

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 2 (1936)

**Artikel:** Théorie générale de la plasticité: champs de lignes de cession

**Autor:** Freudenthal, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-2910>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Théorie générale de la plasticité. Champs des lignes de cession.

Allgemeine Plastizitätstheorie, Gleitlinienfelder.

General Theory of Plasticity, Fields of Equal Yield Lines.

Dr. Ing. A. Freudenthal,  
Warschau.

### Introduction.

L'évolution de la théorie de la plasticité a accusé, au cours de ces dernières années, de tels progrès que l'exposé de ses résultats et conséquences doit faire, à ce Congrès, l'objet d'une séance de travail particulière. Quoiqu'il en soit, il subsiste encore dans ses principes essentiels de notables obscurités. Il est certain que les conceptions très évoluées de la physique moderne nous ont conduit à réviser en partie un grand nombre de nos points de vue habituels en ce qui concerne la résistance des matériaux et principalement ceux de ces points de vue qui portent sur les questions de structure. Les obscurités qui subsistent encore dans les notions fondamentales de la théorie de la plasticité débordent toutefois le cadre de ces conceptions et doivent plutôt être considérées comme résultant d'une imprécision dans l'interprétation de faits d'ordre phénoménologique.

La mécanique des corps solides est en grande partie régie par la loi de *Hooke*. Cette loi qui a permis d'établir une théorie assez poussée du régime élastique, n'est toutefois valable que dans une certaine limite. C'est pourquoi l'on s'est depuis longtemps efforcé d'établir des lois semblables qui seraient d'une validité générale et qui s'appliqueraient également à la mécanique d'états quelconques, de quelque côté qu'ils se trouvent de la limite ci-dessus. On s'est toutefois heurté là à des difficultés importantes, car si le comportement élastique est plus ou moins équivalent pour différentes matières, tout au moins du point de vue phénoménologique, par contre, le comportement après dépassement de la limite d'élasticité dépend essentiellement de la constitution de la matière considérée:

Les recherches mathématiques sur la théorie de la plasticité ont débuté par l'emploi de méthodes dont il était avéré qu'elles pouvaient être utilisées dans la théorie des états d'équilibre limite des masses sans cohésion, en vue du calcul des états plastiques des corps solides. On se basait ainsi sur la similitude entre les courbes limites de *Mohr* pour les corps sans cohésion et celles de différents corps solides. Etant donné les différences fondamentales de constitution que présentent entre eux ces différents corps solides, la méthode devait toutefois nécessairement échouer, ou tout au moins conduire à des résultats différant

sensiblement de la réalité. Il ne faut en effet jamais perdre de vue que les corps de structure cristalline doivent tout d'abord subir des déformations plus ou moins élastiques avant d'atteindre l'état plastique, dans lequel d'ailleurs les régimes élastique et plastique coexistent toujours pratiquement et chevauchent même le long de certaines surfaces, alors que les masses sans cohésion subissent généralement des perturbations d'équilibre par suite de leur passage à l'état plastique. La distinction introduite par *Hencky*<sup>1</sup> entre les cas d'équilibre isostatique et hyperstatique est donc essentielle pour l'étude des problèmes concernant la théorie de la plasticité. Par cas d'équilibre isostatique, *Hencky* entend en effet ceux dans lesquels les conditions d'équilibre et de plasticité sont ensemble suffisantes pour permettre de déterminer les contraintes en tout point donné, tandis que la résolution d'un cas d'équilibre hyperstatique rend nécessaire l'intervention d'une étude des déformations. Dans l'étude de l'état plastique des matériaux de construction, on se trouve presque exclusivement en présence de cas hyperstatiques, car dans les états limites considérés, on rencontre des zones plastiques de faible importance à côté de zones élastiques très importantes, de telle sorte que les deux états doivent être compatibles dans les zones de transition et ne peuvent être considérés que sous l'angle d'une interdépendance. L'étude mathématique de ces états est rendue considérablement plus difficile par cette interdépendance. Toutefois, et malgré les simplifications qu'elles seraient susceptibles d'apporter au calcul, il faut rejeter toutes hypothèses qui seraient en contradiction avec le comportement effectif des matériaux et qui ne serviraient qu'à permettre d'aboutir plus facilement à une solution mathématique du problème.

