

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: Genaue Berechnung des Rautenträgers

Autor: Krabbe, Fr.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-2733>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V10

Genaue Berechnung des Rautenträgers.

Calcul exact de la poutre en treillis rhomboïdal.

Girders with Rhombic Arrangement of Members.

Dr. Ing. Fr. Krabbe,

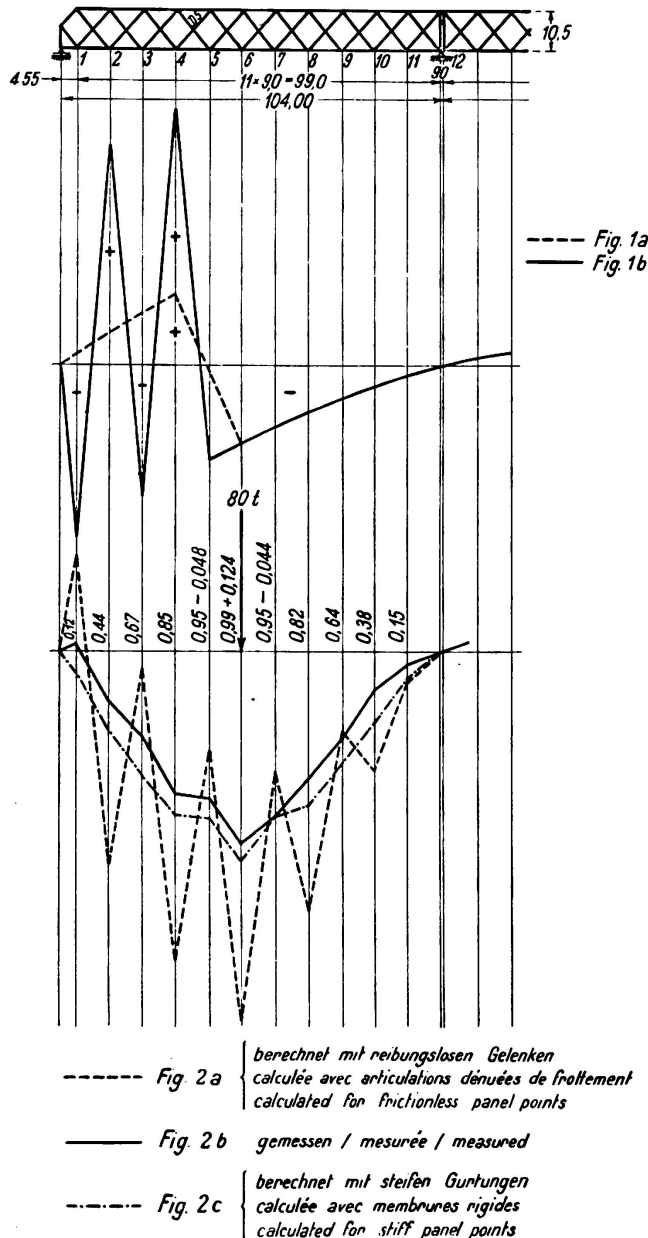
Reichsbahnoberrat, Reichsbahnzentralamt München.

1. Besondere Eigenschaften des Rautenträgers.

In früheren Jahrzehnten ist der Rautenträger, wohl seines guten Aussehens wegen, vielfach ausgeführt worden; eine größere Ausführung ist die Weichselbrücke bei Dirschau. Die Berechnung erfolgte meist nach dem von Prof. *Mehrtens*, Dresden angegebenen Verfahren, wonach dieses Tragwerk in zwei Teilsysteme zerlegt wurde, die einfache Streben-Fachwerke darstellten. Spätere, insbesondere von *Müller-Breslau* nach dem kinematischen Verfahren durchgeführte, genaue Untersuchungen ergaben jedoch, daß der Rautenträger, als Fachwerk mit reibungslosen Gelenken in den Knotenpunkten betrachtet, wesentlich anders gestaltete Einflußlinien, besonders für die Streben, zeigt, als sie sich nach dem vorhin angedeuteten Verfahren von *Mehrtens* ergeben. Die Einflußlinien zeigen zickzackförmige Gestalt, von Knoten zu Knoten zwischen positivem und negativem Bereich wechselnd. Fig 1a zeigt die Form einer solchen Einflußlinie nach dem Verfahren von *Mehrtens*, Fig. 1b, die sich nach dem kinematischen Verfahren ergebende Form, die zweifellos bei Annahme reibungsloser Gelenke in den Knoten nach der üblichen Fachwerktheorie die richtige ist. Eine zickzackförmige Gestalt zeigen auch die unter einer Einzellast nach dem kinematischen Verfahren ermittelten Biegelinien des Trägers (Fig. 2a). Diese zweifellos ungünstigen Formen der Einfluß- und Biegelinien führten dazu, daß man späterhin von der Verwendung des Rautenträgers als Hauptträger für Brücken absah.

Die Einflußlinie nach Fig. 1b gibt jedoch bei näherer Betrachtung zu erheblichen Einwänden Anlaß, wenn man sich daran erinnert, daß Einflußlinien Biegelinien sind, nämlich die Biegelinien des Lastgurts, die sich durch Verlängerung des betreffenden Stabes um „eins“ ergeben. Dieselben Bedenken erweckt natürlich die in Fig. 2a dargestellte Biegelinie. Es ist klar, daß bei derartigen Verformungen einer kontinuierlich durchgeführten Gurtung erhebliche Querkräfte auftreten müssen, die die Gestalt der Biegelinie wesentlich beeinflussen können. Diese sind aber bei der Berechnung nicht berücksichtigt. Diese Überlegungen führten dazu, daß man sich bei der Wahl des Hauptträger-Systems für die in den Jahren 1926/27 erneuerten Überbauten für die Eisen-

bahnbrücke über den Rhein bei Wesel¹ über die gegen Rautenträger erhobenen Bedenken hinwegsetzte und hier den seit längerer Zeit gemiedenen Rautenträger wieder zu Ehren brachte. Nach erfolgter Ausführung wurde die nach Fig. 2a errechnete Biegelinie durch Belastung des Trägers mit einer Einzellast von 80 t nachgeprüft; es ergab sich dabei durch genaue Messung die in Fig. 2b dargestellte wirkliche Biegelinie. Das ließ ohne weiteres den Schluß zu, daß auch die durch Verlängerung einer Strebe entstehende Biegelinie des Lastgurts in Wirklichkeit eine wesentlich andere Form als die der Fig. 1b hat. Das bestätigten später von Dr. *Christiani* mit großer Sorgfalt durchgeführte strenge Ermittlungen der Einflußlinien eines kleinen Rautenträgers (Fig. 3), der hierbei unter Berücksichtigung der Steifigkeit der Gurtungen und der Streben als 72fach statisch unbestimmtes System behandelt wurde.² Hieran anschließende Untersuchungen von *Christiani* ergaben ferner, daß der Einfluß der Steifigkeit der Gurtungen und Streben bei dem Rautenträger so erheblich ist, daß dieser auch ohne den sogenannten Stabilitätsstab, der notwendig ist, um das Fachwerk mit Gelenken in den Knoten stabil zu machen, in Wirklichkeit für die Stabilität des Tragwerkes im allgemeinen nicht erforderlich ist, und ferner, daß er überhaupt nur auf die ihn unmittelbar benachbarten Felder irgend welchen Einfluß auszuüben imstande ist.³



Die eingezeichneten Ordinaten gelten für Fig. 2c
 Les ordonnées ici portées se rapportent à la Fig. 2c
 The ordinates plotted are for Fig. 2c

Fig. 1—2.

im üblichen Sinne ist, daß vielmehr gerade die Besonderheiten seiner nach

¹ Die Bautechnik 1927, Heft 46/47.

² *Christiani*: Strenge Untersuchung an Rhomben-Fachwerken. Berlin 1929, Jul. Springer.

³ *Christiani*: Über die angebliche Labilität von Fachwerken. „Der Stahlbau“ 1931, Heft 2.

der Fachwerktheorie ermittelten Einfluß- und Biegelinien ihn aus der Reihe der eigentlichen Fachwerkträger ausschalten, daß er ein Tragwerk ist, welches nur unter Berücksichtigung der Steifigkeit in den Knotenpunkten der Wirklichkeit entsprechend berechnet werden kann. Dieser Umstand ließ es notwendig erscheinen, auch für die allerdings inzwischen bereits fertiggestellte

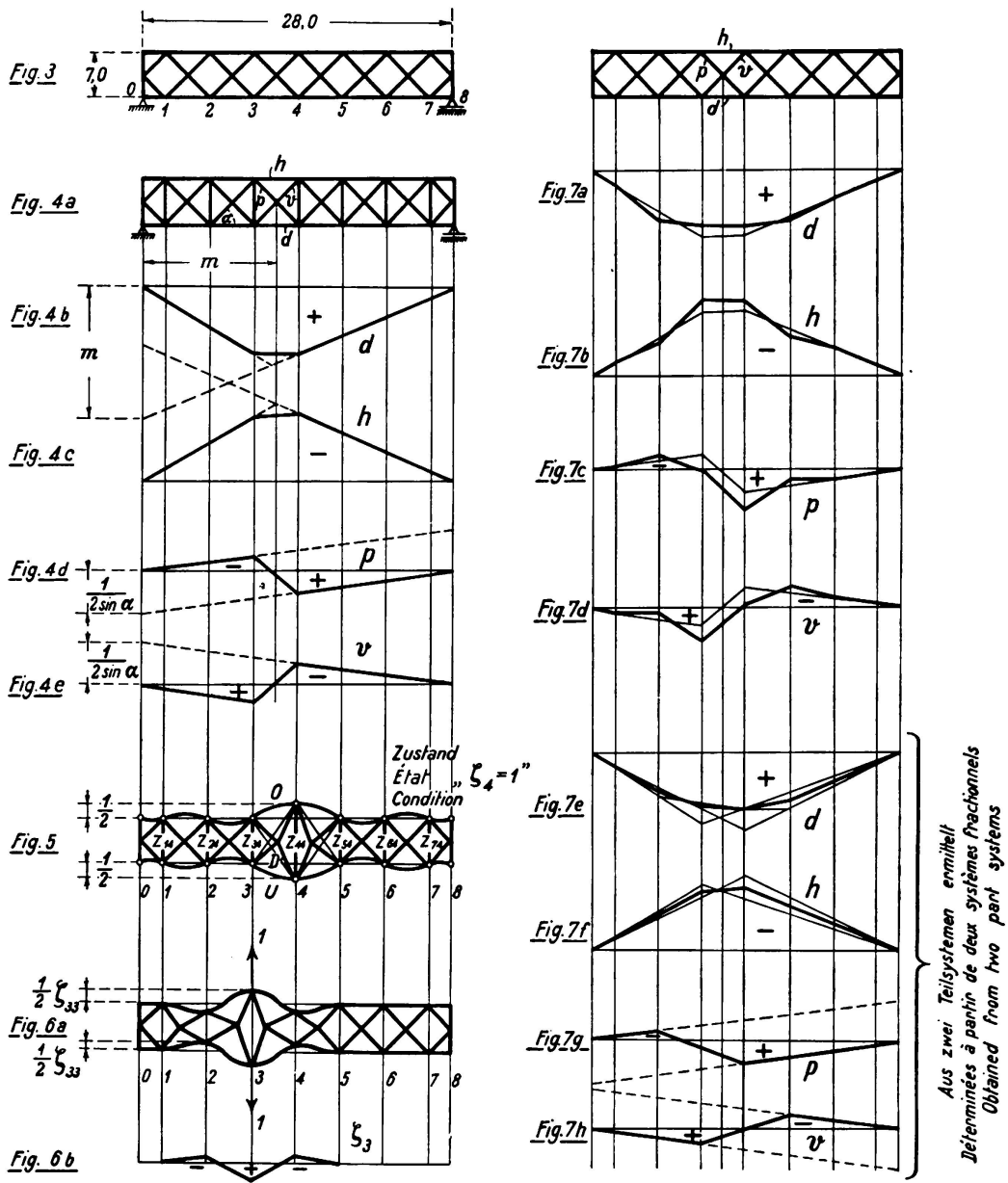


Fig. 3—7.

