Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 2 (1936)

Artikel: L'arc de barrage élastiquement encastré

Autor: Hofacker, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3100

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VI 5

L'arc de barrage élastiquement encastré.

Elastisch eingespanntes Talsperrengewölbe.

Elastically Built-in Arch Dams.

Dr. sc. techn. K. Hofacker,
Zürich.

Par arc de barrage nous désignons un arc à axe circulaire et à épaisseur constante, qui peut être très grande par rapport à la portée. Au contraire de ce que l'on a pour l'arc de pont qui, comme système de barres, peut être calculé avec une exactitude suffisante sur la base de la théorie de la flexion de Navier, il est nécessaire d'étudier l'arc de barrage d'après la théorie mathématique de l'élasticité lorsque l'on doit connaître l'allure exacte du système effectif des contraintes.

Si, suivant la méthode connue, on répartit sur deux systèmes compénétrants d'arcs horizontaux et de consoles verticales la pression de l'eau agissant sur un barrage arqué, on obtient pour les différents éléments des diagrammes de charge tout-à-fait arbitraires. Le calcul des contraintes dans les éléments verticaux en forme de disques, d'après la théorie du système plan de contrainte et de déformation, est connu depuis très longtemps déjà. On a déjà exécuté des études expérimentales sur ce point. Le calcul des contraintes dans les éléments d'arc horizontaux n'a été exécuté jusqu'à ce jour que pour le cas spécial d'un arc complètement encastré. Nous ne connaissons aucune mesure exacte des tensions et des déformations effectuée en laboratoire sur des modèles d'arcs de barrage. Il était par conséquent du plus haut intérêt d'étudier théoriquement et expérimentalement la question de l'arc élastiquement encastré soumis à une pression d'eau quelconque.[1]

Nous soumettons un disque en anneau circulaire à un système de contraintes plan (fig. 1).

Un diagramme de charge donné peut être représenté mathématiquement grâce à une série de Fourier:

$$\sigma'_r = A'_o + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cdot \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \cdot \sin n\varphi \qquad (1)$$

Nous considérons à la fig. 2 les contraintes qui agissent au point 0 sur un élément dF et nous posons les conditions d'équilibre. En tenant compte des

[1] *K. Hofacker:* Das Talsperrengewölbe, 1936. Edition: Leemann, Frères & Co., Zurich.

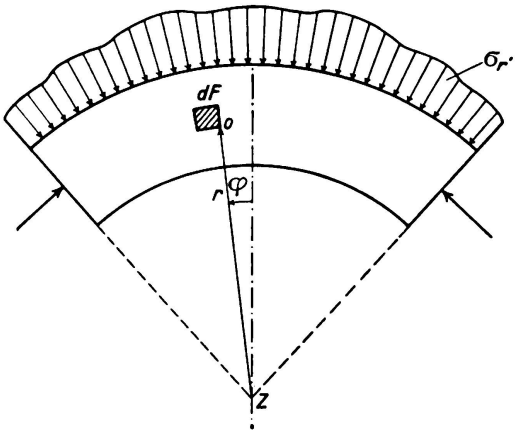


Fig. 1.

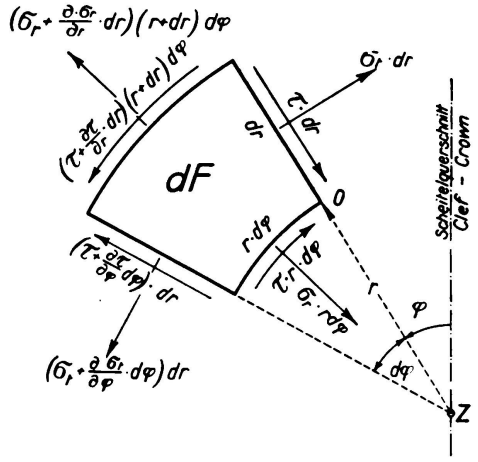


Fig. 2.

relations entre les contraintes et les allongements, c'est-à-dire les différences des déplacements u et v en direction radiale et tangentielle, on obtient les équations différentielles:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2m}{m-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\cdot\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{2m}{m-1}\left(\frac{1}{mr}\frac{\partial^2 v}{\partial r\cdot\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{2m}{m-1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial r\cdot\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r}\frac{m+1}{m-1}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{3m-1}{m-1}=0 \tag{3}$$

