

# L'arc de barrage élastiquement encastré

Autor(en): **Hofacker, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **2 (1936)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3100>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## VI 5

L'arc de barrage élastiquement encastré.

Elastisch eingespanntes Talsperrengewölbe.

Elastically Built-in Arch Dams.

Dr. sc. techn. K. Hofacker,  
Zürich.

Par arc de barrage nous désignons un arc à axe circulaire et à épaisseur constante, qui peut être très grande par rapport à la portée. Au contraire de ce que l'on a pour l'arc de pont qui, comme système de barres, peut être calculé avec une exactitude suffisante sur la base de la théorie de la flexion de Navier, il est nécessaire d'étudier l'arc de barrage d'après la théorie mathématique de l'élasticité lorsque l'on doit connaître l'allure exacte du système effectif des contraintes.

Si, suivant la méthode connue, on répartit sur deux systèmes compénétrants d'arcs horizontaux et de consoles verticales la pression de l'eau agissant sur un barrage arqué, on obtient pour les différents éléments des diagrammes de charge tout-à-fait arbitraires. Le calcul des contraintes dans les éléments verticaux en forme de disques, d'après la théorie du système plan de contrainte et de déformation, est connu depuis très longtemps déjà. On a déjà exécuté des études expérimentales sur ce point. Le calcul des contraintes dans les éléments d'arc horizontaux n'a été exécuté jusqu'à ce jour que pour le cas spécial d'un arc complètement encastré. Nous ne connaissons aucune mesure exacte des tensions et des déformations effectuée en laboratoire sur des modèles d'arcs de barrage. Il était par conséquent du plus haut intérêt d'étudier théoriquement et expérimentalement la question de l'arc élastiquement encastré soumis à une pression d'eau quelconque.<sup>1</sup>

Nous soumettons un disque en anneau circulaire à un système de contraintes plan (fig. 1).

Un diagramme de charge donné peut être représenté mathématiquement grâce à une série de Fourier:

$$\sigma'_r = A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cdot \sin n\varphi \quad (1)$$

Nous considérons à la fig. 2 les contraintes qui agissent au point 0 sur un élément  $dF$  et nous posons les conditions d'équilibre. En tenant compte des

<sup>1</sup> K. Hofacker: Das Talsperrengewölbe, 1936. Edition: Leemann, Frères & Co., Zurich.

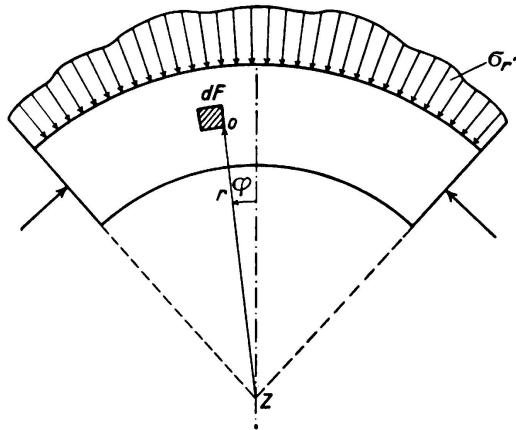


Fig. 1.

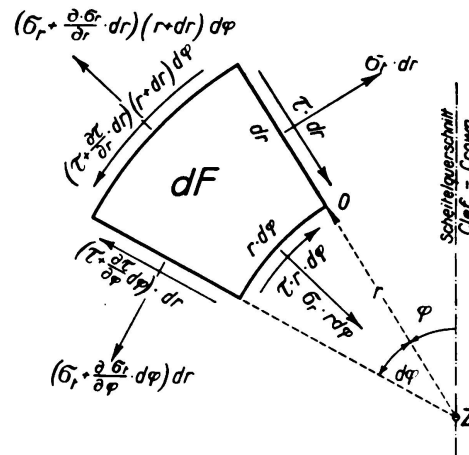


Fig. 2.

relations entre les contraintes et les allongements, c'est-à-dire les différences des déplacements  $u$  et  $v$  en direction radiale et tangentielle, on obtient les équations différentielles:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{m-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2m}{m-1} \left( \frac{1}{mr} \frac{\partial^2 v}{\partial r \cdot \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{2m}{m-1} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} \frac{m+1}{m-1} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3m-1}{m-1} = 0 \quad (3)$$

