essais. Courbes de flambage d'après Broszko et T. K. V. S. B.

Versuche mit Stäben aus Anticorodal. Versuchswerte, Knickspannungskurven nach Broszko und nach T. K. V. S. B. Tests with bars of Anticorodal. Test results. Buckling stress curves according to Broszko and T.K.V.S.B.

voraus. Zweck der Versuche ist, die Richtigkeit dieser idealen Voraussetzungen zu überprüfen.

Die Nichtbeachtung der angeführten Umstände führte zur nicht zutreffenden

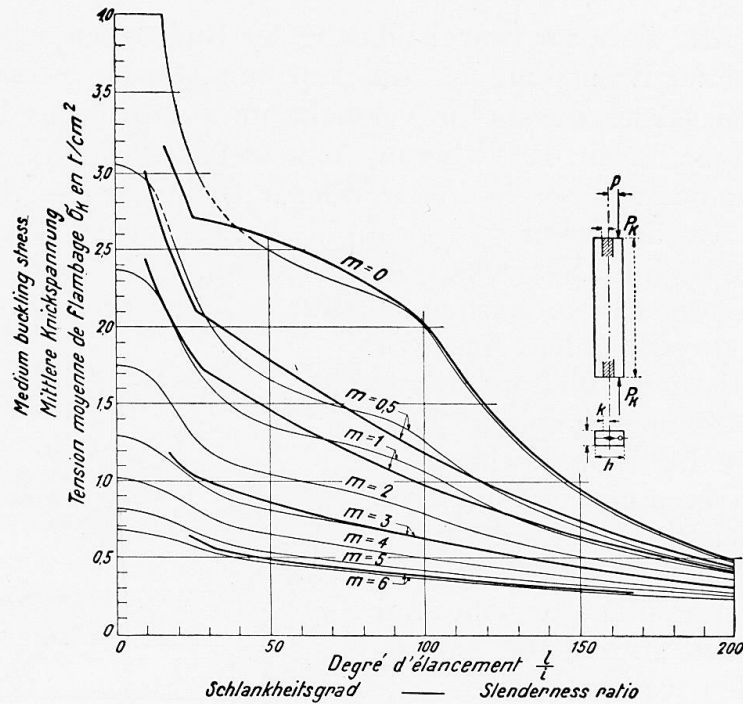


Fig. 2.

Comparaison des courbes de E. Chwalla (lignes grosse) et de Roš-Brunner (lignes fines)
 Vergleich der Kurven nach E. Chwalla (dicke Linien) und nach Roš-Brunner (dünne Linien)
 Comparison of curves according to E. Chwalla (thick lines) and Roš-Brunner (thin lines).

Verallgemeinerung der Korrektur des Knickmoduls T für zentrisches Knicken — Abb. 42 des Rein'schen Berichtes.

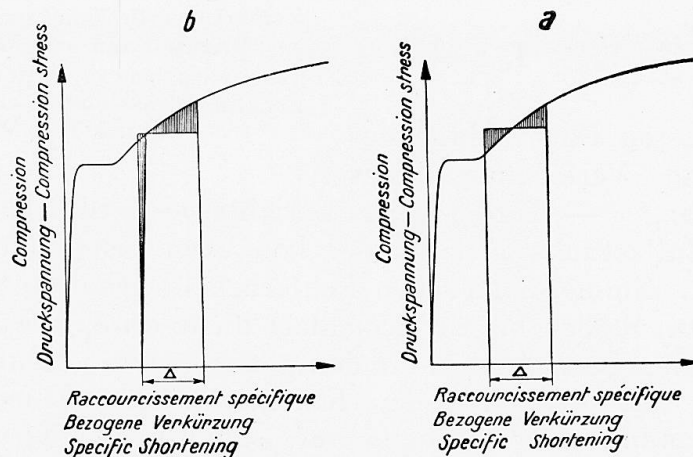


Fig. 3. — Δ = Différence des raccourcissements des fibres extrêmes.
 Δ = Unterschied der Verkürzungen der Randfasern.
 Δ = Difference in shortening of the outer fibres.

Zu Prof. Dr. F. Hartmann.