Les solutions générales pour u et v sont:
déplacement radial:

$$E\cdot u=-\frac{m+1}{m}\cdot\frac{a_0}{r}+\left[\frac{2(m-1)}{m}\cdot b_0-\frac{m+1}{m}c_0\right]\cdot r+\frac{2(m-1)}{m}\cdot c_0\cdot r\lg r$$
$$+\left(\frac{m-1}{2m}\cdot a_1+2\beta_1\right)\varphi\cdot\sin\varphi-\left(\frac{m-1}{2m}\cdot c_1+2\delta_1\right)\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$+\left[\left(a_1+\frac{m-1}{m}\cdot\beta_1\right)\lg r+\frac{m-3}{m}\cdot b_1 r^2+\frac{m+1}{m}\frac{\alpha_1}{r^2}\right]\cos\varphi$$
$$+\left[\left(c_1+\frac{m-1}{m}\cdot\delta_1\right)\lg r+\frac{m-3}{m}\cdot d_1 r^2+\frac{m+1}{m}\cdot\frac{\gamma_1}{r^2}\right]\sin\varphi \tag{4}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{m+1}{m}\cdot n\cdot a_n\cdot r^{n-1}-\left(\frac{2n}{m}+(n-2)\frac{m-1}{m}\right)b_n\cdot r^{n+1}\right.$$
$$\left.+\frac{m+1}{m}\cdot n\cdot\alpha_n\cdot r^{-n-1}+\left(\frac{2n}{m}+(n+2)\frac{m-1}{m}\right)\cdot\beta_n\cdot r^{-n+1}\right]\cos n\varphi$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{m+1}{m}\cdot n\cdot c_n\cdot r^{n-1}-\left(\frac{2n}{m}+(n-2)\frac{m-1}{m}\right)\cdot d_n\cdot r^{n+1}\right.$$
$$\left.+\frac{m+1}{m}\cdot n\cdot\gamma_n\cdot r^{-n-1}+\left(\frac{2n}{m}+(n+2)\frac{m-1}{m}\right)\cdot\delta_n\cdot r^{-n+1}\right]\sin n\varphi$$

déplacement tangentiel:

$$
\begin{aligned}
E \cdot v = & -\frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_0}{r} + 4 c_0 r \cdot \varphi + \left(\frac{m-1}{2m} \cdot a_1 + 2\beta_1\right) \varphi \cdot \cos\varphi \\
& + \left(\frac{m-1}{2m} \cdot c_1 + 2\delta_1\right) \varphi \cdot \sin\varphi \\
& + \left[-\left(a_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \beta_1\right) \lg r - \frac{m+1}{2m} \cdot a_1 + \frac{5m+1}{m} b_1 r^2 \right. \\
& \left. + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\alpha_1}{r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \beta_1\right] \sin\varphi \\
& + \left[\left(c_1 + \frac{m-1}{m} \cdot \delta_1\right) \lg r + \frac{m+1}{2m} \cdot c_1 - \frac{5m+1}{m} \cdot d_1 r^2 \right. \\
& \left. - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{\gamma_1}{r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \delta_1\right] \cos\varphi \qquad (5) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot a_n \cdot r^{n-1} + \left(n \frac{m+1}{m} + 4\right) b_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-1} + \left(n \frac{m+1}{m} - 4\right) \cdot \beta_n \cdot r^{-n+1}\right] \sin n\varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{m+1}{m} \cdot n \cdot c_n \cdot r^{n-1} - \left(n \frac{m+1}{m} + 4\right) \cdot d_n \cdot r^{n+1} \right. \\
& \left. - \frac{m+1}{m} \cdot n \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-1} - \left(n \frac{m+1}{m} - 4\right) \cdot \delta_n \cdot r^{-n+1}\right] \cos n\varphi
\end{aligned}
$$

A partir des déplacements on peut calculer les contraintes:
contraintes radiales:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r = & \frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 1) + \left(\frac{a_1 + \beta_1}{r} + 2 b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3}\right) \cos\varphi \\
& + \left(\frac{c_1 + \delta_1}{r} + 2 d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3}\right) \sin\varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n - n^2 + 2) b_n r^n \qquad (6) \\
& - n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - (n^2 + n - 2) \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(1-n) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n - n^2 + 2) \cdot d_n r^n \\
& - n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - (n^2 + n - 2) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi
\end{aligned}
$$

contraintes tangentielles:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t = & -\frac{a_0}{r^2} + 2 b_0 + c_0 (2 \lg r + 3) + \left(6 b_1 r + \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right) \cos\varphi \\
& + \left(6 d_1 r + \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right) \sin\varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot b_n \cdot r^n \qquad (7) \\
& + n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + (n+1)(n+2) \cdot d_n \cdot r^n \\
& + n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} + (n-2)(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi
\end{aligned}
$$