Les solutions générales pour  $u$  et  $v$  sont:

déplacement radial:

$$\begin{aligned} E \cdot u = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{a_0}{r} + \left[ \frac{2(m-1)}{m} \cdot b_0 - \frac{m+1}{m} c_0 \right] \cdot r + \frac{2(m-1)}{m} \cdot c_0 \cdot r \lg r \\ & + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2\beta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi - \left( \frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2\delta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\ & + \left[ \left( a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot b_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \frac{\alpha_1}{r^2} \right] \cos \varphi \\ & + \left[ \left( c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m-3}{m} \cdot d_1 r^2 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} \right] \sin \varphi \quad (4) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} - \left( \frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left( \frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left( \frac{2n}{m} + (n-2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} + \left( \frac{2n}{m} + (n+2) \frac{m-1}{m} \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \end{aligned}$$

déplacement tangentiel:

$$\begin{aligned}
 E \cdot v = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_0}{r} + 4 c_0 r \cdot \varphi + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2 \beta_1 \right) \varphi \cdot \cos \varphi \\
 & + \left( \frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2 \delta_1 \right) \varphi \cdot \sin \varphi \\
 & + \left[ - \left( a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1 \right) \lg r - \frac{m+1}{2m} \cdot a_1 + \frac{5m+1}{m} b_1 r^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \beta_1 \right] \sin \varphi \\
 & + \left[ \left( c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1 \right) \lg r + \frac{m+1}{2m} \cdot c_1 - \frac{5m+1}{m} \cdot d_1 r^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \delta_1 \right] \cos \varphi \tag{5} \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} + \left( n \frac{m+1}{m} + 4 \right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left( n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1} \right] \sin n \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ - \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left( n \frac{m+1}{m} + 4 \right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} - \left( n \frac{m+1}{m} - 4 \right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1} \right] \cos n \varphi
 \end{aligned}$$

A partir des déplacements on peut calculer les contraintes:  
contraintes radiales:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = & \frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 1) + \left( \frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2 b_1 r - \frac{2 \alpha_1}{r^3} \right) \cos \varphi \\
 & + \left( \frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2 d_1 r - \frac{2 \gamma_1}{r^3} \right) \sin \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) b_n r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n-n^2+2) \cdot d_n r^n \\
 & \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - (n^2+n-2) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
 \end{aligned} \tag{6}$$

contraintes tangentielles:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t = & -\frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 3) + \left( 6 b_1 r + \frac{2 \alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \cos \varphi \\
 & + \left( 6 d_1 r + \frac{2 \gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \sin \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot b_n \cdot r^n \\
 & \quad + n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n \varphi \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot d_n \cdot r^n \\
 & \quad + n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n \varphi
 \end{aligned} \tag{7}$$

contraintes de cisaillement:

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{\alpha_0}{r^2} + \left( 2b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r} \right) \sin \varphi \\ & - \left( 2d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r} \right) \cos \varphi \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) \cdot b_n \cdot r^n \\ & \quad - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) d_n \cdot r^n \\ & \quad - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi \end{aligned} \quad (8)$$

Quand les lois générales des contraintes et des déplacements sont connues, il s'agit de déterminer les constantes à l'aide des conditions aux appuis, en égalant entre elles, pour les bords du cercle, les valeurs correspondantes de  $\sigma_r$ , éq. (6), et  $\sigma'_r$ , éq. (1), c'est-à-dire en identifiant les coefficients des termes trigonométriques correspondants.

Pour les extrémités radiales on ne peut formuler une condition que pour les déplacements des points extrêmes. Pour l'encastrement total de l'arc, la condition est que les extrémités ne subissent aucun déplacement. Lorsque l'encastrement est élastique, les déplacements des extrémités de l'arc doivent prendre les mêmes valeurs que les déplacements des points correspondants de la culée qui est sollicitée à des contraintes normales et à des contraintes de cisaillement dans la section d'encastrement de l'arc. Cette question est traitée dans la publication citée ci-dessus.

