Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Rubrik: I. La ductilité de l'acier: sa définition: manière d'en tenir compte dans la conception et le calcul des ouvrages, notamment des ouvrages hyperstatiques

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

I

La ductilité de l'acier. Sa définition. Manière d'en tenir compte dans la conception et le calcul des ouvrages, notamment des ouvrages hyperstatiques.

Die Bedeutung der Zähigkeit des Stahles für die Berechnung und Bemessung von Stahlbauwerken, insbesondere von statisch unbestimmten Konstruktionen.

Importance of the toughness of steel for calculating and dimensioning steel structural work, especially when statically indeterminate.

Leere Seite
Blank page
Page vide

I

Rapport Général.

Generalreferat.

General Report.

Dr. Ing. L. Karner †,
Generalsekretär der I.V.B.H., Professor an der Eidgen. Techn. Hochschule, Zürich.

La construction économique des ouvrages métalliques exige l'utilisation aussi complète que possible du degré de sécurité. Autrefois, dans le calcul basé sur des contraintes admissibles, on déterminait le coefficient de sécurité par rapport à la résistance à la rupture et la représentation ainsi obtenue était tout-à-fait fausse. Au cours de ces dix dernières années, la limite apparente d'élasticité du diagramme des contraintes-allongements a pris une importance toujours croissante dans l'estimation du matériau et par le fait même dans la détermination de la sécurité.

L'expérience acquise sur les ouvrages métalliques en service a montré qu'on peut avoir, dans certains éléments de construction, des efforts qui dépassent de beaucoup les contraintes admissibles et souvent même la limite apparente d'élasticité, sans pour cela que l'ouvrage soit mis en danger. Je pense aux contraintes secondaires dans les poutres réticulées, au sollicitations dans les assemblages rivés, à l'influence de l'affaissement des appuis dans les poutres continues, etc.

Nous savons à l'heure actuelle que, dans les systèmes hyperstatiques, la limite apparente d'élasticité peut être dépassée sous certaines conditions, sans pour autant que la sécurité prévue soit diminuée.

Ces faits nous conduisirent à une révision fondamentale du concept de sécurité dans les constructions métalliques; la limite apparente d'élasticité ne suffit plus à définir le matériau d'une façon parfaite pour le staticien et le constructeur.

Lorsqu'une barre soumise à la traction simple atteint la limite apparente d'élasticité, sa résistance est détruite, pour autant que cette barre ne fasse pas partie d'un système intérieurement hyperstatique dans lequel se produit un blocage du jeu des forces.

Par contre, dans les poutres soumises à la flexion simple ou à la flexion accompagnée d'efforts normaux, la surcharge peut augmenter encore, même lorsque la limite apparente d'élasticité est atteinte dans les fibres extrêmes et lorsque la déformation peut s'effectuer sans aucune entrave, et cela parce que la distribution des contraintes est de nature indéterminée.

Considérons une poutre rectangulaire soumise à la flexion. *L'ancienne hypothèse de plasticité* explique le relèvement du moment de rupture par un

écoulement par couches se propageant jusqu'à plastification complète ou jusqu'à formation d'une articulation plastique.

Dans le même cas, la *nouvelle théorie de plasticité* se base d'abord sur un relèvement de la limite apparente d'élasticité et en déduit finalement une plastification subite de toute la section.

Pour le staticien et le constructeur, ces deux théories ne sont intéressantes qu'en tant qu'explications du processus. Ce processus est moins important pour le résultat final qui est la formation d'une articulation plastique.

Le comportement plastique dépend très fortement de la section et du système de sollicitations suivant plusieurs axes. Ces processus sont très difficiles à exprimer mathématiquement sur la base de nos connaissances actuelles.

Les nombreux travaux et les nombreuses découvertes concernant la théorie de la plasticité n'ont pas tenu compte de l'influence du temps. Il est très probable que l'on arrivera à une meilleure explication des relations existantes en considérant ce problème comme un vrai problème dynamique, c'est-à-dire en introduisant une nouvelle variable «t».

Tout le monde sait que la «limite apparente d'élasticité» dépend non seulement de la section de l'éprouvette mais encore de l'exécution de l'essai par rapport au temps.

Le fait que les propriétés de ductilité de l'acier permettent de dimensionner d'une façon plus économique les constructions hyperstatiques, a influencé divers règlements concernant les charpentes métalliques; il faut tenir compte, dans le dimensionnement des poutres continues, d'une égalisation des moments sur appuis et en travées (peut-être dans une proportion plus faible qu'en réalité). *Kazinczy* (Hongrie) et *Kist* (Hollande) ont proposé de dimensionner les systèmes hyperstatiques sur la base d'une nouvelle définition du coefficient de sécurité.

Une conception plus précise du problème en question n'a été possible que grâce aux travaux très approfondis de *Grüning* qui fut le premier à rechercher l'exposé analytique des relations qui entrent en ligne de compte ici.

Grüning a tout d'abord limité ses recherches au cas d'une surcharge invariable; *Hans Bleich* a tenu compte de différentes dispositions des charges et il a introduit le concept de «diagrammes de contraintes résiduelles» qui forment la base du calcul d'après le procédé de l'équilibre plastique.

Dans la distribution des rapports, l'A.I.P.C. a jugé qu'il était très important de ne faire traiter les questions esquissées ici que par des spécialistes de la partie, afin d'obtenir un exposé aussi complet que possible de l'état actuel du problème:

Les travaux de *Fritsche, Freudenthal* et *Rinagl* sont consacrés à des questions d'essai des matériaux.

Un autre groupe de rapporteurs traite le problème à un point de vue théorique, en supposant un diagramme idéalisé des contraintes-allongements, c'est le cas pour *Melan, Kohl* et *Lévi.*

Les essais jouent évidemment un rôle de toute première importance dans l'explication des questions ayant trait à la plasticité. *Maier-Leibnitz* traite ce sujet dans son rapport et, en interprétant les essais, prend position vis-à-vis des méthodes de calcul.

Dans le dernier numéro de la revue „Stahlbau", *Maier-Leibnitz* décrit d'autres essais sur l'explication de la résistance effective des poutres continues et il arrive à des hypothèses simplifiées d'interprétation, d'une grande utilité.

Finalement, le rapport de *Bleich* expose le calcul pratique des poutres continues et des cadres, d'après la méthode de la plasticité.

La question de l'influence de la plasticité sur le dimensionnement des constructions métalliques nous semble revêtir la plus grande importance car nos efforts tendent à augmenter l'économie des ouvrages métalliques sans pour autant mettre en danger leur sécurité. On y parvient, avec certaines restrictions, en appliquant le procédé de l'équilibre plastique au dimensionnement des systèmes hyperstatiques. Ces restrictions concernent par exemple les cadres et les poutres continues qui, d'après la théorie de l'élasticité, sont utilisés dans toutes leurs sections et qui ne possédent pas ou très peu de réserve de résistance après la transformation du système par introduction d'une articulation plastique.

Il en est de même pour la poutre réticulée, du moins suivant notre manière de voir actuelle. Il faut également tenir compte ici de l'instabilité des éléments sollicités à la compression.

Nous avons tacitement parlé jusqu'à présent de la plasticité dans les constructions rigides. Le comportement plastique du matériau lui-même joue cependant aussi un rôle très important dans les problèmes d'équilibre instable. La théorie de la plasticité nous permet d'étudier d'une façon simplifiée la stabilité des barres en tenant compte de la forme de la section et des conditions d'appui les plus diverses. Les méthodes de calcul que l'on développe pour l'étude des problèmes de stabilité des barres et des dalles pourront être très prochainement établies sur une base fortement simplifiée.

Les procédés de dimensionnement des systèmes hyperstatiques, basés sur les propriétés plastiques de l'acier, ne tiennent en général pas compte de la rupture par fatigue. Les essais et l'expérience n'ont pas encore suffisamment montré comment il était possible de traiter, quant à la fatigue, les contraintes purement élastiques dans les ouvrages soumis à des efforts alternés, après un premier dépassement de la limite apparente d'élasticité et après formation d'articulations plastiques.

Même si l'on renonce à dimensionner les systèmes hyperstatiques suivant la théorie de la plasticité, les nouvelles connaissances acquises jouent un rôle très important sur le choix de la forme des ouvrages. La crainte que l'on avait jusqu'à présent de construire des poutres continues lorsque les appuis étaient susceptibles de subir de légers affaissements ne nous paraît pas justifiée.

Là où, autrefois, on adoptait des systèmes isostatiques par suite de la compressibilité du sol de fondation ou de l'élasticité des appuis, on peut actuellement donner la préférence aux constructions hyperstatiques dont le dimensionnement est plus économique.

On a attaché une beaucoup trop grande importance à l'influence des contraintes secondaires dans les poutres réticulées, quoique Engesser ait fait remarquer, il y a plus de 40 ans déjà, que ces contraintes secondaires étaient atténuées par la ductilité de l'acier. Je pourrais multiplier à volonté les exemples tirés de la construction métallique et aussi bien pour les problèmes de résistance que pour ceux de stabilité.

Nos conceptions sur les sollicitations critiques dans nos ouvrages sont en pleine évolution. Nous demandons à l'essai des matériaux une meilleure caractérisation des matériaux qui donnera au constructeur la possibilité de dimensionner économiquement les ouvrages, tout en conservant la sécurité exigée.

Nos nouvelles connaissances, qui représentent un grand progrès par rapport aux anciennes conceptions, ne doivent pas nous tromper; nos nouvelles methodes de calcul et notre nouvelle façon de construire ne peuvent que nous donner des éclaircissements sur certains détails et certaines particularités d'un élément de construction.

L'ouvrage lui-même est constitué d'une foule de détails qui s'influencent réciproquement; aujourd'hui comme autrefois, l'ingénieur doit vouer toute son attention à l'étude de ce complexe. Le vrai constructeur doit donc introduire les nouvelles connaissances relatives au matériau utilisé et les nouvelles méthodes de calcul basées sur des essais, d'une manière adéquate et pratique dans ses connaissances, dont elles ne forment qu'une faible part, pour réaliser des ouvrages métalliques économiques et offrant une sécurité suffisante.

I 1

Discussion relative à la plasticité.

Diskussion über die Plastizität.

Contribution to Discussion on Theory on Plasticity.

L. Baes,
Professeur à l'Université de Bruxelles.

I° — *Au point de vue de la théorie générale de la plasticité, du rôle des lignes de cession et de la frontière entre la région élastique et la région plastique.*

Les mémoires I 1 et I 2 appellent des approbations mais aussi quelques remarques.

1° — Définition de la plasticité en général:

Il est nécessaire de rappeler, pour éviter toute fausse interprétation, qu'on dit que dans une région du corps il y a *déformation plastique* ou que la matière est en plasticité, lorsque dans cette région la déformation n'est pas totalement élastique et que cependant la cohésion de la matière n'y est pas détruite, même s'il y a eu modification du réseau structural. Cette définition est générale, elle revient à rendre synonymes les expressions:

déformations plastiques et déformations permanentes sans destruction de la cohésion (il y a d'autre part des cas de déformation permanente criquée ou impliquant une destruction partielle de la cohésion).

2° — Définition du phénomène d'écoulement plastique et des lignes de cession ou figures d'écoulement pour l'acier doux:

Ce qui donne un intérêt tout particulier à l'étude de la plasticité est l'existence dans ce domaine d'une propriété très importante de l'acier doux, celui-ci essayé notamment par traction pure ou par compression pure, présente un phénomène d'écoulement plastique très particulier. Pour une valeur déterminée de la sollicitation, la déformation longitudinale grandit brusquement de manière très sensible.

Idéalisé, ce phénomène est parfois représenté par ce que l'on appelle le *palier* du diagramme de traction ou de compression.

Ce phénomène ne se prolonge pas à de très grandes déformations, mais au point de vue technique il a cependant comme conséquence de créer une déformation plastique appréciable, qui suit une phase ne comportant quasi que des déformations élastiques très petites.

C'est en réalité ce phénomène et ses conséquences qui ont déclanché les études modernes de la plasticité et dont on cherche à tirer parti au point de vue de

l'économie des constructions en acier doux. Il a d'ailleurs comme conséquence de constituer un modérateur très précieux à une élévation locale de tension.

C'est en partie ce phénomène, idéalisé par la notion du palier, qui a donné naissance à la notion de la *plasticité parfaite:* déformation croissante sous sollicitation constante.

Dans cette conception il y aura des cas d'états simples, doubles ou triples de tension ou de déformation de plasticité parfaite.

De là la justification et la nécessité pratique de l'introduction d'une *hypothèse de plasticité parfaite,* hypothèse qui est susceptible d'évoluer.

3° — Signification des lignes de cession qui se produisent à la surface des pièces en acier doux déformées plastiquement.

J'estime qu'on peut se rallier nettement à l'avis de MM. Takaba et Okuda cité dans le I 1:

« L'apparition des lignes de cession et du coude brusque de la courbe des déformations sont le résultat d'un seul et même processus, à savoir la déformation, *par groupes, de quantités importantes de grains cristallins.* »

Il y a donc une vraie discontinuité de la déformation, qui se fait d'ailleurs par zones et qui semble intéresser toute une région et non pas seulement des actions purement locales.

On peut se rallier à l'idée, qui fait bien image, que ce phénomène brusque est le fait d'une instabilité moléculaire analogue à un phénomène de retard à la déformation.

Celle-ci exige à ce moment un changement d'arrangement du réseau de structure, changement qui se fait par des glissements sensibles et irréversibles, c'est-à-dire plastiques, au cours desquels une augmentation de la dureté se produit, ainsi qu'un vrai phénomène de *blocage* des surfaces de cession (voir *Moser*).

De ce qui précède apparaît à toute évidence que la limite vraie entre la zone du corps restée à l'état élastique et celle passée à l'état plastique peut ne pas coïncider avec les lignes d'écoulement qui semblent liées à un phénomène de retard et intéresser toute une zone.

Les lignes d'écoulement peuvent être très larges lorsque la région du corps est soumise à un état de tension pur, elles sont au contraire souvent très fines lorsqu'il n'en est pas ainsi.

4° — Quelques caractères des lignes de cession:

Dr. Ing. *Freudenthal* écrit que la propriété la plus importante des figures d'écoulement qui apparaissent à la surface est de coïncider avec les trajectoires des contraintes de cisaillement maximum.

Je fais remarquer que cela n'est vrai que pour autant que ces lignes de cession constituent *un réseau* de deux familles de lignes orthogonales entre elles, mais qu'il y a des cas où ces lignes ne constituent *qu'une seule famille de rides de cession.*

Ce cas, assez fréquent, *semble avoir été perdu de vue.*

Il est cependant nettement visible dans l'ancien mémoire descriptif de *Hartmann* et dans ceux de *Frémont;* il est facile à reproduire.

Dans ce cas, ces rides de cession ne sont évidemment pas confondues avec les trajectoires des contraintes de cisaillement maximum, elles sont tout au contraire confondues *avec la trajectoire de l'une des deux tensions principales* (ligne isostatique). Il est à remarquer qu'une ligne de cession peut s'amorcer et s'arrêter en pleine masse; si la sollicitation s'aggrave, cette ligne se propagera, en même temps que d'autres pourront naître.

Donc une ligne de cession ne naît pas nécessairement d'une seule fois, il est fréquent qu'une telle ligne se propage successivement au cours de l'élévation de la charge.

Il apparaît donc à toute évidence *que des lignes de cession ne seront pas d'une manière générale des lignes frontières entre le domaine élastique et le domaine plastique.*

C'est une évidence, car une ligne qui n'est pas apparue *d'une seule fois* mais qui se propage quand la sollicitation s'aggrave ne peut être une *frontière,* celle-ci devant être nécessairement fermée ou constituer courbe fermée avec une partie du contour de la pièce.

Cette conclusion du Dr. Ing. *Freudenthal* est donc une évidence et se démontre par ce raisonnement élémentaire, mais de là à dénier tout intérêt mathématique aux lignes de cession il y a loin, surtout lorsqu'elles sont très déliées.

5° — La condition de plasticité:

Pour les métaux susceptibles de déformations plastiques avec ou sans limite d'écoulement nettement définie, les principales hypothèses qui ont été introduites concernant les conditions à satisfaire au point de vue des tensions à la frontière du domaine élastique et du domaine plastique sont les suivantes:[1]

Hypothèse de Saint-Venant, de Maurice Lévy et de Guest:

$$\tau_{max} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = k = \frac{R_e}{2}$$

R_e étant la limite d'élasticité de la traction pure.

Hypothèse de Beltrami et de Haigh:

Le critère est constitué par la valeur du travail spécifique de la déformation élastique.

La condition à satisfaire peut se traduire par:

$$(\sigma^2_I + \sigma^2_{II} + \sigma^2_{III}) - \frac{2}{m}(\sigma_{II} \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III} \cdot \sigma_I + \sigma_I \cdot \sigma_{II}) = R_e^2$$

Ce critère donne lieu à une représentation dans l'espace par un ellipsoïde et dans les états doubles de tension par une ellipse.

---

[1] Voir: *L. Baes:* Résistance des matériaux et éléments de la théorie de l'élasticité et de la plasticité des corps solides. Tome I — Chapitre XI — „Le problème des critères de la résistance des matériaux" Bruxelles 1930—34.

Hypothèse de v. Mises et de Hencky:

Le critère est la valeur du travail spécifique de changement de forme par glissement[2]:

il se traduit comme suit:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\,R_e^2 = 8\,k^2$$

ou, en fonction des contraintes tangentielles maxima:

$$\tau^2_{I.\,II} + \tau^2_{II.\,III} + \tau^2_{III.\,I} = \frac{1}{2} R_e^2 = 2\,k^2$$

Ce critère donne lieu à une représentation par un cylindre de révolution, dans l'état double de tension il donne une ellipse.

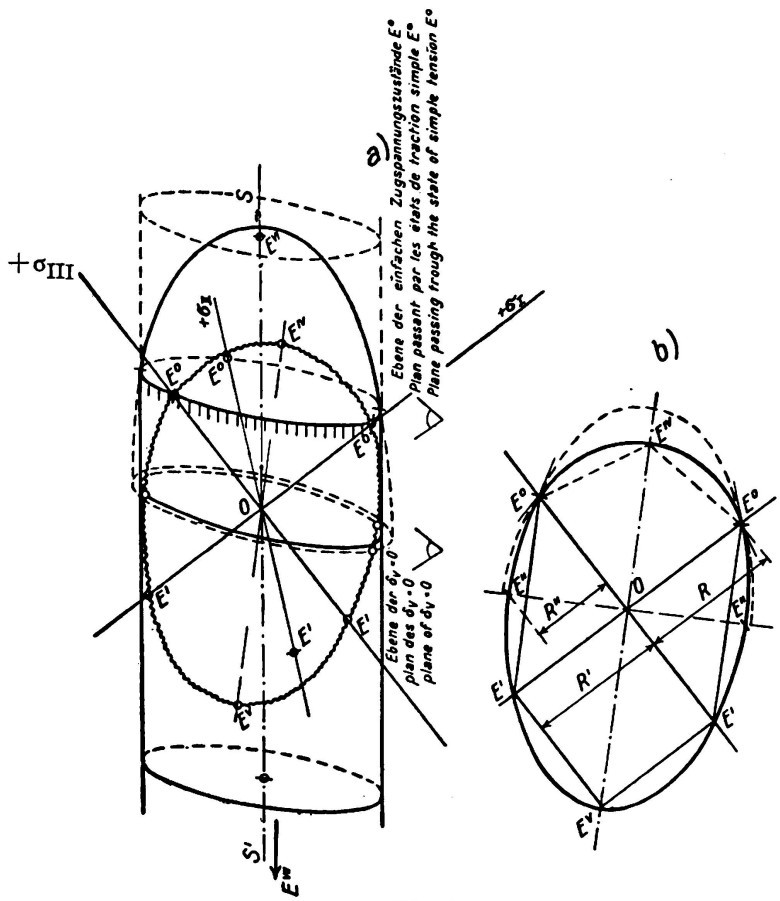


Fig. 1.
Théorie de Huber relative à l'équilibre limite d'élasticité (Interprétation graphique).
a) Etats triples de tension.
b) Etats doubles de tension.

Hypothèse de v. Mises et Hencky, modifiée par Huber:

Le critère est la valeur du travail spécifique de changement de forme par glissement, *pour autant que la dilatation cubique* ou la tension moyenne $\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$ soient négatives.

Si elles sont positives il y a lieu d'adopter comme critère celui de *Beltrami.*[3]

Ce critère donne lieu à une représentation graphique donnée par la fig. 1; dans l'état double de tension il donne une figure formée de deux ellipses et peu différente de celle de *v. Mises-Hencky.*

Il faut admettre que les expériences actuellement connues, notamment celles de MM. *Roš* et *Eichinger,* ont démontré que l'hypothèse de *Huber* est très satisfaisante pour l'acier doux ou analogue.

[2] Dans la traduction française du mémoire de Dr. Ing. *Freudenthal* il est dit:
„3° — Hypothèse du travail constant de déformation suivant la relation . . . ."
Il est dangereux d'écrire cela ainsi, il faut bien spécifier qu'il n'est question que d'une partie du travail de déformation, cette partie que l'on désigne par l'expression: travail de changement de forme par glissement. Cela est d'autant plus nécessaire que cette expression n'est pas très répandue en langue française.

[3] Il est prudent d'énoncer tout au long le critère de Huber, car il n'est pas identique à celui de *von Myses* et *Hencky.* Il est beaucoup plus logique que lui. Cela est souvent perdu de vue.

Il est important de considérer spécialement deux cas particuliers devant lesquels on peut se trouver souvent:

Cas particulier de l'état plan de déformation, en plasticité parfaite:

La déformation plastique se fait alors dans les plans parallèles.

Supposons que ces plans soient ceux des tensions principales σ_I et σ_{III} et que σ_{II} leur soit perpendiculaire.

Dans le cas de plasticité parfaite on aura en tous points:

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$$

donc

$$\sigma_I < \sigma_{II} < \sigma_{III}.$$

La condition de plasticité entre les tensions, de *de St. Venant* et *Maurice Lévy*, s'écrit alors:

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2\,k = R_e$$

La condition de plasticité de *v. Mises-Hencky* s'écrit:

$$|\sigma_I - \sigma_{III}| = \frac{4}{\sqrt{3}}\,k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R_e.$$

On voit que dans ce cas ces deux conditions sont identiques à un coefficient $\frac{2}{\sqrt{3}}$ près et correspondent à une valeur particulière de τ_{max}.

Il résulte de ce que σ_{II} est intermédiaire entre σ_I et σ_{III}, que les facettes sur lesquelles les glissements de plasticité se produisent sont perpendiculaires au plan I. III.

Les surfaces de glissement sont des cylindres dont les génératrices sont normales à ce plan.

Les glissements se produisent donc parallèlement à ce plan et se marquent dans celui-ci par deux familles conjuguées de lignes de glissement, constituant un réseau orthogonal, bissectant celui des isostatiques.

Tout le long de ces lignes, au fur et à mesure qu'elles se développent, la tension tangentielle atteint la valeur de criterium.

Cas particulier de l'état plan de tension, ou de l'état double de tension, en plasticité parfaite:

Ce cas est très fréquent, il se présente à la surface de la pièce. L'une des tensions principales est nulle, soit: $\sigma_{II} = 0$.

Si σ_I et σ_{III} sont de signes contraires, la condition de plasticité de *de St. Venant, Maurice Lévy* est:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \pm\,k = \pm\frac{R_e}{2}.$$

Si σ_I et σ_{III} sont de même signe, cette condition devient

$$\frac{\sigma_I}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{III}}{2} = \frac{R_e}{2}.$$

La condition de plasticité de *v. Mises-Hencky* est alors:

$$\sigma_I^2 - \sigma_I \cdot \sigma_{III} + \sigma_{III}^2 = 4\ k^2 = R_e^2$$

En coordonnées cartésiennes σ_I, σ_{III} elle est représentée par l'ellipse.

Donc les conditions de *de St. Venant* et de *v. Mises* ne semblent guère différer numériquement, lorsque les tensions principales σ_I et σ_{III} sont de signes différents. Mais cependant les deux conditions ne sont pas proportionnelles, comme elles l'étaient dans l'état plan de déformation.

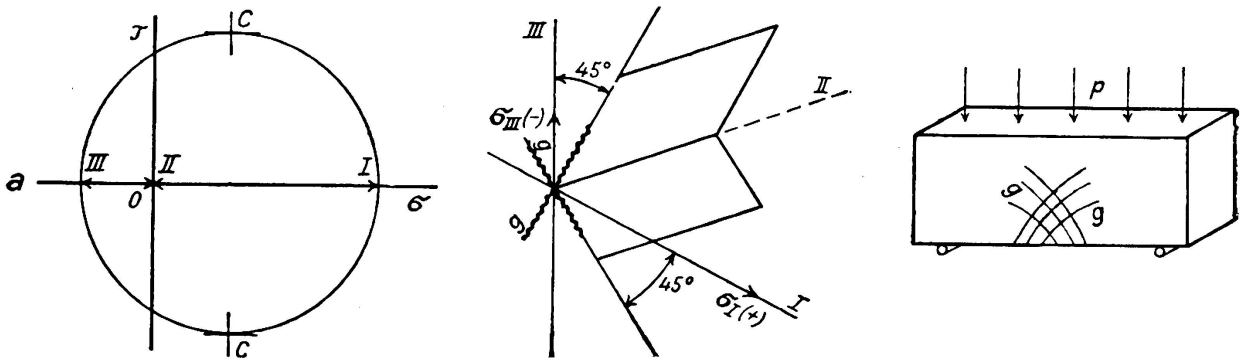


Fig. 2.

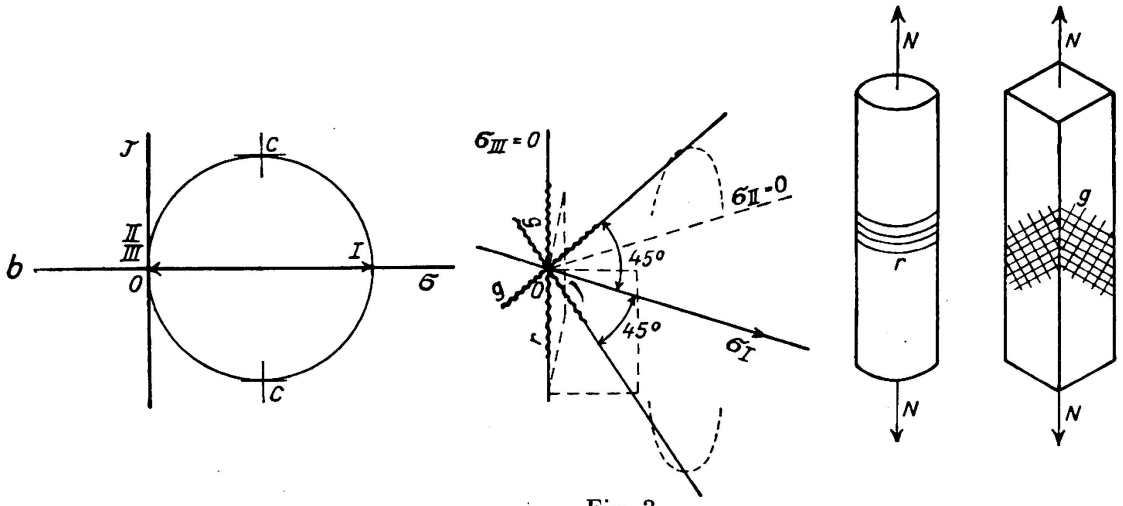


Fig. 3.