La plus importante de ces simplifications, qui porte sur presque toute la théorie mathématique de la plasticité, est l'hypothèse suivant laquelle les déformations élastiques peuvent être négligées par rapport aux déformations plastiques à cause de leurs valeurs relativement faibles. Cette hypothèse qui n'est pas autre chose qu'une déduction par analogie, tendant à conclure, à partir du comportement des corps sans cohésion, sur le comportement des corps de structure cristalline, est inadmissible en ce qui concerne les états d'équilibre dans lesquels coexistent le domaine élastique et le domaine plastique. On trouve déjà dans l'étude bien connue de *Haar* et *Kármán*<sup>2</sup> la démonstration du fait que dans le domaine semi-plastique, c'est-à-dire dans lequel  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 4k^2$  ( $2k =$  limite d'écoulement), tandis que  $(\sigma_2 - \sigma_3)^2 < 4k^2$  et  $(\sigma_3 - \sigma_1)^2 < 4k^2$ , les déformations plastiques sont de l'ordre de grandeur des déformations élastiques; il n'est donc pas admissible de négliger les dernières par rapport aux premières dans les cas où les deux types de déformations se manifestent.

Tous les essais antérieurs en vue de résoudre mathématiquement les problèmes plastiques concernant les corps de nature cristalline ont toutefois été plus ou moins appuyés sur cette hypothèse. Les exceptions à cette règle sont très peu nombreuses et le plus important des travaux dans lesquels on ait renoncé à cette hypothèse est une étude de *Hencky*;<sup>3</sup> or, dans le cas le plus simple, ce travail conduit déjà à des investigations mathématiques d'une telle difficulté que l'étude de cas moins simples est alors impossible avec les ressources qu'offrent actuellement les mathématiques.

Nous nous proposons dans ce qui suit, en tenant compte des obscurités

qui planent encore sur les notions de base de la théorie de la plasticité, d'analyser brièvement ces notions essentielles et d'examiner l'importance des phénomènes de déformation plastique des corps de nature cristalline, les uns par rapport aux autres. Notre étude portera avant tout sur les phénomènes qui sont désignés, dans la littérature scientifique, sous le nom de « figures d'écoulement ». Ainsi qu'il est courant dans la théorie de la plasticité, nous considérerons des processus évoluant avec une lenteur telle qu'ils puissent être envisagés comme constituant une succession d'états d'équilibre, ce qui nous dispensera d'une manière générale de faire intervenir effectivement les vitesses de déformation.

### 1° — Condition de plasticité.

La première question qui se pose dans l'étude de la théorie de la plasticité est celle de savoir dans quelles conditions la limite d'écoulement d'un matériau se trouve dépassée. Avant d'examiner brièvement les hypothèses actuellement existantes au sujet de l'écoulement, nous citerons une phrase de Roš, qui offre un intérêt capital tant pour l'interprétation des hypothèses concernant la rupture que pour l'interprétation de celles qui se rapportent à l'écoulement: « Par suite des différences foncières de comportement entre des matières qui présentent des structures tout à fait différentes les unes des autres, il est absolument impossible de mettre sur pied une théorie générale de la rupture qui ne tiendrait précisément pas compte de la structure propre de chaque matière. A chaque matière, correspond plutôt une théorie particulière de la rupture, théorie qui résulte de la structure interne et du mécanisme de déformation de la matière considérée ». L'existence de si nombreuses hypothèses s'explique aisément par ce fait qu'une affirmation aussi précise n'avait jamais été formulée auparavant et que l'on avait par suite tendance à généraliser les résultats expérimentaux que l'on obtenait au cours des recherches sur telle matière déterminée.

Les matières dont l'industrie dispose pour l'usinage et pour la construction sont en général des matières de nature cristalline, composées en fait d'ensembles d'éléments cristallins, mais qui se comportent d'une manière quasi-isotrope par suite de l'orientation non régulière de ces éléments cristallins. En ce qui concerne la structure de l'élément cristallin lui-même, on a presque exclusivement affaire, dans le cas des métaux industriels, au système ou réseau cubique, dont il existe trois types:

- 1° — le réseau simple qui est nettement déterminé par l'indication de l'intervalle entre les éléments de masse (intervalle d'identité);
- 2° — le réseau à faces centrées, qui comporte des éléments de masse centrés sur les faces du cube;
- 3° — le réseau à élément central qui comporte en son centre spatial un élément de masse.

Le fer  $\alpha$ , le fer  $\beta$ , le fer  $\delta$  cristallisent dans le système à élément central; le fer  $\gamma$ , l'acier au nickel et au manganèse, de même que le cuivre, l'aluminium, etc., cristallisent dans le système à faces centrées.

La disposition du réseau cristallin est également très importante du point de vue pratique, car la manière suivant laquelle la matière considérée passe à l'état



plastique et les phénomènes qui caractérisent cet état sont influencés d'une manière décisive par la constitution du réseau cristallin.

Parmi les hypothèses concernant l'écoulement, nous citerons ici comme constituant les plus intéressantes:

- 1° — L'hypothèse du cisaillement du *Guest-Mohr*<sup>4</sup> qui se traduit par la relation:

$$\tau_{\max} = f(\sigma_x + \sigma_y)$$

et qui est déduite de l'ancienne théorie de *Coulomb* sur le frottement interne.<sup>5</sup> La fonction  $f(\sigma_x + \sigma_y)$  peut être adaptée aux résultats expérimentaux.