Rheinbrücke bei Wesel eine genaue Berechnung aufzustellen. Das war aber praktisch nur möglich, wenn es gelang, hierfür ein einfacheres Verfahren zu finden, als das von *Christiani* angewandte, denn das System der Rheinbrücke bei Wesel ist unter Berücksichtigung der Steifigkeit und der steifen Anschlüsse aller Stäbe 208fach statisch unbestimmt und selbst bei Vernachlässigung der Steifigkeit der Streben und ihrer Anschlüsse 57fach statisch unbestimmt. Daß

die Berechnung derartig hochgradig statisch unbestimmter Systeme nach den hierfür üblichem Verfahren praktisch undurchführbar ist, dürfte ohne weiteres klar sein.

II. Auffallender Einfluß der Gurtsteifigkeit des Rautenträgers.

In meinem Aufsatz „Das Wesen des Rautenträgers und seine einfache richtige Berechnung“,⁴ habe ich mich darauf beschränkt, den Einfluß der Gurtsteifigkeit des Rautenträgers zu berücksichtigen und die Streben als gelenkig an die kontinuierlich durchgeführten Gurtungen angeschlossen angenommen, wobei ich auch die steife Vernietung der Streben in ihren Kreuzungspunkten unberücksichtigt gelassen habe.

Ich beschränke mich hier darauf, die Ergebnisse dieser Untersuchungen kurz zusammenzufassen. Um Vergleiche ziehen zu können, wurde der von *Christiani* als 72fach statisch unbestimmtes System behandelte Rautenträger auch meinen Untersuchungen zu Grunde gelegt, die nach dem Formänderungsgrößen-Verfahren durchgeführt wurden. Das Hauptsystem wurde durch Einfügung eines starren, in den Knotenpunkten gelenkig angeschlossenen senkrechten Stabes in jede Raute gebildet (Fig. 4a). Seine Einflußlinien ergaben auf Grund einfacher, kinematischer Betrachtungen die Formen nach Fig. 4b—e. Dann wurden nacheinander durch Verlängerung je eines dieser starren Stäbe um eins die Zustände „ $\zeta_m = 1$ “ gebildet, die bestimmte Stabspannungen O, U und D in den beiden benachbarten Feldern zur Folge haben (Fig. 5) und außerdem sämtliche starren Stäbe mit Kräften Z belasten. Durch Nullsetzung der einzelnen Belastungen dieser starren Ersatzstäbe unter Belastungen nach Fig. 6a ergaben sich dann die Verformungen des Trägers unter dieser Belastung nach Entfernung der starren Stäbe, d. h. die Verlängerung dieser Stäbe ζ_m , die die Nullbelastung der einzelnen Ersatzstäbe bedingen. Dabei ergab die Durchrechnung einer Reihe von Beispielen, daß in allen praktisch vorkommenden Fällen eine Belastung des Trägers nach Fig. 6a in den Punkten m_o und m_u nur eine nennenswerte lotrechte Verschiebung der Punkte m_o und m_u selbst und ihrer beiden Nachbarpunkte $m + 1_o$ und $m + 1_u$ und $m - 1_o$ und $m - 1_u$ gegeneinander erzeugt, daß also alle Werte ζ mit Ausnahme von ζ_{m-1} , ζ_m und ζ_{m+1} von Null nur unmerklich verschieden sind. Daraus ergab sich die äußerst wichtige Möglichkeit, sämtliche Verformungen durch Belastung nach Art der Fig. 6d durch Gleichungs-Systeme mit nur drei Unbekannten feststellen zu können. Die Verformung des Lastgurtes, in diesem Falle des Untergurtes, unter der Belastung nach Fig. 6a ist selbstverständlich die Einflußlinie für die Spreizung ζ_m ; sie erstreckt sich nur von Knoten ζ_{m-2} bis ζ_{m+2} (Fig. 6b). Da nun jedes ζ_m bestimmte Stabkräfte in den beiden benachbarten Feldern erzeugt, können in einfacher Weise durch Überlagerung der Einflußlinien der einzelnen Werte ζ_m die zusätzlichen Einflußlinien für diese Stäbe gebildet werden, die zu den Einflußlinien für das Hauptsystem zu addieren sind. Diese nehmen dadurch als endgültige Einflußlinien die Formen der Fig. 7a—d an. Bemerkt sei, daß die auf diese Weise von mir gefundenen Einflußlinien ganz überraschend genau mit

⁴ „Der Stahlbau“ 1931, Heft 15.

den von *Christiani* gefundenen Einflußlinien übereinstimmen (vergl. die Fig. 16 der unter 4 genannten Abhandlung).

Hieraus ergeben sich, zunächst allerdings nur für den untersuchten Träger, folgende Feststellungen:

1. Der Träger (Fig. 3) ist auch ohne Stabilitätsstab stabil; für alle seine Stäbe ergeben sich eindeutige, durchaus normale Einflußlinien.
2. Die Wirkung eines in einer Raute angebrachten, lotrechten Stabilitätsstabs erstreckt sich nur auf je 2 Felder beiderseits des Stabes.
3. Die Einflußlinie der Stäbe, insbesondere auch der Streben, wechseln nicht mit scharfen Knicken von Feld zu Feld zwischen positiven und negativen Werten, sondern verlaufen durchaus normal.
4. Die Form der Einflußlinien weicht von der Form der unter Annahme reibungsloser Gelenke ermittelten Einflußlinien erheblich ab, dagegen sind die durch Zerlegung in Teilfachwerke sich ergebenden Einflußlinien annähernd richtig (Fig. 7e—h).
5. Der Einfluß der Steifigkeit der Gitterstäbe und ihrer steifen Anschlüsse ist unbedeutend. (Gute Übereinstimmung der Einflußlinien.)
6. Die in den Gurtstäben ermittelten Biegungsspannungen unter dem Lastenzug N erreichen den Höchstwert von 420 kg/cm^2 . Nun läßt sich aber der berechnete Einwand erheben, daß der hier untersuchte Träger mit seinen sehr hohen Gurtungen (60 cm bei 28 m Stützweite) kein in üblicher Weise ausgebildeter Träger ist. Ich habe daher die Untersuchung auch für denselben Träger mit der normalen Gurthöhe von 30 cm durchgeführt. Hinsichtlich der Einflußlinien für die Stabkräfte ergab dies keine großen Unterschiede, dagegen ergaben die Biegungsspannungen in den Gurtungen etwa 30% geringere Werte. Daraus ergibt sich die weitere, für die konstruktive Durchbildung des Rautenträgers wichtige Folgerung:
7. Die auch sonst bei Fachwerkträgern übliche Gurtsteifigkeit reicht zur Herstellung der Stabilität auch ohne Stabilitätsstab völlig aus. Steifere Gurtungen sind nachteilig, da sie höhere Biegungsspannungen in den Gurtungen herbeiführen.

Auf Grund dieser Ergebnisse habe ich nach dem hier angedeuteten Verfahren die genaue Berechnung des Hauptträgersystems der Weseler Rheinbrücke durchführen lassen.⁵ Es handelt sich dabei um über zwei Öffnungen von je 104 m Stützweite ohne Gelenke durchgeführte Parallel-Träger mit der auch sonst für Fachwerke durchaus normalen Gurthöhe von 90 cm.⁶ Wegen des Ganges der Berechnung verweise ich auf die unter ⁵ genannte Abhandlung und darf mich daher hier auf die Mitteilung der Hauptergebnisse dieser Nachrechnung beschränken. Ich gebe in Fig. 8 die Einflußlinie für je einen Ober- und Untergurtstab, sowie für je eine Zug- und Druckstrebe wieder, ferner in Fig. 2 die Einflußlinie für das Moment des Untergurtstabes an einem Knotenpunkt. Mit der Einflußlinie der Strebe $D_4 - v$ vergleiche man die in Fig. 1 a nach dem kine-

⁵ *Krabbe*: „Einfluß der Gurtsteifigkeit in ebenen Tragwerken“. Leipzig 1933, Verlag von Robert Noske. S. 12—17.

⁶ Die Bautechnik 1927, Heft 45/46.

matischen Verfahren ermittelte Einflußlinie und in Fig. 1b die durch Zerlegung in Teilfachwerke ermittelte Einflußlinie. Es unterliegt danach keinem Zweifel, daß die Einflußlinie der Fig. 1b der Wirklichkeit erheblich näher kommt wie die der Fig. 1a. Ich komme hier zu dem Schluß, daß das kinematische Verfahren unter Annahme gelenkiger Knotenpunkte für Rautenträger nicht verwendbar ist, daß aber die Zerlegung in Teilfachwerke gute Annäherungswerte ergibt, eine genaue Berechnung unter Berücksichtigung der Gurtsteifigkeit aber notwendig ist.

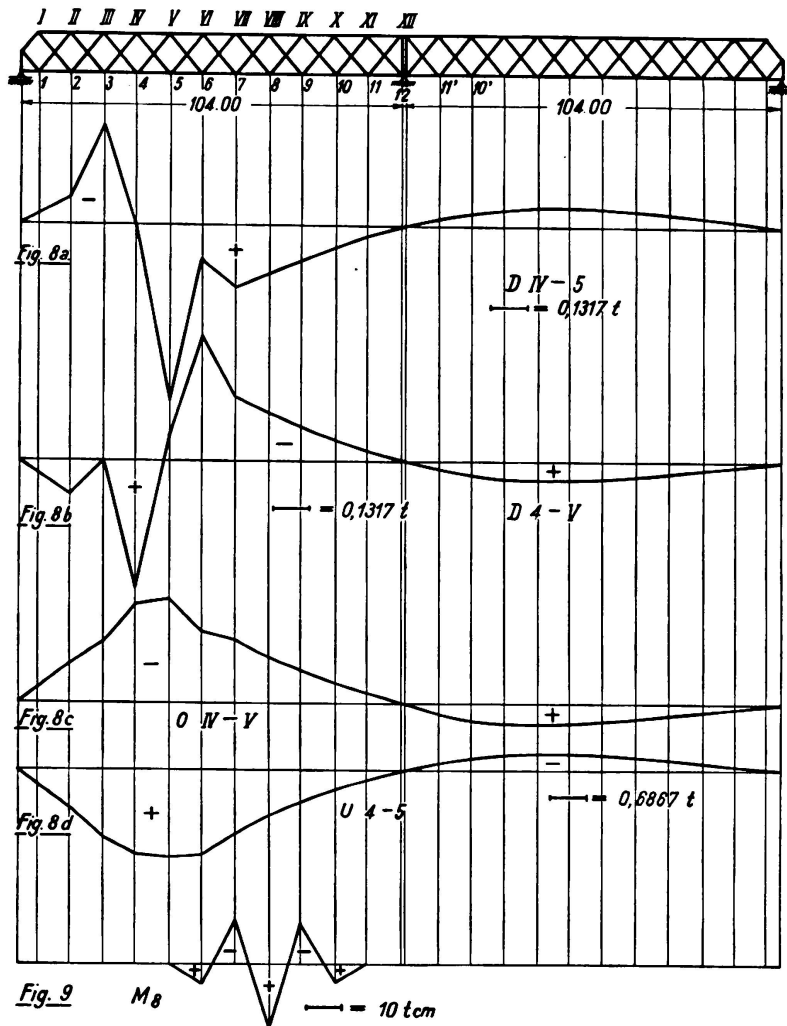


Fig. 8—9.