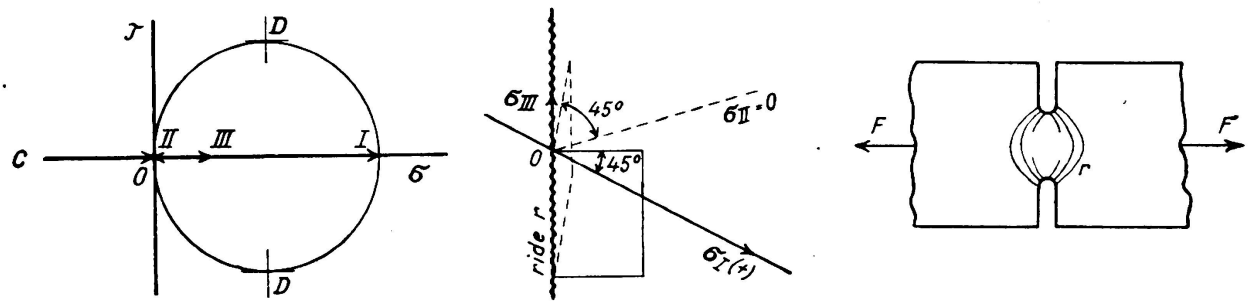


Fig. 4.

Fig. 2—4. Aspects des réseaux g ou des rides r de glissement apparaissant sur les faces extérieures des pièces, dans les parties en état plan de tension.

cas a: $\sigma_{II} = 0$, σ_I et σ_{III} de signe contraire,

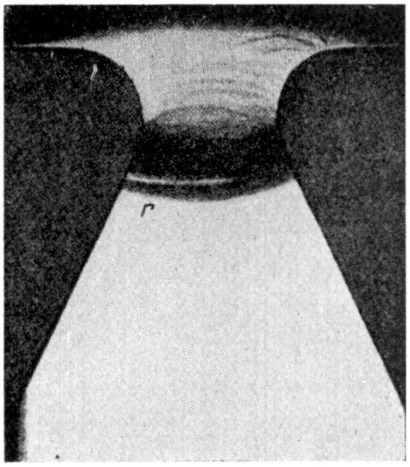
cas b: $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$,

cas c: $\sigma_{II} = 0$, σ_I et σ_{III} de même signe.

Dans ce cas, lorsque les deux tensions principales σ_I et σ_{III} sont *de signes contraires*, Fig. 2, il se forme un réseau de lignes de glissement.

D'après l'hypothèse de *de St. Venant*, ce réseau bissecte le réseau des isostatiques et en chaque point de l'une des lignes du réseau, au moment où le glissement se produit en ce point, le τ_{max} correspondant atteint la valeur du critère.

D'après l'hypothèse de *v. Mises*, il y a encore formation d'un réseau de deux familles de lignes, mais le long des lignes de glissement de ce réseau, le τ_{max} n'atteint plus une valeur déterminée, c'est la condition de critérium qui est atteinte et qui n'est plus basée sur une valeur déterminée de τ_{max}.



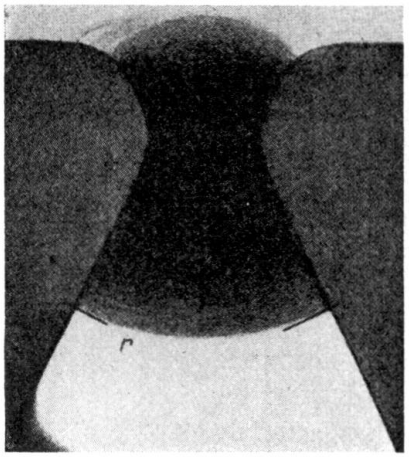


Fig. 5.

Eprouvette de tôle sollicitée par traction. L'éprouvette est successivement envahie par les rides de glissement r. (Figure extraite de „Mesure de la limite élastique des métaux", Ch. Frémont, 1903.)

Dans le cas où les deux tensions principales σ_I et σ_{III} *sont de même signe*, Fig. 4, il ne se forme plus un réseau de deux familles de lignes orthogonales entre elles.

Les facettes de glissement ne sont plus normales à la surface libre, pour aucune des deux hypothèses.

Il se forme une *seule famille de rides de glissement*, trace commune des deux groupes de facettes de glissement (Fig. 5 et 6).

Dans l'hypothèse de *de St. Venant* chaque élément de ces rides coïncide, au moment de sa formation, avec l'élément d'isostatique correspondant à la tension principale la plus petite en valeur absolue et à ce moment, en cet endroit, la tension principale la plus grande atteint le double de la tension tangentielle critère.

Les anciens documents de *Hartmann* font nettement apparaître la distinction entre rides et entre réseaux de glissement. Voir Fig. 7. Toutefois *Hartmann* n'a pas expliqué cette différence.

Dans l'hypothèse de *v. Mises* les tensions atteintes en un point de la ride, au moment où elle se forme en cet endroit, répondent à la relation du critère, ce qui n'est plus tout-à-fait simple.

Cette circonstance de la formation des rides semble avoir été perdue de vue, elle est cependant assez fréquente et le problème est alors tout différent du cas de formation du réseau. Elle se produit souvent pour des pièces plates à encoches latérales (Fig. 6).

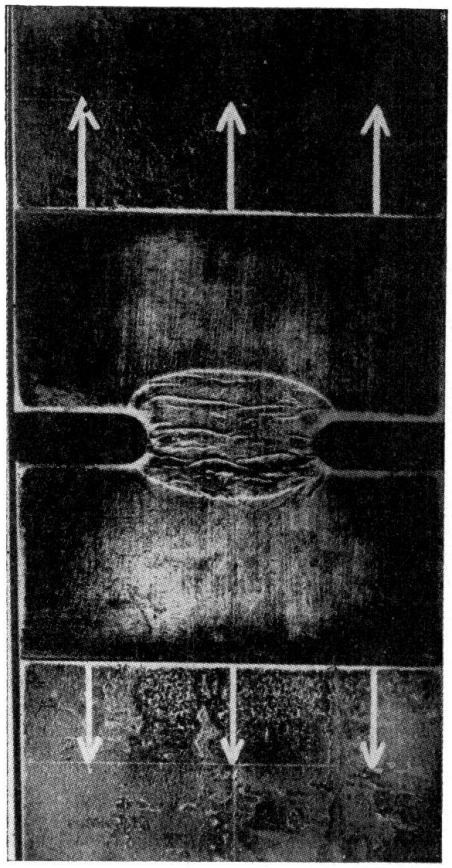


Fig. 6.
Rides de glissement dans une pièce d'acier doux entaillée.

Dans le cas où une seule des tensions principales est différente de zéro, théoriquement il y a possibilité de formation du réseau des lignes de glissement g, ou de la famille de rides r (fig. 3).

Pratiquement il est probable que ce sera le réseau des lignes de glissement g qui se formera.

Le long de ce réseau les deux hypothèses de tension de *de St. Venant* et de *von Mises* sont évidemment identiques.

D'autre part *en pleine masse*, l'hypothèse de *de St. Venant* conduit à des surfaces de glissement en tous les éléments desquelles au moment du glissement, le τ_{max} atteint la valeur du critère.

D'autre part dans ce cas, avec l'hypothèse de *von Mises* il n'y a plus de liaison simple entre la condition de critérium et la tension tangentielle maximum.

6° — Frontière entre la région restée élastique et la région plastique:

Dr Ing. *Freudenthal* écrit:

«L'adoption des lignes de cession comme constituant la limite du domaine plastique et l'établissement de solutions à partir des propriétés des lignes de cession elles-mêmes conduira toujours à des résultats qui ne correspondent pas à la réalité».

Pour la seconde partie on doit faire des réserves, mais la première partie de cette affirmation est évidente d'une manière générale.

Il est en effet inexact que d'une manière générale, la frontière de la région plastique soit confondue avec une surface de glissement, quoique évidemment le long des surfaces des glissement *dans* la zone plastique la condition de plasticité est satisfaite comme sur la frontière.

Mais à la frontière il faut se raccorder à un état élastique.

D'une manière générale la surface frontière n'est pas formée par une surface de glissement, mais par des points de diverses surfaces de glissement.

Il est donc inexact de dire d'une manière générale, comme le dit au 4° le texte français:

«Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes de cession elles-mêmes, *quoiqu'elles*

soient formées par celles de ces lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes.»[4]

La surface frontière est évidemment, par définition, une surface de l'état élastique le long le laquelle la fonction prise comme critérium est constante.

Dans les cas d'une pièce plane, sollicitée en état plan de déformation, que l'on applique le critère de *de St. Venant* ou celui de *v. Mises*, la ligne frontière est donc une ligne isochromatique de l'étude photo-élastique.

Pour la même pièce, sollicitée en état plan de tension, elle n'est une isochromatique que pour l'hypothèse de *de St. Venant* et lorsque les deux tensions σ_I et σ_{III} sont de signe contraire ou lorsqu'une seule n'est pas nulle.

Pour la même pièce, sollicitée en état plan de tension, lorsque les deux tensions sont de même signe, et dans l'hypothèse de *de St. Venant*, la ligne frontière est une courbe d'égale valeur de la tension principale la plus grande en valeur absolue, cela n'est donc pas une courbe isochromatique de l'étude photo-élastique.

Dans l'hypothèse de *von Mises*, pour l'état plan de tension, la ligne frontière n'est pas une isochromatique.

On voit donc qu'il peut être *fort important de distinguer les cas d'état double de tension et d'état plan de déformation.* C'est essentiellement ce que j'ai tenu à faire remarquer.

Pour bien faire voir que

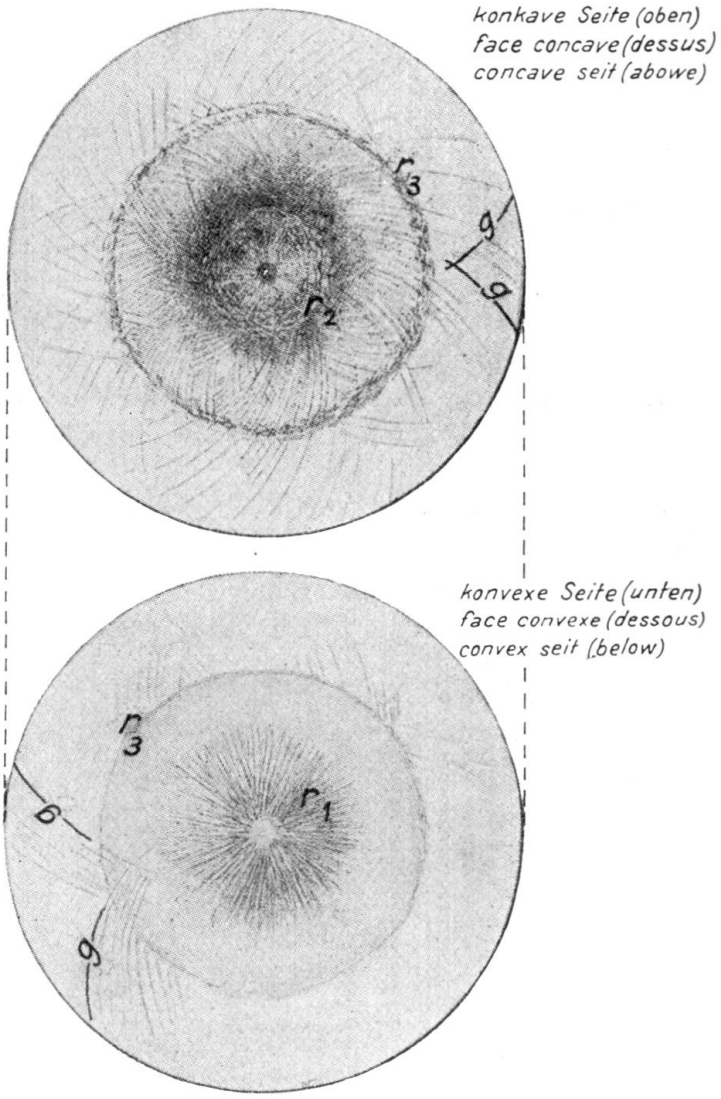


Fig. 7.
Tôle d'acier ayant été déformée par l'application d'un poinçon.
Lignes de glissement g et rides r.
(Figure extraite de „Distribution des deformations dans les métaux soumis à des efforts" L. Hartmann, 1896.)

[4] Cette phrase a été mal traduite en français dans la Publication Préliminaire. Il faut lire: «Ainsi que toutes les observations le montrent nettement, la forme de ces courbes n'a rien de commun avec les lignes de cession elles-mêmes, mais ces courbes sont formées par les lignes qui correspondent aussi bien à l'état plastique qu'à l'état élastique des contraintes». (Note de la Rédaction).

la ligne frontière n'est pas en général une ligne de cession, il suffit de citer deux cas simples bien connus:

Le cas d'une enveloppe cylindrique épaisse soumise à une forte différence de pression, par raison de symétrie axiale, la surface frontière entre le domaine plastique et le domaine élastique est un cylindre concentrique au tube, tandis que sur chaque section transversale les traces des surfaces de cession sont des spirales logarithmiques.

Il n'y a rien de commun entre ces formes.

Le second exemple à citer est celui d'une plaque plane sollicitée sur sa tranche par une charge quasi-concentrée.

Les lignes de cession sur les flancs de la plaque sont des spirales logarithmiques, la ligne frontière est une ligne isochromatique c'est-à-dire une circonférence ayant son centre sur la ligne de charge et tangente à la ligne limite de la pièce.

Le cas d'un disque circulaire chargé par deux charges diamétralement opposées est tout aussi typique.

Le fait est donc bien flagrant, la ligne frontière du domaine plastique et du domaine élastique n'est en général pas une ligne de cession.

Il était je pense utile de le faire apparaître plus nettement et plus simplement que ne le montre l'auteur de la communication I 1, mais c'est là un fait classique.

Il reste de nombreuses et importantes questions à élucider dans le domaine de la plasticité, les théories actuelles ne constituent qu'un premier canevas simplifié et devront probablement évoluer.

D'ailleurs est apparue, depuis, la conception que traite spécialement le mémoire I 2 du Dr. tech. *J. Fritsche,* que la condition d'écoulement plastique est fonction non pas de l'état de tension local, mais de l'état de *tension de toute une région.*

Cette nouvelle condition d'écoulement est fort intéressante et assurément contient en elle des éléments nouveaux épaulés sur des faits expérimentaux indéniables, et dont j'ai eu nettement l'intuition lors d'essais à outrance que j'ai faits sur des poutrellages enrobés de béton.

II° — *Au point de vue de l'application au calcul des constructions en acier:*

Je tiens à marquer mon accord complet avec Dr. Ing. *Fr. Bleich,* lorsqu'il attire l'attention sur la nécessité d'une *grande prudence* dans l'utilisation actuelle de ces principes aux constructions.

Il dit bien que le nouveau procédé de calcul ne doit être appliqué ni aux systèmes dans lesquels il faut tenir compte de la résistance à la fatigue du matériau, ni aux poutres réticulées.

Il n'est donc à appliquer encore *aujourd'hui* en fait qu'à des systèmes simples, d'un degré d'hyperstaticité très peu élevé, constitués d'éléments fléchis dont les parties comprimées ne peuvent se dérober et n'entrant guère que dans la construction de poutrages ou de charpentes de bâtiments, non soumis à des actions répétées fréquentes ni à des vibrations de machines.

Encore est-il prudent de calculer ces ensembles, dans l'hypothèse de l'équilibre plastique, à des tensions telles que la tension d'écoulement ne soit en fait pas atteinte et que la normalisation apportée par la plasticité constitue une véritable réserve.

I 2

Flexion et effort tranchant en dehors de la zone de déformation purement élastique.

Biegung mit Querkraft, außerhalb des Gebietes der rein elastischen Formänderung.

Combined Bending and Shear Beyond the Range of Purely Elastic Deformation.

A. Eichinger,
Dipl.-Ingenieur, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der E.M.P.A. Zürich.

Introduction.

La déformation totale se compose ainsi qu'on le sait de deux fractions[1]:

a) La déformation élastique dont les composantes satisfont aux équations d'élasticité

$$e_1 = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_1 - \frac{1}{m}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad e_2 = \text{etc.} \qquad \text{et}$$

b) la déformation plastique dont les composantes suivent les équations de plasticité

$$\delta_1 = \frac{1}{D} \cdot \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \quad \delta_2 = \text{etc.}$$

E est le module d'élasticité et D le module de plasticité. Le module d'allongement transversal m est égal à 2 pour une déformation plastique.

Jusqu'à maintenant on a exécuté en général les calculs statiques en admettant que les systèmes portants se comportent d'une manière purement élastique. Au cours de ces derniers temps on s'efforce de considérer aussi l'influence engendrée par la déformation plastique

1° sur la répartition des contraintes dans la poutre, respectivement dans la section des barres et

2° sur l'allure des forces dans le système portant (grandeurs hyperstatiques M, Q et N).

---

[1] *M. Roš* et *A. Eichinger:* Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Rapports du Laboratoire fédéral d'essai des matériaux, Zurich. No. 14, sept. 1926; No. 34, févr. 1929; No. 87, avril 1934.

Principes de la théorie de la plasticité.

Rappelons[2]) que, dans le cas de l'action simultanée d'une contrainte normale et d'une contrainte de cisaillement, les équations suivantes sont valables (fig. 1):

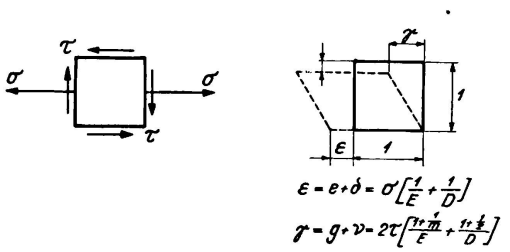


Fig. 1.
Etat de contrainte et de déformation d'un élément de corps.

Déformation élastique

$$e_g = \sqrt{e^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot g^2} = \frac{\sigma_g}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

par contre:

la déformation plastique

$$\delta_g = \sqrt{\delta^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \nu^2} = \frac{\sigma_g}{D} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

où $\sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$ = contrainte de comparaison.

L'allongement lui-même:

$$\text{élastique} \quad e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{plastique} \quad \delta = \frac{\sigma}{D}$$

et le déplacement spécifique

$$\text{élastique} \quad g = \frac{\tau}{E} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

$$\text{plastique} \quad \nu = \frac{\tau}{D} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

La déformation totale est égale à la somme des déformations élastiques et plastiques, à savoir:

déformation . . . . . $\varepsilon_g = e_g + \delta_g$
allongement . . . . . $\varepsilon = e + \delta$ et
glissement . . . . . $\gamma = g + \nu$

Si maintenant le diagramme des contraintes-allongements d'un matériau est connu pour la traction et la compression ordinaires, il est possible de déterminer les relations fondamentales entre la contrainte de comparaison et la déformation

---

[2] Contribution à la discussion de *M. Roš* et *A. Eichinger:* Knicken von in beiden Achsen zentrisch gedrückten, rechteckigen Platten im Gebiet oberhalb der E-Grenze.

1er Congrès de l'Association internationale des ponts et charpentes, Rapport final.

résultant de cette seule contrainte (la variation de volume est toujours élastique) à l'aide des formules indiquées ci-dessous (fig. 2).

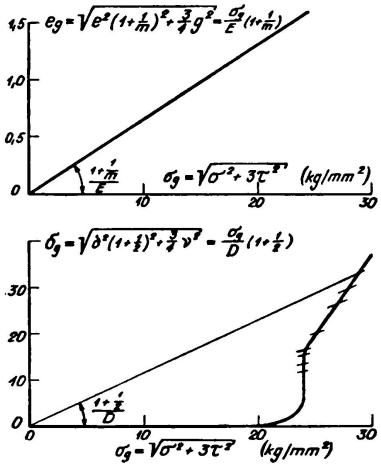


Fig. 2.
Déformation élastique et plastique en fonction de la contrainte de comparaison.

Répartition des contraintes dans une section de poutre.

Avant d'entreprendre la détermination de l'influence de l'allure des forces il est nécessaire d'étudier l'influence de la déformation plastique sur la répartition des contraintes dans la section.

Avec l'hypothèse de la planéité de la section ou plus exactement de l'allure linéaire des déformations, on obtient l'allongement d'une fibre à la distance y de l'axe neutre avec la formule:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2}$$

où ε_r représente l'allongement dans la fibre extrême (fig. 3). Comme dans la fibre extrême la contrainte de cisaillement, et par le fait même le glissement,

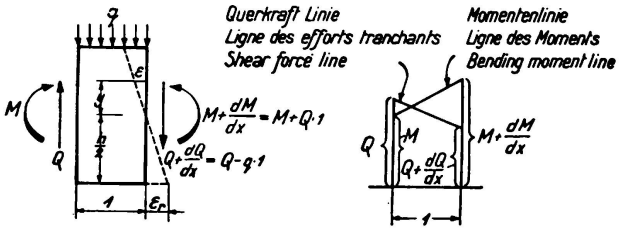


Fig. 3.
Elément de poutre de longueur 1 sous l'effet de M, Q et q.

doivent être nuls, on peut déterminer la contrainte dans la fibre extrême σ_r en partant de la fig. 2.

En général, la répartition des contraintes normales dans la section est admise semblable à la branche du diagramme des σ-ε de $\sigma = 0$ à $\sigma = \sigma_r$ ce qui n'est valable que dans le cas où l'on a partout $\tau = 0$. Si par contre τ est différent de 0, la répartition des contraintes normales dans la section peut fortement s'écarter de cette hypothèse, parce que l'allongement total ε est influencé par une contrainte normale σ, d'autant plus faible que la contrainte de cisaillement τ agissant sur le même élément est plus grande.

Au lieu de calculer la répartition des σ et des τ pour un moment fléchissant et

un effort tranchant donné, nous nous contentons provisoirement d'une hypothèse sur la répartition des σ (fig. 4). De cette façon τ est aussi déterminé en chaque point de la section. Du fait que

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \frac{y}{h/2} = \sigma \cdot \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{D}\right]$$

il résulte que

$$\frac{1}{D} = \frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{1}{E},$$

d'où le module de plasticité D est déterminé pour chaque y. Si l'on trace une droite, partant de l'origine du système de coordonnées et inclinée de $\frac{1 + {}^1/_2}{D}$ jusqu'à la courbe des σ_g-δ_g de la fig. 2, on obtient aussi la contrainte de comparaison σ_g d'où l'on peut tirer la contrainte de cisaillement

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_g^2 - \sigma^2}{3}}.$$

Dans les parties de sections à largeur constante

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

donc l'allure des contraintes dans une section voisine serait ainsi déterminée, à savoir σ' et τ' (fig. 4). Il en résulte que la répartition des contraintes normales

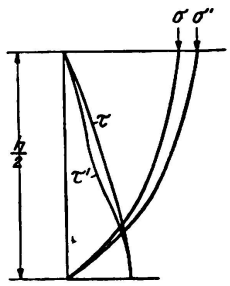


Fig. 4.
Répartition des contraintes sur la moitié supérieure de la section.

σ dans une section ne dépend pas seulement du moment M dans cette section, comme c'est le cas dans la zone élastique, mais elle est aussi influencée par l'effort tranchant Q ainsi que par la charge répartie $q = \frac{dQ}{dx}$.

Strictement parlant, ces explications ne sont cependant valables que dans le cas d'une sollicitation unique au-dessus de la limite du comportement purement élastique. Elles n'ont par conséquent qu'une valeur limitée pour la pratique.

Tandis que le dépassement unique de la limite d'écoulement est accompagné d'une grande déformation plastique, le même matériau se rompt en service pour une charge alternée répétée — et par suite de la fatigue — souvent sans accuser aucune déformation permanente importante.

Remarquons aussi que, malgré une limite supérieure de charge et une limite de contrainte modifiées des éléments de construction les plus sollicités (par suite de la déformation plastique), l'amplitude de la variation de charge: (B—A),

où B est la limite supérieure et A la limite inférieure de charge, reste invariable même en cet endroit. Mais comme, dans la plupart des types de construction, la résistance à la fatigue dépend fortement de l'amplitude de la variation de contrainte mais par contre très peu de la contrainte fondamentale $\frac{A+B}{2}$, le gain est toutefois plus faible que le laisse prévoir la réduction de la limite supérieure de contrainte (fig. 5).

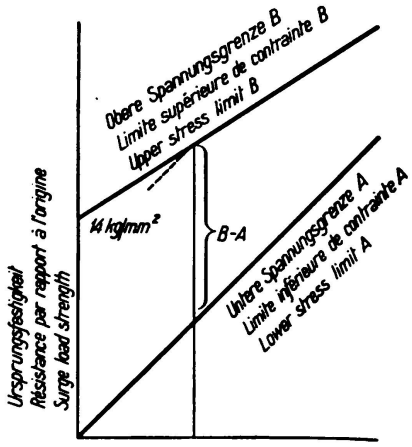


Fig. 5.
Essais d'endurance à la traction sur des soudures bout à bout (LFEM Zurich).

Pour ces raisons, la déformation plastique devrait être considérée provisoirement, partout où la fatigue entre en ligne de compte (le flambage est une exception), comme une réserve pour le cas d'une surcharge exceptionnelle imprévisible (avarie). Par contre, le calcul du degré de sécurité vis-à-vis de la fatigue devrait se faire d'après les principes de la loi d'élasticité (comme jusqu'à maintenant). Il ne faudrait faire exception que lorsque les essais prolongés et les essais de fatigue (et non pas des essais rapides) l'autorisent.

