

# Elastisch eingespanntes Talsperrengewölbe

Autor(en): **Hofacker, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-2861>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## VI 5

# Elastisch eingespanntes Talsperrengebölbe.

L'arc de barrage élastiquement encastré.

Elastically Built-in Arch Dams.

Dr. sc. techn. K. Hofacker,  
Zürich.

Als „Talsperrengebölbe“ soll ein Bogen mit kreisförmig gekrümmter Axe und mit konstanter Bogenstärke, die im Verhältnis zur Spannweite groß sein kann, bezeichnet werden. Im Gegensatz zum „Brückengebölbe“, das als Stabwerk genau genug auf Grund der Navierschen Biegungstheorie berechnet werden darf, muß das Talsperrengebölbe nach der mathematischen Elastizitätstheorie untersucht werden, falls ein genaues Bild über den effektiven Spannungszustand entworfen werden soll.

Zerlegt man den Wasserdruck, der auf eine Gebölbestaumauer wirkt, nach bekannter Methode auf die beiden sich durchdringenden Systeme von waagerechten Bogen und lotrechten Konsolträgern, so ergeben sich für die einzelnen Elemente ganz beliebige Belastungsdiagramme. Die Berechnung der Spannungen in lotrechten scheibenförmigen Trägerelementen nach der Theorie des ebenen Spannungs- bzw. Formänderungszustandes ist schon seit längerer Zeit bekannt. Auch sind schon diesbezügliche experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden. Die Berechnung der Spannungen in horizontalen scheibenförmigen Bogenelementen ist bisher nur für den Sonderfall eines starr eingespannten Bogens durchgeführt worden. Über genaue Messungen der Spannungen oder Formänderungen von solchen Talsperrengebölben an Laboratoriumsmodellen ist dem Verfasser nichts bekannt. Es war deshalb von besonderem Interesse, die Frage des in allgemeiner Weise elastisch eingespannten Bogens, der durch beliebigen Wasserdruck belastet wird, theoretisch und experimentell zu untersuchen.<sup>1</sup>

Wir unterwerfen eine kreisringförmige Scheibe dem ebenen Spannungszustand, Fig. 1.

Ein gegebenes Belastungsdiagramm kann mit Hilfe einer Fourierschen Reihe mathematisch dargestellt werden durch:

$$\sigma'_r = A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cdot \sin n\varphi \quad (1)$$

<sup>1</sup> K. Hofacker: Das Talsperrengebölbe, 1936, Verlag Gebr. Leemann & Co., Zürich.

Wir betrachten in Fig. 2 die Spannungen, die auf ein Element  $dF$  im Punkte 0 wirken und schreiben die Gleichgewichtsbedingungen an. Unter Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Spannungen und den Dehnungen,

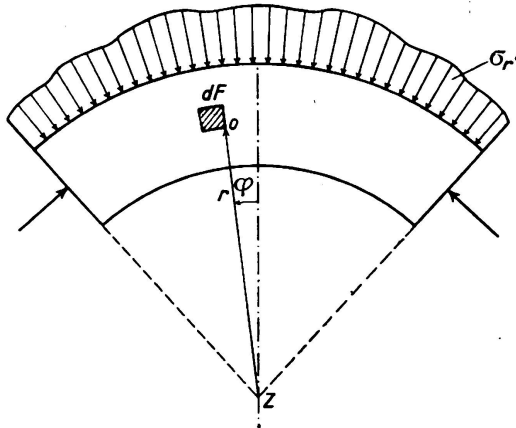


Fig. 1.

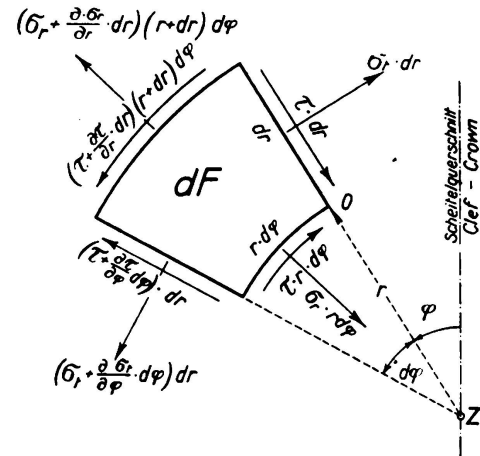


Fig. 2.