Die Einflußlinie für das Biegemoment im Untergurtstab ergibt bei ungünstigster Belastung nach Lastenzug N Biegungsspannungen von etwa 260 kg/cm^2 . Bei Überlagerung mit den Einflußlinien der Stabspannungen ergaben sich jedoch nur zusätzliche Biegungsspannungen von etwa 10 kg/cm^2 , die praktisch als ganz unwesentlich zu bezeichnen sind.

Schließlich habe ich noch die in Fig. 2a kinematisch ermittelte und nach Fig. 2b gemessene Biegelinie unter einer Einzellast auch unter Berücksichtigung der Gurtsteifigkeit berechnet; das Ergebnis ist in Fig. 2e wiedergegeben. Die Übereinstimmung mit der unter einer Einzellast gemessenen Biegelinie, besonders hinsichtlich der entstandenen Knicke, ist wohl überraschend gut.

III. Weiterer Einfluß der Biegungs-Steifigkeit der Streben und ihrer biegungsfesten Anschlüsse in den Knoten.

1. Allgemeines.

Wenn auch das bisher entwickelte Verfahren in einfacher Weise offenbar der Wirklichkeit ziemlich nahe kommende Ergebnisse zeigt, so wird doch bei näherer Betrachtung eines Rautenträgers, wie etwa des der Weseler Rheinbrücke, klar, daß solche Tragwerke mit ihren in den Kreuzungspunkten meist durch starke Knotenbleche verbundenen Streben einem biegungsfest verbundenen Stabwerk in ihrer Wirkungsweise viel näher kommen als einem Fachwerk. Es

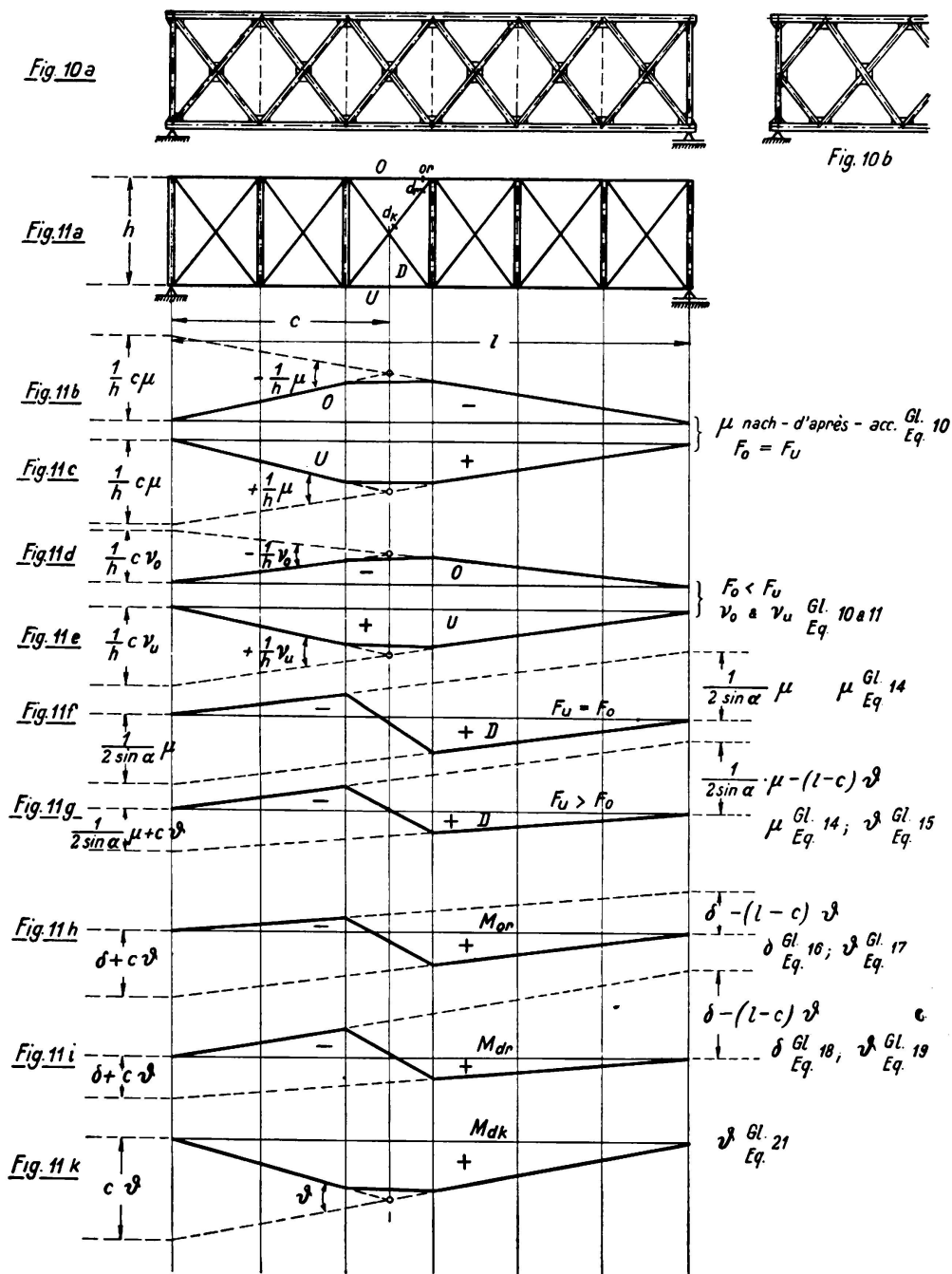


Fig. 10—11.

soll daher hier das Verfahren auch auf die Steifigkeit der Streben ausgedehnt werden. Dabei sollen auch ungleiche Querschnitte und Trägheitsmomente der Gurtungen berücksichtigt werden. Wir sind dann auch in der Lage, die in den Streben auftretenden Biegungsspannungen genau ermitteln zu können. Das Verfahren wird an dem Rautenträger Fig. 10a erläutert. Für den Gang des Verfahrens ist es grundsätzlich bedeutungslos, ob er in einem oder mehreren Feldern die punktiert gezeichneten Pfosten enthält oder nicht. Ebenso ist es

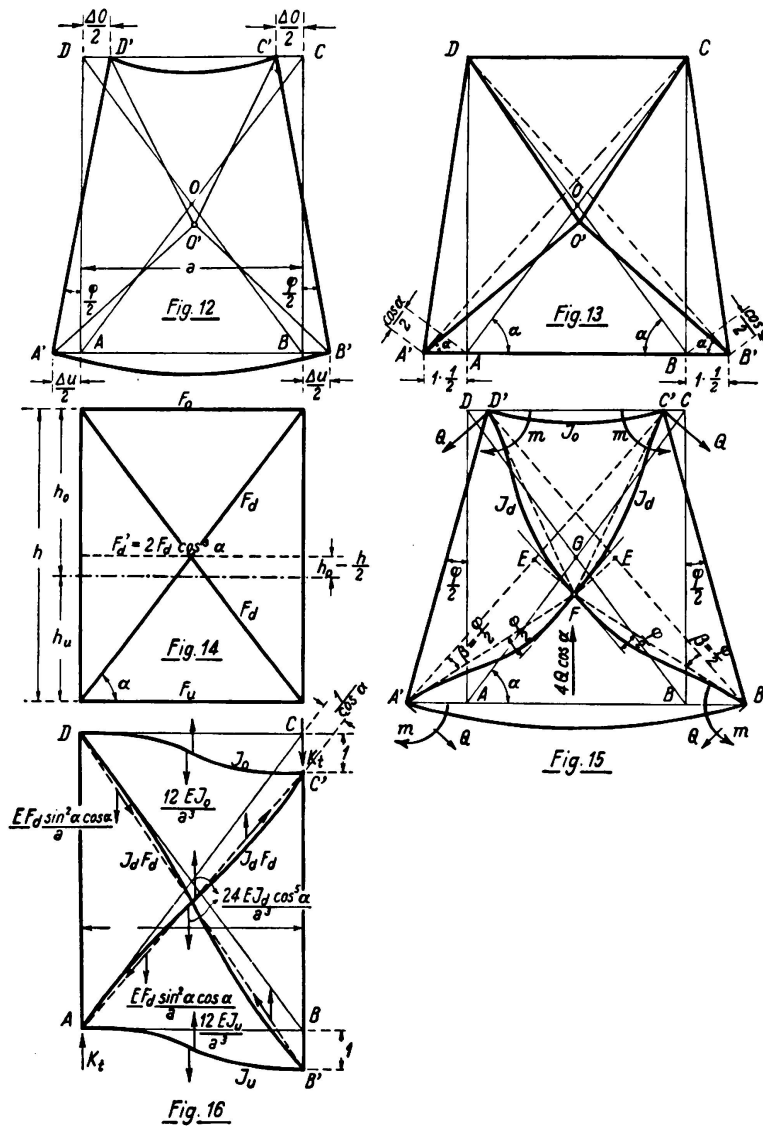


Fig. 12—16.

für die Behandlung belanglos, ob der Träger an den Enden mit einer ganzen Raute (Fig. 10b) oder mit einer halben Raute (Fig. 10a) abschließt. Der letztere Abschluß ist übrigens, wie die Nachrechnung der Weseler Rheinbrücke ergab, statisch entschieden vorzuziehen. Als Hauptssystem wählen wir den Träger Fig. 11a, der in jeder Raute einen starren Pfosten enthält, welcher biegungsfest mit den Gurtstäben und Streben verbunden ist.

Zunächst müssen einige für die weitere Behandlung wichtige Grundbegriffe festgelegt werden. Der hier behandelte Träger besitzt, wie jeder Fachwerkträger,

ein Trägheitsmoment J_t , welches von Feld zu Feld wechselt und sich zusammensetzt aus:

1. Dem Trägheitsmoment des reinen Fachwerks mit „massenlos gedachten Stäben, J_f .
2. Einem Beitrag aus den Trägheitsmomenten der Gurtstäbe, $J_o + J_u$.
3. Einem Beitrag aus den Trägheitsmomenten der Gitterstäbe, J_g .

Zu 1. Haben Ober- und Untergurt gleichen Querschnitt, so verlängert sich bei reiner Biegungsbeanspruchung der Untergurtstab um dasselbe Maß, um welches sich der Obergurtstab verkürzt (Fig. 12); die massenlos gedachten Streben ändern ihre Länge dabei nicht, bleiben spannungslos und liefern keinen Beitrag zum Trägheitsmoment J_f . Die Schwerachse liegt in der Mitte und es ist einfach

$$J_f = \frac{h^2}{4} (F_o + F_u). \tag{1}$$

Bei ungleichen Querschnitten der Gurtstäbe ist jedoch die Summe der Längenänderungen der beiden Gurtstäbe von Null verschieden; das bedingt Längenänderungen und Stabkräfte in den Streben. Diese liefern daher auch einen Beitrag zum Trägheitsmoment J_f . Nach Fig. 13 entspricht jeder Verlängerung eines Gurtstabes um den Wert Eins eine Verlängerung beider Streben um $\frac{1}{2} \cos \alpha$, also einer Strebenkraft in jeder Strebe.

$$D = \frac{1}{2} \frac{EF_d}{a} \cos^2 \alpha,$$

deren wagrechte Seitenkräfte sind

$$D' = \frac{1}{2} \frac{EF_d}{a} \cos^3 \alpha.$$

Wir können daher hinsichtlich ihres Beitrages zum Trägheitsmoment J_f die beiden Streben ersetzt denken nach Fig. 14 durch einen wagrechten, durch den Schnittpunkt der Streben gehenden Stab mit dem Querschnitt

$$F'_d = 2 F_d \cos^3 \alpha. \tag{2}$$

Die Lage der wagrechten Schwerachse ist dann gegeben mit den Bezeichnungen der Fig. 14 durch:

$$h_o = \frac{h}{2} \frac{2 F_u + F'_d}{F_o + F_u + F'_d}$$

$$h_u = \frac{h}{2} \frac{2 F_o + F'_d}{F_o + F_u + F'_d},$$

und der Schwerpunktsabstand von der Mitte ist

$$h_o - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \frac{F_u - F_o}{F_o + F_u + F'_d};$$

damit ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J_f = \frac{h^2}{4} \left[F'_d + \frac{4 F_o F_u + F'_d{}^2}{F_o + F_u + F'_d} \right]; \tag{3}$$

bei $F_o = F_u$ geht Gleichung 3 in Gleichung 1 über.