Afin de simplifier la méthode de calcul nous avons reporté à la fig. 3, pour les points A et B de l'arc, les déplacements radiaux et tangentiels ainsi que les allongements  $h_A$  de la corde intérieure de l'arc et les rotations  $\vartheta$  de la section à la naissance.

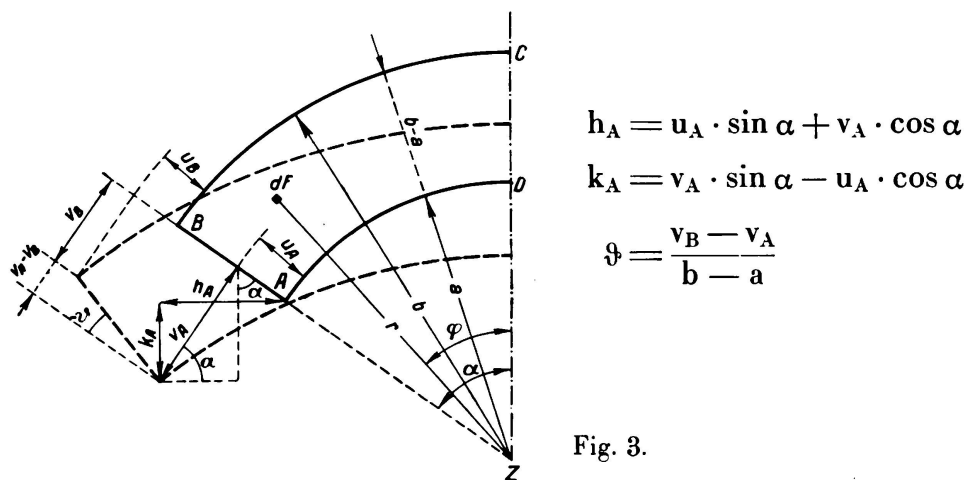


Fig. 3.

Les études théoriques furent contrôlées par des mesures sur modèles en cellulose.

La fig. 4 représente le modèle d'un arc de barrage élastiquement encastré, chargé sur la face extérieure par des pressions radiales.

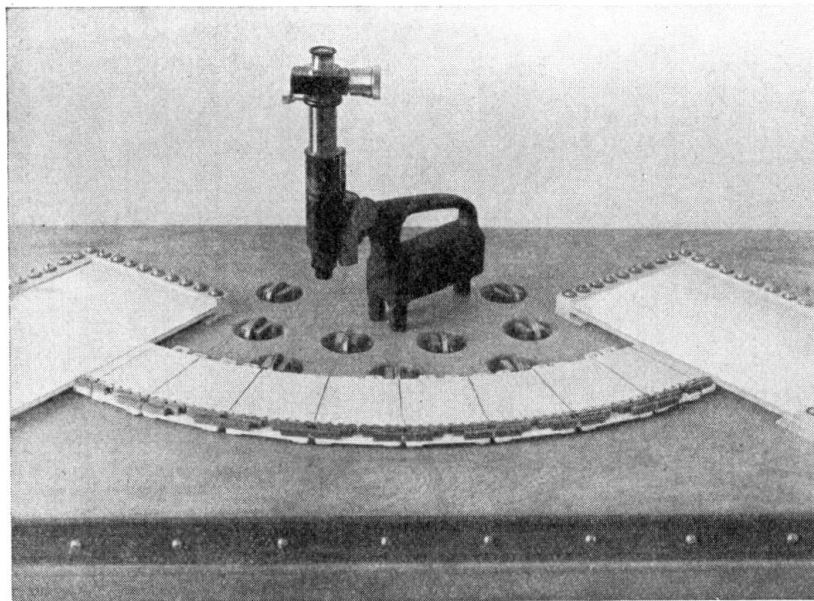


Fig. 4.

A la fig. 5 nous avons représenté les déplacements des extrémités, mesurés à l'aide du microscope. Nous avons reporté les valeurs obtenues pour les

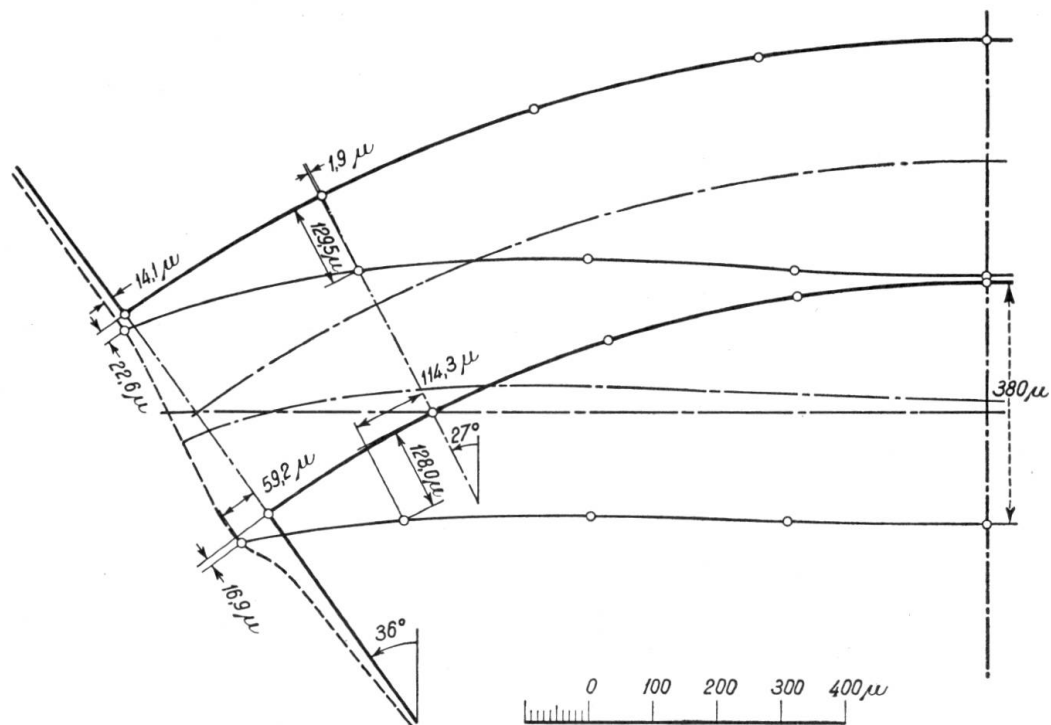


Fig. 5.

déplacements des deux sections  $\varphi = 36^\circ$  et  $\varphi = 27^\circ$ . Si l'on calcule le fléchissement de la clé de l'intrados, en considérant par exemple les déplacements des

points extrêmes de la section  $\varphi = 27^\circ$  comme déplacements des culées de l'arc élastiquement encastré en cette section, on constate que la valeur mesurée n'est

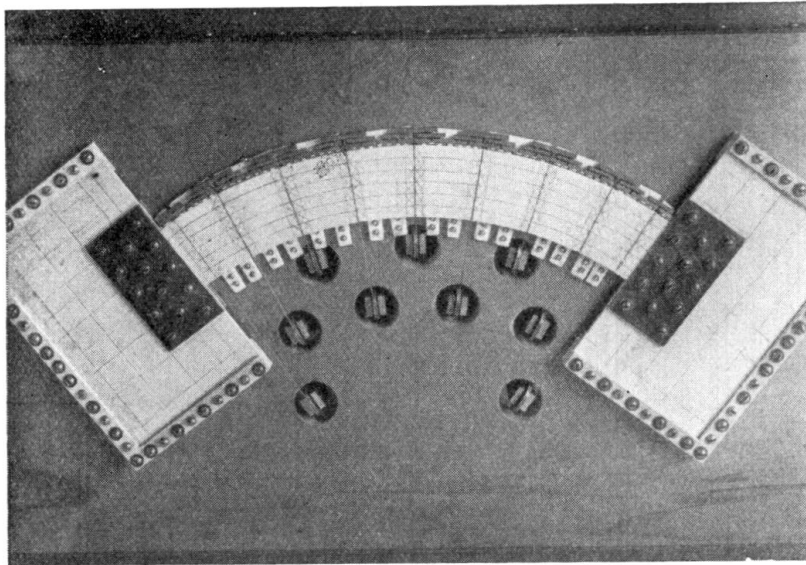


Fig. 6.