d. h. den bezogenen Differenzen der Verschiebungen  $u$  und  $v$  in radialer und tangentialer Richtung, ergeben sich die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{m-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2m}{m-1} \left( \frac{1}{mr} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{2m}{m-1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \frac{m+1}{m-1} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3m-1}{m-1} = 0 \quad (3)$$

Die allgemeinen Lösungen für  $u$  und  $v$  lauten:

Radialverschiebung:

$$\begin{aligned} E \cdot u = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{a_0}{r} + \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cdot b_0 - \frac{m+1}{m} c_0 \right] \cdot r + \frac{2(m-1)}{m} \cdot c_0 \cdot r \lg r \\ & + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2\beta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi - \left( \frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2\delta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\ & + \left[ \left( a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot b_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \frac{\alpha_1}{r^2} \right] \cos \varphi \\ & + \left[ \left( c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot d_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} \right] \sin \varphi \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} - \left( \frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left( \frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left( \frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} + \left( \frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

Tangentialverschiebung:

$$\begin{aligned}
E \cdot v = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_0}{r} + 4 c_0 r \cdot \varphi + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2 \beta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\
& + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2 \delta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi \\
& + \left[ - \left( a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r - \frac{m+1}{2m} \cdot a_1 + \frac{5m+1}{m} b_1 r^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \beta_1 \right] \sin \varphi \\
& + \left[ \left( c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m+1}{2m} \cdot c_1 - \frac{5m+1}{m} \cdot d_1 r^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \delta_1 \right] \cos \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} + \left( n \frac{m+1}{m} + 4 \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left( n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left( n \frac{m+1}{m} + 4 \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} - \left( n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi
\end{aligned} \tag{5}$$

Aus den Verschiebungen berechnen sich die Spannungen zu:

Radialspannung

$$\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 1) + \left( \frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2 b_1 r - \frac{2 \alpha_1}{r^3} \right) \cos \varphi \\
& + \left( \frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2 d_1 r - \frac{2 \gamma_1}{r^3} \right) \sin \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) b_n r^n \\
& \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) \cdot d_n r^n \\
& \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
\end{aligned} \tag{6}$$

Tangentialspannung

$$\begin{aligned}
\sigma_t = & -\frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 3) + \left( 6 b_1 r + \frac{2 \alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos \varphi \\
& + \left( 6 d_1 r + \frac{2 \gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \sin \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot b_n \cdot r^n \\
& \quad + n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot d_n \cdot r^n \\
& \quad + n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
\end{aligned} \tag{7}$$

## Schubspannung

$$\begin{aligned}
 \tau = & \frac{\alpha_0}{r^2} + \left( 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \sin \varphi \\
 & - \left( 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \cos \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) \cdot b_n \cdot r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi \\
 & - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) d_n \cdot r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi
 \end{aligned} \tag{8}$$

Nachdem nun die allgemeinen Gesetze für die Spannungen und Verschiebungen bekannt sind, handelt es sich um die Bestimmung der Konstanten mit Hilfe der Randbedingungen, indem für die Kreisränder die entsprechenden Werte von  $\sigma_r$  Gl. (6) und  $\sigma'_r$  Gl. (1) einander gleichgesetzt, d. h. indem die Koeffizienten entsprechender trigonometrischer Terme identifiziert werden.

Für die Radialränder kann nur über die Verschiebungen der Randpunkte eine Bedingung formuliert werden. So muß bei starrer Einspannung des Gewölbes gefordert werden, daß die Randpunkte keine Verschiebungen erleiden dürfen. Bei elastischer Einspannung müssen die Verschiebungen der Randpunkte des Bogens die gleichen Werte annehmen wie die entsprechenden Punkte des Widerlagers, das durch Normal- und Schubspannungen im Einspannquerschnitt des Bogens belastet wird. Diese Frage wurde in der Publikation des Verfassers eingehender behandelt.