Zu 2. Unabhängig von der Lage der Schwerachse liefern die Gurtstäbe ein zusätzliches Trägheitsmoment $J_o + J_u$.

Zu 3. Bei einer Verdrehung nach Fig. 15 mit einem Drehwinkel φ kann aus kinematischen Gründen der Schnittpunkt der Streben nur in den Schnittpunkt F der in E auf $A'C'$ und $B'D'$ errichteten Mittellote fallen. Dann ist

$$EG = \frac{AA' + CC'}{2}; \quad \sphericalangle EFG = \alpha$$

also das Dreieck $EFG \sim CAB$;

daher
$$\frac{EG}{EF} = \frac{h}{d} = \frac{AA' + CC'}{2EF}$$

oder
$$\frac{EF}{d} = \frac{AA' + CC'}{2h}$$

daraus folgt $\sphericalangle \beta = \frac{\varphi}{2}$.

Die Endtangente der Streben müssen also in den Geraden $C'F$ und $D'F$ liegen. Die Verformung der Streben erfolgt also nach den stark gezeichneten Linien mit Drehwinkeln $\frac{\varphi}{2} = \beta$.

Sie wirken in dieser Verformung auf das Tragwerk in den Punkten $A'B'C'D'$ mit den Querkräften Q und den Momenten M ; das gesamte hierdurch von den verbogenen Streben auf den Träger ausgeübte Moment ist:

$$M = -2Q \frac{d}{2} + 2\mathfrak{M}$$

dabei ist
$$Q = \frac{4 \cdot 6 \cdot EJ_d}{d^2} \frac{\varphi}{2}; \quad \mathfrak{M} = \frac{2 \cdot 2 EJ_d}{d} \cdot \frac{\varphi}{2}$$

$$M = -\frac{8 EJ_d}{d} \varphi = -\frac{8 EJ_d \cos \alpha}{a} \varphi.$$

Die Streben liefern also einen Gesamtbeitrag zum Biegungswiderstand, d. h. dem Trägheitsmoment des Tragwerkes:

$$J_d = 8 J_d \cos \alpha = J_g. \quad (4)$$

Das ist der vierfache Widerstand, den zwei gekreuzte, in der Mitte nicht verbundene Streben liefern würden.

Es ist also das gesamte Trägheitsmoment des Tragwerkes:

$$J_t = J_f + J_o + J_u + 8 J_d \cos \alpha, \quad (5)$$

wobei J_f nach Gleichung 1 bzw. 3 zu bestimmen ist. Entsprechende Begriffe legen wir bezüglich der Querkraft fest.

Der Verschiebung der beiden starren Pfosten um Eins (Fig. 16) setzt das gesamte Tragwerk den Widerstand K_t entgegen.

Die Verlängerung der beiden Streben ist dabei:

$$\Delta = \pm 1 \cdot \sin \alpha;$$

also die Strebenkraft
$$D = \pm 1 \frac{EF_d \sin \alpha \cos \alpha}{a}.$$

Die lotrechte Seitenkraft beider Streben zusammen ist also

$$K_f = 1 \frac{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha E F_d}{a} \quad (6)$$

d. h. der Querwiderstand des Fachwerkes mit masselos gedachten Stäben; die Gurtstäbe bleiben spannungslos.

Infolge der Verbiegung der beiden Gurtstäbe entsteht ferner:

$$K_o + K_u = 1 \frac{12 (J_o + J_u) E}{a^3}. \quad (7)$$

Die Verbiegung der beiden Streben, deren Enden sich gegen die Stabachse um $\frac{d}{1 \cdot \cos \alpha}$ verdreht haben, liefert an Querwiderstand

$$K_d = 1 \frac{24 E J_d \cos^5 \alpha}{a^3}. \quad (8)$$

Also ist der gesamte Querwiderstand des Tragwerkes

$$K_t = K_f + K_o + K_u + K_d = 1 \frac{2 E}{a} \left[F_d \sin^2 \alpha \cos \alpha + 6 \frac{J_o + J_u + 2 J_d \cos^5 \alpha}{a^2} \right]. \quad (9)$$

Bemerkt sei hier, daß bei normalen Ausführungen, wie etwa die Weseler Rheinbrücke, durch den Biegungswiderstand der Gurtstäbe und Streben, der Querwiderstand des Tragwerkes sich um etwa 13 % erhöht; es ist also nicht ohne weiteres angängig, hier die Steifigkeit der Stäbe zu vernachlässigen. Die Erhöhung des Trägheitsmomentes des gesamten Tragwerkes durch den Biegungswiderstand der Stäbe ist jedoch gering und bleibt unter 1 %.

2. Die Einflußlinien für das Hauptsystem.⁷

a) Die Einflußlinien der Gurtstabkräfte.

Die Einflußlinie des Obergurtstabs ist bestimmt durch die Biegelinie des Lastgurts (Untergurt), welche infolge Verlängerung des Obergurtstabes um Eins entsteht. Wir verlängern den Obergurtstab um Eins (Fig. 17) indem wir ihn in der Mitte durchschneiden und durch eine Kraft X um Eins auseinander treiben. Dann entstehen, wenn wir zunächst den Biegungswiderstand der Stäbe vernachlässigen, die in die Figur eingetragenen Stabkräfte. Unter dem Einfluß der Kraft X, die bei gleichen Querschnitten Ober- und Untergurtstab um dasselbe Maß verkürzt, verdrehen sich die beiden Pfosten gegeneinander um den Winkel $-\frac{1}{h}$. Damit wäre die Einflußlinie für O für das reine Fachwerk bestimmt.

Da jedoch die verbogenen Gurtstäbe und Streben eine Gegenwirkung ausüben, wird der Drehwinkel kleiner als $\frac{1}{h}$, er sei $\frac{1}{h} \mu$. Daraus folgt ohne weiteres mit Bezug auf Gleichung 1, 3 und 5:

$$\mu = \frac{J_f}{J_t}. \quad (10)$$

⁷ Vergleiche zu der hier allgemein angewandten Darstellungsweise der Einflußlinien den Aufsatz des Verfassers in „Der Stahlbau“ 1933, Heft 2.

Die Einflußlinie für den Obergurtstab O ist also durch den Drehwinkel $\frac{1}{h} \mu$ gekennzeichnet und hat die in Fig. 11b dargestellte Form; ganz entsprechend ergibt sich die Einflußlinie für den Untergurtstab U nach Fig. 11c.

Haben aber Ober- und Untergurtstab verschiedene Querschnitte, so ist der Drehwinkel nicht mehr von X unabhängig, da Ober- und Untergurt zwar dieselben Stabkräfte X, aber infolgedessen verschiedene Dehnungen erfahren.

Da die äußere Kraft X den durchschnittlichen Obergurtstab um eins auseinander treibt, ist nach dem *Clapeyron'schen* Theorem

$$1 \cdot X = \frac{X^2 a}{EF_o} + \frac{X^2 a}{EF_u} + 2 \frac{X^2 a}{EF_d \cos^3 \alpha};$$

da der Wert $X = 0$, der die Gleichung befriedigen würde, keine Bedeutung hat, ergibt sich

$$X = 1 - \frac{EF_o F_u}{a \left(F_o + F_u + \frac{2 F_o F_u}{F_d \cos^3 \alpha} \right)}.$$

Damit ist die gesamte Verlängerung des Obergurtstabes

$$\Delta_o = 1 - \frac{X a}{EF_o};$$

die Verkürzung des Untergurtstabes

$$\Delta_u = - \frac{X a}{EF_u};$$

also der Drehwinkel

$$\vartheta_o = \frac{\Delta_u - \Delta_o}{h} = - \frac{1}{h} \left[1 - \frac{F_o - F_u}{F_u + F_o + 2 \frac{F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha}} \right]. \quad (10)$$

Wir setzen den Klammer-Ausdruck = v_o und schreiben:

$$\vartheta_o = - \frac{1}{h} v_o. \quad (11)$$

Für den Untergurtstab gibt eine entsprechende Ableitung den Beiwert

$$v_u = 1 + \frac{F_o + F_u}{F_u + F_o + \frac{2 F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha}} \quad (12)$$

$$\vartheta_u = + \frac{1}{h} v_u. \quad (13)$$

Die beiden Einflußlinien sind in Fig. 11d—e dargestellt; der stärkere Gurt bekommt natürlich auch die größere Stabkraft.

b) Die Einflußlinien der Streben.

Die Einflußlinie der Strebe CB (Fig. 18) ermitteln wir als Biegelinie des Untergurts, die durch Verlängerung der Strebe um Eins entsteht. Unter An-

nahme massenloser Stäbe erzeugt eine die durchschnittene Strebe um Eins aus- einandertreibende Kraft X , die in der Figur eingetragenen Stabkräfte. Abgesehen von dieser Verlängerung Eins, verkürzen sich beide Streben um dasselbe Maß, was eine lotrechte Verschiebung der starren Pfosten gegeneinander um $\frac{1}{2 \sin \alpha}$ verursacht; dadurch entsteht die in Fig. 11f dargestellte Biegelinie des Untergurtes und damit die Einflußlinie für die Strebe. Infolge des Biegungswiderstands der Gurtstäbe und Streben verringert sich jedoch die lotrechte Verchiebung der Pfosten gegeneinander: sie sei $\frac{1}{2 \sin \alpha} \mu$.

Dann ist:

$$\mu = \frac{K_f}{K_t} \quad (\text{Gleichung 6-9}). \quad (14)$$

Daraus ergibt sich die Einflußlinie Fig. 11f.