Dem von Herrn Prof. F. Hartmann bezogenen Standpunkte zu den Ausführungen von Prof. M. Broszko und Prof. W. Rein, das Knickproblem betreffend, stimmen wir zu, da sich seine grundsätzliche Stellungnahme mit

der von uns zuerst im Jahre 1922 schriftlich niedergelegten Auffassung in dem an die Technische Kommission des Verbandes Schweiz. Brückenbau- und Eisenhochbau-Fabriken unterbreiteten Berichte « Ueber das Problem der Knickung », sowie in den Ausführungen der späteren, an den Internationalen Kongressen in Wien (1928) und Paris (1932) unterbreiteten Berichte deckt.

Zu Prof. Dr. E. Chwalla.

Das für die Praxis wichtigste Ergebnis der sehr eingehenden theoretischen Untersuchungen von Chwalla, welche auf Grund des Zürcher Druck-Stauchungsdiagrammes für normalen Baustahl abgeleitet wurden, sind in der Abb. 2 graphisch zur Darstellung gebracht. Die von Chwalla abgeleiteten Knickspannungslinien für zentrisches und exzentrisches Knicken stimmen mit den von Roš-Brunner zugeordneten, theoretisch abgeleiteten und versuchstechnisch überprüften Kurven sehr gut überein. — Abb. 2 — Auch beim Näherungsverfahren nach Roš-Brunner ist diese Uebereinstimmung eine gute.

Chwalla legt seinen Ableitungen den jeweiligen Zweig des Druck-Stauchungs-Diagrammes, ohne Entlastungsbereich zugrunde — Fall a — Abb. 3, während wir für die Aufstellung unserer Knickspannungslinien für exzentrisches Knicken zuerst das Anwachsen der zentrisch wirkenden Knickkraft mit nachträglichem Hinzutritt der Exzentrizität (Biegemoment) voraussetzen, Fall b — Abb. 3 —.

Beide Annahmen sind nicht streng richtig. Ueber den sich daraus ergebenden Unterschied wurde anlässlich der Wiener Diskussion berichtet. Für Grundspannungen (Schwerpunktspannungen) bis zur Proportionalitätsgrenze sind die Knickspannungen für beide Fälle a und b einander genau gleich; für Grundspannungen zwischen der Proportionalitäts- und Fließgrenze sind die Unterschiede belanglos und erst beim Ueberschreiten des Fließbereiches wird dieser Unterschied merklich. Für geringere Exzentrizitäten ist dem Verfahren von Roš-Brunner (T.K.V.S.B.-Verfahren) der Vorzug einzuräumen. Im Sonderfall des zentrischen Knickens eines ursprünglich geraden Stabes ist das Verfahren Engesser-Jasinski-Kármán genau. Für grössere Exzentrizitäten dagegen ist die Annahme von Chwalla zutreffender. Zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt die Wirklichkeit.

Zu Prof. L. Baes.

Die Ausführungen von Prof. L. Baes betreffend den logischen Zusammenhang zwischen der Unstetigkeit der Engesser-Jasinski-Kármán'schen Knickspannungslinie und der Labilität des Druck-Stauchungsdiagrammes beim Erreichen der Fließgrenze sowie beim Durchschreiten des Fließbereiches bei Konstruktionsstählen, fanden unsere Zustimmung bereits durch das Schlusswort an der Wiener Diskussion — Seite 342 —.

Herr Prof. Mesnager lenkt die Aufmerksamkeit auf die theoretische Studie von R. Chambaud, Paris « Le flambement des pièces rectilignes à charge excentrée » Congrès international de Liège 1930. Die theoretischen Werte der Knicklasten von I-Trägern No 22 und 32 nach Chambaud für drei ver-

schiedene Schlankheitsgrade $\frac{l}{i} = 65, 120$ und 160 stimmen mit den Versuchswerten von Zürich sehr gut überein. Für den Bereich der Proportionalität $\sigma_p = 1,9 \text{ t/cm}^2$, für welchen die Betrachtungen von Chambaud gelten, ist diese Uebereinstimmung eine sehr gute. Die Abweichungen zwischen Theorie und Versuch bewegen sich zwischen 3% und 8% .

Durch die theoretischen Untersuchungen von Chambaud haben die theoretischen T.K.V.S.B. Kurven eine weitere Bestätigung ihrer technischen Richtigkeit erhalten.

Abschliessend seien die Grundlagen des T.K.V.S.B. — Verfahrens von Roß-Brunner zusammengefasst.