- 2° — L'hypothèse de *Beltrami* au sujet du travail constant de déformation, qui envisage, comme criterium du moment où l'on atteint la limite d'écoulement, une valeur déterminée du travail de déformation accumulé; cette hypothèse ne correspond toutefois pas avec les résultats des essais et elle a été émise sous une forme améliorée par *Huber*<sup>6</sup> et, indépendamment de *Huber*, par *Mises* et *Hencky*,<sup>7</sup> forme sous laquelle elle constitue l'hypothèse suivante:

- 3° — L'hypothèse du travail constant de déformation suivant la relation:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 8 k^2$$

- 4° — La modification de cette hypothèse suivant *Schleicher*<sup>8</sup> sous la forme bien générale:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \sigma_c(p)$$

avec:

$$p = 1/3 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Les nombreuses tentatives qui ont été faites en vue de la vérification de toutes les hypothèses ci-dessus et de certaines autres encore qui sont d'ailleurs totalement abandonnées aujourd'hui<sup>9</sup> ont montré que l'hypothèse de *Huber-Hencky-Mises* définit le passage à l'état d'écoulement pour les métaux susceptibles de déformation plastique avec ou sans limite d'écoulement nettement définie par elle-même, tandis que c'est l'hypothèse de *Mohr* qui fournit les meilleures valeurs moyennes dans le cas des matières dures et cassantes, pour les états de contrainte voisins de la limite d'écoulement.

Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue, lorsqu'il s'agit d'interpréter les indications ci-dessus, qu'il ne saurait être ici question que de résultats provisoires, auxquels les investigations ultérieures apporteront peut-être de nouvelles modifications.

## 2° — Limite d'écoulement.

L'hypothèse d'écoulement est la condition que doivent remplir les contraintes principales pour que l'état d'écoulement soit atteint en un point. Cette condition est valable, et ceci est essentiel, pour l'état qui correspond immédiatement au dépassement de la limite d'écoulement; il n'exprime toutefois aucune indication sur la manière dont ce dépassement se produit. On constate des différences entre

les processus de déformation non seulement entre métaux différents comme par exemple entre l'acier et le cuivre, mais également entre les différentes formes que peut prendre un même métal et même, pour des formes absolument semblables, suivant la vie antérieure des métaux considérés.

La différence la plus marquée se manifeste entre les métaux possédant et ne possédant pas une limite d'écoulement nettement définie. Dans le dernier cas, le passage de l'état élastique à l'état plastique se fait d'une manière assez continue, car des contraintes faibles provoquent déjà des déformations plastiques. Par contre, dans les métaux du premier cas, les déformations sont jusqu'à une certaine limite entièrement réversibles, puis la matière jusque là très résistante cède brusquement et les déformations plastiques se manifestent brusquement, la charge ne restant souvent pas constante, mais diminuant dans des proportions importantes, de telle sorte qu'il semble qu'il existe une limite d'écoulement «supérieure» et une limite d'écoulement «inférieure».

*Bach*<sup>10</sup> a déjà constaté une étroite dépendance entre cette limite supérieure d'écoulement et la forme de l'éprouvette et il a reconnu l'existence de cette limite comme constituant la limite d'un phénomène caractéristique d'instabilité (balancement de la charge). Les recherches modernes ont été plus loin encore et on explique actuellement l'existence de la limite «inférieure» d'écoulement comme constituant un phénomène de retard analogue à ceux que l'on observe dans d'autres branches de la physique (surchauffe, surfusion), ces phénomènes étant caractérisés par ce fait qu'une modification d'état escomptée conformément à une loi définie se produit avec un retard appréciable, mais d'une manière brusque, subite. L'ascension rectiligne de la courbe des déformations est maintenant considérée par *Moser*,<sup>11</sup> par exemple, comme constituant un phénomène de retard de ce genre et en particulier comme traduisant un retard des déformations permanentes, dû à des résistances internes de frottement. L'apparition brutale de la déformation plastique à la limite d'écoulement doit être alors considérée comme une tendance à réparer ce retard. Cette conception s'appuie également sur ce fait, constaté expérimentalement, que pour un acier admettant une finesse de grain donnée et dans les mêmes conditions de traitement préalable, la limite de proportionnalité se trouve d'autant plus rapprochée de la limite d'écoulement que le métal est plus homogène et que l'état de contrainte peut être produit dans ce métal dans des conditions plus dégagées de toute perturbation.

L'exactitude de la conception concernant la modalité d'existence de la limite d'écoulement présente dans la théorie de la plasticité une importance d'autant plus grande que ce n'est qu'en se basant sur cette conception que l'on peut donner leur interprétation essentielle aux phénomènes plastiques divers qui se manifestent à l'état de transition.