Haben nun Ober- und Untergurtstab verschiedene Querschnitte, so entsteht wegen ihrer ungleichen Längenänderung bei gleicher Stabkraft $+ X \cos \alpha$ auch

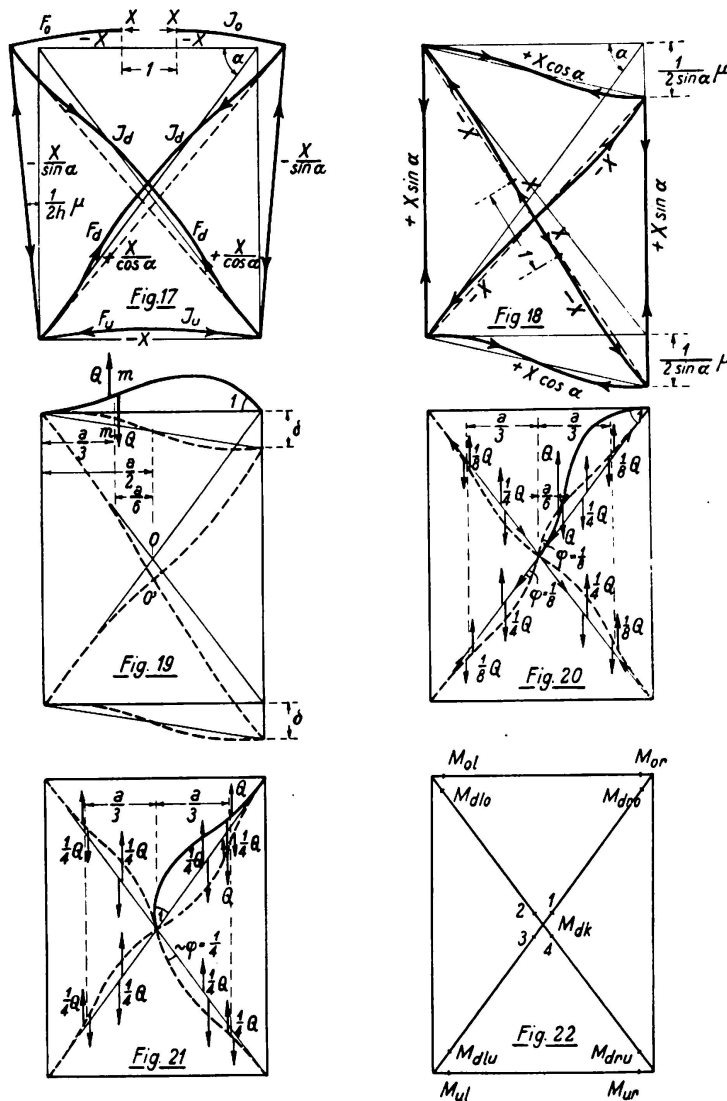


Fig. 17—22.

noch eine Drehung der starren Pfosten gegeneinander um den Winkel ϑ , der sich in diesem Falle entsprechend der Gleichung 10 ergibt:

$$\vartheta = -\frac{1}{h} \frac{F_u - F_o}{\left[F_u + F_o + \frac{2 F_u F_o}{F_d \cos^3 \alpha} \right] \cos \alpha}. \quad (15)$$

Hiernach ergibt sich die Einflußlinie Fig. 11g.

c) Die Einflußlinien für die Eckmomente der Stäbe.

Die Einflußlinie für das rechte Endmoment des Obergurtstabs (Fig. 19) ermitteln wir als Biegelinie des Lastgurts, die durch Knicken des Stabes an seinem rechten Ende um den Winkel Eins entsteht. Durch die Knickung entsteht im Stabe eine Querkraft

$$Q = + \frac{6 E J_o}{a^2};$$

sie bedingt eine Verschiebung der starren Pfosten senkrecht gegeneinander um

$$\begin{aligned} \delta_{or} &= 1 \frac{Q}{K_t}, & (K_t \text{ siehe Gleichung 9}) \\ \delta_{or} &= + 1 \frac{6 E J_o}{a^2 K_t} \end{aligned} \quad (16)$$

Ferner wirkt im lotrechten Schnitt unmittelbar rechts von O ein dem Sinn des Uhrzeigers entgegengesetzt drehendes Moment

$$M = - \frac{E J_o}{a}$$

und im Schnitt unmittelbar links von O das umgekehrte Moment

$$M = + \frac{E J_o}{a};$$

dadurch entsteht im Träger ein positiver Drehwinkel der beiden starren Pfosten gegeneinander

$$\vartheta_{or} = \frac{M a}{E J_t}$$

oder

$$\vartheta_{or} = + \frac{J_o}{J_t}. \quad (17)$$

Die durch die Verschiebung δ und die Verdrehung ϑ bedingte Einflußlinie für M_{or} ist in Fig. 11h veranschaulicht.

Die Einflußlinie für das Moment am oberen Ende der nach rechts steigenden Strebe M_{dro} ermitteln wir als Biegelinie des Lastgurts, die durch Knicken dieses Stabes am oberen Ende um den Winkel Eins entsteht (Fig. 20).

Hierdurch wird aber nun zunächst das Kreuz in O belastet mit einem Moment

$$= - \frac{4 E J_d \cos \alpha}{a};$$

es dreht sich unter dem Einfluß dieser Momentbelastung entgegen dem Sinn

des Uhrzeigers um den Drehwinkel $\frac{1}{8}$, wobei die Streben die punktiert gezeichnete zusätzliche Verbiegung erleiden. Dann ist der Punkt O mit einem Moment nicht mehr belastet, denn jede der vier verbogenen halben Streben belastet ihn mit $+\frac{E J_d \cos \alpha}{a}$

Bei dieser Verformung entstehen, sowohl in einem Schnitt rechts als links von O, also im ganzen Feld, die in der Fig. 20 gekennzeichneten Querkräfte, wobei

$$Q = \frac{24 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{nämlich rechts: } Q - 2 \cdot \frac{Q}{8} - \frac{2Q}{4} = \frac{Q}{4} \\ \text{links: } 2 \cdot \frac{Q}{4} - 2 \cdot \frac{Q}{8} = \frac{Q}{4} \end{array} \right\} = \frac{6 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2}$$

Das bedingt eine Verschiebung der starren Pfosten gegeneinander um

$$\delta_{d ro} = + \frac{6 E J_d \cos^3 \alpha}{a^2 K_t} \tag{18}$$

Ferner greift am lotrechten Schnitt unmittelbar rechts von O in O ein entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn drehendes Moment an

$$M = - \frac{4 E J_d \cos \alpha}{a} + 2 \frac{E J_d \cos \alpha}{a} = - \frac{2 E J_d \cos \alpha}{a},$$

und im lotrechten Schnitt unmittelbar links von O

$$M = + 2 \frac{E J_d \cos \alpha}{a}.$$

Diesem Moment muß ein durch Verbiegung des ganzen Trägers erzeugtes, entgegengesetztes Moment entgegenwirken; dazu ist ein Drehwinkel des Trägers erforderlich von:

$$\vartheta_{d ro} = \frac{M a}{E J_t} = - \frac{2 J_d \cos \alpha}{J_t} \tag{19}$$

Die durch die Verschiebung δ und die Verdrehung ϑ bedingte Einflußlinie für $M_{d ro}$ ist in Fig. 11i veranschaulicht.

Die Einflußlinie für das Eckmoment derselben Strebe unmittelbar rechts von O ermitteln wir als Biegelinie des Lastgurts, die durch Knicken dieses Stabes in K um den Winkel Eins entsteht (Fig. 21). In entsprechender Weise wie vorhin bedingt hier die Belastung des Kreuzes in O mit $+\frac{8 E J_d \cos \alpha}{a}$ die zusätzliche, punktiert dargestellte Verdrehung dieses Kreuzes um den Drehwinkel $\frac{1}{4}$, wobei wiederum das Kreuz bei O mit Momenten nicht belastet ist. In entsprechender Weise wie vorhin ergibt sich jetzt: $Q = 0$; daher auch

$$\delta_{ak} = 0. \tag{20}$$

Unmittelbar rechts bzw. links von O greifen jetzt die Momente an

$$M = \pm \frac{4 EJ_d \cos \alpha}{a}.$$

Diesem Moment muß ein durch die Biegung des ganzen Trägers erzeugtes Moment entgegenwirken; dazu ist ein Drehwinkel des Trägers erforderlich:

$$\vartheta_{dk} = + \frac{4 EJ_d \cos \alpha}{J_t}. \quad (21)$$

Sehr interessant ist dabei das Ergebnis, daß der die Einflußlinie für M_{dk} erzeugende Drehwinkel ϑ nach Gleichung 21 doppelt so groß ist und entgegengesetztes Vorzeichen hat, wie der die Einflußlinie für $M_{d_{or}}$ erzeugende Drehwinkel nach Gleichung 19. Das entspricht nämlich genau der aus reiner Verdrehung, also reiner Momentbelastung nach Fig. 15 ermittelten Verbiegung der Streben. Ferner geht aus der Fig. 16 ohne weiteres hervor, daß bei reiner Parallelschiebung der starren Pfosten kein Moment M_{dk} auftritt; infolgedessen kann auch umgekehrt (*Maxwell'scher Satz*) eine Knickung der Strebe unmittelbar rechts von O nach Fig. 21 keine die Pfosten parallel verschiebende Querkraft erzeugen, was durch die Gleichung 20 bestätigt wird.

Einer besonderen Bestimmung der Einflußlinien für die übrigen Stabendpunkte bedarf es nicht, denn mit den Bezeichnungen der Fig. 22 ergibt sich nach den Fig. 15 (Momenten-Beanspruchung) und Fig. 16 (Querkraft-Beanspruchung) ohne weiteres das Vorzeichen der Werte δ und ϑ in den einzelnen Fällen; es ist nämlich

für	or	ol	ur	ul	d _{ro}	d _{lo}	d _{ru}	d _{lu}	d _k
δ	+	-	+	-	+	-	+	-	o
ϑ	+	+	+	+	-	-	-	-	+

(22)

Damit sind alle Einflußlinien für das als Hauptssystem gewählte Tragwerk (Fig. 11a) mit starren, in den Knoten biegungsfest angeschlossenen Hilfspfosten ermittelt.

Für diese grundlegenden Einflußlinien wurde verschiedene Ausbildung von Ober- und Untergurt in Bezug auf Querschnitt und Trägheitsmoment berücksichtigt. Für die im folgenden zu ermittelnden Korrekturen dieser Einflußlinien wird hierauf jedoch verzichtet und Symmetrie zur wagrechten Trägerachse angenommen, um das Verfahren nicht zu umständlich zu gestalten. (Wir legen dabei aus besonderen Gründen die Abmessung des der Fahrbahn ferne liegenden Gurtes für beide Gurtungen zu Grunde.) Eine einfache Möglichkeit, die für Unsymmetrie erforderlichen Verbesserungen nachträglich anzubringen, wird zum Schluß als Annäherungsverfahren angegeben werden.

3. Die Auflösung der starren Anschlüsse der Hilfspfosten in gelenkige Anschlüsse.

Sind die eingebauten Hilfspfosten des Tragwerkes (Fig. 11a) nicht biegungsfest, sondern gelenkig an die Knoten angeschlossen, so werden sich bei den

einzelnen Verbiegungen des Trägers (Einflußlinien) die Knoten um gewisse Drehwinkel gegen die Achse der starren Pfosten verdrehen, und zwar im allgemeinen in demselben Sinn, also antisymmetrisch zur wagrechten Trägerachse. Es kann jedoch, unabhängig hiervon, auch eine Verdrehung der Ober- und Untergurtnoten im entgegengesetzten Sinn, also symmetrisch zur Trägerachse, hinzutreten.

a) *Antisymmetrische Verdrehung der Ober- und Untergurtnoten.*

Verdrehen wir die Knoten o_m und u_m gegen die Achse des Hilfspfostens m in demselben Sinn um einen Drehwinkel φ (Fig. 23), so entsteht, wenn wir zunächst die Knoten in lotrechter Richtung als unverschiebbar annehmen, die Verformung der Fig. 23a, wobei wir die Mittelkreuze der Strebenkreuzungspunkte O_m und O_{m+1} zunächst unverdreht festhalten. Dadurch wird aber dieses Kreuz belastet mit einem links drehenden Moment $= -2 \frac{2 E J_d}{d} \varphi$. Dieses Moment

wird durch Linksdrehung des Kreuzes um $\frac{1}{4} \varphi$ ausgeglichen. Die Kreuze drehen sich also um $\frac{1}{4} \varphi$ und so entsteht die Verformung der Fig. 23b.