Zur Vereinfachung des Berechnungsverfahrens sind in Fig. 3 für die Eckpunkte A und B des Bogens die Radial- und Tangentialverschiebungen sowie die aus ihnen berechnete Verlängerung  $h_A$  der inneren Bogensehne und die Drehung  $\vartheta$  des Kämpferquerschnittes eingetragen.

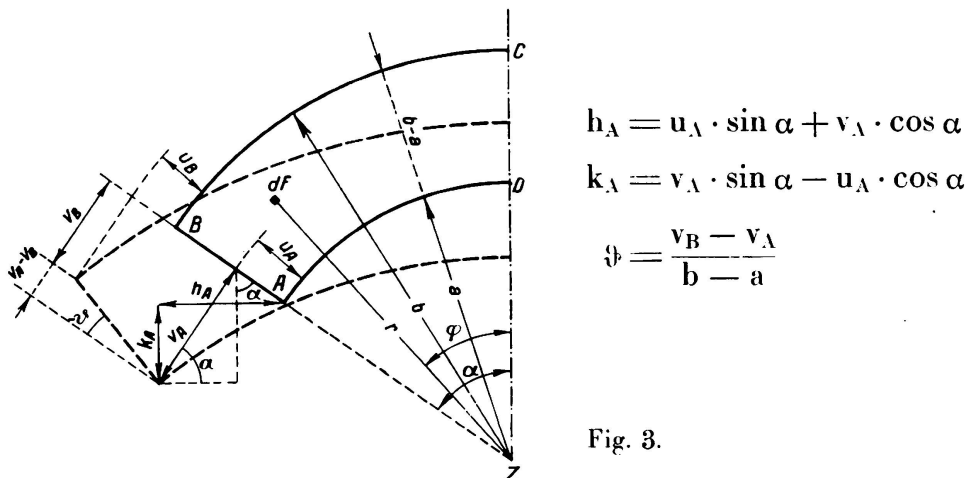


Fig. 3.

Die theoretischen Studien wurden alsdann durch Messungen an Celluloidmodellen überprüft.

Fig. 4 zeigt die Ansicht eines elastisch eingespannten Talsperrengewölbes, das an der äußern Leibung durch radialgerichtete Pressungen belastet wird.

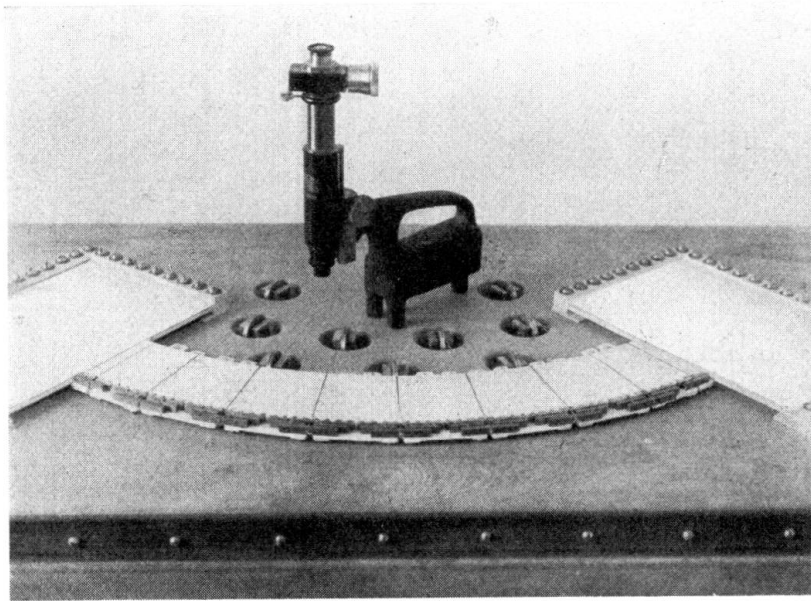


Fig. 4.