### 3° — *Figures d'écoulement.*

Sur des éprouvettes finement polies en fer doux, on constate au début des déformations permanentes, la formation d'une ou de plusieurs fines figures en relief, qui s'épaississent encore lorsque la charge croît. Ces lignes d'aspect mat, dont les sections correspondent à des couches fortement déformées de la

surface de l'éprouvette, accusent un profil soit en relief dans le cas de l'essai à la compression, soit en creux dans le cas de l'essai à la traction, soit sous forme d'une sorte de talus unilatéral. D'après les noms de leurs premiers observateurs, elles ont reçu les noms de lignes de *Lüders* ou de *Hartmann*; actuellement d'ailleurs, elles sont généralement connues dans la théorie de l'élasticité, sous la désignation de lignes de cession, quoique l'expression qui frappe le mieux à leur sujet soit celle de «figures d'écoulement». Leur propriété la plus importante est de coïncider avec les trajectoires des contraintes de cisaillement. Du fait même de cette propriété, ces lignes constitue un auxiliaire extrêmement précieux pour les investigations sur l'état des contraintes dans les corps solides, dans le domaine plastique.

Les figures de cession sont d'ailleurs mathématiquement caractérisées par un certain nombre de propriétés intéressantes de telle sorte qu'il devient parfaitement possible de résoudre le problème que représente l'état des contraintes dans le domaine plastique à partir de la connaissance de ces figures de cession.<sup>12</sup> La plus importante de ces propriétés est l'identité des figures de cession avec les caractéristiques de la condition de plasticité. La preuve de cette identité a été fournie par *Massau*<sup>13</sup> pour la première fois, quoique dans sa forme générale. En se basant sur cette propriété, il est possible de composer non analytiquement, le long de ces lignes de cession, plusieurs intégrales, ce qui facilite grandement l'adaptation des solutions aux conditions effectives. Les quelques solutions qui existent de la théorie mathématique de la plasticité reposent presque uniquement sur cette propriété des lignes de cession.

Dans l'interprétation des possibilités d'application de la méthode ci-dessus à la résolution effective des problèmes que pose la théorie pratique de la plasticité, il faut toutefois ne pas perdre de vue que des conditions mathématiquement exactes de franchissement d'un état limite ne doivent pas être à priori considérées comme nécessairement admissibles dans leur application au domaine physique; lorsque par exemple nous partons d'une condition d'ordre physique établie mathématiquement pour établir pour certaines grandeurs des valeurs limites déterminées, ce processus est sans aucun doute légitime du point de vue mathématique. Il est toutefois possible, physiquement, que le comportement physique correspondant à cette limite se trouve modifié et que les points de vue qui ont conduit à l'établissement de la condition correspondante perdent leur validité à la limite considérée, ou soient en tout cas fortement modifiés. C'est le cas pour la condition de plasticité.

La condition de plasticité du corps envisagé comme plastique dans son ensemble, à l'état de contrainte plane, s'énonce comme suit:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} + \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C$$

$\rho$  désignant l'angle de frottement et  $C$  une valeur qui dépend de la cohésion. Pour les corps non cohérents qui constituent le point de départ des investigations sur les lignes de cession, on a  $C = 0$ . L'apparition d'une ligne de cession a pour première conséquence une perturbation de l'équilibre; les déformations réversibles qui précèdent la manifestation de la perturbation sont in-

finiment petites par rapport aux déformations «plastiques». Dans les métaux, par contre, on a  $C = \text{constante}$  et  $\rho = 0$ . Par suite de leur grande cohésion, l'apparition des lignes de cession n'indique ici qu'une perturbation locale et passagère de l'équilibre; l'état de contrainte et de déformation élastique qui précède l'apparition des phénomènes d'écoulement eux-mêmes présente une importance notable en ce qui concerne la nature de l'écoulement et l'ordre de grandeur des déformations plastiques est le même que celui des déformations élastiques.

De ce qui précède, il résulte que les résultats obtenus par la théorie mathématique de la plasticité ne peuvent pas être considérés comme susceptibles d'une interprétation effective dans le domaine de la plasticité des matières cristallines et tout particulièrement des métaux, du point de vue pratique. Les hypothèses qui servent de base à ces résultats ne sont pas en effet remplies dans ce dernier cas. L'importance des lignes de cession pour l'étude des états plastiques des métaux qui jouent un rôle intéressant dans la pratique s'en trouve ainsi réduite. Ces lignes ne présentent par suite un intérêt certain que lorsque la déformation a suffisamment progressé pour qu'il ne subsiste plus aucun état élastique dans la zone considérée tout entière. De tels cas ne se présentent toutefois pas souvent et sont plutôt limités au domaine du travail des métaux.