$\frac{y}{h/2}$	σ	ε	$\frac{\varepsilon}{\sigma}$	$\frac{1}{D}\cdot 10^3$	σ_g	τ	$\frac{\partial\tau}{\partial y}$	σ'	ε'	$\frac{\varepsilon'}{\sigma'}$	$\frac{1}{D}\cdot 10^3$	σ'_g	τ'
	kg/mm²	‰	·10³	mm²/kg	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm³	kg/mm²	‰	·10³	mm²/kg	kg/mm²	kg/mm²
1,0	25,0	14,58	0,584	0,534	25,0	0	0,40	29,0	23,5	0,810	0,760	29,0	0
0,8	23,2	11,66	0,503	0,453	24,2	4,0	0,35	26,7	18,8	0,705	0,655	27,1	2,7
0,6	20,8	8,75	0,421	0,371	24,0	6,9	0,29	23,7	14,1	0,595	0,545	25,1	4,8
0,4	17,0	5,84	0,343	0,293	24,0	9,8	0,28	19,8	9,4	0,475	0,425	24,1	7,9
0,2	10,5	2,92	0,278	0,228	24,0	12,5	0,20	12,5	4,7	0,376	0,326	24,0	11,8
0	0	0	—	—	—	13,8	0	0	0	—	—	—	13,8

Remarque: Section de $\sigma' - \tau'$ distante de $\frac{h}{10}$ de la section de $\sigma - \tau$. Voir Fig. 4.

I 3

Considérations sur la ductilité.

Betrachtungen über die Zähigkeit.

Observations on Ductility.

Professor Dr. Ing. W. Kuntze,
Staatliches Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem.

En construction mécanique, on s'applique actuellement à remplacer certains éléments de construction (par ex. des vilbrequins) en acier spécial par des éléments en fonte car, en service, ces derniers se comportent presque aussi bien que les premiers, et leur fabrication est meilleur marché. Cette comparaison, tirée d'un domaine de construction voisin, montre que nous avons actuellement une toute autre conception de la «dureté» des aciers. Ce n'est pas *la grandeur* de la plasticité qui a le plus d'importance, *mais la résistance aux états de contrainte irréguliers.*

Cette résistance va de pair avec une plasticité structurale relativement restreinte mais cependant suffisante et avec une haute cohésion structurale. Le mécanisme

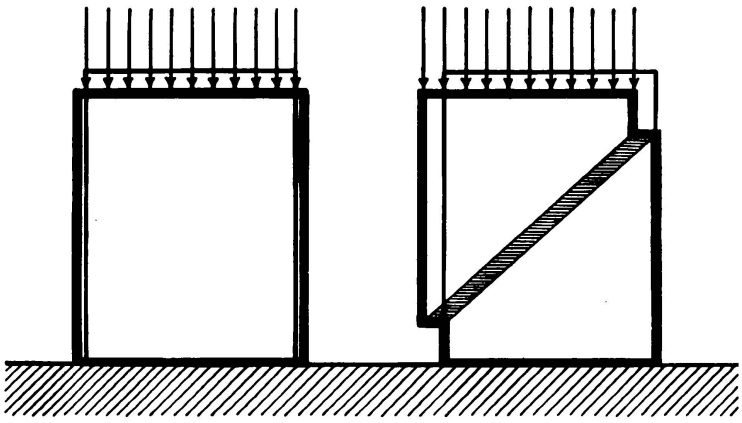


Fig. 1.
Déformation élastique et plastiqne.

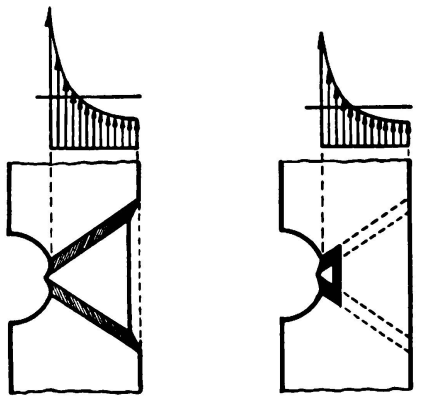
de déformation plastique se distingue de l'élastique, suivant la fig. 1, par des couches d'écoulement se produisant spontanément (appelées d'après *Seidl*: zones de réaction).[1] Ces couches d'écoulement, par suite de leur origine d'ordre cinétique, sont, dans un sens statique, insensibles aux différentes tensions.[2] Pour les engendrer, une somme de forces est nécessaire, qui se détermine en partant d'une condition d'équilibre de sommes de forces et qui se nomme «*moyenne*

[1] *E. Seidl:* Bruch und Fließformen der technischen Mechanik und ihre Anwendung auf Geologie und Bergbau, Vol. 1, Berlin, Editions VDI.

[2] *W. Kuntze:* Einfluß ungleichförmig verteilter Spannungen auf die Festigkeit von Werkstoffen. Maschinenelemente Tagung Aachen, Berlin, Editions VDI, 1936.

de résistance».[3] En partant de là, *Fritsch* a calculé des poutres fléchies d'une manière très intéressante et, après une extension appropriée de ce principe, il a calculé des barres excentriquement comprimées.[4, 5]

Cependant, nos aciers de construction ne se comportent pas d'une façon aussi idéale que le représente notre figure schématique. La formation des couches de cession représente une modification du comportement purement élastique et par le fait même un danger de rupture brusque. Il est cependant impossible d'éliminer complètement de nos aciers ordinaires une *fragilité microscopique* interne. Suivant la qualité du matériau, des fissures microscopiques locales accompagnent toujours



résistant aux entailles — sensible aux entailles

Fig. 2.

Schéma de la sensibilité aux entailles pour des sollicitations alternées.

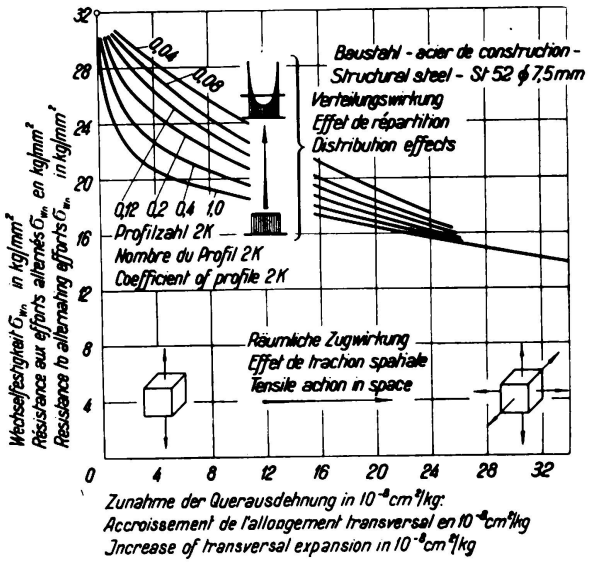


Fig. 3.

Résistance aux efforts alternés en fonction de la répartition des tensions et de la sollicitation à plusieurs dimensions.[6]

la déformation plastique, et tout spécialement lorsque les contraintes sont irrégulières. Elles engendrent, suivant la fig. 2, un raccourcissement des voies d'écoulement. Il en résulte une réduction de la résistance, désignée dans la pratique par «*sensibilité aux entailles*». Le cas idéal d'insensibilité aux entailles (fig. de gauche) montre par contre des couches d'écoulement continues.

Les résultats fournis par les essais pour des contraintes irrégulières sont donc en général plus bas que ceux que l'on obtient par un calcul basé sur la moyenne idéale de résistance.

La tendance des matériaux à la fragilité interne limite par conséquent l'exactitude du calcul effectué à l'aide de la moyenne de résistance. — Quels sont les

[3] *W. Kuntze:* Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Der Stahlbau, Vol. 6 (1933), p. 49/52.

[4] *J. Fritsche:* Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Der Stahlbau, Vol. 9 (1936) p. 65/68.

[5] *J. Fritsche:* Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stabstützen. Der Stahlbau, Vol. 9 (1936), p. 90/96.

[6] *W. Kuntze:* Einfluß des durch die Gestalt erzeugten Spannungszustandes auf die Biegewechselfestigkeit. Arch. Eisenhüttenwes. 10 (1936/37) S. 369/73; Ber. Nr. 367 Werkstoffaussch. Ver. dtsch. Eisenhüttenl.

cas qui sont principalement touchés et quelles sont les effets qui favorisent l'apparition d'une fragilité avancée? — Une classification des résultats des essais de résilience, en fonction des contraintes de traction spatiales et de la répartition des contraintes (fig. 3), montre qu'en première ligne *ce ne sont pas les pointes de tension qui engendrent la réduction de la résistance aux efforts alternés mais l'état de contraintes de traction à plusieurs dimensions.* Dans la classification

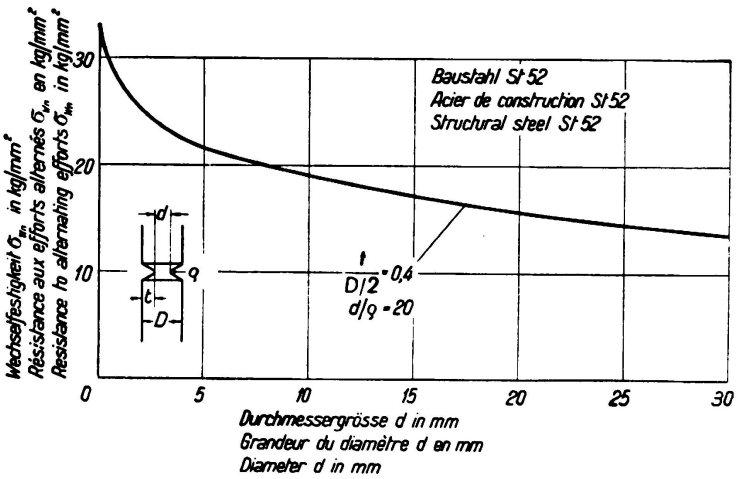


Fig. 4.
Résistance aux efforts alternés en fonction de la grandeur.

ci-dessus, les essais avec fortes pointes de tension ont, pour un effet spatial en moyenne égal, une plus grande résistance aux efforts alternés dans l'essai de résilience que les éprouvettes avec répartition uniforme des contraintes. Ce sont de vrais résultats d'essais qu'il ne faut pas négliger.

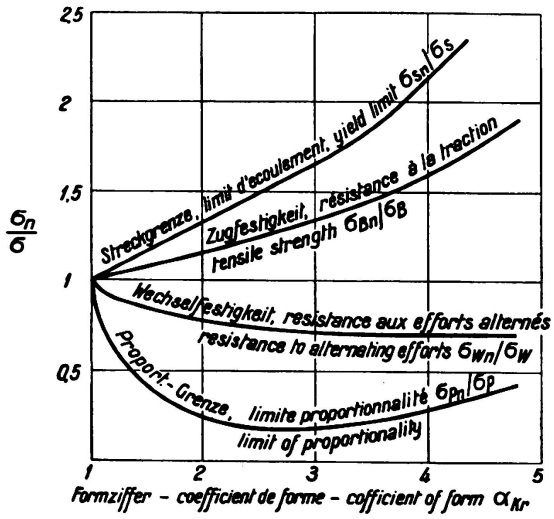


Fig. 5.
Accroissement ou réduction relatifs de différentes limites de résistance en fonction de l'augmentation des pointes de tension (coefficient de forme α_{kr}).

Une autre influence de l'état de tension à plusieurs dimensions, qui réduit la résistance aux efforts alternés, est celle de la grandeur absolue de l'élément de construction. La fig. 4 montre comment, pour des entailles d'une profondeur proportionnellement égale $\frac{t}{D/2}$ et d'une même finesse $\frac{d}{\rho}$, *l'accroissement du diamètre de l'éprouvette engendre une réduction constante de la résistance aux efforts alternés.*

La *limite de proportionnalité* se trouve bien au-dessous de l'influence de la cohésion structurale.[2] Son comportement pour des contraintes irrégulières se rapproche de celui de la résistance aux efforts alternés. Par contre, une sollicitation à plusieurs dimensions agit inversément sur la *limite d'écoulement* (comme résistance à la cession) en ce sens qu'elle relève cette dernière alors qu'elle réduit les pointes de tension, spécialement lorsque l'éprouvette a de grandes dimensions.

Ces influences partiellement opposées peuvent expliquer le fait que les résultats publiés sont souvent contradictoires.

Des états de tension à plusieurs dimensions existent dans une construction:

1° par suite de la conformation externe,

2° par suite du retrait des assemblages soudés.

Quand sont-ils défavorables? — S'il existe par exemple, par suite du retrait, un état de tension à plusieurs dimensions en un point quelconque, il se produit

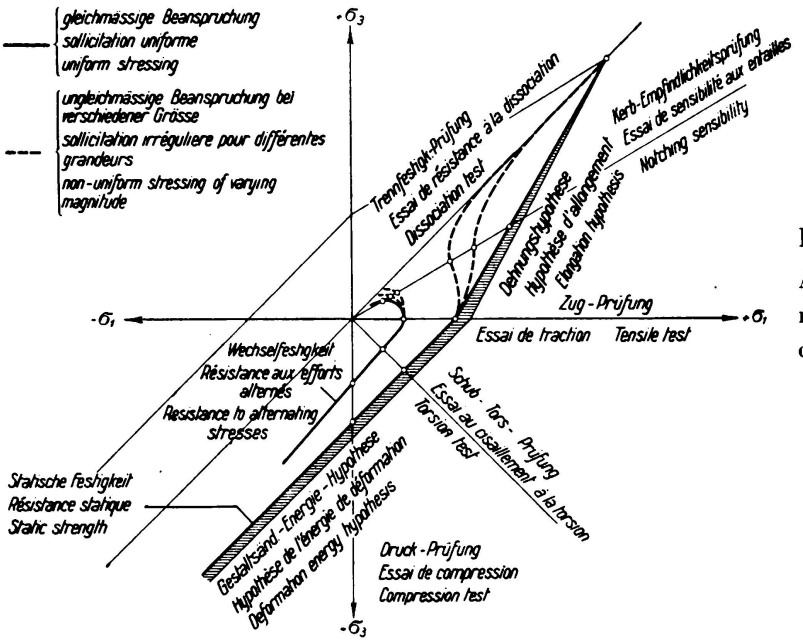


Fig. 6.
Aperçu de l'essai de résistance à plusieurs dimensions.

dans les environs immédiats des contraintes de compression car un état d'équilibre interne doit exister dans l'élément de construction. Lors de l'application de la loi de la moyenne de résistance qui correspond à un effet moyen, il faut s'attendre à ce que, dans un tel cas, la limite d'écoulement ne soit pas fortement influencée. Et cependant, *lorsque l'on a affaire à de grandes dimensions, la résistance statique est un peu réduite, par suite de la pointe de tension, et la résistance aux efforts alternés est fortement diminuée, par suite des contraintes de traction à plusieurs dimensions.*

Les influences dont nous venons de parler varient avec les matériaux. La *technique de l'essai des matériaux* doit en tenir compte. Les essais classiques de résistance à la compression, au cisaillement, à la traction, pour une sollicitation alternée ou non, se trouvent, d'après la fig. 5, dans le quadrant: contrainte principale de traction maxima, contrainte principale de compression maxima. Les

essais modernes de *résistance à la dissociation* et de *sensibilité aux entailles*, sous l'effet d'une sollicitation statique ou dynamique, se trouvent dans le quadrant de pure traction.[7] Il est ainsi possible de porter un jugement sur les matériaux, suivant leur comportement à la traction à plusieurs dimensions pour différentes grandeurs d'éprouvettes. Le résultat de l'essai donne, pour un matériau quelconque, une mesure approximative du dépassement de la valeur obtenue par le calcul basé sur la moyenne de résistance. L'introduction du facteur correctif de proportionnalité, exigée par *Klöppel*, est ainsi possible.[8]

Les résultats des nouvelles investigations doivent servir de directives au calcul et à la conformation des ouvrages. Ils ne touchent pas la question de savoir dans quelle proportion les ponts et spécialement les systèmes hyperstatiques sont influencés par la variation de la surcharge, en tant que véritable sollicitation aux efforts alternés dans le sens de l'essai des matériaux. Cela reste une tâche spéciale de la construction des ponts et il faut toujours en tenir compte.

---

[7] *W. Kuntze:* Kohäsionsfestigkeit. Berlin 1932, J. Springer. Cf. aussi tirage à part XX des Mitteilungen deutscher Materialprüfungsanstalten. (La méthode d'essai de la cohésion s'est développée entretemps.)

[8] *K. Klöppel:* Gemeinschaftsversuche zur Bestimmung der Schwellfestigkeit voller, gelochter und genieteter Stäbe aus St. 37 und St. 52. Der Stahlbau, Vol. 9 (1936), p. 97/111.

I 4

La ductilité de l'acier, l'action des efforts rapides et des efforts répétés.

Die Zähigkeit des Stahles, die Wirkung der raschen und der wiederholten Beanspruchungen.

The Ductility of Steel; the Effect of Rapidly Imposed and Repeated Loading.

R. L'Hermite,
Directeur adjoint des Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris.

La plupart des travaux ayant trait à la ductilité de l'acier et à l'étude de ses conséquences sur la sécurité des ouvrages ne mettent pas en évidence d'une façon absolument nette l'influence du facteur «temps». Il est incontestable que ce facteur joue un rôle prépondérant surtout dans le cas où les actions extérieures agissent rapidement, c'est-à-dire quand les vitesses de mise en charge et les vitesses d'allongement sont élevées. Ceci est le cas des surcharges dites dynamiques, vis-à-vis desquelles les phénomènes d'adaptation ne peuvent généralement se produire.

La déformation relative de deux points d'un corps solide soumis à l'action d'une force F est la somme d'une déformation disparaissant plus ou moins rapidement avec F, dite déformation élastique visqueuse, et d'une seconde déformation permanente, dite déformation plastique. Ceci nous conduit à faire intervenir la notion d'actions héréditaires introduite par *Voltera* dans la physique. Dans ce cas particulier, nous dirons que l'application d'une force élémentaire dF ne produit pas immédiatement toute l'amplitude de la déformation autant élastique que plastique. Il existe un retard ou une réactivité dans la déformation autant à la charge qu'à la décharge; la conséquence de cette réactivité est un résidu de déformation multiplié par un facteur héréditaire $\Phi \cdot \Phi$ est une fonction ayant une forme telle que sa valeur diminue indéfiniment avec le temps. Dans ces conditions, l'expression de la déformation élastique visqueuse est la suivante:

$$x(t) = \int_0^t M[(t-r), F]\, N(F) \cdot \frac{dF}{dr}\, dr$$

et l'expression de la déformation plastique la suivante:

$$x'(t) = \int_0^t \mathfrak{M}[(t-r), F]\, \mathfrak{N}(F) \cdot \frac{dF}{dr}\, dr$$

La première expression est valable dans tous les cas de charge et décharge, la seconde n'est valable que dans les cas ou $\frac{dF}{dr}$ est positif. Pour le cas de charges répétées, par exemple, la déformation plastique est acquise dans la première mise en charge, elle n'intervient en première approximation que par une constante initiale.

Le calcul donne pour M (t), en première approximation, l'expression $M = 1 - e^{-\lambda t}$ et pour N une fonction dépendant de la nature du solide envisagé. De même nous avons

$$\mathfrak{M} = \alpha - \beta \cdot e^{-\mu t}.$$

Nous retrouvons de cette façon un certain nombre d'expressions d'application courante:

écoulement plastique sous charge constante:

$$x'(t) = [\alpha t + \beta (1 - e^{-\mu t})]\, \sigma(F).$$

(Cette formule est exactement conforme à celle obtenue expérimentalement par le Professeur *Roš*).

Déformation élastique sous charge croissant suivant une loi définie:

$$x(t) = \frac{F(t)}{E} - \frac{1}{E} \int_0^t e^{-\lambda (t-r)} \frac{dF}{dr} \cdot dr$$

Dans le cas d'une charge linéaire on a:

$$x(t) = \frac{p}{E} \left(t - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \right)$$

le premier terme représente la déformation élastique totale, le second le retard ou hystérésis élastique.

La déformation sous une charge sinusoïdale est:

$$x(t) = \frac{p}{E} \cdot \sin \varkappa \eta t - \frac{\varkappa \eta p}{E} \cdot \frac{\lambda \cos \varkappa \eta t + \varkappa \eta \sin \varkappa \eta t}{\lambda^2 + \varkappa^2 \eta^2}$$

le second terme représente la diminution d'amplitude de la déformation en fonction de la fréquence. C'est sa comparaison avec les données expérimentales de la flexion rotative qui permet de calculer le coefficient λ. Pour un acier au carbone ayant une limite de rupture de 60 kilogs au mm², nous avons trouvé $\lambda = 5{,}25 \times 10^3$.

La déformation totale sous une charge croissante est donnée par la formule:

$$X(t) = \frac{F(t)}{E} - \frac{1}{E} \int_0^t e^{-\lambda (t-r)} \frac{dF}{dr}\, dr$$

$$+ \alpha \int_0^t \mathfrak{N}(F)\, (t - r) \frac{dF}{dr}\, dr + \beta \int_0^t \mathfrak{N}(F)\, (1 - e^{-\mu (t-r)}) \frac{dF}{dr}\, dr$$

L'examen détaillé de cette fonction montre que pour une charge totale déterminée la déformation plastique diminue quand la vitesse de mise en charge augmente. Le cas de charge rapidement croissante est très fréquent sur les ouvrages d'art; il est donc évident que l'on ne doit pas envisager pour l'ouvrage le même mode d'adaptation et les mêmes lois de plasticité lors de l'application d'un choc ou d'une surcharge lente.

L'étude expérimentale de ces questions nous a montré encore que dans le cas de charges répétées suivant un mode harmonique, le coefficient de viscosité élastique était variable dans le temps. En outre, nous avons observé que cette variation dépendait de l'amplitude de la charge. Pour une faible charge le coefficient λ diminue et tend vers une valeur λ; le solide s'adapte aux efforts qui lui sont appliqués. Par contre, lorsque l'amplitude de la force est supérieure à une certaine valeur parfaitement définie, le coefficient λ tend à augmenter. La valeur de cette frontière entre les deux phénomènes est sensiblement la même que la limite de fatigue mesurée indépendamment pour le même solide. On trouve ici la liaison d'ordre phénoménologique qui manquait pour joindre la déformation à la rupture dans le cas des efforts répétés. Ceci est d'ailleurs en accord avec les mesures de la capacité d'amortissement suivant lesquelles les décréments logarithmiques d'oscillations engendrées par des impulsions successives vont en diminuant lorsqu'on se trouve en-dessous de la limite de fatigue et en augmentant lorsqu'on est au-dessus de cette limite.

Une autre série de questions que l'on peut explorer grâce à cette théorie est celle ayant rapport à la propagation des vibrations dans les solides. Qu'il nous suffise de dire que devant la fréquence élevée et les faibles amplitudes des vibrations acoustiques, par exemple, les phénomènes plastiques jouent un rôle restreint devant la propagation. Seule, l'hystérésis élastique peut avoir une importance. L'équation générale de propagation d'un ébranlement obtenue à partir de nos premières équations est:

$$\delta \frac{d^2u}{dt^2} = E \frac{d^2u}{dx^2} + \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{d^3u}{dx^2 dr} \, dr$$

ou encore:

$$\delta \frac{d^2u}{dt^2} = E \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{d^3u}{dx^2 dt} - \frac{E}{\lambda^2} \frac{d^4u}{dx^2 dt^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{E}{\lambda^n} \frac{d^{n+2}u}{dx^2 dr^n} + \ldots$$

λ ayant une valeur élevée, l'équation précédente peut être limitée aux deux premiers termes du second membre. Elle est alors exactement semblable à l'équation de propagation déjà connue pour les milieux visqueux $\frac{E}{\lambda}$ étant le coefficient de viscosité.

I 5

Considérations critiques sur la théorie de la plasticité.

Kritische Betrachtungen zur Plastizitätstheorie.

Critical observations on the theory of plasticity.

Oberbaurat Dr. v. Kazinczy,
Budapest.

En 1914 j'ai publié un article dans une revue hongroise[1] où, le premier, j'émettais l'avis qu'il fallait aussi tenir compte de la déformation permanente de l'acier dans la détermination de la résistance effective des systèmes hyperstatiques. Cette résistance effective est plus grande que celle que l'on obtient d'après la théorie de l'élasticité, c'est pourquoi il faut tenir compte de la déformation permanente dans le calcul pratique des ouvrages. Depuis lors, ce problème a été discuté, étudié et contrôlé par des essais. Nous voulons donner ici un aperçu critique de toute la question.

La nouvelle méthode de calcul est désignée par différents noms. Par *théorie de la plasticité* on entend une méthode de calcul qui tient aussi compte des déformations permanentes, contrairement à la théorie de l'élasticité qui n'est basée que sur les déformations élastiques. On emploie souvent, en allemand, l'expression «méthode de la charge supportable» (Traglastverfahren), mais cette désignation est équivoque car plusieurs auteurs, par ex. *Stüssi*, entendent par «charge supportable» la plus grande charge qui peut être supportée alors que *F. Bleich, Maier-Leibnitz* et moi-même, dans mes publications antérieures, nous entendons par là une charge «pratiquement» supportable. Pour prendre position il faut d'abord préciser quelques principes fondamentaux. *A quoi sert le calcul des ouvrages?:* à rendre ces derniers propres à l'emploi. Par suite des inexactitudes du calcul, de l'exécution, du matériau et de la charge, il faut dimensionner nos ouvrages avec une certaine «sécurité» vis-à-vis de la ruine. J'ai démontré au Congrès de Vienne[2] que la grandeur de la sécurité était une question d'économie. D'une part, il faut construire aussi économiquement que possible et, d'autre part, de telle sorte qu'en tenant compte de la probabilité, les dommages éventuels ne soient pas plus grands que l'économie réalisée en réduisant les dimensions des éléments de construction. La sécurité doit donc être d'autant plus grande que les dommages peuvent être eux-mêmes plus importants. C'est la raison pour laquelle nous nous contentons d'une sécurité de 1,6 à 1,8 là où la ruine n'apparaît d'abord que sous forme d'un fléchissement inadmissible alors que nous choisissons une sécurité de 3 là où, sans aucun signe annonciateur, la rupture se produit subitement par sollicitation excessive d'un élément (p. ex. par flambage). Les éléments de construction rendus inutilisables par une grande

déformation doivent avoir une sécurité suffisante par rapport à la déformation inadmissible mais non pas par rapport à la rupture. Afin d'établir une règle générale pour la grandeur du fléchissement admissible on pourrait considérer comme limite (charge limite, charge pratiquement supportable) la charge à partir de laquelle le flèchissement croît rapidement. Dans les essais de *F. Stüssi* et *C. F. Kollbrunner*[3] (fig. 1) je considérerais 1,71 t et non 2,35 t comme charge limite pour la poutre sur deux appuis. A ce point de vue les conclusions tirées des essais sont un peu différentes en ce sens que, dans tous les cas et même dans les cas extrêmes, la charge limite (et non pas la vraie charge supportable) est double pour une poutre élastiquement encastrée. (Poutre simple sur deux appuis $P_{T'} = 1{,}71$ t; $P_v = 2{,}35$ t; poutre continue $l = 120 - 60 - 120$, $P_{T'} = 3{,}46$ t; $P_v = 3{,}82$ t; $P_{T'}$ = charge limite, P_v = charge supportable; $\frac{3{,}46}{1{,}71} = 2{,}02$; $\frac{3{,}82}{2{,}35} = 1{,}62$.) Il y a exception lorsque la compressibilité de l'encastrement est grande car, dans ce cas, les flèchissements élastiques croissent si rapidement, lorsque la limite d'écoulement est atteinte au milieu de la poutre, que la valeur inadmissible est atteinte avant l'apparition de l'écoulement sur les appuis intermédiaires. La fig. 2 représente, pour différents degrés d'encastrement, les lignes de flèchissement d'une poutre idéalement plastique soumise à une charge uniformément répartie. On constate que dans certains cas particuliers il faut tenir compte des déformations.

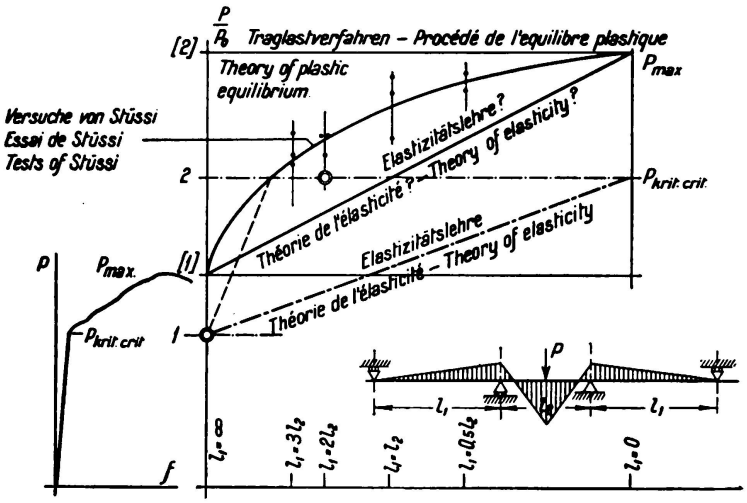


Fig. 1.

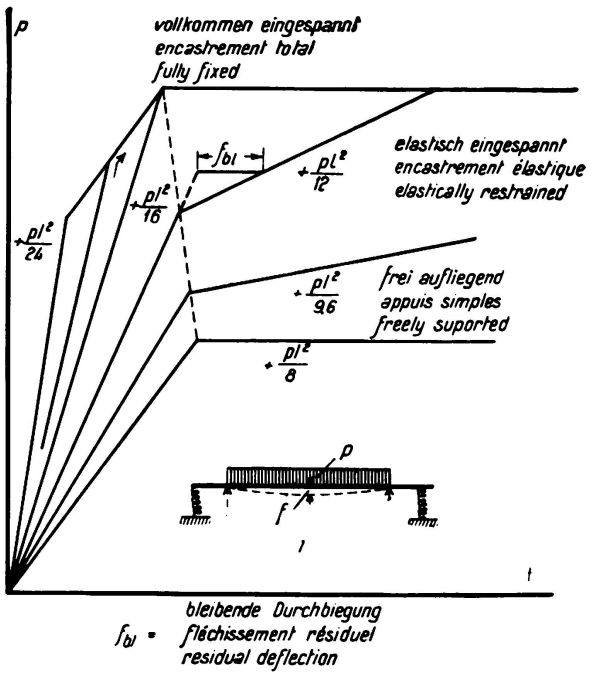


Fig. 2.

Le degré de sécurité désiré peut être introduit de deux façons différentes dans le dimensionnement: en multipliant la charge par le coefficient de sécurité ou en introduisant comme contrainte admissible la contrainte limite, divisée par le coefficient de sécurité. La deuxième méthode est la plus courante. Le rapport entre la contrainte limite et la contrainte admissible représenterait donc

le coefficient de sécurité, ce qui serait exact si les contraintes croissaient suivant une ligne droite jusqu'à la charge limite, mais ce n'est souvent pas le cas, surtout dans les systèmes hyperstatiques (égalisation des efforts). Si nous calculions avec des contraintes multipliées par le coefficient de sécurité, l'égalisation des tensions serait plus compréhensible, car cette égalisation ne se produit qu'au-dessus de la contrainte admissible et ne détermine par conséquent que la sécurité et non pas la sollicitation effective.

Pour déterminer théoriquement la charge limite des poutres hyperstatiques on s'est basé, par suite de difficultés mathématiques, sur un matériau ayant des propriétés idéales, c'est-à-dire ayant un diagramme idéalisé des contraintes-allongements. On a admis d'autre part que la section restait plane au cours de la déformation et que la plastification se propageait progressivement à partir des bords vers l'intérieur de la poutre. Suivant cette théorie, une section soumise à la flexion ne peut continuer à se déformer, sans accroissement du moment, que lorsqu'elle est plastique jusqu'à l'axe neutre. Ce n'est donc que sous l'effet d'une flexion infiniment grande qu'une section peut devenir une articulation plastique. Cela ne se présentera jamais dans l'acier, à cause de la solidification de ce dernier; pour cette raison, certains savants ont étudié dernièrement l'apparition de la déformation plastique et tout spécialement les cas où le champ de tension n'est pas régulier et où la plastification ne se propage pas d'une façon continue, c'est-à-dire les cas où les parties faiblement sollicitées entravent la déformation des parties plastifiées, (travaux de *W. Kuntze*[4] et *W. Prager*[5], *J. Fritsche*[6]: nouvelle théorie de la plasticité). L'observation n'a cependant pas justifié cette dernière théorie. Le retard de l'écoulement n'est pas suffisant pour produire la plastification de la poutre en une fois jusqu'à l'axe neutre. On peut le constater aussi dans l'ouvarge de Nádai intitulé: «Bildsamer Zustand der Werkstoffe», p. 127, fig. 230: la plastification se propage régulièrement vers l'intérieur. Par contre on peut observer dans les poutres en I que les lignes de cession apparaissent en une fois sur la moitié d'une aile. Rinagl[7] affirme qu'il est faux de considérer de la sorte ce retard à l'écoulement; il faut l'attribuer à une limite supérieure d'écoulement qui se présente toujours dans la flexion mais qui n'apparaît qu'imparfaitement dans un essai de traction. Je ne partage pas l'opinion de M. le Prof. *Rinagl* car j'ai pu observer moi-même un retard à l'écoulement dans des barres de treillis soumises à un champ de tension irrégulier, j'en parlerai plus loin. D'après toutes ces théories, la prise en considération des propriétés effectives du matériau conduit à des calculs trop compliqués. Or nous devons trouver une méthode simple de calcul car notre but

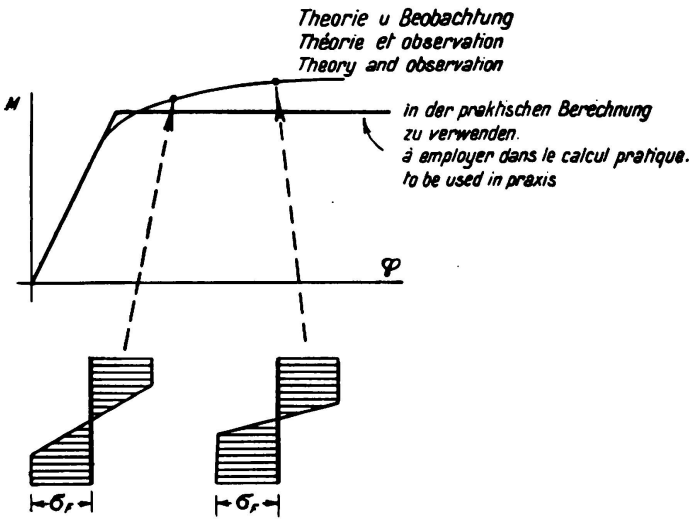


Fig. 3.

final est le dimensionnement des ouvrages et non pas le contrôle théorique de résultats d'essais. On peut y arriver en admettant, même pour la flexion, une transition nette de l'état élastique à l'état plastique. *Maier-Leibnitz*[8] a montré comment on pouvait résoudre des problèmes simples avec la vraie théorie des moments-déformations; une méthode pratique ne pourra se baser que sur l'inter-

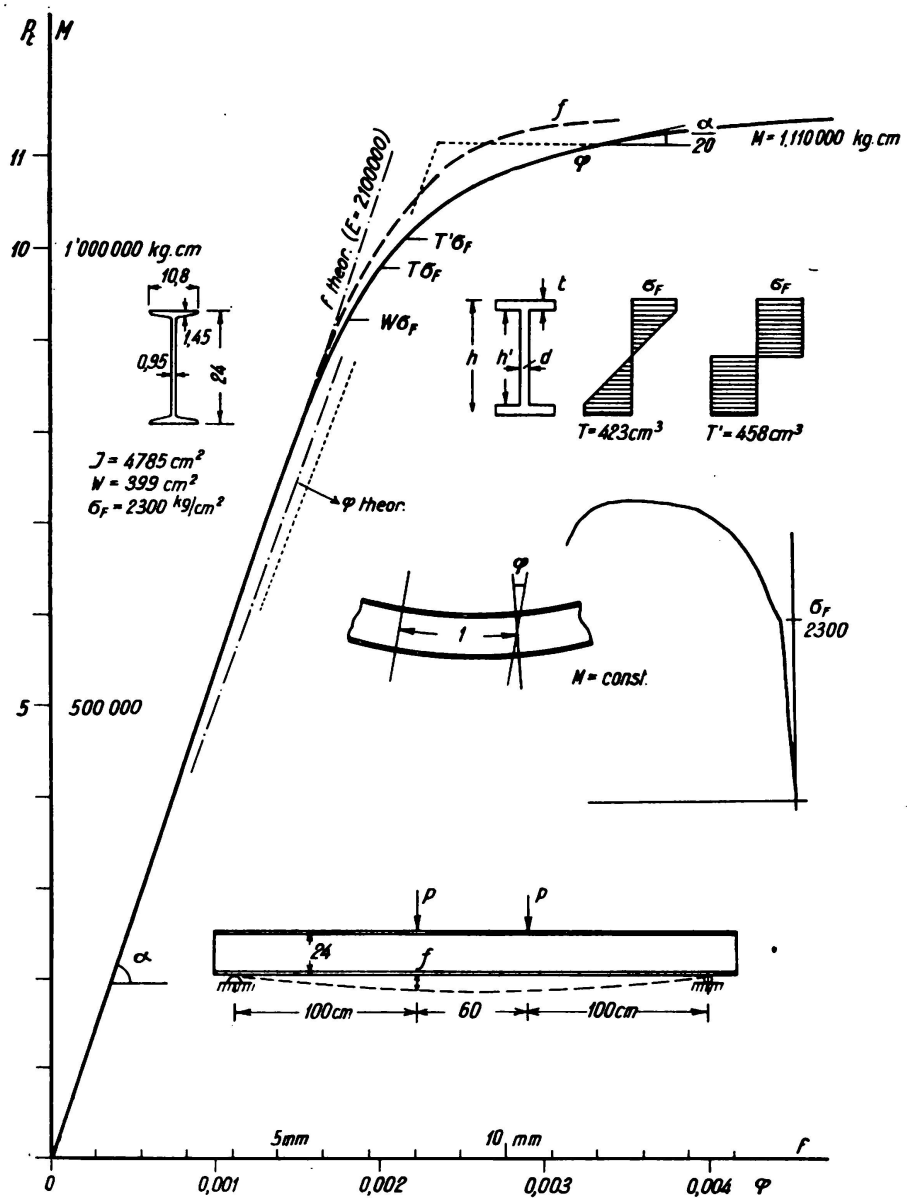


Fig. 4.

prétation simplifiée (fig. 3). *Maier-Leibnitz* propose de considérer comme moment limite le moment pour lequel la courbe des moments-déformations présente la plus forte courbure. Quant à moi, je proposerais plutôt de considérer comme moment limite celui pour lequel le fléchissement permanent est 20 fois plus grand que le fléchissement élastique. Pour étudier cette question, j'ai chargé une poutre en I, NP hongrois 24 (W = 399 cm³), jusqu'au-dessus de la limite d'écoulement et j'avais recouvert la poutre de laque afin de mieux pouvoir observer l'écoulement. Le diagramme des fléchissements est pratiquement une

droite jusqu'à $\sigma = 2250$ kg/cm² (fig. 4). Les lignes de cession apparaissent pour 2500 kg/cm² dans l'aile tendue alors qu'on a déjà pu les observer pour $\sigma = \frac{M}{W} = 2120$ kg/cm² dans l'aile comprimée, probablement par suite d'une irrégularité locale. Pour $\frac{M}{W} = 2800$ kg/cm² fut atteint le degré de déformation que j'ai introduit comme caractéristique du moment-limite. Après l'essai, la poutre fut soigneusement examinée, puis photographiée (fig. 5). Dans la partie de la poutre soumise à un moment maximum constant, une moitié environ de la surface des ailes était recouverte de lignes de cession. Contrairement à la théorie, ces lignes de cession s'étendaient jusqu'aux environs de l'axe neutre. Après l'essai, on a obtenu une limite d'écoulement de 2300 kg/cm² sur une éprouvette de traction prélevée sur l'extrémité non chargée de la poutre. On peut conclure, à partir de cet essai, que le moment limite ne peut pas être déterminé théoriquement mais empiriquement. Il est probable que la limite d'écoulement et le moment limite n'ont entre eux aucune relation simple car la forme de la section et les propriétés du matériau jouent également un rôle. Une fois ces moments limites déterminés empiriquement pour certaines sections et certaines sortes d'acier, rien ne s'oppose plus à l'application de cette nouvelle méthode. (*v. Kazinczy*[9], *Kist*[10], *Fritsche*[11] et *Kuntze*[4] ont donné des méthodes de calcul pour les moments limites mais toutes les valeurs ainsi obtenues sont plus petites que celles obtenues au cours de mes essais.) Lorsque l'on s'est décidé à calculer avec la ligne idéalisée du fléchissement (diagramme des M-φ) le calcul des ouvrages se fait de la façon suivante:

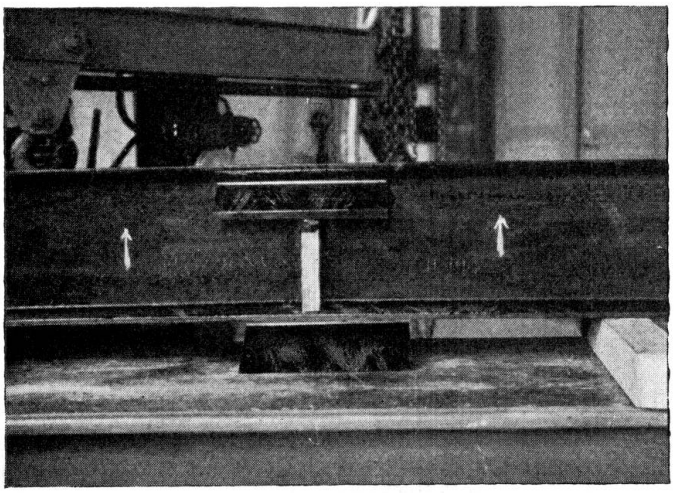


Fig. 5.

1° — *Systèmes isostatiques soumis à la flexion.*

La limite de capacité n'est pas atteinte lorsque l'écoulement se produit dans la fibre extrême mais lorsque la «poutre» arrive à l'écoulement. Le «moment supportable» n'est pas $M = W \cdot \sigma_F$ mais $M = T \cdot \sigma_F$ où T est environ de 6 à 20 % plus grand que W; T doit être provisoirement déterminé par des essais.

2° — *Poutres réticulées isostatiques.*

Le calcul reste comme il était jusqu'à présent. On peut négliger les contraintes secondaires résultant de la rigidité des attaches. Le flambage des barres comprimées, même dans le plan de la poutre, se calculera avec toute la longueur théorique de la barre. Les barres comprimées, doivent posséder un plus grand

degré de sécurité que les barres tendues car tout dépassement de la charge de flambage peut entraîner la ruine de l'ouvrage.

3° — *Le calcul des rivets d'attache.*

Le calcul se fait comme jusqu'à présent, c. à. d. que l'on répartit la charge totale uniformément sur tous les rivets. Ici, la pratique et l'expérience ont complètement justifié la théorie de plasticité. Il faudrait dimensionner les rivets ou les soudures d'attache à partir de l'effort admissible maximum de la barre et non pas à partir de l'effort calculé; en cas d'excès de charge ce n'est alors pas l'attache mais la barre qui s'écoulera. L'égalisation des contraintes secondaires dans les barres mêmes justifie la rigidité des attaches.

4° — *Le calcul des poutres continues.*

Pour la poutre constituée d'un seul profilé de laminage (section constante) on détermine dans chaque ouverture les moments M_0, comme dans la poutre simple, et l'on place la ligne de référence de façon telle que les moments positifs et négatifs soient égaux. La poutre est à dimensionner pour le plus grand des moments ainsi obtenus.

Le calcul d'après la théorie de la plasticité n'a plus beaucoup de sens pour les poutres dont les sections sont adaptées à l'allure des moments au moyen de semelles. Si, pour des raisons d'extrême économie, on veut, malgré tout, employer la nouvelle méthode, il faut tracer la ligne de référence de telle sorte que les frais d'exécution soient minima. On peut admettre comme règle que les moments négatifs peuvent être réduits à volonté tandis qu'un écoulement au milieu de la travée est toujours lié à de grands fléchissements.

Lorsque la charge est mobile, on détermine d'abord les valeurs limites des moments d'après la théorie de l'élasticité et l'on peut ensuite déplacer à volonté la ligne de référence dans le sens d'une égalisation des moments.[12] [13]

Un résultat des plus importants de la théorie de la plasticité est que l'on peut négliger les affaissements d'appuis. Par contre, il faut toujours tenir compte des effets de la compressibilité élastique des appuis.

On peut négliger les contraintes de laminage et de retrait mais non les contraintes produites par un échauffement irrégulier en cours de service.[13]

Si l'on calcule avec une égalisation plus poussée des moments, il est bien de rendre la membrure comprimée plus forte afin que l'écoulement se produise dans la membrure tendue et ceci principalement lorsque l'on désire cette égalisation par écoulement au milieu de la travée.

5° — *Systèmes composés de barres rigides.*

Bien des savants ont indiqué que la limite d'écoulement pouvait être atteinte en n points d'un portique n fois statiquement indéterminé sans que pour autant le système soit inutilisable. On peut considérer le problème comme si, en ces points, existaient des articulations sur lesquelles agissent des moments de grandeur constante. Autrefois je partageais cette manière de voir[14] mais j'ai partiellement changé d'avis. Pour qu'un tel système devienne instable il

faut introduire assez d'articulations pour qu'il soit une chaîne cinématique. Les articulations agissent dans une direction déterminée. L'articulation plastique n'agit donc comme articulation que dans une seule direction alors que dans les autres directions elle agit comme un élément absolument élastique. Les articulations plastiques qui ont un sens de rotation opposé à celui qu'elles devraient avoir dans une chaîne cinématique ne peuvent donc pas être considérées comme articulations. Il peut ainsi arriver que la limite d'écoulement soit dépassée en plus de n points dans un système n fois statiquement indéterminé, sans que le système soit instable.

Un système en portique résiste avec sécurité à une surcharge donnée lorsqu'un diagramme quelconque de moments, compatible avec les conditions d'équilibre des forces extérieures, ne dépasse en aucun point la valeur $M = T \cdot \sigma_{adm}$. On peut adopter une méthode plus exacte, analogue à celle du Prof. *Cross*. On détermine d'abord les moments d'après la théorie de l'élasticité. Aux endroits où les moments doivent être réduits on se représente la poutre sectionnée et l'on introduit, pour l'égalisation, des moments additionnels «déchargeants». Aux endroits où la réduction est déjà réalisée on introduit des articulations, mais là seulement où l'on peut s'attendre à un accroissement des moments (fig. 6). Le grand avantage de la théorie de la plasticité réside en ce que nous pouvons régler les moments et préserver les endroits exposés contre tout excès de sollicitation. Dans un cadre, les montants sont en général les élements les plus importants. Le fléchissement dangereux d'un montant peut être évité par un écoulement inoffensif de la poutre en son point d'encastrement.

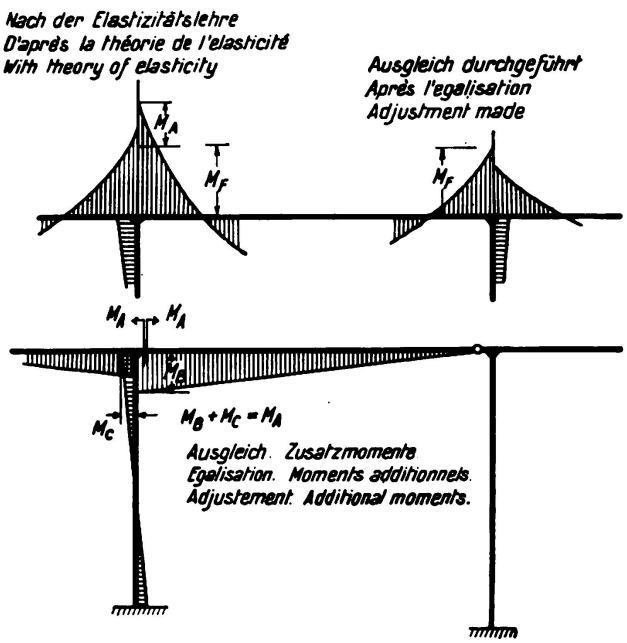


Fig. 6.

6° — *Les poutres réticulées.*

Les poutres réticulées, extérieurement hyperstatiques, seront dimensionnées comme les poutres et les portiques. Les phénomènes de plastification apparaissent dans une partie d'une barre. Seules les barres tendues peuvent servir à l'égalisation car le flambage réduit à un minimum la résistance des barres comprimées, ainsi que je l'ai déjà exposé à Liége.[9] *E. Chwalla*[15] a étudié dernièrement ce problème et ses essais ont montré que la résistance à la compression décroît très rapidement. Dans les poutres réticulées, intérieurement hyperstatiques, il arrive assez souvent qu'il soit impossible d'utiliser complètement toutes les barres d'après la théorie de l'élasticité. Ainsi par exemple dans la poutre de la fig. 7, la théorie de l'élasticité ne permet pas d'utiliser complètement le système

partiel B. La théorie de la plasticité offre ici des avanntages économiques car elle permet l'utilisation complète de toutes les barres. Le calcul de ces systèmes est en général très simple. On élimine les barres en excès et l'on introduit à leur place les forces connues $F \cdot \sigma_{adm}$. Il faut éliminer les barres tendues fortement sollicitées, c. à. d. celles qui, les premières, deviennent plastiques. Lorsque pour

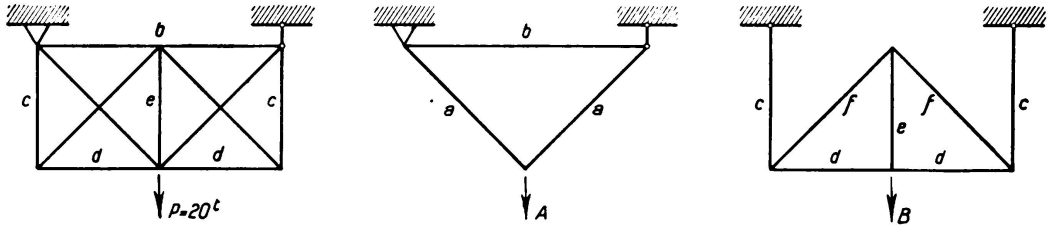


Fig. 7.

cela des considérations simples ne suffisent pas, il faut avoir recours à la théorie de l'élasticité. Le choix des sections doit être tel que seules les barres tendues s'écoulent et que jamais une barre comprimée ne flambe.

Lorsque la charge est mobile il faut employer des méthodes spéciales comme par exemple celle de *Melan*.[16]

Pour contrôler les considérations théoriques sur la théorie de la plasticité dans les poutres réticulées, j'ai exécuté quelques essais dont je voudrais dire quelques mots ici. J'ai essayé deux types de poutres réticulées intérieurement hyper-

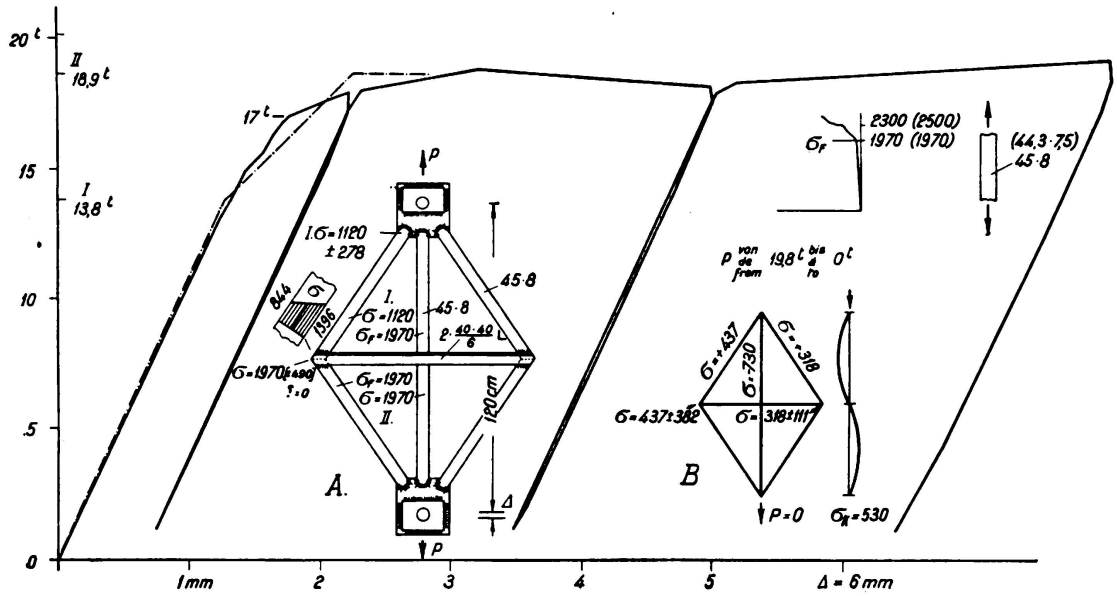


Fig. 8.

statiques, à savoir, des poutres soudées et des poutres rivées alors que *G. Grüning* et *E. Kohl*[17] ont exécuté leurs essais sur des poutres extérieurement hyperstatiques. Les barres tendues les plus sollicitées étaient des barres à oeillets; ces essais ne permettaient donc pas de tirer des conclusions pour les assemblages ordinaires dans les noeuds. La forme des poutres d'essai, avec leurs dimen-

sions, et les résultats obtenus sont donnés à la fig. 8. Pour un matériau idéalement plastique, le comportement de ces poutres serait celui de la fig. 9. On peut concevoir la poutre en question comme la combinaison des deux systèmes A et B. Les résistances des deux systèmes A et B sont portées en ordonnées, en fonction des allongements contraints. Désignons par P_I la «première charge limite» et par P_{II} la «deuxième charge limite» (= limite de résistance). Après la décharge, les deux systèmes ne restent pas sans contraintes (forces résiduelles de la fig. 9).

L'étude de la résistance du matériau choisi a montré que l'acier était très doux et que le domaine d'écoulement s'étendait fortement avec l'accroissement de la contrainte. La limite d'écoulement est d'abord atteinte dans la barre tendue verticale (première charge limite). Pour un accroissement de la charge les contraintes restent constantes dans cette barre verticale et ne croissent que dans les autres barres jusqu'à ce que ces dernières s'écoulent également (deuxième charge limite). Les contraintes secondaires théoriques, indiquées à la fig. 8 disparaissent avec l'écoulement; c'est du moins la conception actuelle. A la décharge, la poutre réticulée se comporte tout-à-fait élastiquement; les contraintes résiduelles sont représentées à la fig. 8. La barre verticale ne peut pas supporter les contraintes résiduelles de 730 kg/cm² car c'est un plat qui flambe déjà pour 530 kg/cm². Ce flambage pouvait être observé sur l'éprouvette. Les premières lignes de cession ont été observées aux environs du milieu de la barre verticale pour P = 14 t; l'écoulement proprement dit n'a cependant commencé dans cette barre que pour 17 t. L'éprouvette a subi des déformations importantes, cependant seules de très courtes parties de la barre se sont écoulées (fig. 10). L'allongement plastique est ainsi concentré en certains points où il atteint toujours un pourcent constant. Il faut se représenter l'allongement d'une barre suivant la fig. 11 où k_I et k_{II} sont différents allongements contraints. Les lignes e représentent des allongements élastiques et les lignes p des allongements plastiques. La limite de résistance (deuxième limite de charge) concorde bien avec la valeur théorique, preuve que les contraintes de retrait provoquées par la soudure sont sans influence sur la résistance. Elles n'influencent que le commencement de l'égalisation des forces.

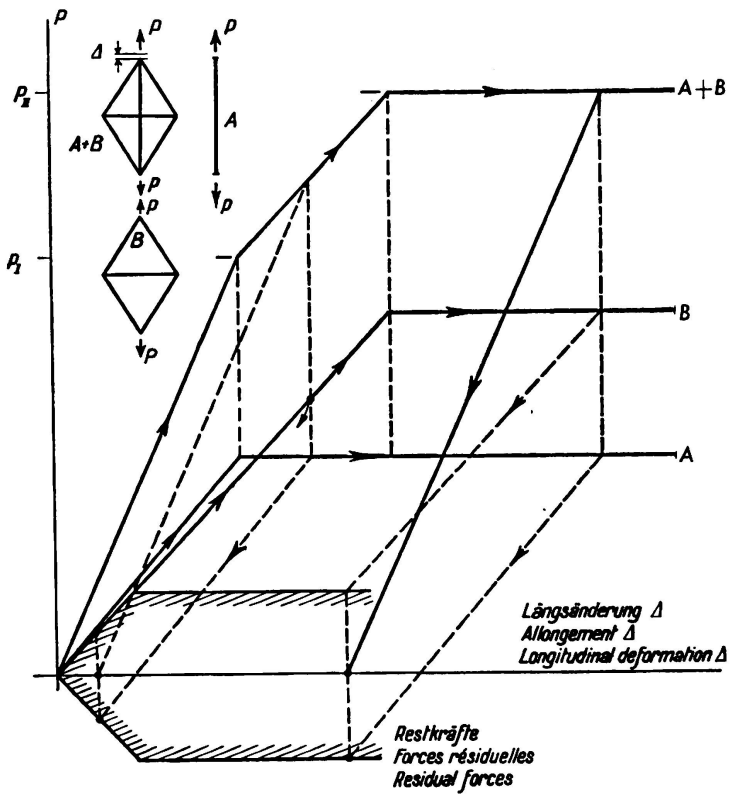


Fig. 9.

Pour déterminer la grandeur des contraintes de retrait j'ai fait exécuter d'autres

éprouvettes sur lesquelles j'ai observé, lors du soudage et du refrodissement, les allongements en différents points; j'ai pu déterminer des contraintes de retrait de 900 kg/cm². Je n'ai pu observer aucun retard à l'écoulement, c.à.d. aucune limite supérieure d'écoulement. L'écoulement a commencé dans les barres obliques soumises à de fortes contraintes secondaires lorsque les contraintes moyennes avaient atteint la limite d'écoulement. Ces essais semblent justifier la nouvelle théorie de la plasticité. Par contre, aucun des essais exécutés n'a permis d'observer l'ancienne condition d'écoulement. Je reviendrai sur ces essais d'une façon beaucoup plus détaillée dans une revue technique.

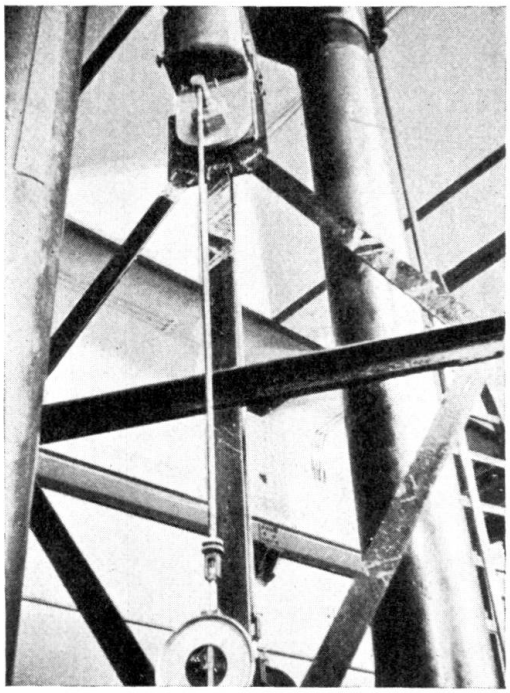


Fig. 10.

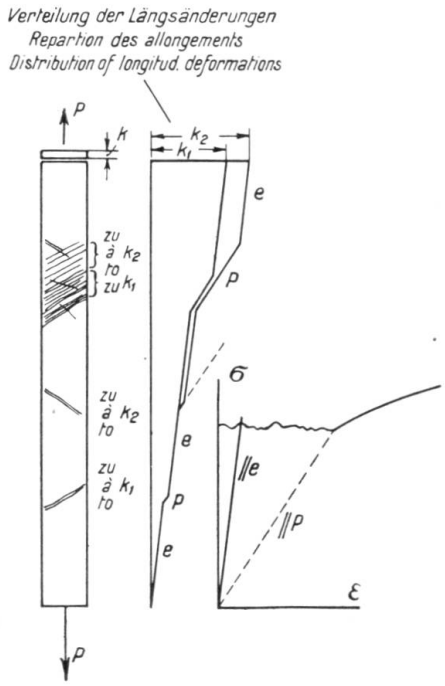


Fig. 11.

J'ai fait construire une autre poutre semblable mais rivée (fig. 12). J'ai utilisé des fers plats à plus haute limite d'étirement et c'est pourquoi la charge maxima était plus grande que pour la poutre soudée (20,4 t contre 19,1 t). Lors de la première mise en charge on a pu observer un tassement du rivetage. Lors des autres mises en charge le système se comportait élastiquement. Malgré les trous de rivets, l'écoulement pouvait se présenter dans les sections pleines.

Ces essais ont permis, de tirer les conclusions suivantes: Dans les poutres réticulées soudées hyperstatiques, les contraintes de retrait n'influencent que le commencement de l'égalisation des moments et pas du tout la grandeur de la charge critique. Il faut ajouter que les contraintes de retrait relèvent les contraintes principales dans les barres tendues et les réduisent dans les barres comprimées. (Choix du mode d'exécution.)

Dans les poutres réticulées rivées hyperstatiques l'allongement plastique débute dans les assemblages et le frottement augmente un peu la force nécessaire à cette plastification. Un relèvement de la limite d'écoulement au bord du trou ou une

solidification de l'acier par suite du rivetage pourraient avoir une influence semblable. Lorsque les barres sont courtes, un faible tassement des liaisons suffit à produire une égalisation des forces. Les attaches doivent toujours être assez fortes pour que la limite d'écoulement soit atteinte dans la barre pleine. La limite de résistance d'une poutre réticulée rivée est à peu près celle que donne la théorie de la plasticité pour les sections non affaiblies par des trous de rivets en admettant qu'aucune barre comprimée ne flambe. En tenant compte des grandes déformations plastiques on obtient la limite pratique de résistance en déduisant les trous de rivets et en tenant compte de l'égalisation des forces. La sécurité

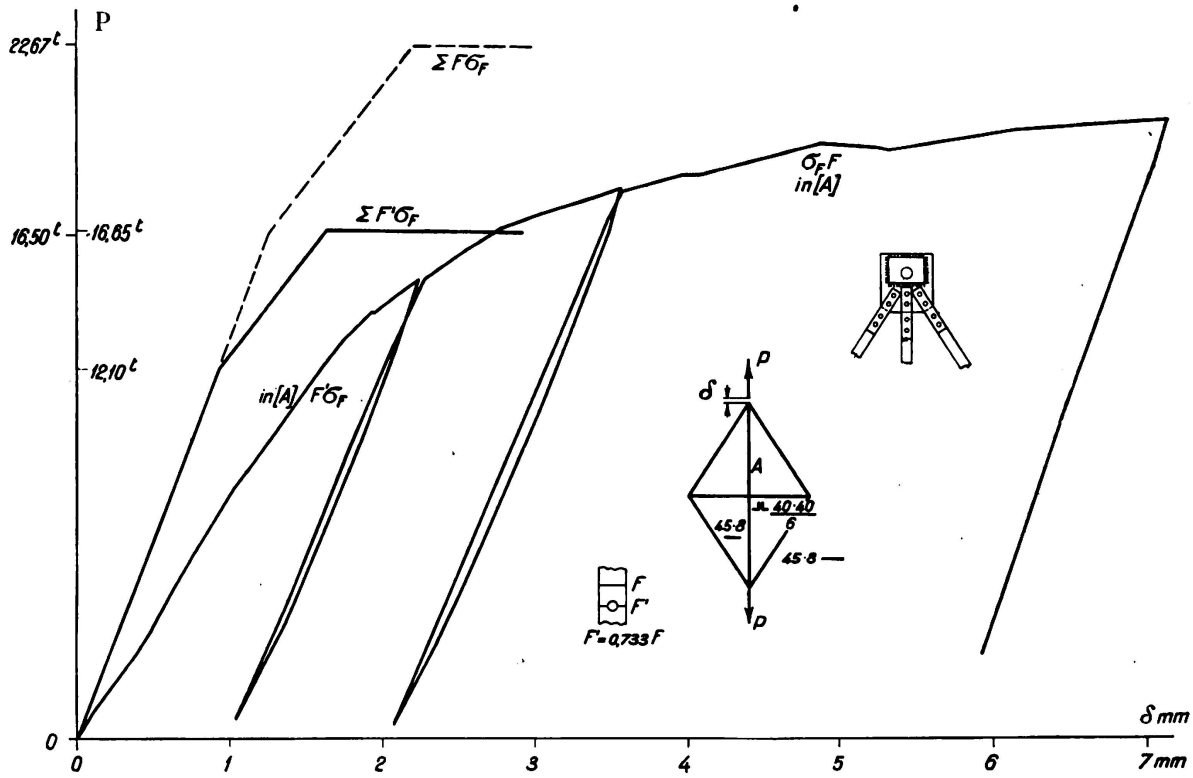


Fig. 12.

sera toujours plus grande que dans les systèmes soudés, calculés avec des sections pleines.

A côté des poutres réticulées, j'ai étudié également des poutres à âme pleine rivées. Les poutres sur deux appuis furent chargées aux tiers. On a mesuré l'angle de fléchissement de la poutre soumise en son milieu à un moment constant. Les résultats des essais sont indiqués à la fig. 13. Nous n'avons pas soustrait les trous de rivets dans le calcul de J. Le fléchissement mesuré est un peu plus grand que celui que l'on calcule avec $E = 2100$ t/cm² tandis que le fléchissement à la décharge joue bien (comportement élastique). Après un repos de 2 jours, la limite d'écoulement était de 6 % plus haute et la poutre se comportait tout-à-fait élastiquement. Avec l'hypothèse $d\sigma/d\varepsilon = {}^1/_{20}E$, j'ai trouvé 14 t pour la charge critique. La fig. 13 montre les résultats de la comparaison entre cette valeur et les différentes interprétations; la plus petite limite d'écoulement des cornières a été posée égale à 2500 kg/cm². De là on obtient une contrainte maxima de 2720 kg/cm² dans la fibre extrême de la semelle. Pour

le calcul du moment supportable $T \cdot \sigma_{adm}$ j'ai considéré l'état où la semelle a atteint la limite d'écoulement (fig. 13). Une autre inconnue se présente encore dans cet essai: comment faut-il tenir compte des trous de rivets? Pour cela j'ai exécuté un essai comparatif avec deux poutres de même section et du même matériau, l'une rivée, l'autre soudée. Les résultats sont rassemblés au tableau I.

Tableau I.

I-Poutre soudée			I-Poutre rivée d = 16 mm	
σ_F kg/cm²	Section mm		Section mm	σ_F kg/cm²
2680	152,6 · 13	membrure comprimée	152 · 12,8	2680
2620	155 · 7,7	membrure tendue	154 · 7,7	2590
2750	60 · 60 · 6,1	4 L	60 · 60 · 6,1	2780
4280	182 · 8,2	Ame	183 · 8,6	4060
1 513 000		moment critique d'après les essais kgcm	**1 266 000**	
traction 1 180 000	compression 1 420 000	$W\sigma_F$ (σ_F = membrure)	traction 1 170 000	compression 1 400 000
		$W\sigma_F$ sous déduction des trous de rivets	**965 000**	**1 135 000**
		$W\sigma_F$ sous déduction des trous de rivets même de l'âme	906 000	1 087 000
1 644 000		$T\sigma_F$ Section totale	1 632 000	
		$T\sigma_F$ sous déduction des trous de rivets	**1 387 000**	
		$T\sigma_F$ sous déduction des trous de rivets même de l'âme	1 266 400	
1 513 000		$T\sigma_F$ des semelles et cornières $+ W\sigma_F$ de l'âme	avec déduction des trous de rivets **1 259 000**	

Nous avons également soumis à des essais une poutre rivée, continue sur trois appuis (fig. 15). Les fléchissements sont plus grands que ceux que l'on avait calculés, même lors de la décharge. Du milieu de la travée aux points d'application des forces, l'âme arrive à la limite d'écoulement sous l'effet des forces de

cisaillement (fig. 14). Le phénomène découvert théoriquement par *Stüssi*,[18] à savoir que les efforts de cisaillement doivent croître sensiblement lorsque

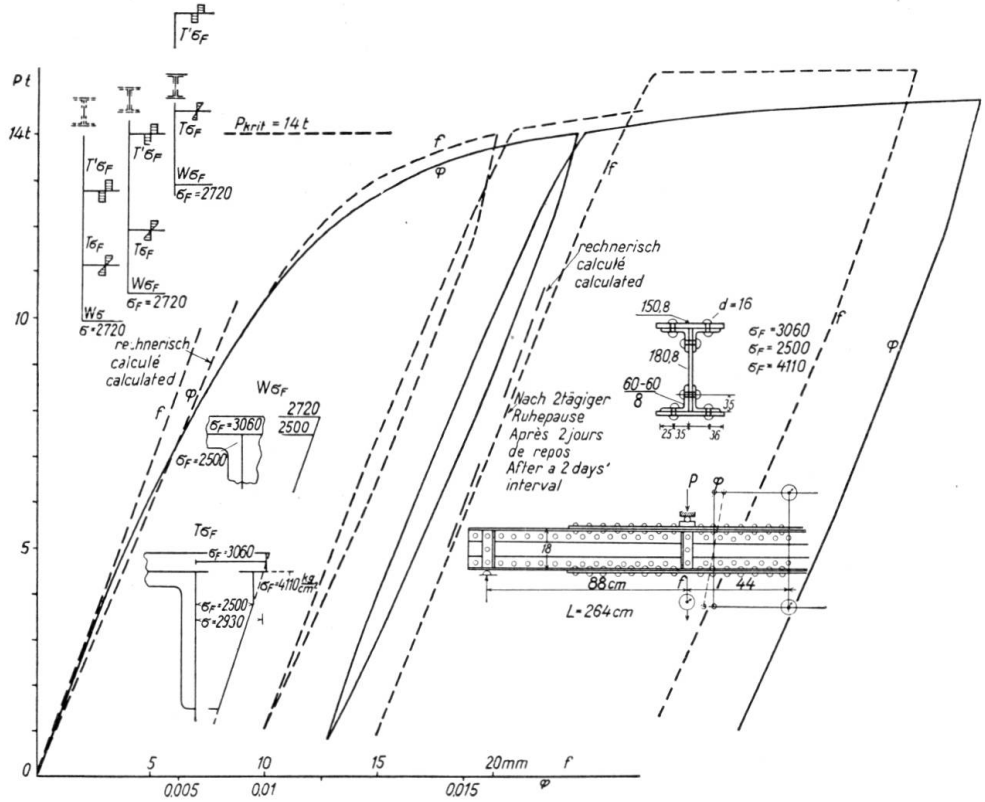


Fig. 13.

l'écoulement se propage du bord jusqu'à une certaine profondeur, est ainsi démontré par des essais, même s'il se présente à une échelle plus faible. Il faut

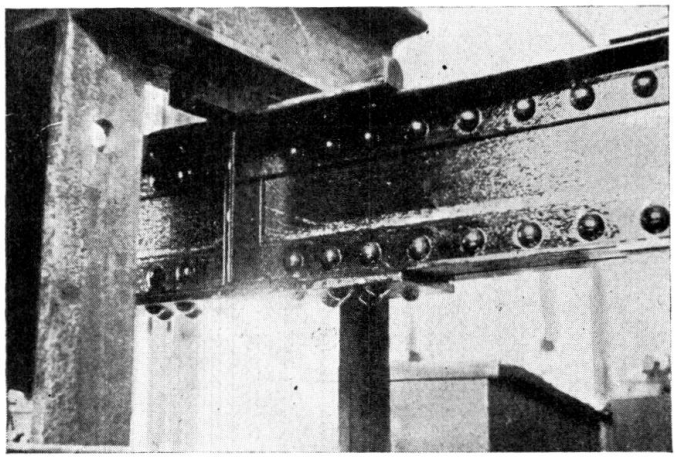


Fig. 14.

l'attribuer au fait qu'une courte partie seulement de la poutre est mise en danger par suite de la brusque décroissance des moments; les mouvements de cette

partie sont en outre entravés par les parties environnantes. Finalement j'ai trouvé que la charge maxima était égale à $T' \cdot \sigma_F$ lorsque l'égalisation des moments était complète.

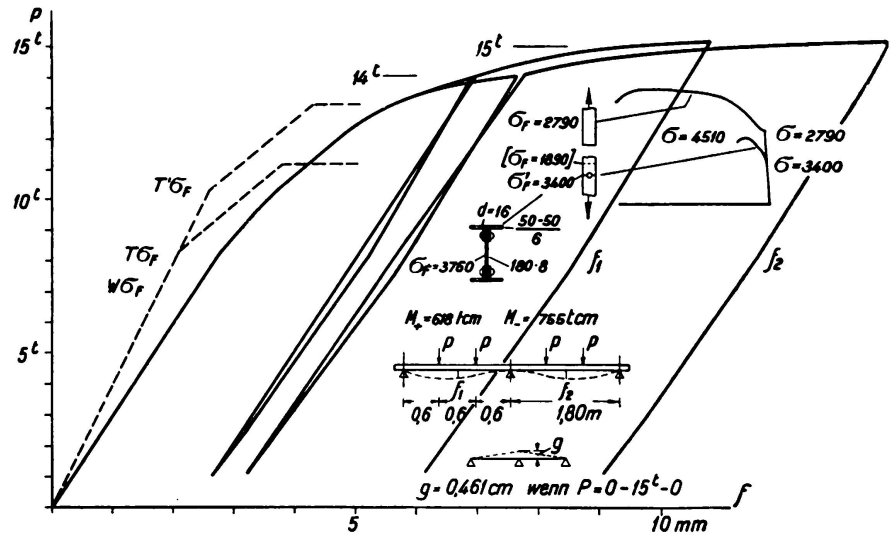


Fig. 15.

Bibliographie.

1 *v. Kazinczy:* Essais effectués sur des poutres encastrées, Betonszemle 1914 fasc. 4. 5 et 6.

2 *v. Kazinczy:* Compte-rendu de la IIe réunion internationale pour la construction de ponts et charpentes, Vienne 1928, p. 249.

3 *F. Stüssi* et *C. F. Kollbrunner:* Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, fasc. 21, p. 264.

4 *W. Kuntze:* Ermittlung des Einflusses ungleichförmiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze. Stahlbau 1933, fasc. 7, p. 19.

5 *W. Prager:* Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung. Forschungen auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 1933.

6 *J. Fritsche:* Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie. Stahlbau 1936, fasc. 9.

7 *F. Rinagl:* Sur les limites d'écoulement et les diagrammes de flexion. Publication préliminaire, p. 1599.

8 *H. Maier-Leibnitz:* Essais; signification et application des résultats, Publication préliminaire p. 101.

9 *G. v. Kazinczy:* Congrès international de l'acier. Liége 1930.

10 *N. C. Kist:* Congrès international de l'acier, Liége 1930.

11 *J. Fritsche:* Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens. Der Bauingenieur 1930, fasc. 49—51.

12 *G. v. Kazinczy:* Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre. Technika 1931.

13 *H. Bleich:* Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. Der Bauingenieur 1932, fasc. 19/20, p. 261.

14 *G. v. Kazinczy:* Statisch unbestimmte Tragwerke unter Berücksichtigung der Plastizität. Der Stahlbau 1931, p. 58.

15 *E. Chwalla:* Le problème de la stabilité des barres composées soumises à la compression. IIe vol. de Mémoires, p. 80.

16 *E. Melan:* Théorie des systèmes hyperstatiques, Publication préliminaire, p. 45.

17 *G. Grüning* et *E. Kohl:* Tragfähigkeitsversuche an einem durchlaufenden Fachwerkbalken aus Stahl. Der Bauingenieur 1933, fasc. 5/6, p. 67.

18 *F. Stüssi:* Über den Verlauf der Schubspannungen in auf Biegung beanspruchten Balken aus Stahl. Schweizerische Bauzeitung 1931, vol. 98, fasc. 1, p. 2.

I 6

Les expressions M_{st} (P) et M_F (P) dans la poutre continue à trois ouvertures, soumise à une charge P agissant dans la travée médiane (voir la Publication Préliminaire, pages 121—126).[1])

Die Beziehungen M_{st} (P) und M_F (P) beim durchlaufenden Balken mit drei Öffnungen, belastet durch P im Mittelfeld (siehe Vorbericht Seite 126—128).[1])

The Relations M_{st} (P) and M_F (P) in Girders Continuous over Three Spans Carrying a Load P in the Central Span (see Preliminary Publication, pages 121—126).[1])

Dr. Ing. H. Maier-Leibnitz,
Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Si l'on soumet la poutre de la fig. 1 à une charge croissant de 0 à P, on obtient d'abord une aire de moments à calculer d'après les pures lois de

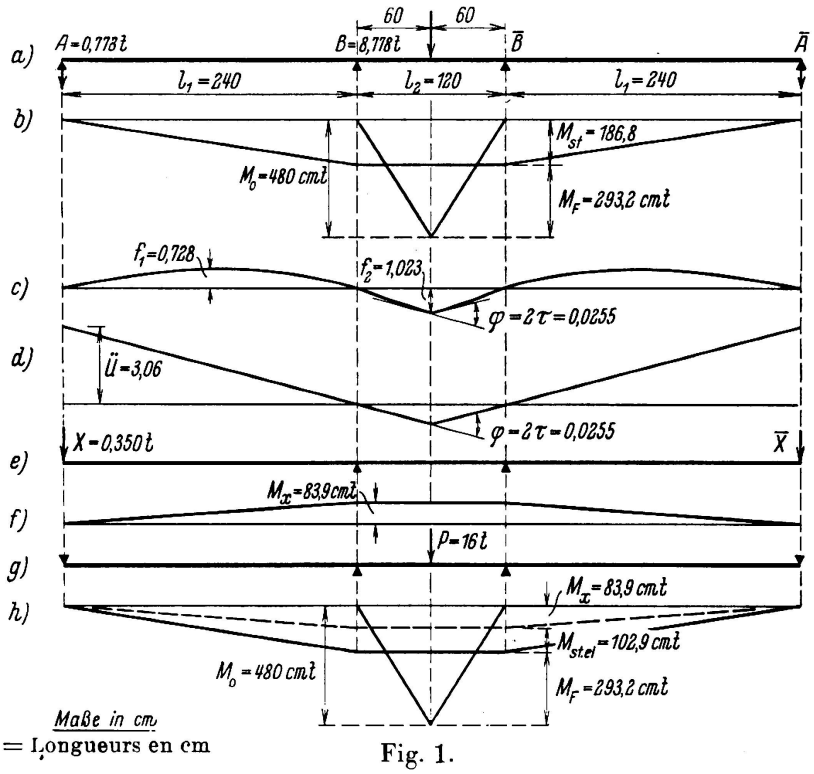


Fig. 1.
Comportement de la poutre sous l'effet d'une charge P = 16 t.

[1] Voir aussi la revue „Der Stahlbau" 9 (1936), p. 153 et ss.

l'élasticité, caractérisée par M_o, M_{st}, M_F. Lorsque $P = P_s$ ($= \sim 11$ t), la limite d'étirement σ_s est atteinte dans la fibre extrême au milieu de la travée.

Lorsque $P > P_s$, par ex. $P = 16$ t, M_F ne peut pas beaucoup dépasser la valeur $M_s = W \cdot \sigma_s$. A l'aide de la loi de *Mohr*, il est possible, en partant de la courbe des moments (fig. 1 b) entre A et B, d'établir une expression pour l'angle φ de l'axe déformé qui présente un coude au milieu de la poutre. Dans notre cas

$$E\,J\,\varphi = 6600\,P - 280\,M_F.$$

Lorsque l'on décharge la poutre, cette dernière présente la forme indiquée à la fig. 1 d avec relèvement ü. Avant une remise en charge il est tout d'abord

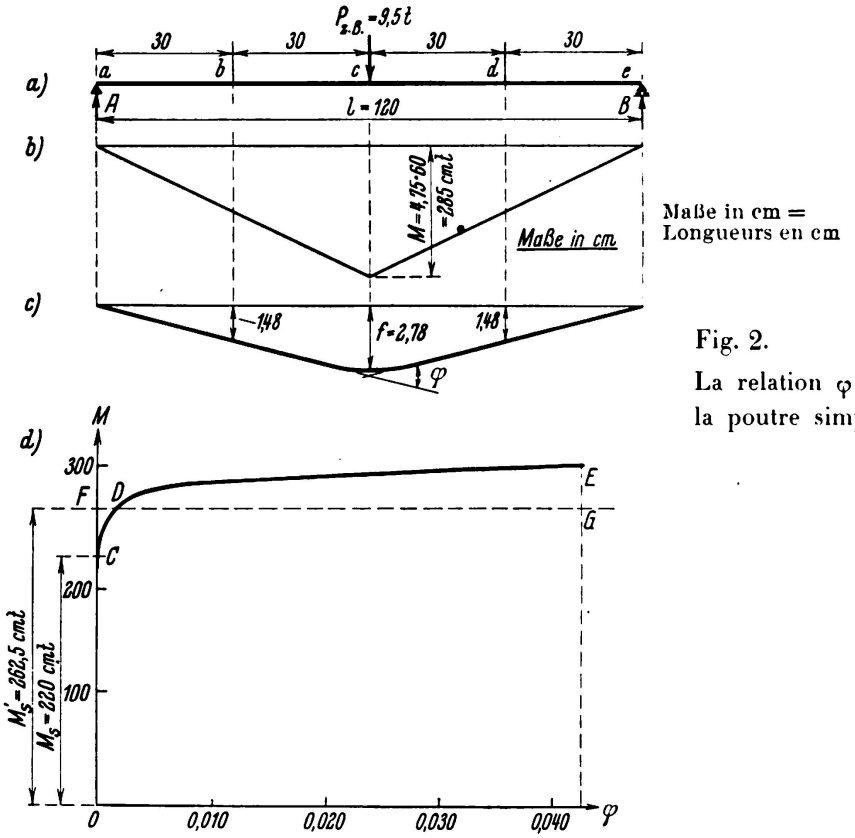


Fig. 2.
La relation φ (M) de la poutre simple.

nécessaire de supprimer le relèvement ü grâce aux deux forces X et $\overline{X}$, qui correspondent aux moments sur appuis M_x. Si l'on fait agir à nouveau la charge $P = 16$ t, le moment sur appui $M_{st\,el}$, purement élastique, s'ajoute à M_x, (courbe de moments suivant la fig. 1 h).

Quelle grandeur a M_F et par conséquent le moment sur appui $M_{st} = M_o - M_F$, ainsi que φ, ü, X?

Pour la poutre simple (poutre de comparaison $l = 120$ cm $= l_2$) il est possible de déterminer d'une façon purement expérimentale la relation φ (M), ainsi que le montre la fig. 2; M est le moment au milieu de la poutre. Pour montrer le comportement effectif de la poutre continue, on peut transporter le résultat obtenu pour la poutre simple à la poutre continue, c'est-à-dire à la

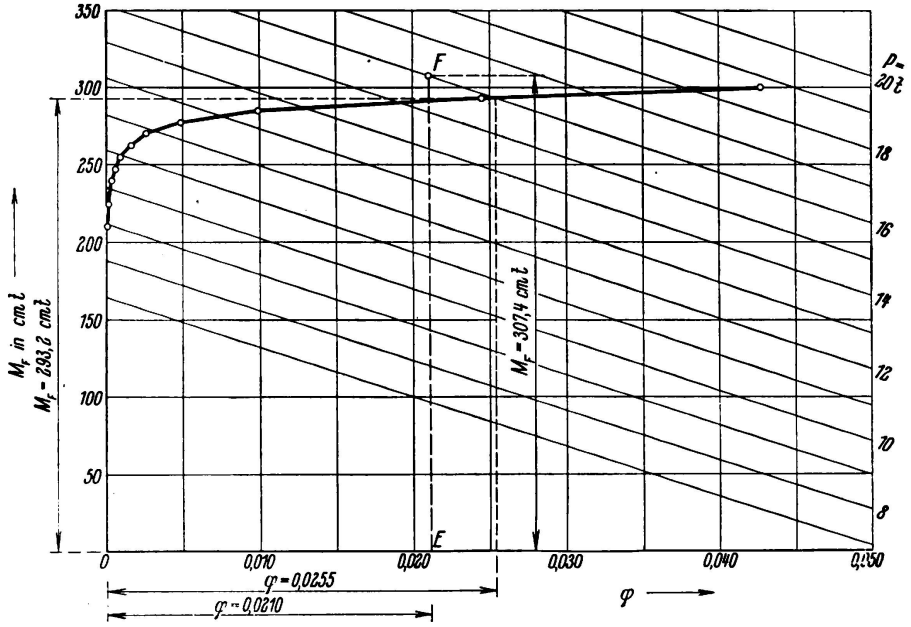


Fig. 3.

Détermination de M_F pour $l_1 = 240$ cm et $l_2 = 120$ cm à l'aide de:
$EJ\varphi = 6600\,P - 280\,M_F$ pour $P = 16$ t.

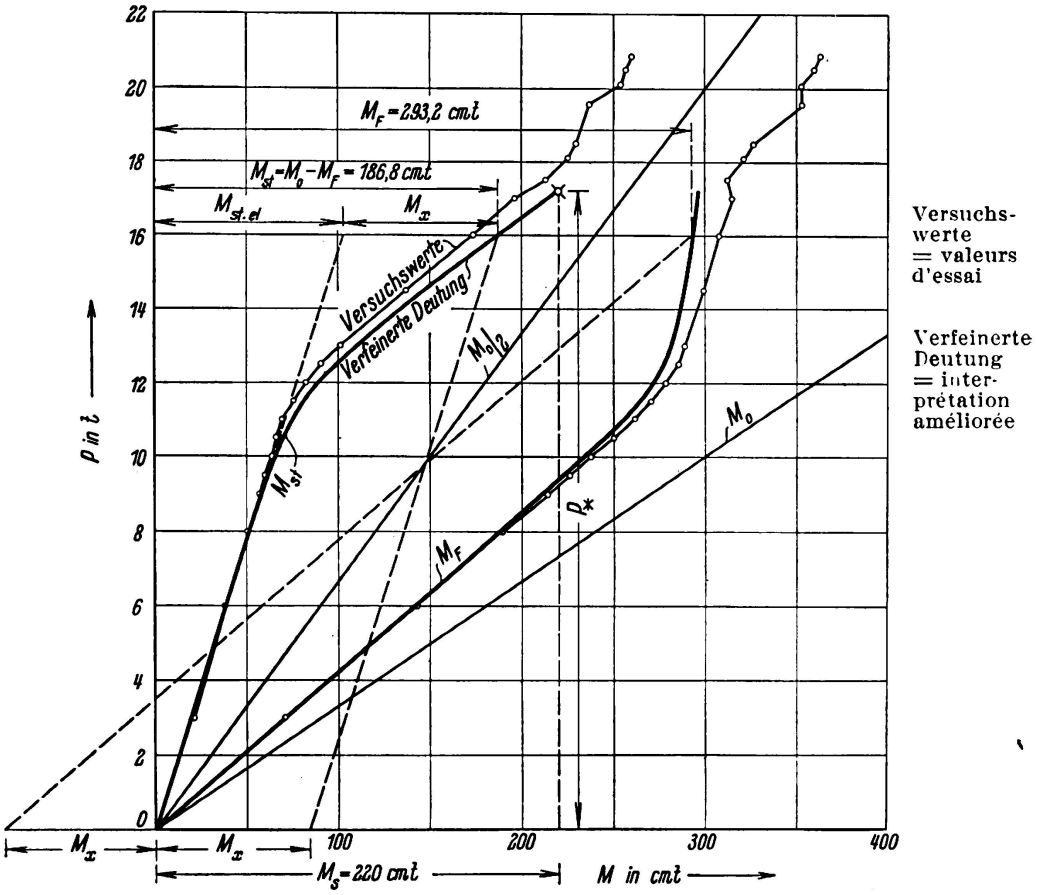


Fig. 4.

Relations M_{st} (P) et M_F (P) pour $l_1 = 240$ cm.

relation M_F (φ) pour laquelle, d'autre part, la relation que nous avons indiquée ci-dessus

$$E\,J\,\varphi = 6600\,P - 280\,M_F$$

est valable.

A la fig. 3 nous avons reporté les deux relations. Pour P = 16 t on obtient M_F = 293,2 tcm et φ = 0,0255 (interprétation améliorée).

Si l'on effectue cette détermination pour les autres charges, on obtient les courbes de la fig. 4. M_{st} et M_F croissent d'abord linéairement; puis suivant des courbes à partir de P'_s = 11,12 t. Nous avons reporté les valeurs indiquées plus haut M_x et $M_{st\,el}$ (fig. 1h) pour P = 16 t. On voit sur cette figure 4 comment se comporte, sous une charge, une poutre qui a été une première fois chargée puis déchargée. On constate en outre que les valeurs de l'interprétation améliorée concordent bien avec les valeurs d'essais représentées par les traits fins.

A la fig. 3 nous avons reporté pour P = 16 t la valeur d'essai M_F = 307,4 tcm comme ordonnée EF. Les ordonnées de la courbe φ (M_F) sont par conséquent plus grandes que celles de la courbe φ (M) de la poutre de comparaison avec l = 120 cm. La raison en est que l'on aurait dû choisir pour la comparaison une poutre d'essai plus courte, d'une portée égale à la distance des points d'inflexion dans la travée centrale. Des essais effectués après le Congrès avec l = 950 cm, ce qui correspond à P_s et l = 730 cm, ce qui correspond à P_T, ont justifié ce que nous venons d'affirmer.

L'exposé ci-dessus est une base pour la résolution plus exacte du problème de la résistance effective de la poutre continue en acier de construction. Il comble en outre une lacune sur laquelle *J. Fritsche* avait attiré l'attention dans la revue „Der Stahlbau" 9 (1936), p. 67. Il n'est donc plus nécessaire à l'avenir, comme c'était le cas jusqu'à présent dans les investigations faites d'après la méthode de l'équilibre plastique, de faire emploi de l'hypothèse trop grossière de l'égalisation des moments.

I 7

L'interprétation des essais sur la méthode de l'équilibre plastique.

Zur Auswertung von Versuchen über das Traglastverfahren.

Interpretation of Tests of the Equilibrium Load Method.

Privatdozent Dr. F. Stüssi,
Berat. Ing., Zürich.

Le professeur Dr. *Maier-Leibnitz* a rassemblé et étudié, dans son rapport paru dans la Publication Préliminaire du présent Congrès,[1] les résultats des essais, publiés dans la presse technique, sur le procédé de l'équilibre plastique. Parmi tous ces essais je voudrais reprendre ceux que le professeur *Maier-Leibnitz* a exécutés récemment[2] afin de compléter bièvement leur interprétation. Ces essais, comme d'ailleurs ceux que nous avons exécutés à Zurich[3] n'ont pas donné une égalisation complète entre les moments sur appuis et les moments en travée.

Dans une poutre continue suivant la fig. 1, les conditions d'équilibre et d'élasticité de la statique doivent conserver leur validité même dans le domaine inélastique; en particulier, l'axe déformé doit être continu sur les appuis doubles. Désignons par A la somme des rotations d'une poutre simple de portée $l = 1$, chargée d'une aire de moments triangulaire M, et par B la plus grande rotation sur appuis; cette condition d'élasticité s'exprime de la façon suivante:

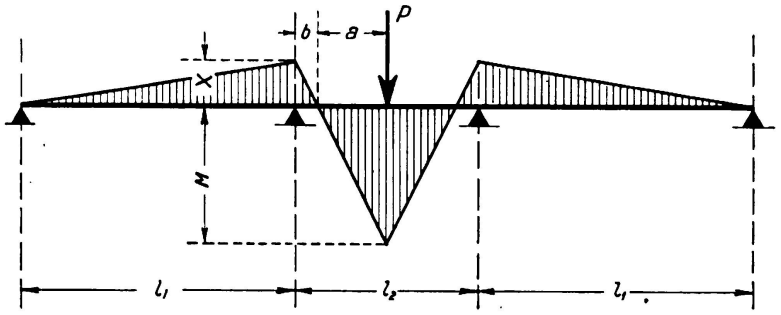


Fig. 1.
Disposition d'essai.

$$B_X \cdot l_1 = A_M \cdot a - A_X \cdot b. \qquad (1)$$

---

[1] *H. Maier-Leibnitz:* Essais; signification et application des résultats. A. I. P. C. Deuxième Congrès, Berlin 1936, Publication préliminaire.

[2] *H. Maier-Leibnitz:* Versuche zur weiteren Klärung der Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl. Stahlbau 1936, fasc. 20.

[3] *F. Stüssi* et *C. F. Kollbrunner:* Beitrag zum Traglastverfahren. Bautechnik 1935, fasc. 21.

Si, comme dans le cas présent (fig. 2), l'allure des moments est donnée par l'observation pour un accroissement de la charge, on peut calculer l'inconnue A_M à partir de l'équation (1). Les valeurs A_X et B_X sont connues dans le domaine élastique; pour de plus grands degrés de charge elles sont déterminées successivement à partir des valeurs A_M connues pour de plus petites charges. A la fig. 3 nous avons représenté l'allure de la somme des rotations A déterminée de la sorte. On constate une consolidation nettement marquée pour des moments de flexion dépassant 315 tcm environ, c'est-à-dire dans la zone qui ne pouvait plus être observée dans l'essai comparatif effectué sur une poutre simple.

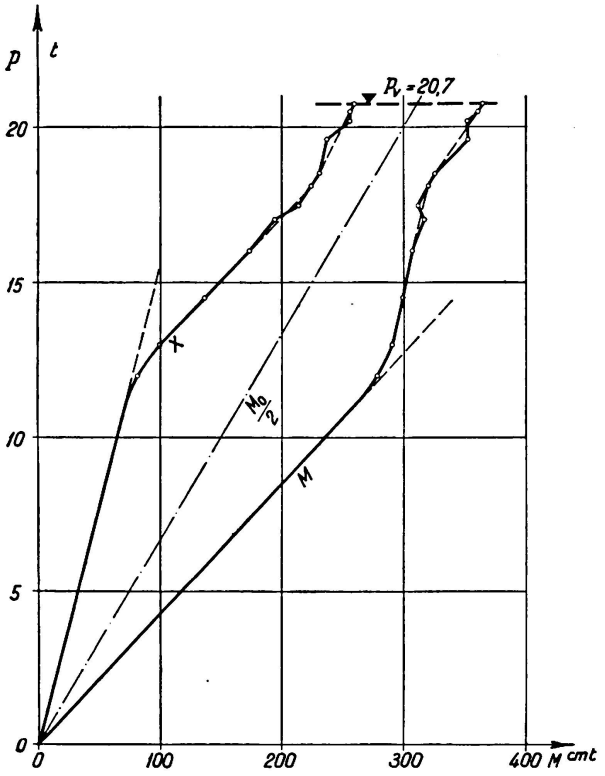


Fig. 2.
Allure des moments.
Essais du Prof. Dr. Maier-Leibnitz.

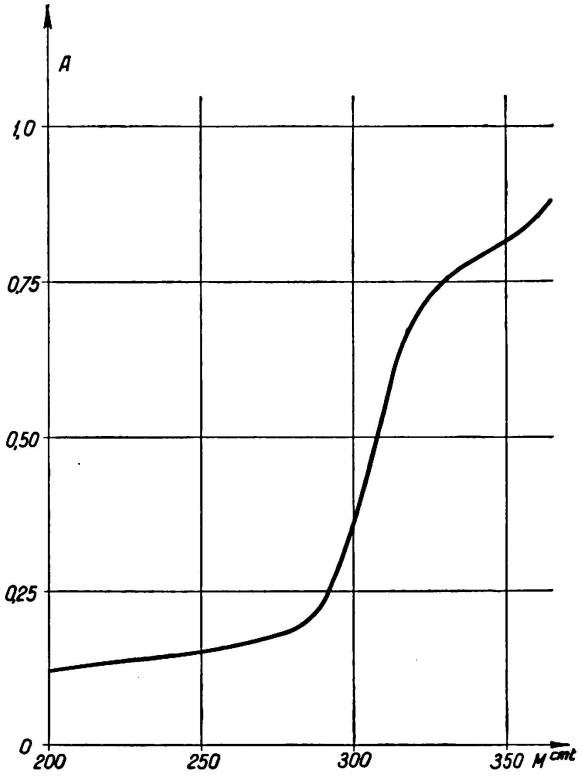


Fig. 3.
Somme des rotations A.

Ainsi, nous pouvons calculer, à partir de cet essai, les valeurs auxiliaires qui nous permettrons de calculer l'allure des moments à l'aide de la condition d'élasticité (1), même pour des portées de rapport différent. Si nous voulons tirer de là l'allure des résistances, nous devons adopter une autre hypothèse, à savoir que dans tous les cas, la limite de la résistance est atteinte lorsque le plus grand moment de flexion produit par la charge a atteint une certaine valeur limite. Cette hypothèse est en soi plausible; si elle était fausse tout notre calcul usuel des contraintes n'aurait plus de sens. La première conséquence de cette hypothèse est que, à partir des conditions élementaires d'équilibre de la travée centrale, nous obtenons une comparaison entre la résistance de la poutre continue (P) et celle de la poutre simple (P_o), à savoir

$$P : P_o = (M + X) : M. \qquad (2)$$

Mais comme d'après nos essais et ceux du professeur *Maier-Leibnitz* il ne se produit aucune égalisation complète des moments, la résistance de la poutre continue n'atteint pas le double de celle de la poutre simple. Une poutre continue dimensionnée d'après le procédé de l'équilibre plastique offre une sécurité plus faible que la poutre simple par rapport à la limite de charge.

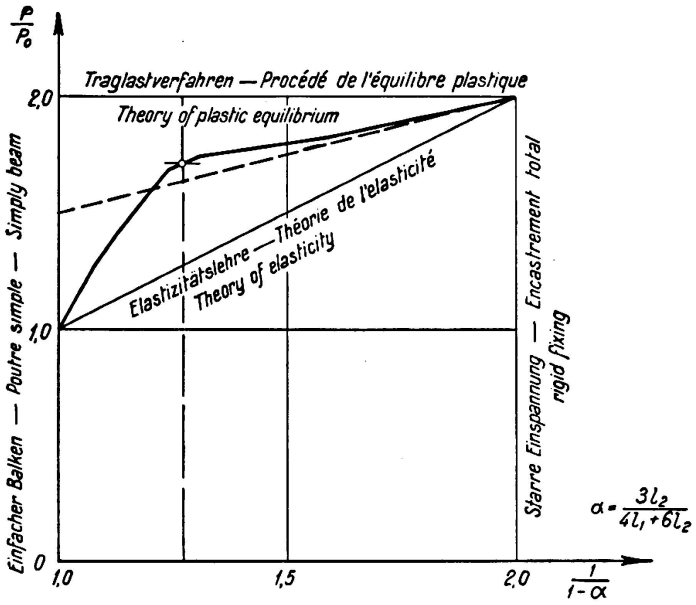


Fig. 4.

Résistances calculées.

A la fig. 4 nous avons encore reporté les résistances calculées. L'allure de cette courbe concorde en principe avec les courbes que nous avions déterminées autrefois par des essais. A l'exception des cas anormaux, avec ouvertures latérales très grandes, ces valeurs se trouvent encore un peu au-dessus d'une droite (en traits discontinus) qui partage en deux la différence entre la méthode de l'équilibre plastique et la théorie de l'élasticité. Ma proposition consiste donc à n'utiliser qu'à moitié l'accroissement, (par rapport à la théorie de l'élasticité) de la résistance donnée par le procédé de l'équilibre plastique pour les poutres continues en acier de construction et, en outre, à limiter cette utilisation de l'accroissement de la sécurité aux profilés laminés employés dans la construction des charpentes.

I 8

Sur la plasticité dans les poutres continues sollicitées dynamiquement.

Beitrag zur Frage der Ausnutzbarkeit der Plastizität bei dauerbeanspruchten Durchlaufträgern.

Contribution to the Question of Utilising Plasticity in Continuous Girders Subject to Repeated Stresses.

Dr. Ing. K. Klöppel,
Leiter der technisch-wissenschaftlichen Abteilung des deutschen Stahlbau-Verbandes, Berlin.

Le Dr. *Hans Bleich*[1] a énoncé la loi suivante pour un matériau idéalement plastique:

»Lorsque, dans un système hyperstatique, il est possible d'engendrer, par le choix des grandeurs hyperstatiques, un état de contraintes résiduelles tel qu'en chaque point la somme de la contrainte résiduelle et de la contrainte maxima, déterminée d'après la théorie de l'élasticité, se trouve exactement au-dessous de la limite d'écoulement, le système est stable, même sous l'effet d'une surcharge répétée un nombre infini de fois«.

Cette loi peut être contrôlée par des essais d'endurance car la fréquence de mise en charge ne joue aucun rôle.

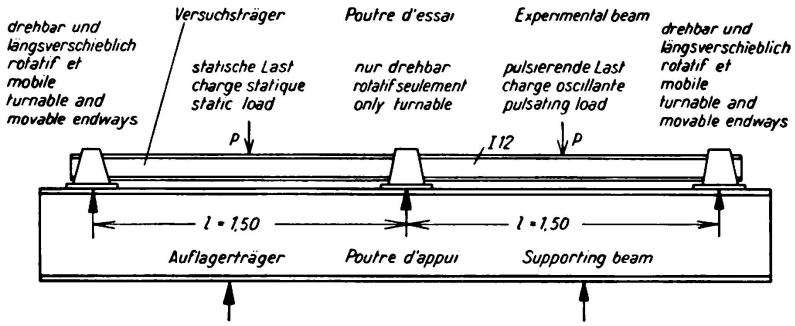


Fig. 1.
Disposition de l'essai.

Nous avons choisi une poutre (I 12) en acier de construction, reposant sur trois appuis distant de 1,50 m (fig. 1). Tous les appuis pouvaient supporter des forces de traction et de compression, les appuis extrêmes étaient en outre mobiles.[2]

---

[1] Revue „Der Bauingenieur" 1932, fasc. 19/20.

[2] Les essais furent effectués au laboratoire d'essai des matériaux de Stuttgart (Prof. *Graf*).

La loi de *Bleich* réfute l'idée qu'une poutre capable de résister à plusieurs cas de charge séparément, résistera à tous ces cas de charge alternant un nombre quelconque de fois.

Nous avons représenté, à la fig. 1, les cas de charge choisis. Les installations dont nous disposions nous ont fait adopter une charge permanente à gauche et une charge ondulée à droite, avec petite charge permanente (200 kg) et une fréquence de 10 à la minute. Nous n'avions donc aucun état intermédiaire de décharge complète.

La grandeur de la charge P a été choisie d'abord de telle sorte que, d'après la théorie de l'élasticité, la limite d'écoulement ($\sigma_F = M : W$) soit atteinte dans la section la plus sollicitée. La limite d'écoulement σ_F est égale à 2420 et 2730 kg/cm² pour les ailes des deux poutres de 12 m de longueur, sur lesquelles furent prélevées les deux éprouvettes de 3 m chacune.

D'après la loi de *Bleich* et en admettant l'état le plus favorable de tension résiduelle (fig. 2), égalisation des moments sur appui et en travée, on aurait

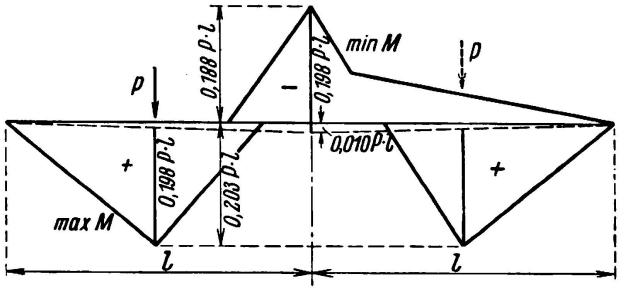


Fig. 2.

osé dépasser la limite d'écoulement dans la détermination de P, mais d'environ 2,5 % seulement car, dans les deux cas de charge, l'égalisation des moments est à peu près naturelle.

Pour P = 4210 kg, la poutre a supporté 700000 cycles sans que l'on ait pu déceler un signe quelconque de rupture par fatigue. Les flèches élastiques, lues à 1/100ᵉ mm près, correspondaient aux valeurs du calcul et les flèches permanentes étaient pratiquement nulles. Il n'y a donc aucune mise en tension provenant d'adaptation.

Nous avons ensuite augmenté la charge P de telle sorte que la limite d'écoulement soit dépassée de 20 %. Même sous cette charge, la poutre a supporté 630000 autres cycles. Par rapport à la première charge, les flèches ont augmenté un peu plus rapidement que la charge. Nous avons interrompu l'essai car on ne pouvait pas s'attendre à une rupture par fatigue. Les flèches permanentes n'atteignaient que le 15 % environ des valeurs calculées de la façon suivante:

Pour obtenir au droit de l'appui central un moment résiduel de 0,01 P · l, il faut appliquer à l'extrémité de la poutre en porte à faux, choisie comme système isostatique de référence, une force 0,01 · P. Cette force engendre à l'extrémité de la poutre une flèche

$$f = \frac{0{,}01 \cdot P \cdot 2\, l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$

On obtient la même flèche dans le système isostatique de référence lorsqu'au milieu de la travée la flèche engendrée par plastification est égale à f/2. Dans ce cas on obtient, avec $E = 2100\ t/cm^2$ et $J = 328\ cm^4$:

$$f/2 = \frac{0{,}01\ P \cdot 150^3}{3 \cdot 2100 \cdot 328} = 0{,}0165\ P.$$

La poutre déformée, considérée comme poutre sur trois appuis, possède encore une flèche élastique, correspondant à l'aire des moments de l'état de tension résiduelle; il faut donc soustraire de $f/_2$ la valeur δ:

$$\delta = \frac{0{,}01 \cdot P \cdot l^3}{16 \cdot EJ} = \frac{0{,}01 \cdot P \cdot 150^3}{16 \cdot 2100 \cdot 328} = 0{,}0031\ P.$$

La flèche permanente au milieu de la travée de gauche, pour l'état de tension résiduelle, est en mm:

$$\delta_{perm.} = (0{,}165 - 0{,}031)\ P = \mathbf{0{,}134\ P.}$$

L'état de tension propre peut au plus tôt apparaître lorsque la limite d'écoulement σ_F est atteinte au milieu de la travée. On a donc pour P:

$$P \geqq \frac{W \cdot \sigma_F}{0{,}203 \cdot l}$$

Par suite de l'effet d'égalisation que produit l'état de tension résiduelle, on peut relever P jusqu'à

$$P' = \frac{0{,}203}{0{,}198}\ P = \sim 1{,}025\ P$$

La déformation plastique correspondante est

$$\delta_{perm.} = 0{,}134\ P'$$

et elle ne doit pas augmenter pour une surcharge souvent répétée.

Les flèches élastiques pour une seule charge $P = 1$ t au milieu de la travée de gauche sont (cas A)

$$\delta_{él.} = 0{,}734\ mm$$

et pour une charge dans les deux travées (cas B)

$$\delta_{él.} = 0{,}446\ mm.$$

Des essais exécutés, nous voulons en considérer deux d'un peu plus près. Les charges P étaient de 5,04 t et 5,83 t. La limite d'écoulement était $\sigma_F = 2420\ kg/cm^2$ et le moment résistant $W = 53{,}1\ cm^3$. La charge correspondant à la limite d'écoulement fut dépassée de 1,2 et 1,38 fois. Dans les deux cas, aucune rupture par fatigue ne s'est produite après 500 000 cycles. Pour les deux cas de charge A et B, les fléchissements mesurés et calculés étaient les suivants au milieu de la travée de gauche:

Tableau 1.

Charge	Cas	$\delta_{el.} + \delta_{perm.}$		$\delta_{perm.}$	$\delta_{perm.}$
		mesuré	calculé	mesuré	calculé
5,04 t	A	3,65 mm	**4,37** mm	0,18 mm	**0,67** mm
	B	2,49 „	**2,92** „		
5,83 t	A	**5,25** „	5,055 „	**1,68** „	0,775 „
	B	**4,75** „	3,375 „		

Pour P = 5,04 t, les valeurs mesurées sont plus faibles que les valeurs calculées. La véritable flèche permanente est très faible; quoique la limite d'écoulement soit dépassée de 20 % dans les ailes aucune plastification ne se produit. Pour P = 5,83 t c'est le contraire, les flèches réelles sont les plus grandes. L'écart est spécialement grand pour les flèches permanentes. Dans le cas de charge B il se produit vraisemblablement un état de contraintes résiduelles supplémentaire; dans la travée de droite, on constate également des flèches permanentes mais aucune contre-flèche résiduelle. Les moments sur appui et en travées sont a peu près égaux. Les flèches permanentes n'ont plus augmenté dans la suite de l'essai. Il en résulte que les constructions dimensionnées suivant la loi de *Bleich* présentent, même vis-à-vis de la fatigue, une sécurité supplémentaire. Cette affirmation s'appuie sur l'allure non homogène des contraintes de flexion. Si les fibres extrêmes de la section atteignent la limite d'écoulement, les autres régions de la section opposent encore de la résistance aux déformations permanentes. On peut donc s'attendre à une augmentation de 16 % de la résistance. On obtient cette valeur en remplaçant W par 2 S_x (S_x = moment statique de la demi-section, par rapport à l'axe des x). Cet effet est encore accru du fait que la limite d'écoulement de l'âme est en général plus élevée que celle des ailes. En outre, des phénomènes de solidification, ainsi que l'effet d'une limite supérieure d'écoulement, peuvent encore augmenter la résistance. Finalement, les contraintes de laminage retarderont l'apparition de déformations permanentes jusqu'à une certaine contrainte, située au-dessus de la limite d'écoulement.

Nous avons ensuite étudié le cas A seulement car la différence entre le moment sur appui et le moment en travées est grande dans ce cas. L'état de tension résiduelle égalisant cette différence (moment sur appui = 3/2 [0,203 — 0,094] P · l = 0,072 P · l) exigerait une flèche permanente de 5,75 mm. En réalité, la flèche permanente n'atteignait que 1,6 mm sous une charge P = 6,28 t, correspondant à un dépassement de la limite d'écoulement de 1,3 fois (σ_F = 27,3 kg/mm²). On a mesuré une flèche élastique de 4,6 mm, ce qui joue bien avec le calcul. Après 1 million d'oscillations, la poutre a cédé latéralement. Nous n'avons constaté aucune rupture par fatigue.

Les résultats acquis, théoriquement et pratiquement, ne pourraient servir au dimensionnement économique des poutres continues, soumises à des charges oscillantes, que si ces poutres ne présentent aucune entaille telle que trous ou

soudures d'angle. Cette restriction limite fortement l'emploi des assemblages et des constructions rivées. Par contre, il serait juste d'admettre, dans le sens du procédé de l'équilibre plastique, des contraintes plus élevées pour les poutres laminées, sans trous, reliées entre elles par des soudures bout à bout parfaites dont la surface serait usinée, et cela même pour des sollicitations répétées. Une instabilité prématurée peut cependant prohiber l'emploi de la méthode de l'équilibre plastique. En outre, il peut arriver que l'état de tension résiduelle le plus favorable ne puisse pas se produire lorsqu'il exige de très grandes déformations permanentes — c'est-à-dire dans les cas les plus importants du point de vue économique — parce que la capacité d'écoulement de la poutre n'est pas suffisante.[3] Dans ces cas, on ne peut évidemment pas calculer avec une égalisation des moments.

---

[3] *Stüssi* et *Kollbrunner:* „Bautechnik" 1935, fasc. 21.
Maier-Leibnitz: „Stahlbau" 1936, fasc. 20.
Klöppel: „Stahlbau" 1937, fasc. 14/15.

I 9

Les formules de la stabilité des barres excentriquement comprimées.

Formelmäßige Lösung des Stabilitätsproblemes exzentrisch gedrückter Stahlstäbe.

Formulae for the Solution of Eccentrically Loaded Steel Columns.

Dr. Ing. K. Ježek,
Dozent an der Technischen Hochschule Wien.

Les découvertes de *Euler*, de *Engesser* et de *Kármán*[1] ont permis de trouver une solution satisfaisante au problème de la stabilité des barres droites centriquement comprimées. Ce mode de sollicitation est un cas idéal qui ne se présente jamais dans la pratique car le plus petit écart par rapport aux hypothèses faites, comme par exemple une excentricité infiniment faible, mais inévitable, du point d'application de la force ou une courbure de la barre, peut engendrer une flexion additionnelle et produire dans certains cas une réduction tout-à-fait appréciable de la résistance. Dans une barre sollicitée à une compression centrée et à la flexion il peut se présenter un état d'équilibre instable, toutefois seulement lorsqu'un accroissement de la surcharge provoque des déformations permanentes. Cette condition *importante* distingue *fondamentalement* le problème de la détermination de la charge supportable du problème du flambage de la barre droite.

Ce problème de stabilité a été étudié théoriquement et expérimentalement pour la première fois par *Kármán*, en liaison avec ses essais connus sur le flambage des barres soumises à une charge légèrement excentrée.[1] *Kármán* est parti de la courbe de travail d'une sorte d'acier déterminée et il a développé un procédé d'intégration graphique pour la résolution de l'équation différentielle de la ligne élastique; cette partie des travaux de *Kármán* resta très longtemps ignorée. La méthode approximative donnée 13 ans plus tard par *Krohn*[2] partagea le sort des recherches de *Kármán* parce que la suite des calculs n'était pas assez claire et surtout parce qu'il manquait une évaluation mathématique des résultats. Quelques années plus tard *Roš et Brunner* ont développé une méthode graphique approximative; ils portèrent les résultats obtenus sur un diagramme qui, pour la première fois, permettait de déterminer numériquement la relation existant entre la résistance, l'excentricité et l'élancement, pour une loi de déformation déterminée.[3]

---

[1] *Th. v. Karman:* Untersuchungen über Knickfestigkeit. V.D.I. fasc. 81, 1910.

[2] *R. Krohn:* Knickfestigkeit. Bautechnik 1923.

[3] Voir les rapports du 2e Congrès intern. de constructions de Ponts et Charpentes, Vienne 1928 et du 1er Congrès international des Ponts et Charpentes, Paris 1932.

Finalement *Chwalla* a établi, en suivant les déductions de *Kármán*, la solution exacte pour une barre soumise à une compression dont l'excentricité est quelconque.[4]

Toutes ces recherches présentent un inconvénient important: leurs résultats ne peuvent être obtenus que grâce à des calculs très ennuyeux et ne peuvent être représentés que sous forme d'un diagramme ou d'un tableau. Si, d'autre part, on pense qu'il faut avoir à sa disposition un *grand* nombre de diagrammes disposés suivant le *type d'acier* et la *forme de la section*, on constate aisément que ce fait n'est pas seulement une complication, mais presque un empêchement. Il en résulte que les prescriptions de presque tous les pays — à ma connaissance, seules les prescriptions suisses font exception — ne tiennent pas compte des nouvelles connaissances relatives au dimensionnement des barres excentriquement comprimées (probablement à cause de l'absence de formule simple théoriquement justifiée).

Je voudrais brièvement esquisser le chemin qui conduit à une solution, sous forme de formules, de ce problème de stabilité très important pour la construction métallique. Tout d'abord il est possible de remplacer la courbe de déformation des aciers employés actuellement par une courbe de travail idéalement plastique, car une solidification ne peut se produire que pour des barres extrêmement courtes et pratiquement inutilisables, avec un élancement $\lambda < 20$. Les essais de compression exécutés avec soins par le „Deutscher Stahlbauverband"[5] justifient suffisamment l'hypothèse de la validité de la loi de Hooke jusqu'à la limite élastique. Remplaçons d'autre part l'axe déformé par une ligne sinusoïdale, nous obtenons dans le cas le plus simple d'une section rectangulaire, la solution que j'ai donnée sous forme de formules[6] et dont les résultats présentent une concordance parfaite avec les valeurs déduites de l'axe déformé effectif[7] (erreur maxima 3 %). La limite élastique est à déterminer de la façon usuelle, par un essai à la compression. J'ai étudié finalement, avec les mêmes hypothèses, la résistance des barres excentriquement comprimées en fonction de la forme de la section[8]; les conditions de stabilité dans le plan des moments aussi bien que perpendiculairement à ce plan exigent une mise au point, à cause de la faible épaisseur des profilés employés dans la construction métallique. A la fig. 1 nous avons représenté, en fonction du degré d'élancement λ et de la forme de la section, la contrainte axiale critique σ_{kr} au dessus de laquelle un équilibre entre les forces extérieures et les forces intérieures est impossible, pour l'acier 37 le plus souvent employé et pour un degré d'excentricité $m = 1$ (la force agit au bord du noyau). On constate que l'influence de la forme de la section joue un

[4] *E. Chwalla:* Theorie des aussermittig gedrückten Stabes aus Baustahl. Stahlbau 1934 (Exposé du procédé graphique exact).

[5] *W. Rein:* Versuche zur Ermittlung der Knickspannungen für verschiedene Baustähle. Fasc. 4 du Ber. des Aussch. für Versuche im Stahlbau. J. Springer, Berlin 1935.

[6] *K. Ježek:* Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe. Stahlbau 1935. — Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe. Stahlbau 1936.

[7] *K. Ježek:* Die Tragfähigkeit des exzentrisch beanspruchten und des querbelasteten Druckstabes aus einem ideal plastischem Stahl. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-naturw. Kl. Abt. IIa, 143e vol., 7e fasc., 1934.

[8] *K. Ježek:* Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. J. Springer, éditeur, Vienne 1937.

rôle important dans les barres courtes mais décroit rapidement avec l'augmentation de l'élancement et la réduction de l'excentricité. Ce sont les barres dont la section est en forme de croix qui se comportent le mieux et les barres dont la section est en I ou en T qui se comportent le plus défavorablement; dans les deux derniers cas, la contrainte critique se trouve très peu au dessus de la contrainte limite σ_n du domaine élastique. La courbe des contraintes critiques (courbe de σ_K) pour m = 0,01 est à peu près indépendante de la forme de la section et montre clairement, pour des barres dont le degré d'élancement est moyen, la forte influence, sur la résistance, d'une excentricité extrêmement petite de $^1/_{100}{}^e$ du rayon du noyau central.

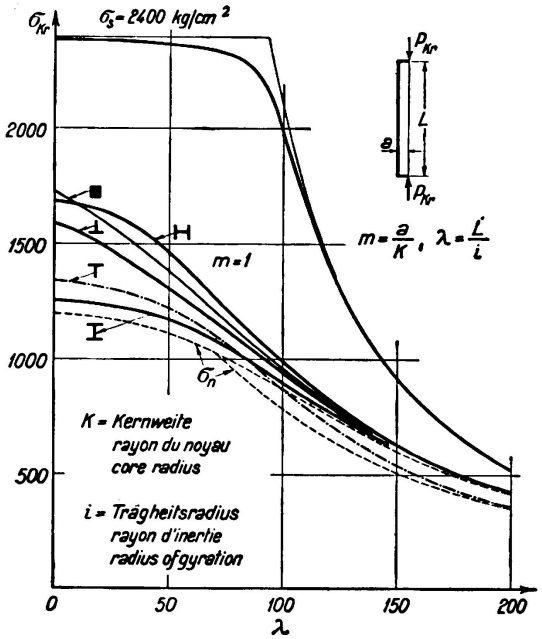
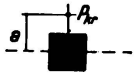
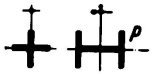
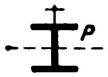


Fig. 1.

Il est finalement possible, en considérant les barres dont la section a une forme quelconque, de déduire une formule approximative valable pour toutes les sortes d'acier. Nous avons donné cette formule unique au tableau I, les coefficients μ_1 et μ_2 sont dépendants de la forme de la section. Pour les barres à section en T il faut employer, au dessous d'une certaine contrainte axiale, une deuxième formule semblablement établie. Ces méthodes de calcul sont valables d'une façon tout-à-fait générale pour les barres axialement comprimées et sollicitées à la flexion, lorsque l'on prend comme module d'excentricité dans un sens tout-à-fait large, le rapport du moment de flexion (par rapport à la barre non déformée) à la force axiale; pour plus de détails je renvoie le lecteur à mes publications. Pour $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 0$ on obtient les formules nécessaires au calcul de la courbe des σ_n dessinée en traits discontinus à la fig. 1.

Pour le dimensionnement des barres *théoriquement soumises à une compression centrée* je propose d'introduire dans le calcul une excentricité inévitable d'au moins $^1/_{100}{}^e$ du rayon du noyau central; on obtient ainsi avec $m_o = 0{,}01$ et $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ une «*formule de flambage*» simple qui s'accorde fondamentalement avec le fait, aujourd'hui évident, que la limite d'écrasement représente la limite supérieure de la contrainte de flambage et qui se transforme pratiquement en la formule de *Euler* pour les barres fortement élancées. Nous devons encore dire que ces formules concordent entièrement avec les essais qui nous sont connus et qu'elles garantissent une détermination satisfaisante de la résistance avec un calcul simple et la validité la plus générale. Ce problème est ainsi suffisamment mis au clair, dans une forme satisfaisante, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique.

Tableau I. — Principes de calcul des barres excentriquement comprimées.

Section	Formule pour l'élancement critique	Domaine de validité	Coefficients μ_1	Coefficients μ_2	Remarques
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left[1-\mu_1 \frac{m\,\sigma_{Kr}}{(\sigma_s-\sigma_{Kr})}\right]\left[1-\mu_2 \frac{m\,\sigma_{Kr}}{(\sigma_s-\sigma_{Kr})}\right]$	illimité $0 \leqq \sigma_{Kr} \leqq \sigma_s$	0,5	0,5	L = longueur de la barre F = surface de la section $W_{1,2}$ = moment de résistance du bord comprimé, respectivement du bord tendu i = rayon de giration $\lambda = \frac{L}{i}$ = élancement a = excentricité $m = \frac{a\,F}{W_1}$ = module d'excentricité σ_s = limite élastique E = module d'élasticité σ_{Kr} = contrainte critique $P_{Kr} = F \cdot \sigma_{Kr}$ = force supportable
			0.5	0,5	
			0,4	0,4	
			0,9	0,1	
			0,9	0,1	
		$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \geqq \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$	0,8	0,2	
	$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{Kr}}\left[1-\mu_1 \frac{W_1 m\,\sigma_{Kr}}{W_2(\sigma_s+\sigma_{Kr})}\right]\left[1-\mu_2 \frac{W_1 m\,\sigma_{Kr}}{W_2(\sigma_s+\sigma_{Kr})}\right]$	$\frac{\sigma_{Kr}}{\sigma_s} \leqq \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$			

I 10

L'influence des erreurs de centrage sur la résistance des colonnes métalliques.

Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit einer Stahlstütze.

The Effect of Unequal Eccentricities on the Carrying Capacity of a Steel Column.

Dr. techn. J. Fritsche,
Professor an der Deutschen Techn. Hochschule, Prag.

Dans les constructions métalliques, la transmission de la force dans les barres comprimées n'est presque jamais précise et déterminée et l'hypothèse d'une compression centrée ou d'une compression avec excentricité égale aux deux extrémités ne doit être considérée que comme un moyen donnant une échelle de comparaison pour la résistance et déterminant l'influence de la forme de la section, de la longueur de la barre et de la grandeur de l'excentricité. Cette dernière grandeur est déterminée par la liaison rigide de la barre de treillis ou d'ossature métallique aux barres voisines et par les détails constructifs de cet assemblage. On ne peut la déterminer avec exactitude que lorsque l'on connait les contraintes secondaires du treillis. Le calcul de ces contraintes est toujours très ennuyeux et très long et l'on ne peut pas l'exiger d'un ingénieur-constructeur. On peut en outre se demander si leur influence sur la sécurité de l'ouvrage peut être directement comparée à celle des contraintes principales, si l'on tient compte du comportement plastique du matériau.

Actuellement on peut admettre que la grandeur approximative des contraintes secondaires, ainsi que la répartition de ces dernières dans les ouvrages, sont connues[1]; les résultats des investigations théoriques ont été contrôlés par des mesures d'allongement, effectuées sur des ouvrages en service. On a pu en conclure que les excentricités du point d'application de la force sont le plus souvent différentes aux deux extrémités de la barre et que la ligne des pressions coupe en général l'axe des barres. La solution de ce problème ne présente aucune difficulté lorsque l'on admet un comportement élastique illimité du matériau; on se trouve en présence d'un problème ordinaire de tension et l'on pourrait parfaitement déterminer la sécurité d'une telle barre en se basant sur une contrainte admissible. Si par contre on tient compte des processus de déformation

[1] *M. Roš:* Nebenspannungen infolge vernieteter Knotenpunktverbindungen eiserner Fachwerkbrücken. Rapport du Groupe V de la Commission technique du Syndicat des Ateliers suisses de construction de ponts et charpentes métalliques. Juin 1922.

plastique, le problème devient plus compliqué; on a à résoudre un problème de charges critiques et un dimensionnement basé sur une contrainte admissible ne peut plus garantir une sécurité égale pour toutes les barres.

Dans l'étude mathématique de tous les problèmes de plasticité, la condition d'écoulement joue un rôle de toute première importance; cette condition d'écoulement est l'expression analytique les conditions pour lesquelles un acier doux passe de l'état solide élastique à l'état déformable plastique. On est d'accord aujourd'hui sur l'établissement de ces conditions pour les états de tension homogènes mais on peut se demander si on peut les appliquer sous la même forme aux états de tension hétérogènes. Une nouvelle hypothèse admet que la connaissance de l'état de tension local ne suffit pas pour prédire les phénomènes d'écoulement et que seule la considération de l'état de tension dans un plus vaste domaine permet de résoudre la question du danger d'écoulement. Cette « nouvelle condition d'écoulement » permet d'étudier mathématiquement, d'une façon beaucoup plus approfondie, la résistance effective d'une barre avec erreurs de centrage tout en tenant compte de la forme réelle de la section.

Lorsque les excentricités accidentelles sont égales aux deux extrémités, le moment maximum se produit au milieu de la barre, il coïncide donc avec y_{max}. La résistance de la colonne est détruite lorsque la résistance de la barre en cet endroit est si fortement réduite par l'apparition subite d'un processus d'écoulement qu'un accroissement de la charge trouble l'équilibre entre les forces extérieures et les résistances internes. Les fléchissements transversaux croissent alors très rapidement et ne peuvent cesser d'augmenter que s'il se produit une solidification du matériau. Lorsque les excentricités accidentelles sont inégales, y_{max} se déplace du milieu vers l'extrémité qui a la plus forte excentricité (fig. 1). Tant que y_{max} se trouve à l'intérieur de l il n'y a pas de grands changements. Mais lorsqu'un maximum imaginaire de l'axe déformé se présente à l'extérieur de la barre et lorsque le moment de flexion est maximum à l'extrémité de la barre et égal à $P \cdot p_1$, des phénomènes totalement différents se produisent (fig. 2). L'apparition de la condition d'écoulement à l'extrémité de la barre n'entraine pas encore la destruction de sa résistance car la barre ne peut céder sous l'effet de la charge, ni transversalement, ni dans le sens d'un écrasement inadmissible dans la direction de l'axe. L'écoulement d'une extrémité fixe ne peut entraîner aucune instabilité car la barre doit conserver sa forme et sa position: aucune modification n'est possible sans développement de force. La barre, déformée élastiquement seulement sur toute sa longueur, a toujours encore une influence sur le point devenu plastique; l'apparition de la condition d'écoulement ne signifie dans ce cas qu'une prédisposition à la déformation plastique.

Un accroissement de la charge modifiera les conditions aux appuis de la colonne et il est clair, après ce que nous avons dit ci-dessus, que la résistance n'atteint son maximum que lorsque le moment maximum à l'extrémité de la barre coïncide avec un maximum de la déformée; en ce point, la tangente à cette déformée doit être parallèle à la direction de la force.

Il est naturellement difficile d'expliquer exactement les processus qui ce développent en ce moment et il est évident que cet exposé ne peut être qu'approximatif. Désignons par P_1 la charge pour laquelle la condition d'écoulement est satisfaite à l'extrémité de la barre. A l'endroit devenu plastique la com-

pression $P - P_1$ se superpose à l'état de tension. En se basant sur les essais de *Hohenemser*[2] et *Prager*[3], constitués par une torsion poussée jusqu'à l'écoulement et suivie d'une mise en tension, on peut conclure que, dans le cas d'une flexion poussée jusqu'à l'écoulement et suivie d'une mise en compression, le moment de flexion que peut supporter la section décroit progressivement. Un accroissement de la charge ne pourrait alors être transmis qu'à une barre avec articulation plastique à son extrémité. Par conséquent, l'écoulement provoque

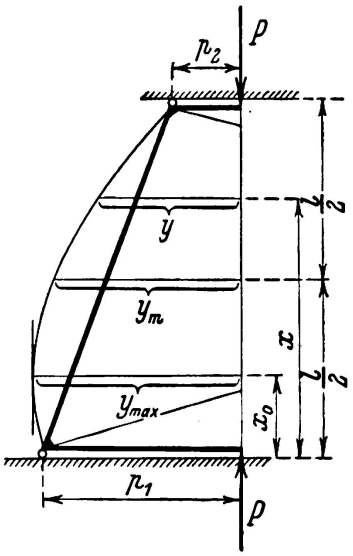


Fig. 1.

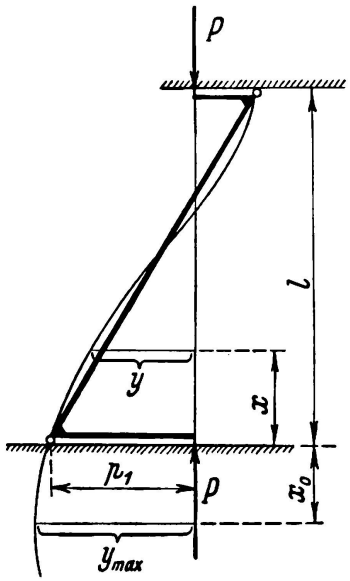


Fig. 2.

un certain centrage de l'accroissement de la charge en ce sens que, par suite de la plastification, le moment à l'extrémité de la barre, $(P - P_1) \cdot p_1$, provenant de l'accroissement de la charge et une partie constamment croissante du moment ayant engendré l'écoulement, $P_1\, p_1$, doivent être supportés d'une autre manière par le système. La destruction de la résistance à la flexion à l'extrémité de la barre peut être exprimée de la façon suivante: on ajoute à l'endroit plastifié 2 moments aux forces extérieures agissant jusqu'alors, afin d'adapter la courbure de l'axe déformé aux nouvelles conditions aux appuis. L'accroissement du moment à l'extrémité de la barre, engendré par l'accroissement de P au dessus de P_1, s'oppose à un moment de sens contraire et de grandeur $(P - P_1)\, p_1$ et la réduction du moment d'écoulement, engendrée par la nouvelle force axiale, peut être influencée par un moment ΔM que l'on peut calculer à partir de la condition d'écoulement. Il nous est impossible, par suite du manque de place, d'exposer ici les calculs compliqués y relatifs; on les trouvera dans un article que j'ai publié dans la revue «Der Stahlbau»[4]. Les fig. 3 et 4, tirées de cette

[2] *K. Hohenemser:* Neuere Versuchsergebnisse über das plastische Verhalten der Metalle. Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 1931, p. 423.

[3] *K. Hohenemser* und *W. Prager:* Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flußstahl. Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 1932, p. 1.

[4] *J. Fritsche:* Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Der Stahlbau 1936, fasc. 23 et 24.

publication et qui se rapportent à deux cas: excentricité à une seule extrémité et excentricités égales et de sens contraire aux deux extrémités, montrent les résultats acquis. Ces résultats diffèrent sensiblement de ceux que l'on avait

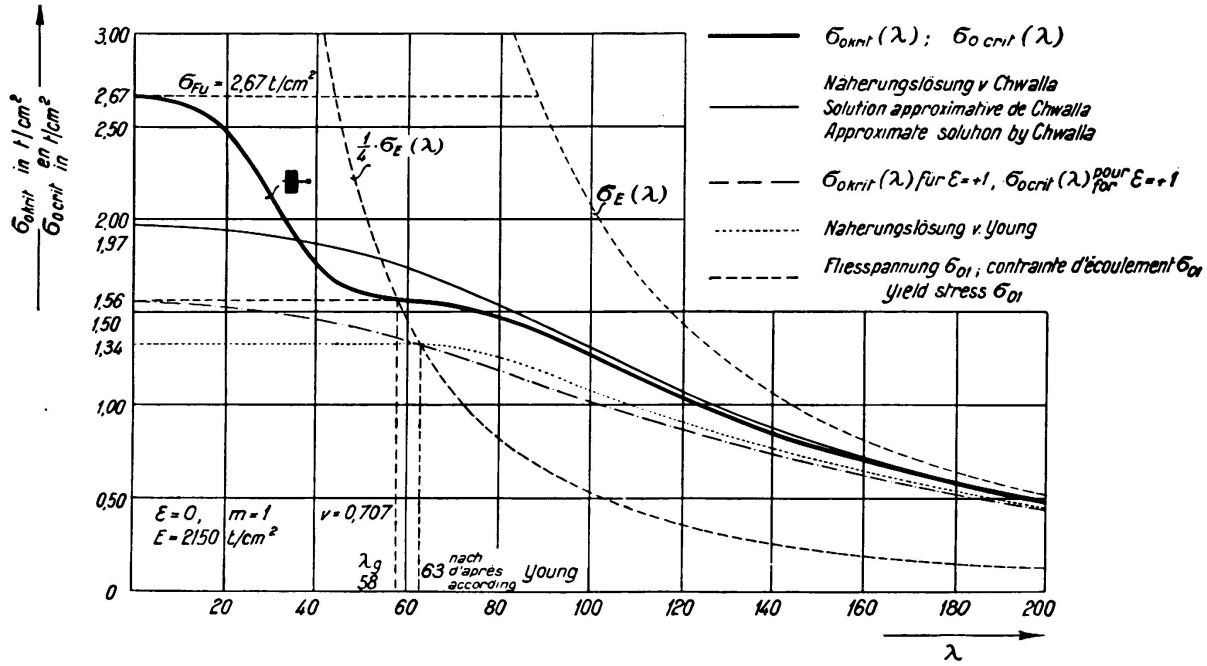


Fig. 3.

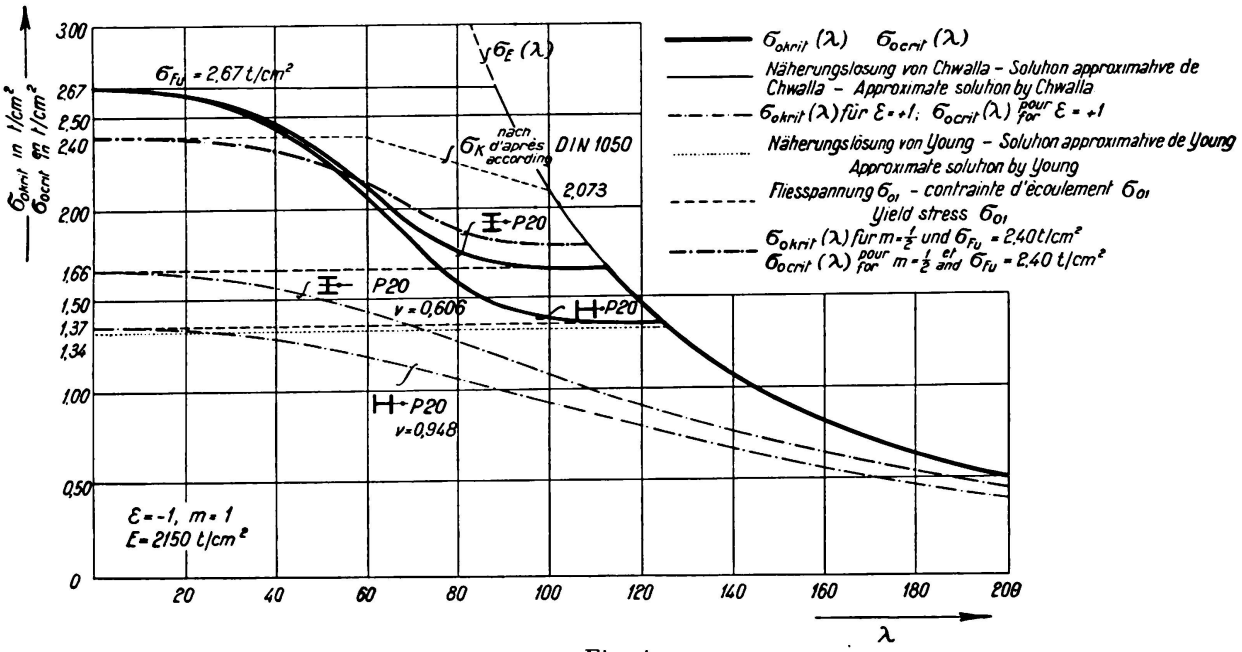


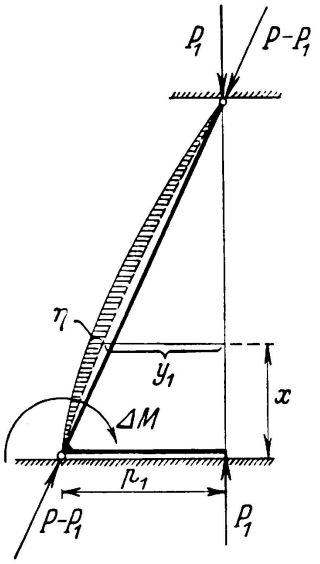
Fig. 4.

obtenus jusqu'à présent pour la compression centrée et pour la compression excentrée avec excentricités accidentelles égales.

Ainsi que nous l'avons dit, les conditions sont telles pour une barre de compression fixée rigidement dans un système que $\varepsilon = p_2 : p_1$ tend vers -1. $\varepsilon > o$ ou $\varepsilon = 1$ sont des cas très rares; en outre, dans de tels cas, les excen-

tricités sont en général petites, on ne peut donc pas baser une méthode de dimensionnement sur de telles exceptions. Pour $\varepsilon = -1$ les lignes $\sigma_{o\,crit}$ (λ) sont bien proches des lignes σ_K (λ) qui expriment la résistance pour une compression centrée. Il me semble par conséquent justifié de partir de cette ligne pour l'établissement d'une « ligne des contraintes de flambage » pour le calcul des barres de treillis comprimées, comme c'est le cas par exemple dans les prescriptions allemandes, DIN 1050. Il ne s'agirait plus que de calculer ou d'évaluer, grâce à des mesures, les plus grandes excentricités qui peuvent se présenter et d'en tenir compte dans la construction d'une ligne σ_{crit} (λ) valable pour toutes les barres comprimées. En général on n'introduira pas p mais le rapport de p

Fig. 3a.



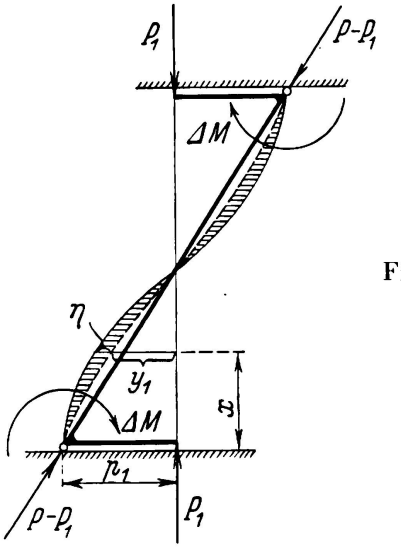


Fig. 4a.

au rayon du noyau central k, rapport que l'on désigne par m. m = 1 est sûrement trop grand, on se rapprocherait plus des conditions réelles en choisissant m = 0,5. On obtiendrait ainsi une « ligne des contraintes de flambage » qui ne s'écarterait que peu de celle indiquée dans DIN 1050. Il serait en outre recommandable de s'écarter plus tôt de la ligne de *Euler*, pour 1800 kg/cm² au lieu de 2073 kg/cm².

Je ne connais aucun essai destiné à contrôler ces résultats; de tels essais ne sont d'ailleurs pas faciles à exécuter car il faudrait d'abord trouver un appui qui permette de centrer la charge à partir de certaines limites de charge comme cela se produit dans une barre de treillis rigidement fixée. Il s'agit de réaliser au laboratoire pour une seule barre les conditions d'appui variables qui se présentent dans un système de la pratique. Je ne sais pas jusqu'à quel point cela est réalisable mais il serait très utile de connaître une telle disposition car elle permettrait d'étudier plus complètement le comportement réel d'une barre comprimée dans un ouvrage.

I 11

La physique de l'essai de rupture par traction.

Zur Physik des Zerreißversuchs.

The Physics of the Tensile Breaking Test.

Dr. phil. W. Späth,
Wuppertal-Barmen.

L'essai de rupture par traction forme, aujourd'hui encore, la base de l'essai des matériaux. La représentation graphique de la relation entre la charge appliquée et la déformation engendrée parait en principe si simple que l'étude physique du processus de mise en charge a été reléguée à l'arrière plan vis-à-vis des questions d'un caractère technique et pratique qui se posent lors de la construction des machines d'essai. L'interprétation des diagrammes fournis par les installations d'essai actuelles laisse encore une série de questions non résolues dont on s'occupe largement dans la presse technique. Par exemple, les avis sur la valeur de la limite d'élasticité ou des limites supérieure et inférieure d'écoulement sont aujourd'hui encore très partagés. De même, les résultats des essais d'endurance montrent que les caractéristiques des matériaux, déterminées par essai de rupture par traction et avec lesquelles tout le monde est d'accord, n'ont aucune relation précise avec la résistance aux efforts alternés, qui pourtant est de la plus grande importance.

Pour l'essai d'un matériau ou même d'éléments de constructions, on place la pièce à étudier dans une installation d'essai et on la soumet d'une manière quelconque à une charge croissant régulièrement. L'éprouvette est placée dans le même flux de forces que les différents éléments de l'installation d'essai qui, en général, agissent comme des masses inertes ou comme des ressorts. Une étude plus approfondie montre que l'élasticité du châssis, la compressibilité du liquide, de même que l'élévation propre de l'indicateur de force des machines d'essai actuellement en usage ne sont pas du tout à négliger et qu'au contraire la compression élastique des installations d'essai est en général beaucoup plus grande que la déformation de l'éprouvette elle-même.[1, 2]

L'influence de ces facteurs sur le processus de mise en charge est indiquée à la fig. 1. La ligne OA représente l'accroissement de la force accompagné d'un accroissement de la déformation dans l'éprouvette. Dans l'installation elle-même s'exerce un processus de mise en charge qui peut être représenté par la droite CA. Au point A règne un équilibre statique entre la force élastique de

[1] *W. Späth:* Arch. Eisenhüttenwesen 9 (1935/36), p. 277.
[2] *W. Späth:* Meßtechnik, XII (1936), p. 21.

l'éprouvette et la réaction élastique du châssis. Sous l'effet de la charge considérée AB l'éprouvette s'est déformée de OB tandis que la déformation correspondante du châssis est représentée par CB. Les deux angles α et β indiquent la grandeur des constantes d'élasticité de l'éprouvette et du châssis. Si maintenant l'éprouvette subit tout-à-coup un allongement plastique de A en D, elle tendra à se décharger suivant la droite DO'. Au point d'intersection E de cette droite avec la droite de mise en charge du châssis, le système se trouve de nouveau en équilibre car, en ce point, la force agissant dans l'éprouvette est exactement égale à la réaction élastique du châssis. L'écoulement plastique de A à D engendre deux effets. La contrainte originale tombe de AA' tandis que la déformation mesurable de l'éprouvette a augmenté de A'E. On constate immédiatement que ce processus ne dépend pas seulement de l'éprouvette mais fortement aussi des propriétés élastiques de la machine d'essai. Les résultats varient fortement avec l'élasticité propre de la machine, c'est-à-dire avec l'inclinaison de la droite CA.

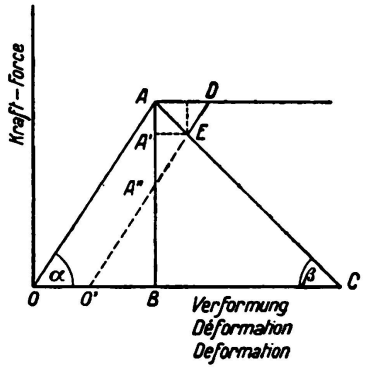


Fig. 1.

Une machine très «molle», subissant une très forte déformation propre sous l'effet de BA, présente une droite CA d'allure à peu près horizontale pour les très faibles déformations de l'éprouvette qui entrent en ligne de compte ici. L'allongement AD de l'éprouvette s'effectue par conséquent sous une tension à peu près constante et l'accroissement de la déformation, mesurable extérieurement, correspond à AD. Une telle machine peut être désignée comme machine à effet résiduel car elle permet à l'écoulement de se propager sans variation de la charge. Il en est tout autrement avec une machine «dure» dont la ligne caractéristique est donnée par la droite AB dans le cas limite d'une constante d'élasticité infiniment grande. Par suite de l'écoulement de l'éprouvette, la charge tombe de A en A'' et la déformation de l'éprouvette, mesurable extérieurement, reste invariable. Une telle machine peut être désignée comme machine à relaxation car sa déformation originale est conservée et le processus d'écoulement a pour conséquence une chute correspondante de la charge. Les machines en usage actuellement se trouvent entre ces deux cas limites et les résultats qu'elles fournissent ne peuvent pas être directement comparés si l'on ne connait pas leur élasticité propre.

Ces considérations théoriques ont été confirmées par une série d'éssais que nous avons effectués. Bien des instituts de recherches tiennent actuellement compte de ces questions qui présentent une importance fondamentale pour l'essai des matériaux.

Dans le travail cité sous 1), nous avons proposé «d'amollir» une machine d'essai en intercalant un ressort dans le flux de forces. *G. Welter*[3] a effectué de tels essais et les résultats obtenus correspondent aux prévisions. Une machine d'essai artificiellement «amollie» par intercalage d'un ressort doit, d'après ce que nous avons exposé ci-dessus, permettre à l'écoulement de se propager sans variation de la tension. Par exemple, un matériau qui présente à l'essai ordinaire des limites supérieure et inférieure d'écoulement, peut, sur une telle machine, ne subir aucune chute de tension jusqu'à la limite inférieure d'écoulement, ce qui est justifié.

Lorsque l'on a affaire à de très grandes forces, l'intercalage d'un ressort est impossible car ce dernier aurait de trop grandes dimensions. Suivant la proposition du Conseiller *von Bohuszewicz*, les établissements Losenhausen à Düsseldorf ont «amolli» une machine hydraulique de 60 t en substituant au

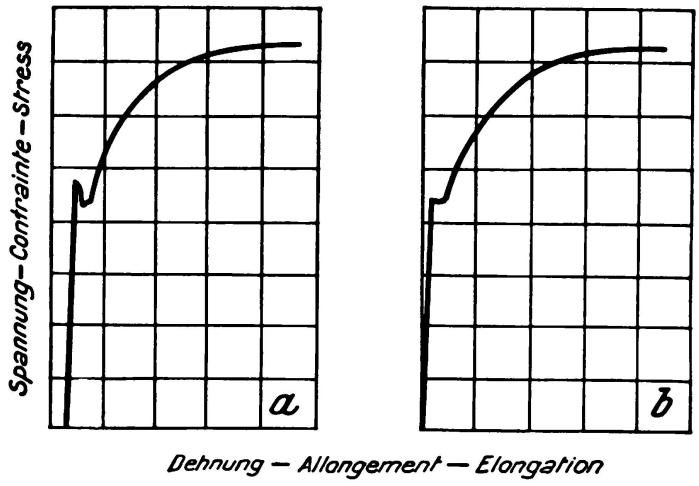


Fig. 2.

Processus d'écoulement sur une machine courante (a)
„ „ après agrandissement du réservoir d'eau (b).

cylindre compresseur un grand réservoir d'eau sous pression. Les résultats sont représentés à la fig. 2. A gauche nous donnons la courbe que l'on obtient avec la machine non transformée. On peut distinctement observer une limite supérieure et une limite inférieure d'écoulement. Si maintenant on «amollit» artificiellement la machine par introduction d'un réservoir d'eau sous pression, une seconde éprouvette du même matériau fournit la courbe de droite. On constate que le processus d'écoulement se propage sans variation de la charge par suite de la plus grande compressibilité de l'eau. On peut tirer un grand nombre d'autres conclusions sur les relations qui existent entre la formation de limites supérieure et inférieure d'écoulement et les conditions dans lesquelles s'effectue l'essai. Nous n'entrerons pas ici dans ces détails.

Il est cependant intéressant de citer une série d'essais que nous avons effectués récemment et qui sont précisément de sens contraire. Lorsque l'on rend une machine «dure», on peut espérer étudier avec plus de précision les processus qui

[3] *G. Welter:* Metallwirtschaft, XIV (1935), p. 1043.

s'effectuent dans un matériau mis en tension.[4] On exécute souvent de courts essais sur des machines à flexion rotative; le fléchissement de la barre en rotation est reporté en fonction de la charge. Dans la machine de *Schenck*, Darmstadt, ainsi que dans d'autres machines, la charge est réalisée par des poids. Dans ce cas on obtient pour la ligne élastique une ligne qui s'écarte progressivement de la ligne droite. Si l'on rend une telle machine artificiellement dure, en appliquant la charge au moyen d'un ressort beaucoup plus dur que l'éprouvette elle-même, on obtient une ligne élastique dont l'allure rappelle beaucoup les courbes de l'essai de rupture par traction avec limites supérieure et inférieure d'écoulement. La contrainte tombe très nettement d'une valeur supérieure à une valeur inférieure. Pour les matériaux très plastiques, comme l'aluminium par exemple, toute la courbe de mise en charge est constituée d'un grand nombre de ces «escaliers» de charge. On a trouvé en outre que la sensibilité suffisait pour étudier même les questions importantes de l'effet des entailles. Pour plus de détails, voir le travail qui paraîtra prochainement sur cette question.[5]

Ces quelques considérations permettent de tirer quelques conclusions importantes pour le développement des machines d'essai. En particulier, il sera possible à l'avenir d'établir des machines beaucoup plus «dures». De telles machines présentent un avantage inestimables; elles montrent les limites de charge critiques par une chute de tension facilement observable. Les machines d'essai actuellement en usage estompent au contraire ces limites importantes et les rendent même indéterminables par suite de leur propre compressibilité.

---

[4] *W. Späth:* Metallwirtschaft, 16 (1937), p. 193.

[5] *W. Späth:* Z.V.D.I. 81 (1937) p. 710 et en outre *W. Späth:* „Physik der mechanischen Werkstoffsprüfung", Julius Springer éditeur, Berlin 1938.

I 12

Rôle de la ductilité de l'acier dans la stabilité des constructions.

Der Einfluß der Zähigkeit des Stahles auf die Stabilität der Stahlkonstruktionen.

The Influence of Ductility of the Steel to the Stability of Structures.

F. Aimond,

Docteur ès sciences, Ingénieur des Ponts et Chaussées, détaché au Ministère de l'Air, Paris.

La ductilité est la propriété d'après laquelle un matériau peut subir de grandes déformations lorsque la limite du domaine élastique de ce matériau est atteinte. Pour l'acier doux de construction, les grandes déformations qui se produisent quand la limite du domaine élastique est atteinte, ne modifient pas sensiblement au point de vue mécanique la structure du métal. Cette zone de déformation en bordure du domaine élastique s'appelle le domaine de plasticité.

Depuis longtemps on s'est aperçu que la stabilité des constructions en acier résultait de l'existence de petites zones en déformation plastique se produisant dans toutes les régions où par suite de l'importance des déformations élastiques la limite du domaine d'élasticité était atteinte, de telle sorte que finalement le taux de travail maximum de la matière était moins élevé que celui calculé par les méthodes ordinaires de l'élasticité. La ductilité de l'acier avait donc pour effet, semblait-il, d'augmenter la résistance des constructions, en supprimant les zones de grandes déformations élastiques. C'est cette propriété qui, convenablement généralisée, s'appelle aujourd'hui adaptation.

Mais l'adaptation n'est valable que pour les systèmes de charges fixes ou n'intervenant qu'un très petit nombre de fois, les déformations permanentes répétées de la matière ayant pour effet d'amener rapidement la rupture. L'adaptation n'entre pas en ligne de compte quand il s'agit de résistance à des efforts alternés. On sait même que vis-à-vis de ces efforts le domaine apparent d'élasticité est encore trop vaste et que chaque matériau possède un domaine d'élasticité vrai intérieur au domaine élastique habituel, domaine que l'on appelle encore domaine d'endurance.

Ainsi la ductilité de l'acier ne joue aucun rôle en ce qui concerne la stabilité aux efforts alternés. Elle joue au contraire un rôle essentiel par l'effet de l'adaptation pour tout ce qui touche la stabilité des systèmes de charges fixes ou pratiquement telles.

La ductilité de l'acier intervient en vertu de la loi d'adaptation dans toutes les régions d'une construction où, pour des causes diverses, le domaine élastique est atteint. Les zones de déformation plastique se trouvent par conséquent au voisinage de tous les points de discontinuité géométrique ou mécanique, points innombrables dans une construction, et dans les régions de grandes déformations élastiques. Mais ces zones de déformations plastiques sont en général extrêmement limitées dans une construction bien faite. C'est qu'en effet le surcroit de résistance que donnent les déformations d'adaptation est dû à l'inégalité de répartition des contraintes et à l'existence de zones moins fatiguées qui en résultent. Ces zones sont nécessairement de faible importance dans les constructions bien conçues.

D'où une première conclusion: si la ductilité de l'acier est un phénomène essentiel au point de vue de la stabilité des constructions, elle n'améliore pas la résistance des constructions bien conçues, elle ne fait que corriger les erreurs de construction, les différences d'homogénéité de la matière et l'effet des tassements d'appuis. On ne saurait donc fonder, à notre avis, de méthode nouvelle de calcul des constructions en utilisant les propriétés de la déformation plastique.

Toutefois les méthodes de calculs qui s'appuient sur l'existence des déformations plastiques ne sont pas à rejeter, et pour notre part nous les pratiquons journellement. C'est que, pour des raisons diverses, la forme que l'on donne aux éléments de construction n'est pas celle qui correspond au rendement maximum de la matière. Il est donc tout-à-fait naturel d'utiliser les propriétés de ductilité de l'acier pour corriger en partie l'erreur mécanique due à une mauvaise configuration du milieu. Je m'explique: prenons, par exemple, un arc, un portique ou une poutre continue. Le mieux, si on le peut, est d'exécuter ces pièces de manière que la limite élastique sous la charge dangereuse soit atteinte en tous les points à la fois. La ductilité de la matière n'est alors d'aucune utilité pour le calcul. Mais si on est conduit à adopter des formes mauvaises au point de vue du rendement mécanique, il ne faut pas commettre l'erreur de les calculer dans l'hypothèse élastique sous l'effet des charges fixes, car ce serait ajouter une seconde erreur à la première, il faut les calculer avec les hypothèses de la plasticité, de manière à réduire au minimum la perte de rendement due à un choix défectueux de la forme. A notre avis, par conséquent, les méthodes de calcul par la théorie de la plasticité sont des pis aller que l'on doit utiliser pour le calcul des éléments mécaniques à mauvais rendement, et bien entendu pour les charges fixes seulement.

A ce dernier point de vue il est à souhaiter que les méthodes actuellement employées soient codifiées et qu'on arrive à des formules simples pour traiter les problèmes les plus courants de systèmes hyperstatiques, en particulier les arcs et les portiques. On ne devrait plus voir aujourd'hui calculer ces éléments de charpente courante sous les charges fixes ou peu variables autrement qu'en utilisant la loi d'adaptation.

Pour nous-mêmes nous nous sommes fixé la règle suivante pour le calcul de toute charpente soumise à des charges fixes ou que l'on peut considérer comme telles: tout système de forces et de contraintes maintenant en équilibre un milieu mécanique donné est un système réalisable, compte tenu de l'adaptation. Si ce système dépend d'un certain nombre de paramètres arbitraires on devra

rechercher autant que possible à déterminer ces paramètres de façon à obtenir le minimum de la valeur maxima des contraintes aux différents points du système. En d'autres termes, si un équilibre est possible au point de vue purement statique, la construction est stable sous des charges fixes sans qu'il soit besoin de se demander si le système des contraintes calculées est effectivement le système réel.

Le principe que nous venons d'énoncer a été notre guide dans tous les projets de charpente que nous avons établis. Il s'est révélé d'une aide particulièrement efficace dans les constructions où, à l'inverse de ce qui se produit le plus souvent, ce ne sont pas les déformations qui déterminent les contraintes, les valeurs de celles-ci résultant uniquement de la position des charges et de la nature des appuis.

Il en est ainsi notamment dans les systèmes mécaniques à deux dimensions, c'est-à-dire où les contraintes se propagent sensiblement suivant une surface. Les propriétés de ces systèmes sont étroitement liées aux propriétés mécaniques des surfaces. Or, quand on analyse les phénomènes mécaniques auxquels donne lieu l'équilibre des surfaces, on est rapidement conduit à des systèmes en équilibre comportant de part et d'autre d'une même courbe de la surface des discontinuités dans les contraintes sur des éléments parallèles, discontinuités introduisant de brusques variations de longueur des éléments. Un examen plus approfondi montre qu'en vertu des propriétés élastiques de la matière, de tels équilibres sont impossibles sans rupture de la matière. Or l'expérience montre que de tels systèmes sont parfaitement stables. L'explication de cette contradiction est encore donnée par la théorie de la ductilité.

Lorsque par suite de brusques variations des contraintes l'élément linéaire d'une surface doit subir des déformations importantes, ou bien la surface peut géométriquement se déformer de façon que son élément linéaire subisse la variation considérée, ou bien des allongements permanents se produisent ayant pour effet de contrebalancer les déformations dues à l'action mécanique des contraintes. Pour notre part, nous estimons que la ductilité de l'acier joue dans ces phénomènes un rôle très important, quoiqu'il soit assez difficile de déterminer exactement en quoi il consiste.

Les lignes de discontinuité des contraintes, qui se révèlent ainsi dans l'équilibre des surfaces, partent en général des points de discontinuité du contour ou se confondent avec lui. Il est facile de faire disparaître les lignes de discontinuité dues aux discontinuités du contour, il suffit d'arrondir les angles, tout au moins pour le calcul. Les lignes de discontinuité le long du contour lui-même sont plus difficiles à faire disparaître et c'est là que la ductilité de la matière joue un rôle essentiel.

Parmi ces lignes de discontinuité des contraintes d'une surface, le rôle le plus important est joué par les lignes asymptotiques quand elles existent. Suivant certaines de ces lignes les conditions d'équilibre conduisent à trouver des discontinuités de contraintes, d'où discontinuités d'allongement. Lorsque la surface est suffisamment flexible pour se déformer, la déformation de la surface a alors pour effet, lorsque ces lignes asymptotiques de discontinuité sont sur le contour de la surface, de modifier la position de ces lignes asymptotiques qui quittent alors le contour. On est alors ramené au cas de lignes

asymptotiques de discontinuité ayant leur origine dans un angle du contour. La ductilité de l'acier au voisinage de cet angle a alors pour effet de supprimer cette discontinuité en substituant au contour réel un contour fictif où toute discontinuité a disparu.

L'étude des déformations plastiques de l'acier dans des systèmes tels que ceux que nous venons d'examiner joue un rôle encore plus important peut-être que dans les charpentes ordinaires, car, à l'inverse de ce qui se passe pour celles-ci, il serait impossible de construire des systèmes stables sans faire intervenir l'adaptation de la matière, adaptation rendue possible par la ductilité du matériau. C'est là un exemple paradoxal a priori de système isostatique justifiable de la théorie de la plasticité.