Die Voraussetzungen, welche den theoretischen Ableitungen zugrunde liegen, sind im Pariser Vorbericht ausdrücklich hervorgehoben — Seiten 57 und 58 —. Nicht berücksichtigt wurden der Grasshof'sche Effekt und der Einfluss

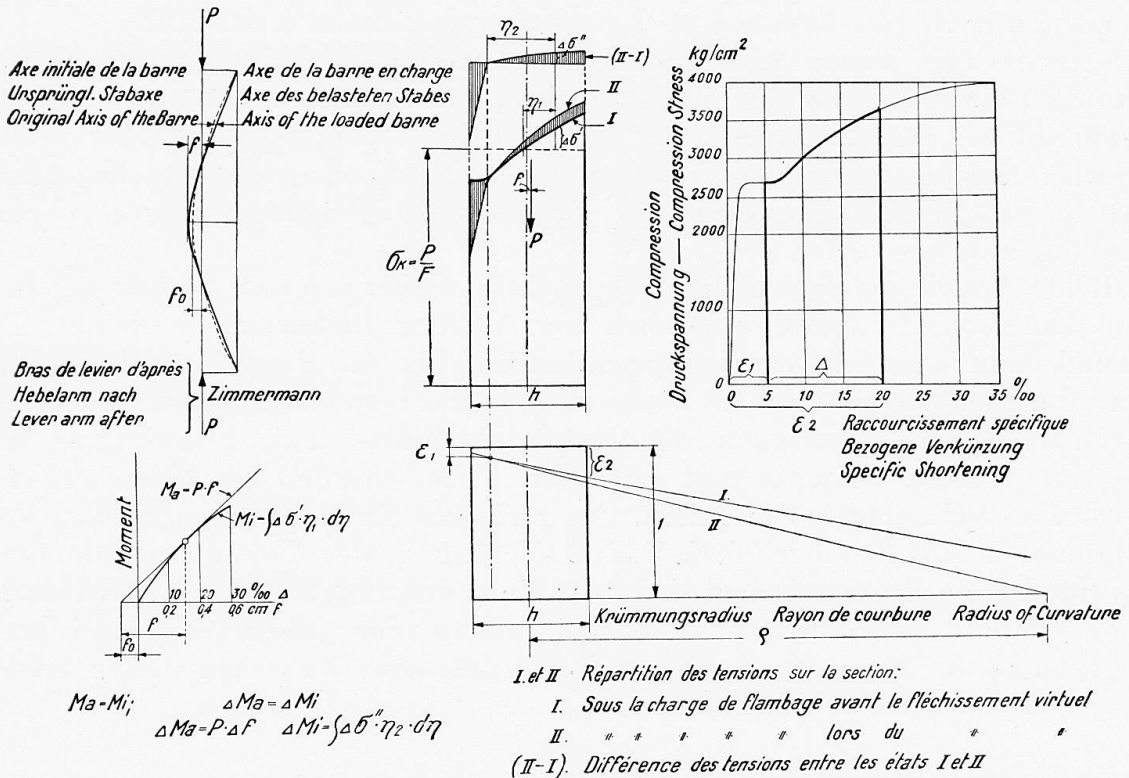


Fig. 4. — Equilibre entre les moments extérieurs et intérieurs. Labilité. Gleichgewicht zwischen den äussern und innern Momenten. Labilität. Equilibrium between external and internal moments. Instability.

der Querkräfte, in klarer Erkenntnis deren praktischer Belanglosigkeit auf die Endergebnisse für Stäbe der Konstruktionspraxis.

Die unter diesen Voraussetzungen abgeleiteten theoretischen Ergebnisse sind nicht als die mathematisch strenge, genaue Lösung des Knickproblems zu werten. Es kommt ihnen die Bedeutung eines für die Zwecke der Technik ausreichend genauen, in seinem Aufbau klaren Näherungsverfahrens zu.

Eine strengere Lösung des Knickproblems, in weitestem Sinne, wurde von uns bereits im ersten Berichte « Ueber das Problem der Knickung » der T.K.V.S.B. Kommission im Jahre 1926 unterbreitet, angewandt und in

den Kongressberichten von Zürich (1926) und Paris (1932) nochmals hervor-
gehoben. Die Integration der Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{T_k \cdot J}$$