In Fig. 5 sind die mit Hilfe von Mikroskopen gemessenen Verschiebungen der Kreisränder dargestellt. Für die beiden Schnitte  $\varphi = 36^\circ$  und  $\varphi = 27^\circ$  sind

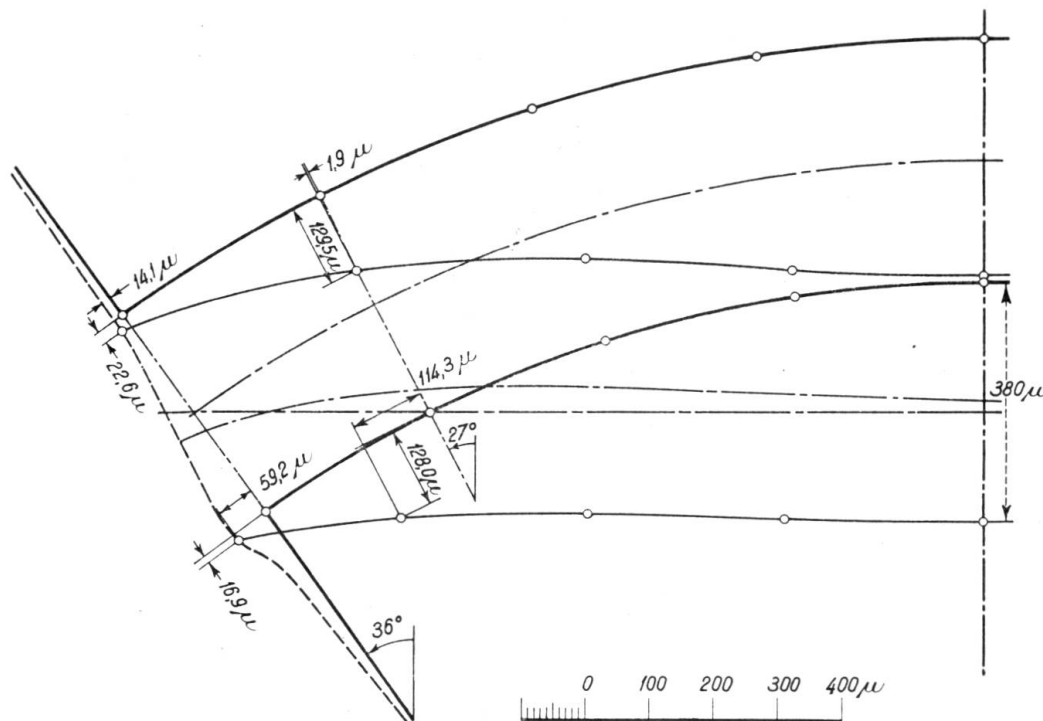


Fig. 5.

die gemessenen Werte der Verschiebungen eingetragen. Berechnet man die Scheitelsenkung des inneren Randes, indem zum Beispiel die Verschiebungen der

Randpunkte des Schnittes  $\varphi = 27^\circ$  als Widerlagerverschiebungen des in diesem Radialschnitt elastisch eingespannten Bogens betrachtet werden, so erkennt man,

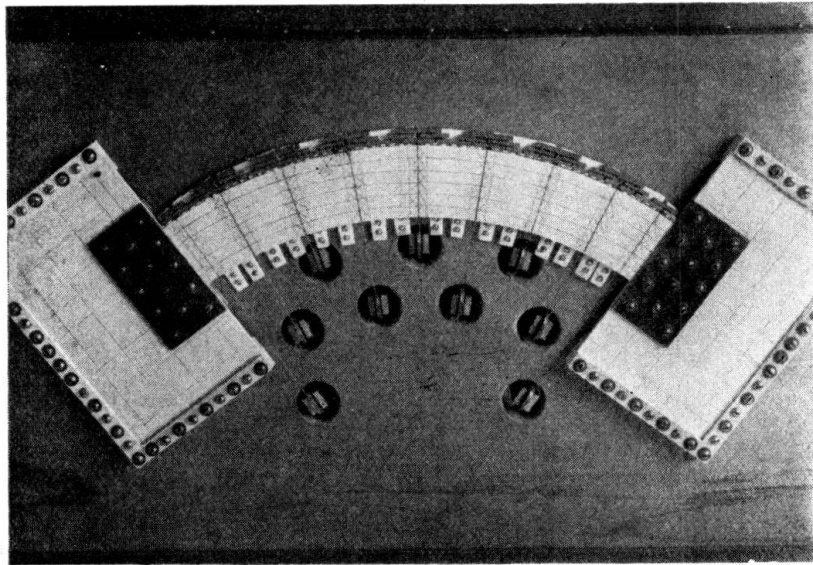


Fig. 6.