Si l'on se libère du point de vue généralement admis au sujet de la grande importance que présentent les lignes de cession dans la théorie de la plasticité et si l'on cherche à estimer la valeur effective des nombreux résultats expérimentaux déjà obtenus sans aucune idée préconçue, on constate que le phénomène auquel correspondent les lignes de cession est lié, non pas à la déformation plastique en soi, mais seulement à la nature du phénomène de passage entre l'état élastique et l'état plastique. De même que pour la limite d'écoulement nettement définie, il s'agit ici de phénomènes de labilité (d'instabilité). La preuve en est fournie par une série d'observations telles que celles de *Ludwik*<sup>14</sup> suivant lesquelles les lignes d'écoulement apparaissent principalement lorsque les corps considérés commencent à subir l'écoulement sous l'influence d'une charge décroissante, c'est-à-dire lorsque la formation des lignes de cession se trouve limitée à la partie descendante de la pointe du diagramme des déformations; cette observation est confirmée par *Nadai*<sup>15</sup> et *v. Kármán* l'a souvent mentionnée. A ceci se rapporte également l'observation faite par *Nadai* et suivant laquelle le faisceau des lignes de cession est beaucoup plus dense lorsque les essais de compression sont effectués très rapidement que lorsque ces essais sont effectués lentement; il y a là une nouvelle preuve que les instabilités, que ce soient des instabilités de la charge ou des instabilités de la structure considérée, favorisent l'apparition des lignes de cession. Il est donc évident que l'apparition des lignes de cession doit également être favorisée par les perçages et les entailles ou discontinuités de section.

A ce propos, nous mentionnerons les mesures de dureté extrêmement intéressantes qui ont été effectuées par *Moser*<sup>16</sup> sur des lignes d'écoulement; si l'on tient compte de l'observation suivant laquelle les métaux présentent une augmentation de dureté dans le domaine de l'écoulement, ces observations jettent un aperçu intéressant sur la nature et l'évolution des déformations plastiques. *Moser* a observé que la déformation permanente ne se produit dès le début que

par zones (lignes de cession), la déformation étant limitée dans chaque zone à l'apparition d'un degré de dureté déterminé. Il ne se produit une nouvelle augmentation générale de la dureté que lorsque l'éprouvette tout entière (essai de traction) se trouve recouverte d'un réseau de lignes de cession. La raison de ce fait réside dans une sorte de « blocage » des surfaces de cession : lorsque le blocage se manifeste dans une zone, l'élévation continue de la charge se manifeste, par une cession, sur une autre zone n'ayant pas encore subi la déformation. A chaque fois, la charge continue à augmenter quelque peu avant que la résistance à la cession ne soit surmontée dans la zone suivante, pour diminuer ensuite lorsque se forment les lignes de cession ; chaque pointe du diagramme des déformations correspond donc à une limite d'écoulement supérieure locale telle que lorsque cette limite particulière se trouve atteinte, une ligne d'écoulement apparaît avec diminution de la charge. Contrairement à ce qui se passe avec l'acier, on a constaté sur une éprouvette de cuivre une augmentation régulière de la dureté depuis le début de l'application de la charge ; il ne s'est donc pas manifesté une formation progressive et échelonnée de lignes d'écoulement, mais on a seulement observé une perte générale du poli.

Les essais qui précèdent viennent renforcer d'une manière très puissante le point de vue suivant lequel la limite d'écoulement de l'acier constitue une manifestation de « retard » à l'écoulement, les lignes de cession ne constituant un phénomène corrélatif que dans le cas des aciers dont la limite d'écoulement n'est pas nettement définie.

Cette conception est aujourd'hui encore confirmée par les résultats des essais d'*Ititaro Takaba* et de *Katumi Okuda*,<sup>17</sup> essais qui montrent que :

- 1° — L'apparition des lignes de cession et du coude brusque de la courbe des déformations sont le résultat d'un seul et même processus, à savoir la déformation, par groupes, de quantités importantes de grains cristallins.
- 2° — Tous les métaux dans lesquels peuvent se manifester des lignes de cession ont une structure cristalline du type du réseau à élément central. Sur les aciers à structure austénitique et dont la constitution cristalline correspond au réseau à faces centrées, on n'observe pas la formation de lignes de cession.

On peut donc considérer que pour l'étude des états élastico-plastiques des matières de structure cristalline et tout particulièrement des métaux, l'observation des figures de cession ne constitue pas une méthode judicieuse, mais qu'au contraire les processus essentiels en la matière sont souvent dénaturés par les lignes de cession. Cette observation s'applique en tout premier lieu à l'apparition de la limite vraie entre l'état élastique et l'état plastique.