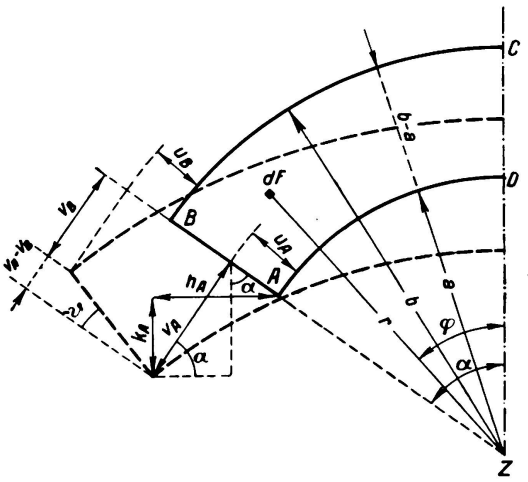
contraintes de cisaillement:

$$\tau = \frac{\alpha_0}{r^2} + \left(2 b_1 r - \frac{2\alpha_1}{r^3} + \frac{\beta_1}{r}\right) \sin\varphi$$
$$- \left(2 d_1 r - \frac{2\gamma_1}{r^3} + \frac{\delta_1}{r}\right) \cos\varphi$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot a_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) \cdot b_n \cdot r^n \tag{8}$$
$$- n(n+1) \cdot \alpha_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \beta_n \cdot r^{-n}] \sin n\varphi$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) \cdot c_n \cdot r^{n-2} + n(n+1) d_n \cdot r^n$$
$$- n(n+1) \cdot \gamma_n \cdot r^{-n-2} - n(n-1) \cdot \delta_n \cdot r^{-n}] \cos n\varphi$$

Quand les lois générales des contraintes et des déplacements sont connues, il s'agit de déterminer les constantes à l'aide des conditions aux appuis, en égalant entre elles, pour les bords du cercle, les valeurs correspondantes de σ_r, éq. (6), et σ'_r, éq. (1), c'est-à-dire en identifiant les coefficients des termes trigonométriques correspondants.

Pour les extrémités radiales on ne peut formuler une condition que pour les déplacements des points extrêmes. Pour l'encastrement total de l'arc, la condition est que les extrémités ne subissent aucun déplacement. Lorsque l'encastrement est élastique, les déplacements des extrémités de l'arc doivent prendre les mêmes valeurs que les déplacements des points correspondants de la culée qui est sollicitée à des contraintes normales et à des contraintes de cisaillement dans la section d'encastrement de l'arc. Cette question est traitée dans la publication citée ci-dessus.

Afin de simplifier la méthode de calcul nous avons reporté à la fig. 3, pour les points A et B de l'arc, les déplacements radiaux et tangentiels ainsi que les allongements h_A de la corde intérieure de l'arc et les rotations ϑ de la section à la naissance.



$$h_A = u_A \cdot \sin\alpha + v_A \cdot \cos\alpha$$
$$k_A = v_A \cdot \sin\alpha - u_A \cdot \cos\alpha$$
$$\vartheta = \frac{v_B - v_A}{b - a}$$

Fig. 3.

Les études théoriques furent contrôlées par des mesures sur modèles en celluloïde.

La fig. 4 représente le modèle d'un arc de barrage élastiquement encastré, chargé sur la face extérieure par des pressions radiales.

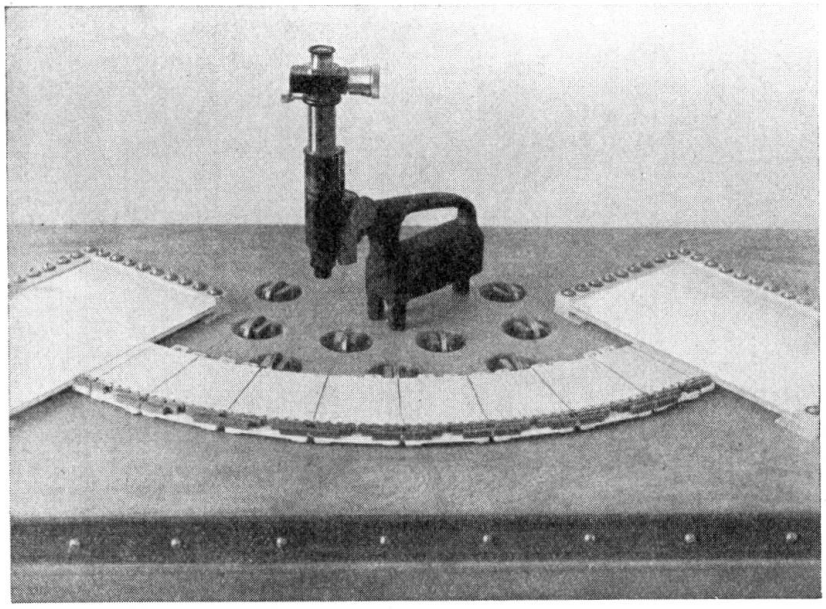


Fig. 4.