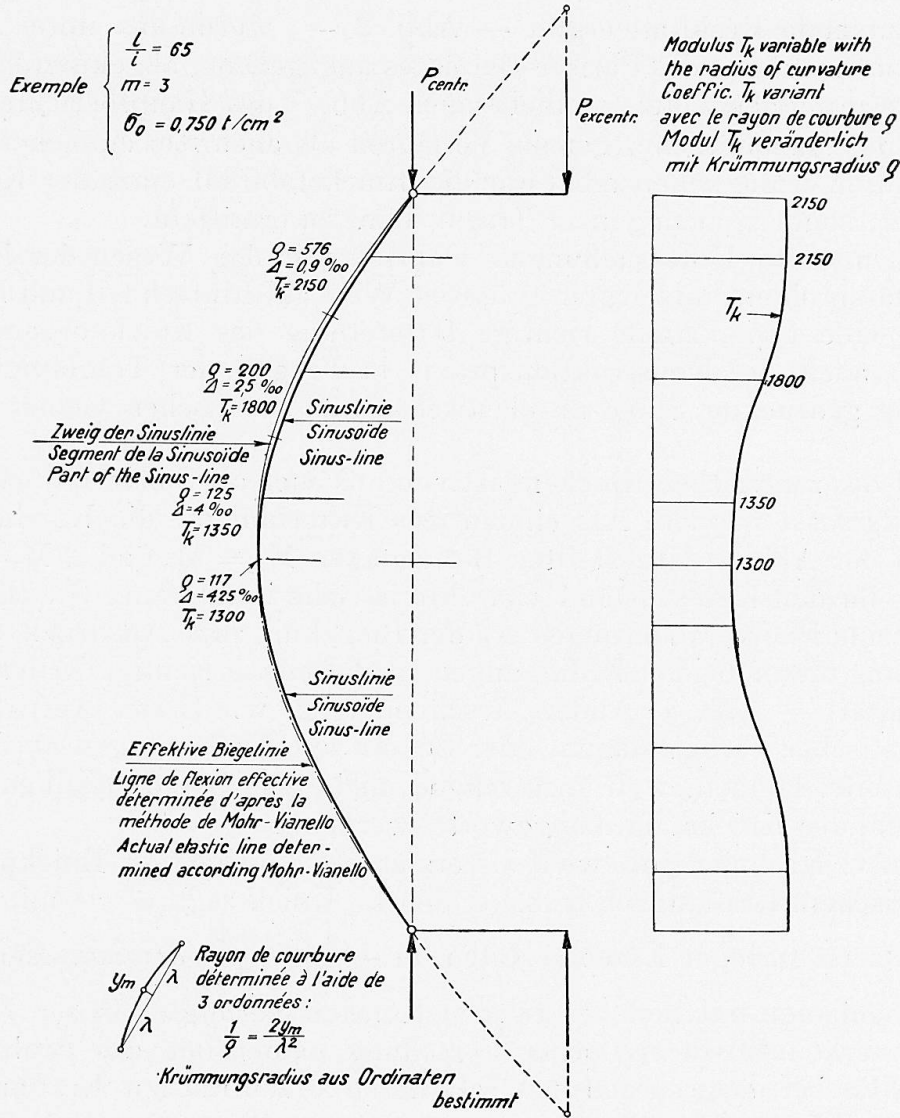


Fig. 5. — Comparaison des trois courbes : sinusöide, segment de la sinusöide et ligne de flexion effective déterminée d'après la méthode de Mohr-Vianello.
Vergleich der drei Kurven : Sinuslinie, Zweig der Sinuslinie und effektive Biegelinie, bestimmt nach dem Verfahren von Mohr-Vianello.
Comparison of the three curves : sine curve, part of sine curve and actual bending curve, determined by the method of Mohr-Vianello.

nach dem Verfahren von Mohr-Vianello, d. h. die Erfüllung der durch die Differentialgleichung ausgedrückten Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen, gibt die strenge Lösung des Knickproblems. Dieses genauere Verfahren ist nur auf dem Wege der graphischen Integration, wie sie auch Kármán für den Fall sehr geringer Exzentrizität (Exzentrizitätsmass

$m = \sim \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{170}$) durchführte, möglich. In klarer Erkenntnis der Umständ-

lichkeit, mit welcher das genaue Verfahren behaftet ist, wurden die vorerwähnten, die Lösung des Problems vereinfachenden, technisch zulässigen Annahmen gemacht, insbesondere die Biegelinie als Sinuslinie vorausgesetzt.

Auf Grund der nach diesem Näherungsverfahren (T. K. V. S. B. - Verfahren) gewonnenen Ergebnisse, welches mit dem genaueren Verfahren sehr gut übereinstimmende Resultate ergibt — Abb. 2 —, wurde das unter Punkt 5 der Schlussfolgerungen des Pariser-Berichtes angegebene, abgekürzte, vereinfachte Verfahren abgeleitet. — Siehe auch Abb. 7 des Hauptberichtes.