#### 4° — *Courbes limites du domaine plastique.*

Si l'on a recours à l'une des méthodes connues, pour mettre en évidence le domaine de déformation plastique des métaux, et de préférence à la méthode de la recristallisation,<sup>18</sup> on peut déterminer nettement les limites entre le domaine élastique et le domaine plastique (fig. 1). Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes

de cession elles-mêmes<sup>19</sup> quoiqu'elles soient formées par celles de ces lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes. La seule famille de courbes qui satisfait à ces exigences est la famille des courbes

$$\tau_{\max} = \text{constante}$$

de l'état élastique. Ce type de courbes-limites, indépendant de la forme que prend la transition entre les domaines élastique et plastique, peut être observé dans tous les états élastico-plastiques, dont il constitue le phénomène essentiel. Seules correspondent à la réalité les solutions du régime plastique des contraintes qui peuvent se raccorder régulièrement le long de chaque courbe  $\tau_{\max} = \text{constante}$  sur le régime élastique correspondant. Toute solution du problème plastique doit donc précéder celle du problème élastique et il faut observer

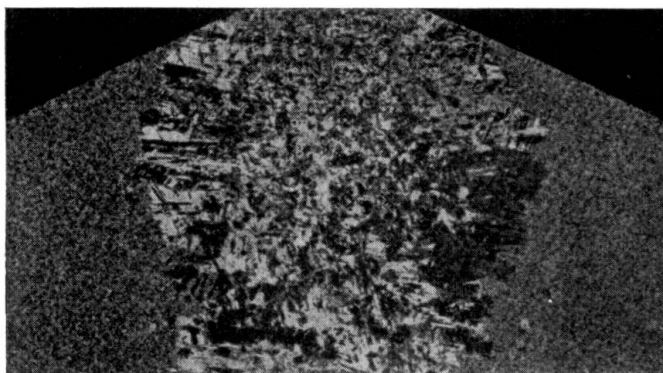


Fig. 1.

à ce sujet que la limite entre le domaine élastique et le domaine plastique n'est pas une limite fixe, mais bien une limite fluctuant avec les fluctuations de la charge et qui doit toutefois toujours correspondre aux courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  du champ élastique.

L'étude mathématique des problèmes élastico-plastiques sous les conditions précédemment exposées n'est pas facile; elle n'a été effectuée avec succès jusqu'à maintenant que pour quelques cas simples. On peut toutefois trouver une certaine simplification en ce fait que grâce à l'application des méthodes d'investigation optique des contraintes sur modèles, qui permettent de faire apparaître sous forme d'isochromes les courbes d'écart constant entre les contraintes principales, il est possible de déterminer à priori la limite du domaine plastique à partir d'un essai sur modèle.

##### 5° — *La résistance à la pénétration.*

A titre d'exemple de résolution d'un problème pratique suivant le procédé indiqué ci-dessus, nous traiterons le problème de la résistance à la pénétration comme problème plan. Cet exemple présente d'autant plus d'intérêt qu'il constitue précisément l'exemple le plus connu de résolution d'un problème plastique à l'aide des figures de cession et que sa publication a donné en son temps une impulsion particulière au développement de la théorie mathématique moderne de la plasticité.<sup>20</sup>

Il s'agit de déterminer la charge  $p$  uniformément répartie qui, agissant le long de  $AB$  (fig. 2), provoque l'écoulement à l'intérieur de la zone considérée. Cette

charge, qui est désignée sous le nom de résistance à la pénétration, doit être représentée comme fonction de la limite d'écoulement et de l'angle d'inclinaison du talus latéral. Comme on considère ici l'état de déformation dans le plan ( $\epsilon_x = 0$ ), la condition d'écoulement de *Huber-Hencky-Mises* s'énonce comme suit:

$$(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \frac{16}{3}k^2.$$

On a ici pour la limite d'écoulement:  $\sigma_F = 2k$ .

Comme la solution du problème de la coupe par pénétration large ne peut être considérée ni comme problème élastique, ni comme problème plastique d'une manière stricte, on peut ici tourner la difficulté en considérant seulement l'angle A et en tenant compte du fait que dans cet angle, les courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  du problème que représente la figure 3 sont tangentes aux courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  du profil tronqué considéré. Pour la détermination de la charge critique, il est indifférent que nous déterminions les courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  elles-mêmes ou leurs tangentes.

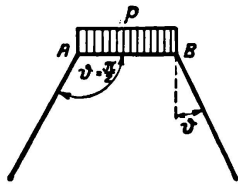


Fig. 2.

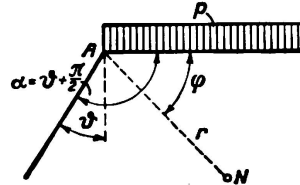


Fig. 3.