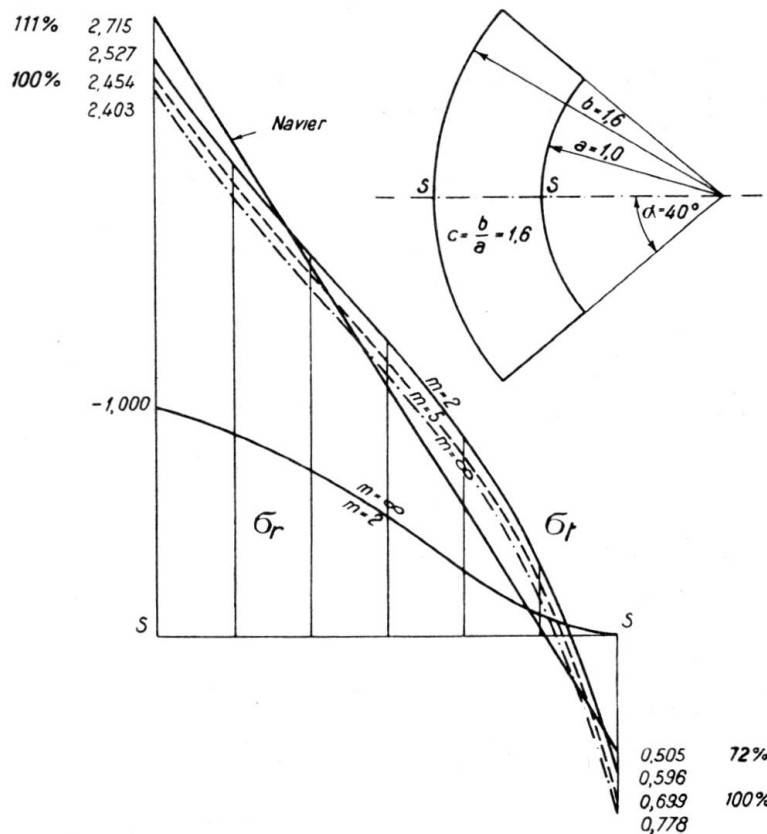


Fig. 7.

daß der gemessene Wert nur um  $\frac{1}{3}\%$  größer ausfällt als der berechnete. Diese Übereinstimmung genügt zur Anerkennung der theoretischen Grundlagen des Problems.

Berechnet man unter Berücksichtigung der gemessenen Verschiebungen der Eckpunkte des Kämpferquerschnittes die Scheitelsenkung des inneren Randes, so weicht das Resultat um rd. 4 % vom gemessenen Wert ab. Fig. 6 zeigt das Modell des starr eingespannten Bogens. Setzt man für diesen Fall voraus, daß das Spannungs- und Deformationsgesetz bis zur Einspannstelle ungestört gelte, so ergibt die Rechnung gegenüber der Messung für die Scheitelsenkung einen um rd. 15 % zu kleinen Wert. Die in Wirklichkeit in der Umgebung des Einspannquerschnittes auftretenden größeren Deformationen sind eine Folge der Spannungskonzentration gegen die luftseitige Leibung hin. Die bisher in dieser Richtung durchgeführten Untersuchungen<sup>2</sup> setzen starre Einspannungen voraus.

An Hand eines Beispielles des durch Wasserdruck beanspruchten Talsperrengehölbes sollen die Spannungsdiagramme der genauen Theorie mit den Ergebnissen der Navierschen Näherungslösung, die bisher zur Untersuchung von elastisch eingespannten Gehölben ausschließlich verwendet wurde, verglichen werden. Aus Fig. 7 erkennt man gleichzeitig den Einfluß der Poissonzahl  $m$  der Querkontraktion auf die Spannungswerte. Die Näherungslösung ergibt für die Zugspannungen, unter Annahme einer Poissonzahl  $m = 5$  für Beton im Scheitel, um rd. 28 % zu kleine Werte.

---

<sup>2</sup> *M. Caquot*: Annales des Ponts et Chaussées, 1926, IV. Juillet-Août, S. 21. *R. Chambaud*: Génie Civil 1926 (Bd. 99 und 100).