Sowohl das umständliche, genaue Verfahren als auch das einfachere Näherungsverfahren ermöglichen nicht nur die Knickstabilität einzelner Konstruktionsglieder, sondern auch ganzer Tragsysteme zu ermitteln.

Bei allen unseren Untersuchungen wahrten wir das Wesen des Knickens als Stabilitätsproblem und legten grössten Wert auf Einfachheit und Klarheit, sowie auf eine physikalisch richtige Darstellung des Knickvorganges, um namentlich auch der Konstruktionspraxis in Fragen der Tragfähigkeit und Verformung gedrückter Stäbe im elastischen und plastischen Gebiet nützlich zu dienen.

Der Fall des zentrischen Knickens ist von uns auch als Sonderfall des exzentrischen aufgefasst worden. Als eindeutiges Kriterium für die Knicklast gelten die auf der Abb. 4 dargestellten Beziehungen $M_a = M_i$ und $\Delta M_a = \Delta M_i$, welche das für den Knickzustand charakteristische indifferente Gleichgewicht für sehr kleine Pfeilveränderungen Δf der Biegelinie zum Ausdruck bringen. Die Erfüllung dieser beiden Bedingungen ist das einzig richtige Kriterium der Knickstabilität. — Abb. 4. Andere Erscheinungen, wie Erstes Auftreten bleibender plastischer Verformungen, oder Beginn von Entlastungen an der konvexen Stabseite, können, weil unzutreffend, nicht als Charakteristiken für den Grenzzustand der Knickstabilität gewertet werden.

Prof. Th. v. Kármán gab wohl als erster die Lösung des Knickproblems bei exzentrischem Kraftangriff, wobei er den die Knicktragkraft vermindern den Einfluss äusserst geringer Exzentrizitäten ($m \sim \frac{1}{17}$ bis $\frac{1}{170}$ der Stab-Kernweite) im Zusammenhange mit dem zentrischen Knicken verfolgte. Unser Ziel war aber, neben erkenntnistheoretischer Forschung namentlich das Problem der Knickstabilität bei ausgesprochenen, stärkeren exzentrischen Kraftangriffen, wie sie in der Konstruktionspraxis vorkommen, zu lösen, angeregt durch die in der Schweiz. Bauzeitung bereits im Jahre 1899 — Bd. XXXIII, Seite 159 — erfolgte Veröffentlichung über die « Berechnung eines auf exzentrischen Druck beanspruchten Stabes » von René Koechlin (Paris), sowie durch die Einführung der Koechlin'schen Graphikons in die Konstruktionspraxis durch Herrn Oberingenieur F. Ackermann, Kriens-Luzern.

Traduction.

En réponse aux observations de MM. M. Broszko (Varsovie), F. Hartmann (Vienne), E. Chwalla (Brno), L. Baes (Bruxelles) et A. Mesnager (Paris), concernant la discussion de notre mémoire, j'ai l'honneur de présenter, en mon nom personnel ainsi qu'au nom des collaborateurs scientifiques du L. F. E. M., MM. J. Brunner et A. Eichinger, les remarques suivantes :

Prof. M. Broszko.

Toutes les publications de M. Broszko parues jusqu'à ce jour sur la « Solution générale du problème du flambage », ainsi que ses affirmations lors des discussions des congrès de Vienne (1928) et Paris (1932), se basent sur des déductions mathématiques erronées et sur des suppositions fausses au point de vue physique.

Dans la conclusion de notre rapport pour le congrès de Vienne (Édition Julius Springer, Vienne 1929), aux pages 338-343, nous avons prouvé l'erreur des déductions mathématiques de M. Broszko, qui se basaient alors sur les mêmes principes physiques de la théorie d'Engesser-Jasinski-Kármán. En mai 1931, nous remettions à M. Mesnager, membre de l'Institut de France, l'intégration mathématique exacte de l'équation initiale de Broszko sur laquelle repose sa théorie (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences 1928 — vol. 186, page 1041 —), et nous apportions la preuve que la solution de Broszko, du fait d'une erreur mathématique, était fautive, tandis que la solution exacte correspondait parfaitement à celle d'Engesser-Jasinski-Kármán. L'inexactitude de la résolution que donne Broszko de l'équation initiale a été également prouvée par le Dr J. Fritsche de Prague — voir le « Bauingenieur » 1930, cahier 17, pages 298-300 —. « Le calcul de la charge de flambage d'une barre rectiligne dans le cas où la formule d'Euler n'est pas valable ». D'autre part la théorie de Broszko a été réfutée par les prof. E. Chwalla et P. Fillunger (Rapport du 2^e Congrès international des Ponts et Charpentiers, Vienne 1928, pages 613 et 630). Les principes physiques sur lesquels s'appuie Broszko dans sa publication de Paris sont identiques à ceux d'Engesser-Jasinski-Kármán, mais Broszko critique déjà dans sa contribution à la discussion du Congrès de Vienne (1929) les principes physiques de la théorie du flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán en déclarant que la loi du module d'élasticité n'est pas valable pour la répartition des tensions dans la zone allégée (au moment du flambage) de la barre subissant un fléchissement virtuel; il fait de même plus tard au Congrès de Paris (1932), en présentant ses considérations sur la dépendance entre la grandeur des déformations et leur vitesse. Broszko s'appuie pour cela sur les résultats expérimentaux, d'ailleurs exacts, d'Ewing, en prenant, pour prouver la justesse de sa théorie, les valeurs limites des vitesses de déformation qui n'entrent absolument pas en considération, ni pour les zones chargées, ni pour les zones allégées, dans la stabilité statique du flambage dont il est uniquement question ici et qui intéresse en tout premier lieu la pratique de la construction. En réponse à la première critique, on peut dire qu'en réalité la loi des déformations et tensions suit la loi de l'élasticité pour les allègements réels qui se produisent avec les vitesses de déformation en question. Le matériau conserve son noyau élastique, comme le prouvent les essais d'une façon indubitable.

L'influence de la durée et de la vitesse des déformations n'a été introduite que postérieurement par Broszko et n'est renfermée en aucune façon dans ses équations mathématiques fondamentales.

La formule de Broszko donnant la charge de flambage P_k pour la compression centrée :

$$P_k = \pi^2 \frac{(1 - \varepsilon_k) \tilde{E}_k J_k}{l_k^2}$$

repose sur des déductions mathématiques fausses et sur des principes physiques inexacts. Cette théorie donne, par hasard, pour le fer, des valeurs utilisables ; pour d'autres matériaux, par exemple les métaux légers, elle est en contradiction avec les résultats des essais (fig. 1).

Le prof. Broszko, pour prouver l'exactitude de sa théorie du flambage, cite les essais faits pour déterminer les tensions de flambage pour différents aciers de construction, essais sur la base desquels le prof. W. Rein a rédigé un mémoire (Rapport de la Commission des essais de constructions métalliques du D. St. V., édition J. Springer, Berlin, 1930). Nous avons déjà, dans le livre du Congrès de Vienne, page 343, exprimé notre opinion à propos des observations du prof. Memmler en nous déclarant d'accord avec elles. Les résultats des essais de Berlin s'accordent bien, lorsqu'on les interprète logiquement, avec les déductions théoriques et les essais de Zurich.

Nous ne sommes par contre pas tout à fait d'accord avec les déductions théoriques du prof. Rein. La théorie du bras de levier compensateur (théorie de Zimmermann) pour les barres à faible courbure initiale, est exacte dans le domaine élastique ; dans le domaine plastique, la solution exacte offre des difficultés qui ne peuvent être surmontées qu'à l'aide de suppositions qui ne sont pas rigoureusement justes.

La correction que Rein apporte à la théorie du flambage et qu'il exprime sous forme d'un terme additionnel ΔT pour le coefficient de flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán (correction appliquée lors du « développement exact des figures de tension-déformation dans le processus de flambage », page 8 de son rapport),

$$\Delta T = \sum_1^{n-1} \frac{\hat{\rho}^n}{r \hat{\rho}} (T_r - T_{r+1})$$

repose sur la supposition inexacte des zones allégées sur le côté convexe de barres à faible courbure initiale et pourvues de leviers-compensateurs selon Zimmermann ; pour les barres dont la courbure n'est pas trop prononcée, cette supposition ne répond pas à une réalité jusqu'au moment où on atteint la charge de flambage. Par exemple, pour le cas limite, c'est-à-dire pour la barre parfaitement rectiligne comprimée par des forces centrées, on ne constate, jusqu'au moment où la charge de flambage est atteinte, aucune répartition des tensions d'après Rein, mais pour tous les degrés de charge les tensions se répartissent uniformément et linéairement sur la section. En tenant compte de ces faits, il résulte, que même dans le sens où le comprend Zimmermann, la charge de flambage déterminée d'après Engesser-Jasinski-Kármán correspond à un maximum, c'est-à-dire que ΔT est plus petit que 0 ou, au plus, égal à 0, contrairement à ce qu'indique Rein, qui trouve que ΔT est plus grand que 0 dans le domaine inélastique.

La théorie du flambage d'Engesser-Jasinski-Kármán suppose l'existence de conditions idéales. Le but des essais doit être de contrôler l'exactitude de ces suppositions.

L'inobservation des conditions indiquées conduit à une généralisation non fondée de la correction du module de flambement T pour des charges centrées. Fig. 42 du mémoire de Rein.

Prof. F. Hartmann.

Nous approuvons le point de vue que prend le prof. F. Hartmann vis-à-vis des théories du prof. M. Broszko et du prof. W. Rein concernant le flambage, étant donné que le principe adopté par M. Hartmann correspond à la conception que nous avons déjà exprimée par écrit en 1922 dans notre rapport à la Commission Technique de l'Association Suisse des Ponts et des Charpentes Métalliques, « Contribution à l'Étude du Problème du Flambage », puis, plus tard, dans nos mémoires présentés aux Congrès internationaux de Vienne (1928) et de Paris (1932).

Prof. E. Chwalla.

Les résultats si importants des recherches théoriques très complètes de Chwalla, découlant du diagramme compression-déformation proposé par Zurich pour l'acier doux de construction, sont reportés graphiquement sur la fig. 2. Les tensions de flambage que Chwalla a trouvées pour le flambage sous charge centrée et excentrée, correspondent très bien aux courbes théoriques de Roš-Brunner, contrôlées expérimentalement (fig. 2). En utilisant la méthode d'approximation de Roš-Brunner, la concordance des résultats est aussi satisfaisante. Chwalla base ses calculs sur le segment correspondant du diagramme compression-déformation, sans tenir compte de l'allègement — cas a, fig. 3 — ; nous supposons par contre, lors de l'établissement des courbes des tensions de flambage sous charge excentrée, que l'accroissement de la force de flambage agissant centriquement intervient d'abord, tandis que l'apparition de l'excentricité (moment de flexion) n'a lieu que plus tard — cas b, fig. 3 —.

Aucune des deux suppositions n'est parfaitement exacte; nous avons examiné, lors de la discussion du Congrès de Vienne, les différences qui en résultent. Pour les tensions initiales (tensions au centre de gravité) jusqu'à la limite de proportionnalité, les tensions de flambage sont exactement les mêmes dans les deux cas a) et b); pour les tensions initiales comprises entre la limite de proportionnalité et la limite d'écoulement, les différences sont sans importance; ce n'est qu'après avoir dépassé la limite d'écoulement que les différences deviennent sensibles. Pour de faibles excentricités, on donnera la préférence à la méthode de Roš-Brunner (Méthode T. K. V. S. B.). Dans le cas particulier du flambage par charge centrée d'une barre rectiligne, la méthode d'Engesser-Jasinski-Kármán est exacte. Pour des excentricités plus grandes, la supposition de Chwalla est, par contre, plus juste. Entre ces deux cas limites se trouve la réalité.

Prof. L. Baes.

Les remarques du prof. L. Baes, concernant la corrélation logique entre la discontinuité de la courbe des tensions de flambage d'Engesser-Jasinski-Kár-

mán et l'instabilité du diagramme compression-déformation lorsqu'on atteint ou qu'on dépasse la limite d'écoulement des aciers de construction, ont déjà trouvé notre approbation dans les conclusions de la discussion de Vienne — page 342.

M. Mesnager a attiré notre attention sur l'étude théorique de R. Chambaud, Paris, « Le flambement des pièces rectilignes à charge excentrée », Congrès international de Liège, 1930. Les valeurs théoriques des charges de flambage des poutres I NP 22 et 32 selon Chambaud, pour les degrés d'élançement $\frac{l}{i} = 65, 120$ et 160, correspondent parfaitement aux valeurs expérimentales de Zurich. Jusqu'à la limite de proportionnalité $\sigma_p = 1,9 \text{ t/cm}^2$, limite pour laquelle les valeurs de Chambaud sont valables, la concordance est excellente. Les écarts constatés entre la théorie et l'expérience varient de 3 à 8 %.

Grâce aux recherches théoriques de Chambaud, les courbes théoriques de la T. K. V. S. B. obtiennent une fois de plus confirmation de leur exactitude technique.

Pour terminer, nous résumerons les principes de la méthode de Roš-Brunner (méthode T. K. V. S. B.).

Les suppositions sur lesquelles s'appuient les calculs théoriques sont formellement exprimées dans le rapport de Paris (pages 57 et 58). On n'a pas tenu compte de l'effet de Grashof et de l'influence des efforts tranchants, en parfaite connaissance de leur peu d'importance pratique sur les résultats finaux, pour les barres utilisées en construction.

Les résultats théoriques découlant de ces suppositions ne donnent pas la solution mathématique exacte du problème du flambage. Ils représentent une méthode d'approximation dont la conception nous semble parfaitement claire et dont l'exactitude suffit aux buts de la technique.

Nous avons déjà présenté dans le premier mémoire « Contribution à l'étude du problème du flambage » de la Commission Technique du V. S. B. en 1926, une solution plus rigoureuse du problème du flambage; cette solution a été communiquée en outre dans les mémoires des Congrès de Zurich (1926) et de Paris (1932). L'intégration de l'équation différentielle de la ligne de flexion :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{T_k \cdot J}$$

selon la méthode de Mohr-Vianello, c'est-à-dire le fait de satisfaire aux conditions d'équilibre et de déformations exprimées par cette équation différentielle, fournit une solution plus rigoureuse du problème du flambage. Cette solution n'est possible, comme l'a démontré Kármán pour le cas de très faibles excentricités ($m = \frac{1}{17} - \frac{1}{170}$) qu'au moyen d'une intégration graphique. Pleinement conscients des difficultés que présente l'application de la méthode exacte, nous avons introduit des suppositions admissibles au point de vue technique pour simplifier la résolution du problème, en considérant en particulier la ligne de flexion comme une sinusoïde. Étant donné que les résultats obtenus à l'aide de cette méthode d'approximation (méthode T. K. V. S. B.) corres-

pondent très bien aux résultats qu'on obtient avec la méthode exacte (fig. 2), nous avons introduit la méthode simplifiée et rapide commentée sous chiffre 5 des conclusions du mémoire de Paris (voir aussi fig. 7 de ce mémoire). Les deux méthodes, méthode exacte et méthode d'approximation, permettent de calculer non seulement la stabilité au flambage d'éléments de construction isolés mais aussi celle de systèmes entiers.

Au cours de toutes nos recherches, nous sommes partis du principe que le flambage est un problème de stabilité et nous avons recherché la simplicité, la clarté et une représentation fidèle, au point de vue physique, du processus du flambage ; nous espérons de cette façon avoir pu servir utilement le constructeur lorsqu'il a à s'occuper de la résistance et de la déformation de barres comprimées, sollicitées jusqu'à la limite d'élasticité ou au-dessus.

Nous avons considéré le flambage par charge centrée comme un cas particulier du flambage par charge excentrée. Les relations $M_a = M_i$ et $\Delta M_a = \Delta M_i$ (fig. 4) représentent un critérium indiscutable pour la charge de flambage ; ces relations expriment l'état d'équilibre indifférent, caractéristique de l'état de flambage, pour une augmentation très petite Δf des flèches de la ligne élastique. En satisfaisant à ces deux conditions, on a un critérium parfait, le seul exact de la stabilité au flambage (fig. 4). D'autres phénomènes tels que la première apparition des déformations plastiques permanentes ou le début de l'allégement sur le côté convexe de la barre, ne peuvent être considérés comme caractéristiques pour l'état limite de la stabilité au flambage.

Le prof. Th. v. Kármán a été le premier à présenter une solution du problème du flambage sous charge excentrée en étudiant la diminution de la force de flambage sous l'influence d'excentricités très faibles ($m \approx \frac{1}{17}$ jusqu'à $\frac{1}{170}$ de la grandeur du noyau). Notre but a été en outre la recherche théorique, la résolution du problème de la stabilité de flambage dans le cas où la force présente une excentricité plus grande et bien caractérisée, telle qu'on en rencontre en construction. Nous avons été attirés dans cette voie par le mémoire de René Koechlin (Paris), « Le calcul d'une barre sollicitée par des efforts de compression excentrée », paru dans la *Schweiz. Bauzeitung* dès l'année 1899 — Vol. XXXIII, page 159, et du fait de l'introduction du graphique de Koechlin dans la pratique par M. F. Ackermann, ingénieur en chef à Kriens-Lucerne.