Vergleichen wir diese Abbildung mit den Fig. 19—20, so sehen wir, daß in den beiden Feldern die doppelte Verformung der Fig. 19—20 zusammengekommen eingetreten ist, in dem Feld $m+1$ im entgegengesetzten Sinn. Daraus folgt ohne weiteres mit Bezug auf die Gleichungen 16 bis 19, daß zum Ausgleich der durch die Verformung entstandenen Momente und Querkräfte folgende weitere Verformungen notwendig sind:

$$\begin{aligned} \text{Feld } m: \quad \delta_m &= +1 \left[\frac{6 E (J_o + J_u)_m}{a^2 K_{tm}} + \frac{12 E J_{dm} \cos^3 \alpha}{a^2 K_{tm}} \right] \varphi \\ &= +1 \frac{6 E (J_o + J_u + 2 J_d \cos^3 \alpha)_m}{a^2 \cdot K_{tm}} \varphi \\ \vartheta_m &= + \frac{(J_o + J_u + 2 J_d \cos \alpha)_m}{J_{tm}} \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Feld } m+1: \quad \delta_{m+1} &= -1 \frac{6 E (J_o + J_u + 2 J_d \cos^3 \alpha)_{m+1}}{a^2 K_{t(m+1)}} \varphi \\ \vartheta_{m+1}^- &= - \frac{(J_o + J_u + 2 J_d \cos \alpha)_{m+1}}{J_{t(m+1)}} \varphi. \end{aligned}$$

Diese Verformung des Trägers ist in Fig. 23c dargestellt. Links von $m-1$ und rechts von $m+1$ schließen sich die weiteren Felder natürlich normal an die Pfosten an und es gelangen die Auflager-Punkte A und B nach A' und B' ; nach Wiederherstellung der Auflagerbedingungen durch die Verbindungsgerade $A'B'$ ergibt sich die Verbiegung des Untergurtes, die durch den Drehwinkel $\varphi_m = 1$ d. h. durch den Zustand „ $\varphi_m = 1$ “ entstanden ist.

Bei diesem Zustand sind nun die Kreuze

$$o \ m \ u \ m, \ o \ (m-1) \ u \ (m-1), \ o \ (m+1) \ u \ (m+1)$$

mit Momenten belastet, und zwar die oberen und unteren Kreuze gleich, da wir Symmetrie voraussetzen.

Wir finden als Belastung eines jeden der Kreuze o_m und u_m :

Aus Fig. 23a:

$$M'_{mm} = - \frac{4E(J_{om} + J_{o(m+1)})}{a} - \frac{4EJ_{dm} + J_{d(m+1)}}{a} - \frac{6EJ_v}{h}.$$

Aus Fig. 23b:

$$M''_{mm} = + \frac{(J_{dm} + J_{d(m+1)}) \cos \alpha}{a}.$$

Aus Fig. 23c: (Mit Bezug auf die Fig. 15—16.)

$$M'''_{mm} = \frac{E}{a} \left[J_{om} \vartheta_m + J_{o(m+1)} \vartheta_{(m+1)} - 4J_{dm} \cos \alpha \frac{\delta_m}{2} \right. \\ \left. - 4J_{d(m+1)} \cos \alpha \frac{\vartheta_{m+1}}{2} + 6J_{om} \frac{\delta_m}{a} + 6J_{o(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} \right. \\ \left. + 6J_{dm} \frac{\delta_m}{a} \cos^3 \alpha - 6J_{o(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} \cos^3 \alpha \right].$$

Als Belastung eines jeden der Kreuze $o(m-1)$ und $u(m-1)$ finden wir:

Aus Fig. 23a:

$$M'_{(m-1)m} = - \frac{2EJ_{om}}{a}.$$

Aus Fig. 23b:

$$M''_{(m-1)m} = + \frac{EJ_{dm} \cos \alpha}{a}.$$

Aus Fig. 23c:

$$M'''_{(m-1)m} = + \frac{E}{a} \left[-J_{om} \vartheta_m + 4J_{dm} \cos \alpha \frac{\vartheta_m}{2} + 6J_{om} \frac{\delta_m}{a} \right. \\ \left. + 6J_{dm} \frac{\delta_m}{a} \cos^3 \alpha \right].$$

Endlich finden wir als Belastung eines jeden der Kreuze $o(m+1)$ und $u(m+1)$

Aus Fig. 23a:

$$M'_{(m+1)m} = - \frac{2EJ_{o(m+1)}}{a}.$$

Aus Fig. 23b:

$$M''_{(m+1)m} = + \frac{EJ_{d(m+1)} \cos \alpha}{a}.$$

Aus Fig. 23c:

$$M'''_{(m+1)m} = \frac{E}{a} \left[-J_{o(m+1)} \vartheta_{m+1} + 4J_{d(m+1)} \cos \alpha \frac{\vartheta_{m+1}}{2} \right. \\ \left. + 6J_{o(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} + 6J_{d(m+1)} \frac{\delta_{m+1}}{a} \cos^3 \alpha \right].$$

Die Gesamtbelastung der oberen und unteren Kreuze ist also:

$$M_{mm} = 2(M'_{mm} + M''_{mm} + M'''_{mm}) \quad (23)$$

$$M_{(m-1)m} = 2(M'_{(m-1)m} + M''_{(m-1)m} + M'''_{(m-1)m}) \quad (24)$$

$$M_{(m+1)m} = 2(M'_{(m+1)m} + M''_{(m+1)m} + M'''_{(m+1)m}). \quad (25)$$

Betrachten wir nun in Fig. 17—18 die Verformungen, welche die Einflußlinien des Hauptsystems als Biegelinien des Lastgurts verursachen, so finden wir, daß bei diesen Verformungen eine Grundbelastung der Knoten des verformten Feldes besteht, welche wir mit M_{om} bezeichnen wollen. Sie ist für Unter- und Obergurtnoten gleich; für beide zusammen ist in Fig. 17 (Einflußlinie für den Obergurtstab):

$$M_{o(m-1)} = \frac{2E}{ah} [J_o + J_u + 2J_d \cos \alpha] \quad (\text{wobei } J_o = J_u) \quad (26)$$

$$M_{om} = -M_{o(m-1)}. \quad (27)$$

Bei der Verformung nach Fig. 18 (Einflußlinie für die Strebe) ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{o(m-1)} = M_{om} &= \frac{6E(J_o + J_u)}{a} \frac{1}{2 \sin \alpha} \mu + \frac{12EJ_d}{a} \cos^3 \alpha \frac{1}{2 \sin \alpha} \mu \\ &= \frac{3E}{a \sin \alpha} \mu (J_o + J_u + 2J_d \cos^3 \alpha) \quad (\text{wobei wieder } J_o = J_u). \end{aligned} \quad (28)$$

Da nun bei Ersatz der biegungsfesten Einspannung der starren Pfosten durch Gelenke Momente in diesen Gelenkpunkten nicht auftreten können, gilt nunmehr in jedem Falle für jedes Punktpaar die Gleichung:

$$M_m = 0 = M_{om} + M_{m(m-1)} \varphi_{m-1} + M_{mm} \varphi_m + M_{m(m+1)} \varphi_{m+1} \quad (29)$$

Weitere Glieder können nicht auftreten. Wir haben also bei n Knotenpunkten stets ein Gleichungssystem mit n unbekanntem Drehwinkeln φ_m der *Clapeyronschen* Form, beispielsweise für den Träger 11a für die Einflußlinie der Strebe D:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	
1	M_{11}	M_{12}						
2	M_{21}	M_{22}	M_{23}					
3		M_{32}	M_{33}	M_{34}				M_{o3}
4			M_{43}	M_{44}	M_{45}			M_{o4}
5				M_{54}	M_{55}	M_{56}		
6					M_{65}	M_{66}	M_{67}	
7						M_{76}	M_{77}	

(29a)

Jedem dieser Drehwinkel φ_m entspricht nun aber eine bestimmte Biegelinie des Last-Gurtes (vgl. Fig. 23c), nämlich die mit φ_m multiplizierte Biegelinie, die sich für den Zustand $\varphi_m = 1$ ergab. Diese 7 Biegelinien sind also zu den durch Fig. 18 gegebenen Biegelinien des Lastgurts zu addieren, und wir haben dann die Einflußlinie für den Träger *mit gelenkig angeschlossenen Hilfspfosten*.

Zur Ermittlung der Einflußlinie für den Gurtstab O nach Fig. 17—11b dient dasselbe Gleichungssystem: Es wären als unabhängige Glieder in Spalte 3 und 4 die Werte M_{o3} und M_{o4} nach Gleichung 26—27 einzusetzen.

b) *Symmetrische Verdrehung der Ober- und Untergurtnoten.*

Handelt es sich aber nun um die Berichtigung der durch die Verformungen nach Fig. 19, 20 und 21 bedingten Einflußlinien, so bemerken wir, daß hier Ober- und Untergurtnoten mit ungleichen Momenten belastet sind.

Bei diesen Verformungen ergibt sich in allen drei Fällen außer der gleichen Belastung der Ober- und Untergurtnoten $m - 1$ und m , die wir mit $M_{o(m-1)}$ und M_{om} bezeichnen, noch eine Sonderbelastung der oberen Knoten und zwar

$$\begin{aligned} \text{in Fig. 19:} \quad M_{m-1} &= -\frac{2EJ_o}{a}; \\ M_m &= -\frac{4EJ_a}{a}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{in Fig. 20:} \quad M_m = -\frac{8EJ_d \cos \alpha}{a}; \quad (31)$$

$$\text{in Fig. 21:} \quad M_m = +\frac{4EJ_d \cos \alpha}{a}. \quad (32)$$

Diese Belastung zerlegen wir in antisymmetrische und symmetrische Belastungen von Ober- und Untergurtnoten und setzen beispielsweise

für	$-\frac{2EJ_o}{a}$	der Fig. 19	
1. oben:	$-\frac{EJ_o}{a}$;	unten: $-\frac{EJ_o}{a}$	(Antisymmetr. Belastungsanteil)
2. oben:	$-\frac{EJ_o}{a}$;	unten: $+\frac{EJ_o}{a}$	(Symmetr. Belastungsanteil)
zusammen oben:	$-\frac{2EJ_o}{a}$;	unten: 0.	

Die aus den antisymmetrischen Belastungsanteilen sich ergebenden Verformungen sind nach dem unter a gegebenen Verfahren zu ermitteln. Zu den symmetrischen Belastungsanteilen aber gehört, wenn wir Ober- und Untergurtnoten zusammenfassen wollen, auch *symmetrische Verdrehung* des Ober- und Untergurtnotens (Fig. 24). Diese Drehwinkel bezeichnen wir mit ψ . Fig. 24 zeigt im Gegensatz zu Fig. 23a, daß die Mittelkreuze O_{m-1} und O_m unbelastet sind, also eine Verdrehung nicht erfahren, ferner, daß Querkräfte und Momente in den beiden Feldern sich aufheben, also auch weitere Verschiebungen nicht eintreten.

In diesem Falle bezeichnen wir Verdrehungen und Momentenbelastungen als positiv, wenn sie das Obergurtnotenzentrum positiv drehen oder belasten. Hierbei ergibt sich nun ohne weiteres:

$$M_{mm} = -\frac{8E}{a} \left[J_{om} + J_{o(m+1)} + 2(J_{dm} + J_{d(m+1)}) \cos \alpha \right] - 2\frac{EJ_v}{h} \quad (33)$$

$$M_{(m-1)m} = -\frac{4EJ_{om}}{a} \quad (34)$$

$$M_{(m+1)m} = -\frac{4EJ_{o(m+1)}}{a}. \quad (35)$$

Die aus symmetrischer Belastung der Ober- und Untergurtnoten sich ergebende Verformung ist also durch ein der Gleichung 29 entsprechendes Gleichungssystem der *Clapeyronschen* Form gegeben, nämlich beispielsweise für die Verformung nach Fig. 19:

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	
1	M_{11}	M_{12}						
2	M_{21}	M_{22}	M_{23}					
3		M_{32}	M_{33}	M_{34}				$\frac{EJ_0}{a}$
4			M_{43}	M_{44}	M_{45}			$\frac{2EJ_0}{a}$
5				M_{54}	M_{55}	M_{56}		
6					M_{65}	M_{66}	M_{67}	
7						M_{76}	M_{77}	

(36)

wobei die abhängigen Beiwerte nach den Gleichungen 33 bis 35 und die unabhängigen Glieder nach (30) zu bestimmen sind.