A partir de la solution élastique de l'angle lui-même, à l'aide de la fonction des contraintes d'Airy:

$$F = a r^2 + b r^2 \varphi + c r^2 \sin 2 \varphi + d r^2 \cos 2 \varphi \quad (1)$$

relation dans laquelle les quatre constantes a, b, c, d peuvent être déterminées à partir des 4 conditions marginales:

$$\begin{aligned} \text{pour } \varphi = 0 \quad \sigma_t &= -p \quad \tau = 0 \quad (\text{sans frottement}) \\ \text{pour } \varphi = \alpha \quad \sigma_t &= 0 \quad \tau = 0 \end{aligned}$$

nous obtenons pour les contraintes les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p (Q - 1) - 2 P \cdot p \cdot \varphi - p \cdot P \cdot \sin 2 \varphi + p \cdot Q \cos 2 \varphi \quad (2) \\ \sigma_t &= p (Q - 1) - 2 P \cdot p \cdot \varphi + p \cdot P \cdot \sin 2 \varphi - p \cdot Q \cos 2 \varphi \\ \tau &= p \cdot P - p \cdot P \cos 2 \varphi - p \cdot Q \sin 2 \varphi \end{aligned}$$

avec:

$$P = -\frac{1}{2(\alpha - \text{tg } \alpha)} \quad Q = -\frac{1}{2(\alpha \text{ ctg } \alpha - 1)}$$

En posant pour abrégier:

$$x = \frac{\tau_{\max}^2 - p^2 Q^2}{4 p^2 P^2}$$



on obtient l'équation des courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  après rapide calcul intermédiaire, sous la forme :

$$y = -\frac{x}{2(x-1)} \left[ \operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 4x^2} \right] \quad (3)$$

Cette relation représente un couple de droites passant par A et qui sont réelles lorsque  $\operatorname{tg}^2 \alpha \geq 4x^2$

La contrainte principale de cisaillement passe sur ces lignes par un maximum pour lequel on a :

$$\frac{\partial \tau_{\max}}{\partial \varphi} = 0.$$

Cette condition est remplie pour  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ . La formation de la dérivée seconde montre en outre qu'il n'existe une valeur maximum le long de  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  que pour :

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

tandis que pour :

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

il apparaît là un minimum. Les dernières valeurs de  $\alpha$  considérées ci-dessus sont toutefois sans intérêt du point de vue pratique. Pour  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  on obtient la valeur de la contrainte principale de cisaillement :

$$\tau_{\max}^2 = p^2 [Q^2 - 2P \cdot Q \cdot \sin \alpha + 2P^2 (1 - \cos \alpha)] \quad (4)$$

En introduisant la condition d'écoulement, nous obtenons pour la charge critique :

$$p = \sigma_F \cdot \frac{\left( \vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \sin \vartheta + \cos \vartheta}{1 + \sin \vartheta} \quad (5)$$

Ceci représente la relation entre la résistance à la pénétration, l'angle du talus latéral et la limite d'écoulement.<sup>21</sup>

*Sachs*<sup>22</sup> a étudié d'une manière très approfondie le problème de la résistance des métaux à la pénétration; à cet effet, il a également déterminé par recristallisation la zone plastiquement déformée en la considérant comme limitée par les courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  du champ des contraintes élastiques. On trouvera sur la fig. 4 les valeurs de la résistance à la pénétration déterminées par *Sachs* pour l'acier pour différents angles de talutage, comparées avec les valeurs calculées à partir de la relation (5) la concordance est satisfaisante. La solution du même problème à l'aide des lignes de cession, par *Prandtl*, a conduit à la relation :

$$p = \sigma_F (1 + \vartheta) \quad (6)$$

qui traduit la relation entre la résistance à la pénétration d'une part, et l'angle de coupe et la limite d'écoulement d'autre part. Cette relation a été également



portée sur la fig. 4 par comparaison. On constate qu'il y a concordance tout au moins pour les très petits angles, quoique les parties principales des courbes soient très différentes l'une de l'autre.

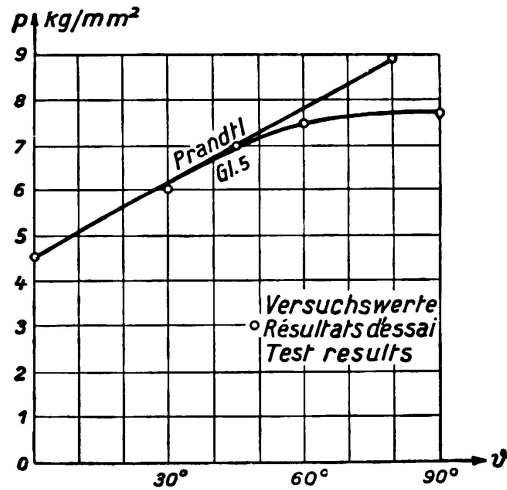


Fig. 4.