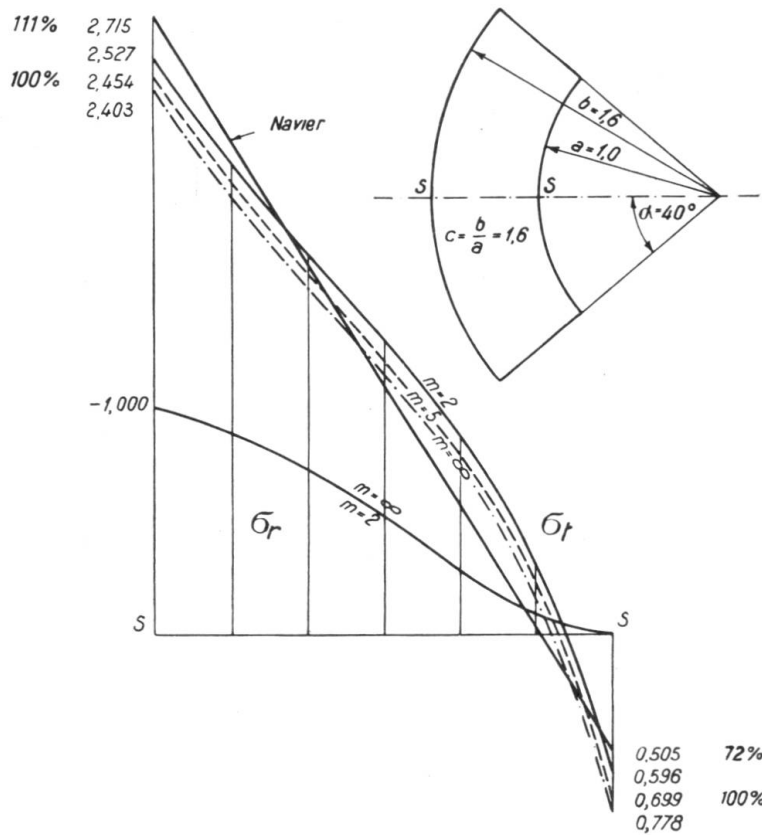


Fig. 7.

que de  $\frac{1}{3}\%$  plus grande que la valeur calculée. Cette concordance suffit à justifier les bases théoriques du problème.

Si l'on calcule le fléchissement à la clé de l'intrados, en tenant compte des déplacements mesurés des points extrêmes de la section d'encastrement, le résultat s'écarte d'env. 4 % de la valeur d'essai. La fig. 7 montre le modèle de l'arc rigidement encasté. Si, dans ce cas, on admet que la loi des contraintes et des déformations est valable jusqu'au point d'encastrement, le calcul donne un fléchissement à la clé d'env. 15 % plus petit que le fléchissement mesuré. Les grandes déformations qui se produisent en réalité aux environs de l'encastrement résultent de la concentration de contraintes vers l'intrados. Les investigations<sup>2</sup> effectuées dans ce sens jusqu'à ce jour admettent un encastrement rigide.

Par un exemple d'arc de barrage soumis à la pression de l'eau, nous avons comparé les diagrammes des contraintes, donnés par la théorie exacte, avec les résultats de la solution approximative de Navier, qui seule jusqu'à présent servait au calcul des arcs élastiquement encastés. La fig. 7 fait en même temps ressortir l'influence sur les contraintes du nombre de Poisson  $m$ . La solution approximative donne, en admettant un nombre de Poisson  $m = 5$  pour le béton, des contraintes de traction d'environ 28 % trop faibles à la clé.

---

<sup>2</sup> *M. Caquot*: Annales des Ponts et Chaussées, 1926, IV, juillet-août, p. 21; *R. Chambaud*: Génie Civil 1926 (vol. 99 et 100).