So ergeben sich nun in diesem Falle 7 symmetrische Drehwinkel ψ ; aber zum großen Unterschied von den Drehwinkeln φ ergeben sie keine Verschiebungen der Lastgurtnoten. Sie ergeben also (wenigstens wenn wir Belastungen nur in den Knotenpunkten annehmen) keine Beeinflussung der Einflußlinien.

Die abgeleiteten Ergebnisse gebrauchen wir jedoch im nächsten Abschnitt. Wir haben also bisher die genauen Einflußlinien für das System mit gelenkig eingefügten starren Pfosten.

4. Entfernung der eingefügten, starren Hilfspfosten.

Verlängern wir einen der starren Pfosten m , zunächst unter Beibehaltung seiner starren Einspannung an beiden Gurten, um den Wert η , also nach oben und unten um je $\frac{1}{2} \eta$, so entsteht die Verformung der Fig. 25. Da in beiden Streben Zug entsteht, entsteht in allen Gurtstäben Druck; sie verkürzen sich dementsprechend um die Werte γ und γ' . Die Verbiegung der Streben hat natürlich weder auf die in den Streben und Gurtstäben entstandenen Längsspannungen noch auf die Verschiebungen γ und γ' einen nennenswerten Einfluß. Der Wert γ wurde bereits in der unter 4. genannten Abhandlung ermittelt, nämlich in Gleichung 7.

Danach ist:

$$\gamma = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha F_{dm}}{2 (\cos^3 \alpha F_{dm} + F_{om})} \tag{37}$$

Auf die Ableitung soll hier verwiesen werden. Dementsprechend ist

$$\gamma' = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha F_{d(m+1)}}{2 (\cos^3 \alpha F_{d(m+1)} + F_{o(m+1)})} \tag{37a}$$

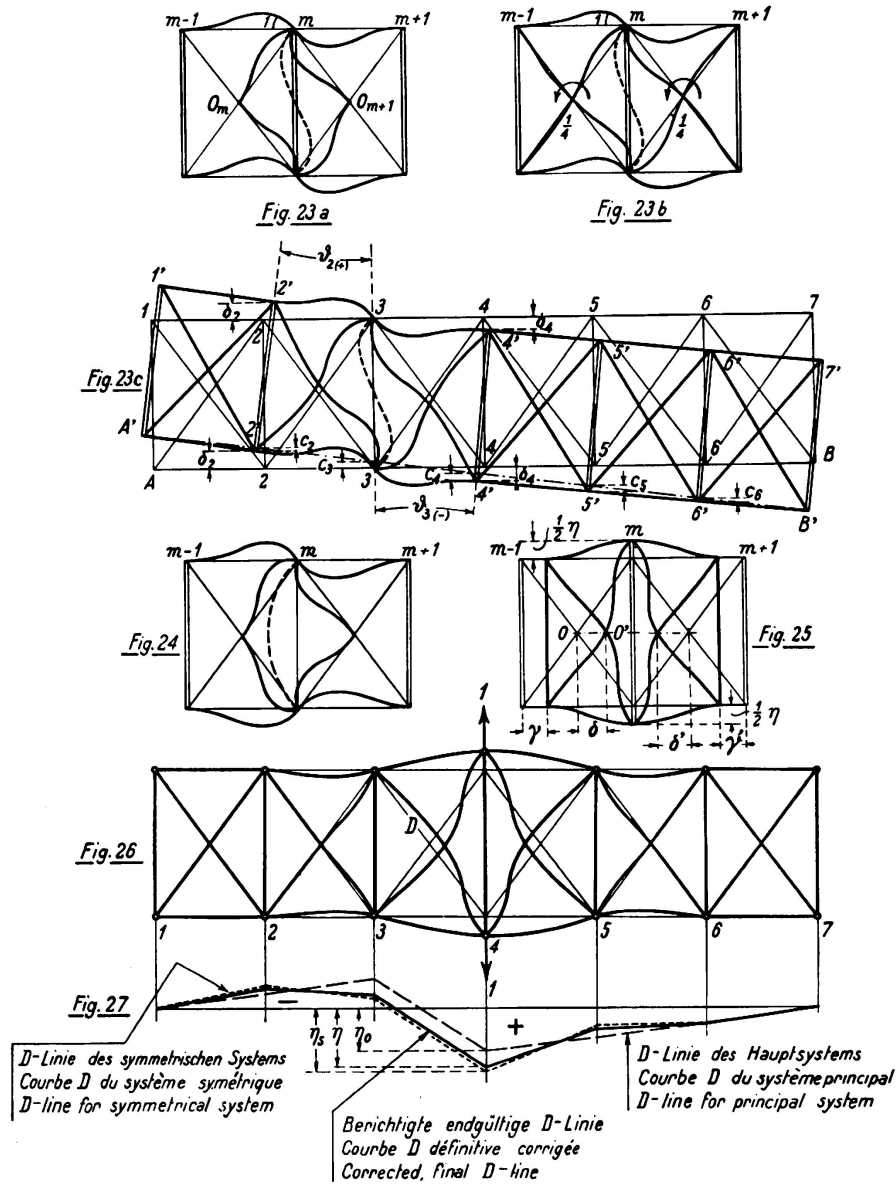


Fig. 23—27.

Danach ergibt sich aus Fig. 25 die Verschiebung der Kreuzungspunkte der Streben:

$$\delta = \frac{\gamma}{2} + \frac{h}{4a} \eta$$

oder:

$$\delta = \frac{(2 F_{dm} \cos^3 \alpha + F_{om}) \operatorname{tg} \alpha}{4 (F_{om} + F_{dm} \cos^3 \alpha)} \eta \tag{38}$$

und ganz entsprechende δ' mit den entsprechenden Stabquerschnitten im Felde $m + 1$.

Hiernach ergibt sich nun die Verschiebung der Endtangente-Kreuze senkrecht zu den Stabachsen:

Für die inneren Strebenhälften im Feld m

$$\delta \cdot \sin \alpha + \frac{\eta}{2} \cos \alpha$$

und im Feld $m + 1$

$$\delta' \sin \alpha + \frac{\eta}{2} \cos \alpha;$$

für die äußeren Strebenhälften:

$$\begin{aligned} & (\delta - \gamma) \sin \alpha \\ & \text{beziehungsweise } (\delta' - \gamma') \sin \alpha \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nun alle bei der Verformung (Fig. 25) entstandenen Biegemomente der Stabenden, nämlich im linken Feld:

$$\left. \begin{aligned} M_{or} &= -\frac{\eta}{2} \cdot \frac{6 EJ_{om}}{a^2} = -3 \frac{EJ_{om}}{a^2} \eta \\ M_{ol} &= +3 \frac{EJ_{om}}{a^2} \eta \\ M_{ur} &= +3 \frac{EJ_{um}}{a^2} \eta \\ M_{ul} &= -3 \frac{EJ_{um}}{a^2} \eta \\ \text{Bezeichnungen} & \left\{ \begin{aligned} M_{dro} &= -\frac{24 EJ_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} \left(\delta \sin \alpha + \frac{\eta}{2} \cos \alpha \right) \\ M_{dk_1} &= -M_{dro} \\ M_{dru} &= -M_{dro} \\ M_{dk_4} &= +M_{dro} \end{aligned} \right. \\ M_{dlo} = M_{dk_3} &= +\frac{24 EJ_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} (\delta - \gamma) \sin \alpha \\ M_{dlu} = M_{dk_2} &= -\frac{24 EJ_{dm} \cos^2 \alpha}{a^2} (\delta - \gamma) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Stabendmomente im rechten Feld sind ganz entsprechend mit den Trägheitsmomentenwerten im Feld $m + 1$; damit ergibt sich nun als symmetrische Momentenbelastung der Kreuzpaare m , $m - 1$ und $m + 1$ für den Zustand $\eta = 1$, wobei also in den Gleichungen 39 $\eta = 1$ zu setzen ist:

$$M_m = \frac{2E}{a^2} \left[3 (J_{o(m+1)} - J_{om}) + 24 J_{d(m+1)} \cos^2 \alpha \left(\delta' \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) - 24 J_{dm} \cos^2 \alpha \left(\delta \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \right] \quad (40)$$

$$M_{m-1} = -\frac{2E}{a^2} \left[3 J_{om} + 24 J_{dm} \cos^2 \alpha (\delta - \gamma) \sin \alpha \right] \quad (41)$$

$$M_{m+1} = \frac{2E}{a^2} \left[3 J_{o(m+1)} + 24 J_{d(m+1)} \cos^2 \alpha (\delta' - \gamma') \sin \alpha \right]. \quad (42)$$

Wenn wir jetzt diese Momentwerte nach Gleichung 40 bis 42 als unabhängige Glieder, d. h. Belastungsglieder in die Gleichung 36 einsetzen, so erhalten wir aus derselben die Knotendrehwinkel ψ_1 bis ψ_7 , die sich nach Ersatz der Hilfs-

pfosten durch Gelenke ergeben. Diese Verformung bezeichnen wir zum Unterschied von dem Zustand $\eta_m = 1$ nach Fig. 25 als den „Zustand $\zeta_m = 1$ “ (Fig. 26).

Zur Bildung des Zustandes $\zeta_4 = 1$ würden wir also die Werte M_4 , M_3 und M_5 nach Gleichung 40 bis 42 in die wagrechten Reihen 4, 3 und 5 der Gleichung 36 als unabhängige Glieder einzusetzen haben. Diese Zustände entsprechen nun genau der in der unter 4. genannten Abhandlung in Fig. 4 als „Zustand $\zeta_4 = 1$ “ bezeichneten Verformung. Die Kräfte $R_{m,n}$, welche die jetzt gelenkig angeschlossenen Hilfspfosten belasten, ergeben sich nun wie folgt:

Zunächst ergibt sich aus der Fig. 25, wenn wir m der Einfachheit halber $= 4$ setzen, als Belastung der Pfosten 3, 4 und 5:

$$\begin{aligned} \text{Pfosten 4: } R_{04} = & - (D_4 + D_5) \sin \alpha - \frac{6 E (J_{o4} + J_{o5})}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \\ & - \frac{48 E J_4 \cos^3 \alpha}{a^2} \left(\delta_4 \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \\ & - \frac{48 E J_5 \cos^3 \alpha}{a^2} \left(\delta_5 \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

Dabei sind die Werte D_4 und D_5 bereits durch Gleichung 10 genannte Abhandlung gegeben; nämlich z. B.

$$D_4 = + \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sin \alpha \cos^3 \alpha F_{d4}}{2 (\cos^3 \alpha F_{d4} + F_{o4})}}{a} E J_{d4} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Pfosten 3: } R_{34} = & - D_4 \sin \alpha + \frac{6 E J_{o4}}{a^2} \frac{1}{2a} \\ & + \frac{48 E J_4 \cos^3 \alpha}{a^2} (\delta_4 - \gamma_4) \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pfosten 5: } R_{54} = & - D_5 \sin \alpha + \frac{6 E J_{o5}}{a^2} \frac{1}{2a} \\ & + \frac{48 E J_5 \cos^3 \alpha}{a^2} (\delta_5 - \gamma_5) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ist in Punkt 4 ein elastischer Pfosten vorhanden, so erhöht sich der Wert R_{o44} noch um die Spannkraft dieses Pfostens $- 1 \cdot \frac{E F_v}{h}$. Nun entstehen aber noch weitere Pfostenbelastungen durch die Drehwinkel ψ , wobei es aber unter allen Umständen genügt, die Belastung der Stäbe $m - 1$, m und $m + 1$, in unserem Falle also R_3 , R_4 und R_5 zu berücksichtigen.