L'exemple ainsi cité montre que pour traiter les problèmes plastiques concernant les matières de structure cristalline, il faut toujours partir des courbes limites du domaine plastique. L'adoption des lignes de cession comme constituant cette limite et l'établissement de solutions à partir des propriétés des lignes de cession elles-mêmes conduira toujours à des résultats qui ne correspondent pas à la réalité.

### Résumé.

Les bases de la théorie générale de la plasticité contiennent encore de notables obscurités qui doivent être attribuées au fait que l'interprétation et la mise en valeur des phénomènes d'écoulement des corps de structure cristalline manquent encore d'unité et de clarté.

L'auteur analyse donc rapidement les notions essentielles de la théorie de la plasticité: condition d'écoulement, limite d'écoulement et lignes de cession; le résultat le plus important de cette analyse est que la limite d'écoulement de même que les lignes de cession doivent être considérées comme constituant des phénomènes d'instabilité qui dépendent essentiellement de la structure interne du corps considéré, ces phénomènes exerçant une influence spécifique sur le mode de passage du domaine élastique au domaine plastique; toutefois, ces phénomènes ont, vis-à-vis de la déformation plastique générale, une importance plus faible que l'on ne le suppose d'une manière générale. Ceci est d'autant plus net que ces deux phénomènes ne sont observés que dans le cas d'une structure cristalline très nettement déterminée, celle du réseau cubique à élément central, tandis que dans le cas des autres structures, le passage du domaine élastique au domaine plastique se fait d'une manière continue et progressive.

Indépendamment de l'aspect de cette transition, la limite du domaine plastique est constituée par les courbes  $\tau_{\max} = \text{constante}$  du régime élastique des contraintes.

L'exemple de la résistance à la pénétration montre la différence qui existe entre la résolution du problème plastique, d'une part en partant des points de vue précisés dans ce qui précède, d'autre part en partant du point de vue mathématique de la théorie de la plasticité; cette théorie est en effet, dans sa base même, une théorie des lignes de cession. On constate ainsi que dans le cas des métaux, la théorie mathématique de la plasticité ne concorde pas avec la réalité.

### Littérature.

- <sup>1</sup> *Hencky*, Zeitschrift für angewandte Mathem. und Mech., 1923, page 241.
- <sup>2</sup> *Haar* et *Kármán*, Göttinger Nachrichten, math. nat. Klasse, 1909, page 204.
- <sup>3</sup> *Hencky*, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech. 1924, page 323.
- <sup>4</sup> *Guest*, Philosophical Mag., 1900, vol. 5. page 69. — *Mohr*, Zeitschr. VDI, 1900, 44, page 1524.
- <sup>5</sup> *Voigt*, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbeff., 1907, page 4.
- <sup>6</sup> *Huber*: Czasopismo Techniczny, 1904, Lemberg.
- <sup>7</sup> *Mises*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1925, page 147.
- <sup>8</sup> *Schleicher*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1926, n° 3.
- <sup>9</sup> *Kármán*, Verh. 2. Int. Congr. f. Techn. Mech., Zürich 1936. — *Böker*, Forschungsheft VDI, 175/176. — *Roš* et *Eichinger*, Diskussionsberichte der ETH Zürich, 1926—1929.
- <sup>10</sup> *Bach*: Forschungsarbeiten d. VDI, n° 29.
- <sup>11</sup> *Moser*, Forschungsheft d. VDI, n° 29.
- <sup>12</sup> *Reißner*, Proceedings I. Int. Congr. Mech. Delft, 1924.
- <sup>13</sup> *Cartheodory* et *Schmidt*, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., 1923, page 468.
- <sup>14</sup> *Ludwik*, Technologische Mechanik, Berlin, 1909.
- <sup>15</sup> *Nadai*, Schweizer. Bauzeitung, 1924, page 157.
- <sup>16</sup> *Moser*, Stahl und Eisen, 1928, page 1601.
- <sup>17</sup> *Okuda* et *Takaba*, Werkstoffausschuß d. Ver. d. Eisenhüttenleute, publication n° 119.
- <sup>18</sup> *Oberhoffer*, Das Technische Eisen, Berlin, 1925.
- <sup>19</sup> *Nadai*, Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., 1921, page 20. — *Sachs*, Naturwissenschaften, 1926, page 1219. — *Sachs*, Zeitschr. f. Techn. Physik, 1927, page 132. — *Körber* et *Siebel* Mittl. Inst. f. Eisenforschung, Düsseldorf, 1928. — *Siebel*, Ber. d. Werkstoffaussch. deutsch. Eisenhüttenleute, 122,
- <sup>20</sup> *Prandtl*, Göttinger Nachrichten, 1920, page 74.
- <sup>21</sup> *Freudenthal*, Dissertation, Prague 1930.
- <sup>22</sup> *Sachs*, Zeitschr. f. techn. Physik, 1927, page 132.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide