

La stabilité des plaques rectangulaires soumises au cisaillement et à la flexion

Autor(en): **Way, S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3092>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

V 16

La stabilité des plaques rectangulaires soumises au cisaillement et à la flexion.

Die Stabilität rechteckiger Platten unter Schub- und Biegebeanspruchung.

Stability of Rectangular Plates Under Shear and Bending Forces.

Dr. S. Way,
East Pittsburgh, Pa., U.S.A.

1° — Introduction.

La stabilité des plaques rectangulaires soumises sur leurs bords à différents types de sollicitation est un problème qui se présente souvent dans la construction des ponts, des bateaux et des avions.¹ Lorsque la charge dépasse une certaine valeur critique, la plaque se gondole transversalement. Dans une construction, la charge critique est parfois plus petite que la charge admissible, il est donc toujours bon de connaître la charge critique.

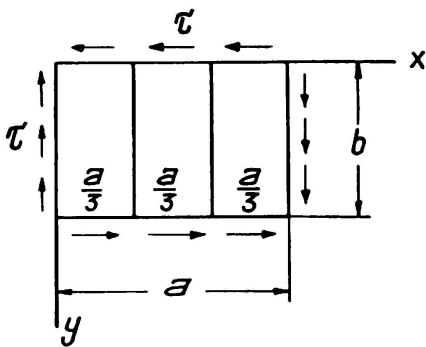


Fig. 1.

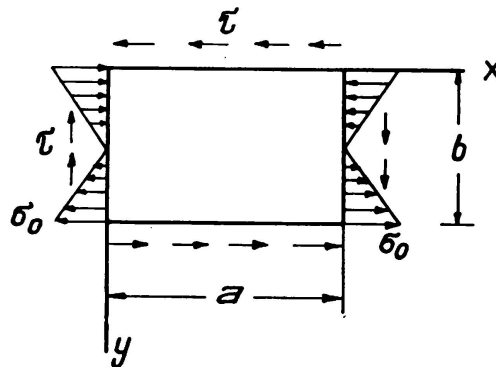


Fig. 2.

Nous traiterons dans ce rapport deux problèmes du voilement des plaques rectangulaires. Le premier (fig. 1) concerne une plaque munie de deux raidisseurs. La charge est constituée d'efforts de cisaillement répartis uniformément sur les arêtes. Le second problème (fig. 2) se rapporte à une plaque soumise d'une part à des efforts de cisaillement uniformément répartis sur les arêtes et d'autre part à des efforts de traction et de compression linéairement répartis des

¹ O. S. Heck et H. Ebner ont donné une bibliographie très complète sur la résistance des tôles, Luftfahrtforschung, vol. 11, 1935, p. 211.

deux côtés. Dans les deux cas nous admettons que les quatre arêtes sont simplement appuyées.

Nous appliquons la méthode de l'énergie, suivant laquelle la charge critique se calcule à partir de la condition que le travail développé au cours du voilement, par les forces agissant sur les arêtes, est égal à l'énergie potentielle accumulée par suite de l'élasticité du matériau. Le fléchissement doit être tel que la charge critique soit minima.

2° — Plaques à deux raidisseurs soumises au cisaillement.

Le problème d'une plaque rectangulaire soumise au cisaillement sans raidisseur et avec un raidisseur a été résolu par *Timoshenko*² alors que *Southwell* et *Skam*³ ont traité le cas d'une plaque infiniment longue avec efforts de cisaillement agissant sur les arêtes. Les raidisseurs ont pour objet le relèvement de la charge critique d'une plaque. Cet accroissement de la charge critique augmente en général avec la résistance des raidisseurs. On a cependant constaté qu'il était inutile d'augmenter au delà d'un certain point la résistance des raidisseurs d'une plaque soumise sur ses arêtes à des efforts de cisaillement car les raidisseurs restent droits et la tôle ne se voile que dans les panneaux.

Pour résoudre le problème de la plaque représentée à la fig. 1, on admet pour le plan déformé une expression générale sous forme d'une double série trigonométrique.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \quad (1)$$

où chaque expression satisfait à la condition limite des arêtes simplement appuyées. L'application de cette formule permet de calculer trois grandeurs d'énergie, à savoir, l'énergie potentielle V de la tôle, l'énergie potentielle des raidisseurs V_{s1} et V_{s2} et le travail V_1 fourni durant le voilement par les forces de cisaillement agissant sur les arêtes. On peut négliger la rigidité à la torsion des raidisseurs. Ces trois grandeurs sont exprimées comme dérivées de w :

$$V = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \{ (w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1 - \mu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) \} dx dy \quad (2)$$

$$V_{s1} + V_{s2} = \frac{B}{2} \int_0^b \left\{ (w_{yy})_{x=\frac{a}{3}}^2 + (w_{yy})_{x=\frac{2a}{3}}^2 \right\} dy \quad (3)$$

$$V_1 = -\tau h \int_0^a \int_0^b w_x w_y dx dy \quad (4)$$

où h est l'épaisseur de la plaque, B la rigidité à la flexion des raidisseurs et D la rigidité à la flexion de la tôle,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (5)$$

² S. *Timoshenko*: Eisenbau, 12^e vol. (1921), p. 147.

³ R. V. *Southwell* et S. W. *Skam*: Proc. Royal Society, Londres, Séries A, 105^e vol. (1924), p. 582.

La condition de voilement est:

$$V + V_{s1} + V_{s2} = V_1. \tag{6}$$

L'équation (6) conduit à une expression de τ_{cr} , la contrainte critique de cisaillement, en fonction des constantes A_{mn} . Le pas suivant consiste à déterminer le minimum de τ_{cr} par rapport aux constantes. Les équations $\delta \tau_{cr} / \delta A_{mn} = 0$ conduisent à une série d'équations linéaires pour les constantes A_{mn} . On obtient finalement la valeur de τ_{cr} en résolvant le déterminant du système posés égaux à zéro. L'exactitude de la valeur obtenue pour τ_{cr} est d'autant plus grande que le nombre de termes considérés du déterminant d'ordre infinie est plus grand.

Les équations linéaires que l'on obtient en choisissant les constantes A_{mn} de telle sorte que τ_{cr} soit minimum, se composent de deux groupes dont l'un contient les termes dans lesquels $m + n$ est impair tandis que l'autre contient les termes dans lesquels $m + n$ est pair. Il faut employer le groupe d'équations qui fournit la plus petite valeur de τ_{cr} .

Il est bon de mesurer la charge critique à l'aide du rapport τ_{cr} / σ_e , où σ_e est la charge de flambage suivant Euler $D\pi^2 / hb^2$. Au tableau I nous donnons les valeurs de τ_{cr} / σ_e calculées à partir des déterminants du sixième ordre pour les deux groupes d'équations et pour le cas spécial $B = 0$.⁴ Nous avons désigné par β le rapport a/b .

Tableau I.
Valeurs de τ_{cr} / σ_e pour différentes valeurs de β . $B = 0$.

β	1	1,2	1,5	2	2,5	3
τ_{cr} / σ_e m + n pair	9,42	8,06	7,14	6,59	6,32	6,14
τ_{cr} / σ_e m + n impair	11,55		8,09	6,74	6,21	6,04

Les valeurs de τ_{cr} / σ_e pour $\beta < 1$ peuvent être facilement déduites des valeurs ci-dessus; elles sont données au tableau II. Nous avons donné la plus petite des deux valeurs de τ_{cr} / σ_e

Tableau II.
 τ_{cr} / σ_e pour $\beta < 1$. $B = 0$.

β	1	0,833	0,667	0,50	0,400	0,333
τ_{cr} / σ_e	9,42	11,60	16,06	26,40	38,80	54,40

Pour tout raidisseur important, le système conduit à la plus petite valeur de τ_{cr} pour $m + n$ impair. Nous posons égaux à zéro le déterminant des coefficients des constantes.

$$A_{21}, A_{12}, A_{32}, A_{23}, A_{41}, A_{14};$$

⁴ Les valeurs pour lesquelles $m + n$ est pair concordent avec celles obtenues par *Timoshenko* (note 2). Les expressions qui ont été employées pour les valeurs paires de $m + n$ étaient $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{13}, A_{31}, A_{42}$ et pour les valeurs impaires de $m + n$, $A_{21}, A_{12}, A_{32}, A_{23}, A_{41}, A_{14}$.

l'équation ainsi obtenue nous permet de calculer directement τ_{cr}/σ_e lorsqu'on connaît β et la résistance des raidisseurs. Il est avantageux de mesurer la résistance des raidisseurs par le rapport $\gamma = B/aD$. Les valeurs de τ_{cr}/σ_e ainsi obtenues sont données au tableau III. On constate que la charge de voilement de la tôle augmente en même temps que la rigidité des raidisseurs.

Tableau III.

τ_{cr}/σ_e pour différentes valeurs de γ et de β .

$\beta = 1$		$\beta = 1,2$		$\beta = 1,5$		$\beta = 2$		$\beta = 2,5$		$\beta = 3$	
γ	τ_{cr}/σ_e	γ	τ_{cr}/σ_e	γ	τ_{cr}/σ_e	γ	τ_{cr}/σ_e	γ	τ_{cr}/σ_e	γ	τ_{cr}/σ_e
0	11,55	20	36,7	0	8,09	0	6,74	0	6,21	0	6,04
10	32,75	25	40,1	5	19,43	2	13,07	1	10,3	0,2	7,29
20	41,6	30	43,2	10	25,2	5	18,2	2	13,1	0,4	8,32
30	48,5			15	29,5	10	23,8	3	15,1	0,6	9,21
40	54,4									0,7	9,59

Lorsque les raidisseurs ont une très grande rigidité, la charge critique calculée pour la tôle est plus grande que la charge critique d'un des trois panneaux. Les raidisseurs restent droits et seuls les panneaux de la tôle se gondolent. La condition pour que les raidisseurs restent droits est que leur rigidité soit plus grande que la rigidité pour laquelle la charge critique de la plaque est égale à celle d'un panneau. On calcule la charge critique d'un panneau en admettant que tous les bords de la plaque sont simplement appuyés. En réalité, chaque panneau est partiellement encastré par le ou les panneaux voisins.

Admettons que γ_{min} est la plus petite valeur de γ pour laquelle les raidisseurs restent droits. Pour illustrer la méthode de calcul, considérons le cas où $\beta = 1,2$. La valeur de β pour un panneau de cette tôle est 0,400 et le rapport de la charge critique correspondante est 38,8, ainsi qu'il ressort du tableau II. Reportons graphiquement les valeurs de τ_{cr}/σ_e données au tableau III pour $\beta = 1,2$, on trouve que $\tau_{cr}/\sigma_e = 38,8$ lorsque $\gamma = 23$. Donc γ_{min} est égal à 23 pour $\beta = 1,2$. On peut déterminer de la même façon les γ_{min} pour d'autres valeurs de β .

Il est avantageux de présenter les résultats en fonction des dimensions d'un panneau et non pas en fonction des dimensions de la tôle. Désignons par c la distance entre les raidisseurs. Nous introduisons les symboles β' et γ' , définis comme suit:

$$\beta' = \frac{c}{b} \quad \gamma' = \frac{B}{cD}$$

Nous donnons au tableau IV les valeurs de τ_{cr}/σ_e et de γ'_{min} pour différents panneaux. Ces valeurs ont été reportées sous forme de courbes à la fig. 3. On peut voir que la rigidité des raidisseurs, nécessaire pour deux raidisseurs, n'est pas beaucoup plus grande que celle nécessaire pour un raidisseur. Pour trois

raidisseurs ou plus, les valeurs de γ'_{\min} ne dépassent que de très peu celles pour deux raidisseurs.

Tableau IV.

Un raidisseur			Deux raidisseurs		
β'	γ'_{\min}	τ_{cr} / σ_e	β'	γ'_{\min}	τ_{cr} / σ_e
0,500	30,4	26,4	0,333	120	54,4
0,625	12,6	17,9	0,400	69	38,8
0,750	5,8	13,3	0,500	34	26,4
1,000	1,66	9,42	0,667	10,8	16,06
			0,833	4,2	11,61
			1,000	2,0	9,42

3° — Tôles sollicitées simultanément à la flexion et au cisaillement.

Si, comme le représente la fig. 2, la tôle est soumise à des contraintes de cisaillement τ uniformément réparties sur les arêtes et à des contraintes de traction et de compression $\sigma = \sigma_0 (1 - 2y/b)$, linéairement réparties sur les deux extrémités, la grandeur de la contrainte critique de flexion $\sigma_{0,cr}$ dépend de la grandeur des contraintes de cisaillement. Par analogie, on peut dire que la contrainte critique de cisaillement dépend de la grandeur de σ_0 . Pour simplifier, introduisons les paramètres κ et ρ , définis comme suit:

$$\kappa = \frac{\sigma_{0,cr}}{\sigma_e} \quad \rho = \frac{\tau}{\sigma_e}$$

Pour résoudre le problème on peut de nouveau faire appel à l'expression (1) qui satisfait aux conditions aux appuis. Comme auparavant, l'équation (2) fournit l'énergie potentielle de la tôle voilée. Le travail V_1 fournit durant le voilement par les forces agissant sur les arêtes est dans notre cas:

$$V_1 = \frac{h}{2} \int_0^b dy \int_0^a \sigma_0 \left(1 - \frac{2y}{b}\right) w_x^2 dx - \tau h \int_0^a \int_0^b w_x w_y dx dy \quad (7)$$

La condition de voilement est $V = V_1$. On peut obtenir ainsi une expression pour $\sigma_{0,cr}$, en choisissant les constantes A_{mn} de telle sorte que cette expression soit minima. Les équations $\delta \kappa / \delta A_{mn} = 0$ forment un système linéaire par rapport à A_{mn} . On obtient la grandeur de κ en égalant à zéro les déterminants de ce système. L'exactitude du résultat dépend de l'ordre des déterminants considérés. Nous utilisons ici les déterminants des coefficients des huit⁵ termes A_{11} , A_{12} , A_{13} , A_{21} , A_{22} , A_{23} , A_{31} , A_{33} et les valeurs de κ pour différentes valeurs de β et de ρ , comme elles sont données au tableau V.

⁵ Stein a effectué le calcul avec quatre termes. On obtient des valeurs de κ sensiblement plus petites lorsque l'on effectue le calcul, comme ci-dessus, avec huit termes. O. Stein: Der Stahlbau, Berlin, 7^e vol. (1934), p. 57.

Tableau V.

Valeurs de α et de ρ pour différentes valeurs de β .

$\beta = 1$		$\beta = 4/5$		$\beta = 2/3$		$\beta = 1/2$	
ρ	α	ρ	α	ρ	α	ρ	α
0	25,6	0	24,5	0	23,9	0	25,6
2	24,6	4	22,8	4	23,05	4	25,4
4	22,2	8	17,7	8	20,35	8	24,3
6	18,4	10	13,25	12	15,23	12	22,55
8	12,4	11	10,01	14	11,04	16	19,94
9	6,85	12	4,61	15	8,0	20	16,13
9,42	0	12,26	0	16,09	0	24	10,26
						26	5,44
						26,9	0

Nous avons reporté ces valeurs sous forme de courbes à la fig. 4. Lorsque $\alpha = 0$, nous avons la condition de voilement d'une tôle pour cisaillement pur, tandis que pour $\rho = 0$ nous avons la condition de voilement d'une tôle sur laquelle agissent des efforts de flexion. Les valeurs de ρ pour $\alpha = 0$ concordent très exactement avec celles de *Timoshenko* pour le cas du cisaillement pur. La faible différence pour les petites valeurs de β est à attribuer au fait que des huit termes considérés cinq valeurs $m + n$ seulement sont paires alors que *Timoshenko* utilise six termes pairs. Pour une sollicitation au pur cisaillement et pour $\beta = 1/2$, la différence dans les valeurs τ_{cr}/σ_e ne se monte qu'à 2% pour le calcul avec cinq et six termes. Pour une sollicitation à la pure flexion ($\rho = 0$) les valeurs de α concordent avec celles de *Timoshenko* qui ne s'est servi que de trois termes.

4° — Exemples numériques.

Admettons qu'une tôle sollicitée à des efforts de traction agissant sur ses arêtes doit être renforcée par deux raidisseurs. Soit: $a = 2000$ mm, $b = 1000$ mm, $h = 7$ mm, $E = 21\,000$ kg/mm² et $\mu = 0,3$. Il faut déterminer la charge qui engendre un voilement de la tôle ainsi que la rigidité des raidisseurs.

$$D = \frac{21\,000 \cdot 7^3}{12(1 - 0,09)} = 660\,000 \text{ kg mm},$$

$$\sigma_e = \frac{660\,000 \cdot \pi^2}{1\,000\,000 \cdot 7} = 0,93 \text{ kg/mm}^2.$$

Pour $\beta = 2$ on obtient $\beta' = 0,667$ et suivant le tableau IV $\gamma'_{\min} = 10,8$ et $\tau_{cr}/\sigma_e = 16,06$; il en résulte que $\tau_{cr} = 14,94$ kg/mm² et $B = 10,8 \cdot 0,667 \cdot 660\,000 = 4750 \cdot 10^6$ kg · mm². Si l'on ne veut utiliser qu'un raidisseur, la contrainte critique de cisaillement est 8,77 kg/mm² et la rigidité du raidisseur doit être égale à $1096 \cdot 10^6$ kg · mm².

Comme deuxième exemple, considérons l'âme de la partie extrême d'une poutre pleine. La hauteur b de cette âme est 2000 mm et son épaisseur $h = 8$ mm. Il faut déterminer la distance exacte entre les raidisseurs à l'extrémité de la poutre

et la rigidité que doit posséder le raidisseur pour que le voilement se produise lorsque $\tau = 10 \text{ kg/mm}^2$.

$$D = \frac{21\,000 \cdot 8^3}{12 \cdot 0,41} = 985\,000 \text{ kg mm}$$

$$\sigma_e = \frac{985\,000 \cdot \pi^2}{4 \cdot 10^6 \cdot 8} = 0,3035 \text{ kg/mm}^2$$

$$\tau_{cr} = 10 \text{ kg/mm}^2$$

$$\frac{\tau_{cr}}{\sigma_e} = 32,9.$$

On voit à la fig. 3 que $\beta' = 0,44$, la distance exacte entre les raidisseurs est donc

$$c = 2000 \cdot 0,44 = 880 \text{ mm}.$$

Pour déterminer la rigidité des raidisseurs admettons qu'un raidisseur sur trois est absolument rigide. Dans ce cas nous pouvons utiliser les courbes de la fig. 3

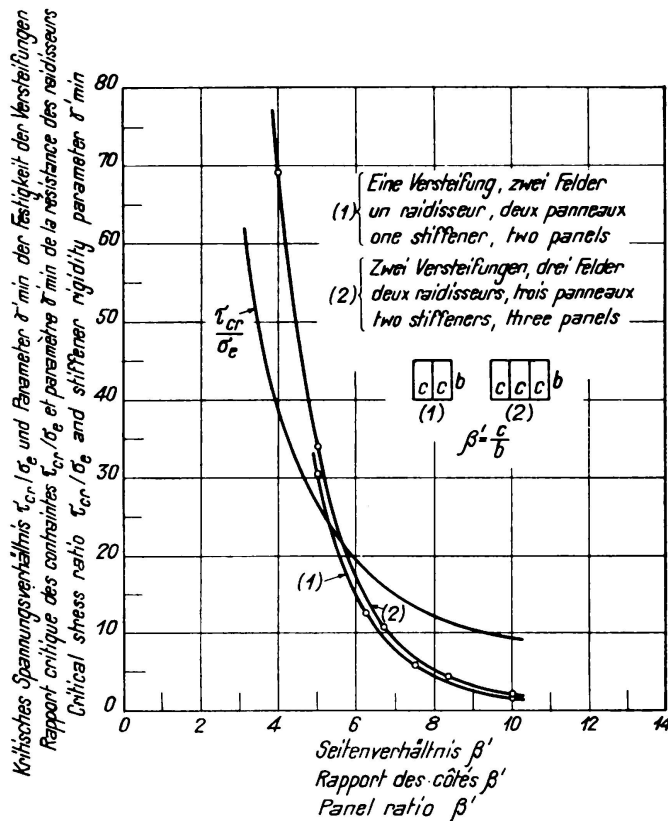


Fig. 3.

Rigidité des raidisseurs pour un rapport donné des côtés.

valables pour deux raidisseurs, nous trouvons $\gamma'_{min} = 50$. La rigidité des raidisseurs est ainsi

$$B = 50 \cdot 880 \cdot 985\,000 = 43\,300 \cdot 10^6 \text{ kg mm}^2.$$

Comme troisième exemple considérons un panneau rectangulaire sollicité à la flexion et au cisaillement comme l'indique la fig. 2. Dimensions: $a = 1000$ mm, $b = 2000$ mm, $h = 10$ mm. Admettons que la contrainte de flexion σ_0 soit égale à 10 kg/mm²; il faut chercher la contrainte de cisaillement qui entraîne le voilement. Dans ce cas $\beta = 1/2$ et

$$D = \frac{21\,000 \cdot 10^3}{12 \cdot 0,91} = 1\,923\,000 \text{ kg mm}$$

$$\sigma_e = \frac{1\,923\,000 \cdot \pi^2}{4 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0,474 \text{ kg/mm}^2$$

$$\kappa = \frac{10}{0,474} = 21,1.$$

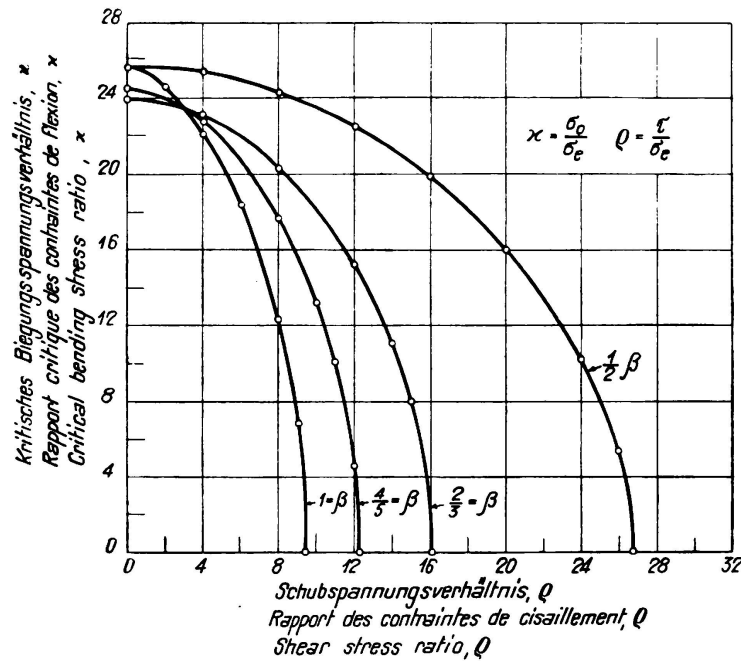


Fig. 4.

Charges critiques pour des tôles soumises simultanément à la flexion et au cisaillement.

A partir de la fig. 4 on obtient $\rho = 14,3$ pour $\beta = 1/2$ et $\kappa = 21,1$. La valeur correspondante de τ est $14,3 \cdot 0,474 = 6,78$ kg/mm².