Dabei ist nun allgemein

$$\begin{aligned} R_m = & \frac{6 E}{a^2} \left[J_{o(m+1)} (\psi_m + \psi_{m+1}) - J_{om} (\psi_{m-1} + \psi_m) \right. \\ & \left. + 4 (J_{d(m+1)} - J_{dm}) \cos^3 \alpha \psi_m \right] \end{aligned} \quad (43)$$

also

$$R_{44} = \frac{6 E}{a^2} \cdot [J_{05} (\psi_4 + \psi_5) + J_{04} (\psi_3 + \psi_4) + 4 (J_{d5} - J_{d4}) \cos^3 \alpha \psi_4]$$

$$R_{34} = \frac{6 E}{a^2} \cdot [J_{04} (\psi_3 + \psi_4) + J_{03} (\psi_2 + \psi_3) + 4 (J_{d4} - J_{d3}) \cos^3 \alpha \psi_3]$$

$$R_{54} = \frac{6 E}{a^2} \cdot [J_{06} (\psi_5 + \psi_6) + J_{05} (\psi_4 + \psi_5) + 4 (J_{d6} - J_{d5}) \cos^3 \alpha \psi_5].$$

Es ist nun

$$\left. \begin{aligned} R_{44} &= R_{044} + R_{444} \\ R_{34} &= R_{034} + R_{434} \\ R_{54} &= R_{054} + R_{454} \end{aligned} \right\} \text{Wir erhalten also, nach Ausscheidung sehr kleiner Belastungswerte, nur R-Werte, deren Zeiger sich nicht mehr als um 1 unterscheiden.}$$

Belasten wir nun das Tragwerk in den Punkten m_o und m_u mit dem Lastenpaar Eins (Fig. 26), welches wir natürlich der Nullbelastung R_m zuzählen müssen, so sind die durch dieses Lastenpaar Eins entstandenen Verformungen ζ durch die Gleichung gegeben:

$$R_m = 0 = R_{m(m-1)} \zeta_{m-1} + R_{m m} \zeta_m + R_{m(m+1)} \zeta_{m+1} \tag{44}$$

oder vollständig in unserm Falle bei Belastung in den Punkten 4_o und 4_u :

	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6	ζ_7	
1	R_{11}	R_{12}						
2	R_{21}	R_{22}	R_{23}					
3		R_{33}	R_{33}	R_{34}				
4			R_{43}	R_{44}	R_{45}			1
5				R_{54}	R_{55}	R_{56}		
6					R_{65}	R_{66}	R_{67}	
7						R_{76}	R_{77}	

(44 a)

Das Gleichungssystem 44 ist wiederum ein Gleichungssystem *Clapeyronscher* Art. Es liefert uns, wenn wir den unabhängigen Wert + 1 nacheinander in die wagrechten Spalten 1 bis 7 einsetzen, die durch Belastung der Punktpaare 1 bis 7 mit Lastpaaren Eins entstehenden ζ -Werte.

Die sieben sich dabei ergebenden Biegelinien des Lastgurtes (Untergurt) sind die Einflußlinien für die 7 Werte ζ_1 bis ζ_7 . Da nun jedem dieser Werte ζ nach Fig. 26 ganz bestimmte Kraftgrößen-Werte für die Achsspannungen der Stäbe und der Stabendmomente der benachbarten Felder entsprechen, wobei wir uns auf die beiden, links und rechts von dem betreffenden ζ -Wert liegenden Felder beschränken können, ergeben sich für alle Kraftgrößen in einem Feld m

zusätzliche Einflußlinien, deren Ordinaten η gegeben sind durch die Gleichung:

$$\eta_m = \mu_{m-1} \zeta_{m-1} + \mu_m \zeta_m. \quad (45)$$

Diese Zusatzeinflußlinien sind zu dem nach Fig. 11 gefundenen und durch die sich nach Fig. 23e ergebenden Biegelinien bereits verbesserten Einflußlinien zu addieren; wir erhalten dann die endgültigen Einflußlinien für alle Kraftgrößen.

Nachzutragen bleibt noch eine Bemerkung über die auf Grund der Verformungen der Fig. 19—21 gefundenen Einflußlinien. Es ergab sich dabei bekanntlich außer der antisymmetrischen Belastung des Ober- und Untergurtnotens noch eine zusätzliche symmetrische Belastung, welche zunächst eine Verschiebung der Lastknotenpunkte nicht verursachte, solange die gelenkig angeschlossenen Hilfspfosten noch vorhanden waren. Die sich durch diese symmetrische Belastung ergebenden Drehwinkel ψ nach Gleichung 36 erzeugen jedoch Belastungen dieser gelenkig angeschlossenen Hilfspfosten nach Gleichung 43, die, als unabhängige Glieder in das Gleichungssystem 44 eingesetzt, Werte für ζ_1 bis ζ_7 ergeben. Die hierdurch bedingten Biegelinien des Lastgurtes sind zu den betreffenden Einflußlinien noch zu addieren. Eine antisymmetrische Momentenbelastung dagegen, welche die Drehwinkel φ erzeugt, hat zwar eine Verbiegung des ganzen Trägers nach Fig. 25e zur Folge, aber keine Pfostenbelastung, also keine Spreizungen.

5. Nachträgliche Berichtigung der Einflußlinien unsymmetrischer Träger.

Wir hatten die Einflußlinien des Hauptsystems unter Berücksichtigung verschiedener Querschnitte oder Trägheitsmomente des Ober- und Untergurtes ermittelt, bei der weiteren Entwicklung dieser Einflußlinien jedoch, die Unsymmetrie nicht berücksichtigt und jeweils die der Fahrbahn fern liegenden Gurte zu Grunde gelegt und unter dieser Annahme die Biegelinie des Fahrbahngurtes als Einflußlinie ermittelt.

Ist nun in Fig. 27 die gestrichelte Linie die Einflußlinie des Hauptsystems, die also mit Rücksicht auf die Unsymmetrie richtig ermittelt wurde, die punktierte Linie die als endgültig ermittelte Einflußlinie ohne Berücksichtigung der Unsymmetrie, so ermittle man den Unterschied der Trägheitsmomente des wirklichen Trägers J_t und des angenommenen symmetrischen Trägers J_s .

Dann kann man sich vorstellen, daß man einen Träger von dem Trägheitsmoment $J_t - J_s$, der also das Bestreben haben würde, der Biegelinie des Hauptsystems zu folgen, gewaltsam in die Lage der punktierten Linie verbiegt. Er wird dann das Bestreben haben, diese Gurtbiegelinie in die ursprüngliche Lage der Biegelinie des Hauptsystems zurückzubiegen. Sind die Ordinaten der Einflußlinie des Hauptsystems η_0 , die des symmetrischen Systems η_s und die des endgültigen Systems η , so wird angenähert die richtige Ordinate sich ergeben als

$$\eta = \eta_0 + (\eta_s - \eta_0) \frac{J_s}{J_t}. \quad (46)$$

Da der Unterschied zwischen J_s und J_t immer nur gering sein wird, so ergibt sich, daß der unter Annahme der Symmetrie gemachte Fehler überhaupt stets klein ist, seine Berichtigung nach dem hier angegebenen Annäherungsverfahren also durchaus zulässig ist.

6. Übersichtliche Zusammenfassung des Verfahrens.

1. Ermittlungen der Einflußlinien des Hauptsystems für die Kraftgrößen (Fig. 11) durch Anbringung der der betreffenden Kraftgröße entsprechenden Verformung „Eins“.
2. Feststellung der durch diese Verformung entstandenen Momentenbelastung der Knotenpunkte und Zusammenfassung derselben in antisymmetrische und symmetrische Momentenbelastung der Ober- und Untergurtnoten (Gleichung 26 bis 28 und 30 bis 32).
3. Darstellung der einzelnen (je 7) Zustände $\varphi_m = 1$ und $\psi_m = 1$ (Fig. 23 bis 24).
4. Ermittlung der Beiwerte $M_{m,u}$ aus diesen einzelnen Zuständen (Gleichung 23 bis 25 und 33 bis 35).
5. Aufstellung der *Clapeyronschen* Gleichungssysteme 29a und 36 aus den nach 2. gefundenen unabhängigen Belastungsgliedern und den nach 4. gefundenen Beiwerten der abhängigen Glieder.
6. Auflösung dieser Gleichungssysteme, wobei sich die Knotendrehwinkel φ_m und ψ_m ergeben. Damit ergeben sich auch nach Fig. 23c die zu jedem der gefundenen Winkel φ_m gehörenden Biegelinien des Lastgurtes, die den nach Fig. 11 gefundenen Einflußlinien zuzuzählen sind, während die symmetrischen Drehwinkel ψ_m keine Verschiebung der Lastgurtnoten herbeiführen.
7. Darstellung der einzelnen Zustände „ $\eta_m = 1$ “ (Fig. 25); Ermittlung der dabei entstehenden, in diesem Falle nur symmetrischen Momentenbelastungen der Knotenpunkte; Einsetzen dieser Momentenbelastungen als unabhängige Glieder in das Gleichungssystem 36; Auflösung desselben, wodurch sich alle Knotendrehwinkel ψ_m für jeden einzelnen Zustand $\eta_m = 1$ und damit die Zustände $\zeta_m = 1$ ergeben.
8. Ermittlung der bei den einzelnen Zuständen $\zeta_m = 1$ entstehenden Belastungen der Hilfspfosten.
9. Anbringung von Einzellastpaaren in den einzelnen Knotenpunkten m als Grundbelastungen des Systems.
10. Aufstellung des Gleichungssystems 44 für die einzelnen Einzellastpaare unter Benützung der nach 8. und 9. sich ergebenden unabhängigen Glieder und Beiwerte der abhängigen Glieder.
11. Durch Auflösung der 7 Gleichungssysteme 44 ergeben sich die den einzelnen Einzellastpaaren entsprechenden Verformungen nach Beseitigung der Hilfspfosten und damit die Einflußlinien für ζ_1 bis ζ_7 .
12. Alle Kraftgrößen je eines Feldes werden als lineare Funktionen der beiden, das Feld einschließenden ζ -Werte dargestellt und dementsprechend ihre Zusatzeinflußlinien aus den Einflußlinien dieser beiden ζ -Werte entwickelt.
13. Für die Einflußlinien der Stabendmomente, deren Verformungen auch symmetrische Knotenpunktbelastungen ergeben, werden noch nach Gleichung 44,

die dadurch bedingten ζ -Werte ermittelt, und die auf die Verbiegung des Lastgurts entfallenden Anteile der ζ den bisher gefundenen Einflußlinien zugezählt.

14. Bei unsymmetrischen Trägern Verbesserung der gefundenen Einflußlinien nach Gleichung 46 (Fig. 27).

Zusammenfassung.

Nach einer Einleitung über die besonderen Eigenschaften des Rautenträgers und über den auffallenden Einfluß der Gurtsteifigkeit dieses Balkens, studiert der Autor die schwierige Aufgabe, den Rautenträger als Tragwerk aus biegungsfest verbundenen Stäben zu behandeln, unter Anwendung von nur drei sehr einfachen Gleichungssystemen der Clapeyronschen Form, wobei zu beachten ist, daß sich in allen Fällen nur die unabhängigen Glieder, nicht aber die Beiwerte der abhängigen Glieder der Gleichungssysteme ändern.