A la fig. 5 nous avons représenté les déplacements des extrémités, mesurés à l'aide du microscope. Nous avons reporté les valeurs obtenues pour les

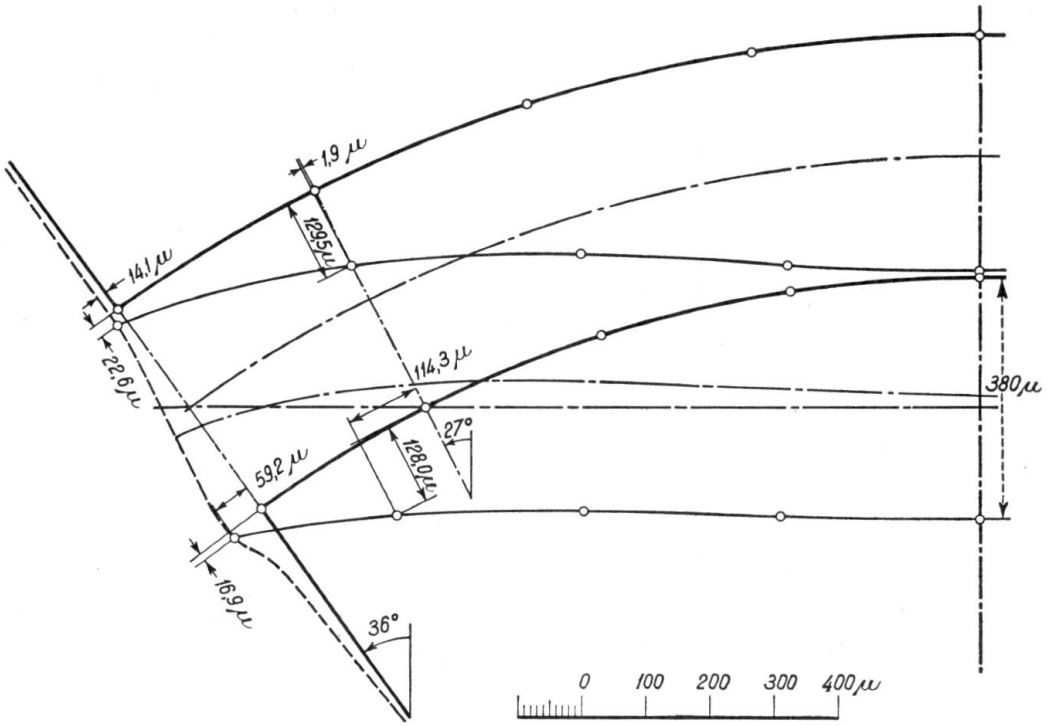


Fig. 5.

déplacements des deux sections $\varphi = 36^0$ et $\varphi = 27^0$. Si l'on calcule le fléchissement de la clé de l'intrados, en considérant par exemple les déplacements des

points extrêmes de la section $\varphi = 27^0$ comme déplacements des culées de l'arc élastiquement encastré en cette section, on constate que la valeur mesurée n'est

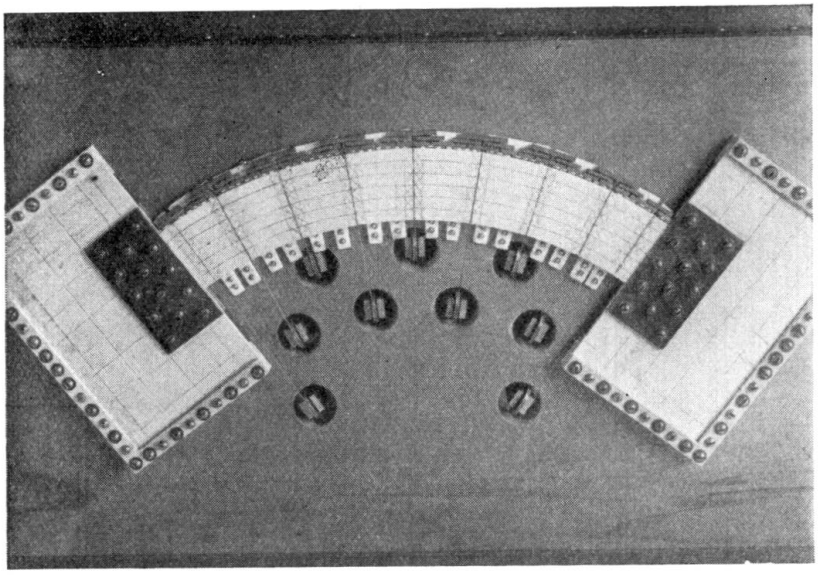


Fig. 6.

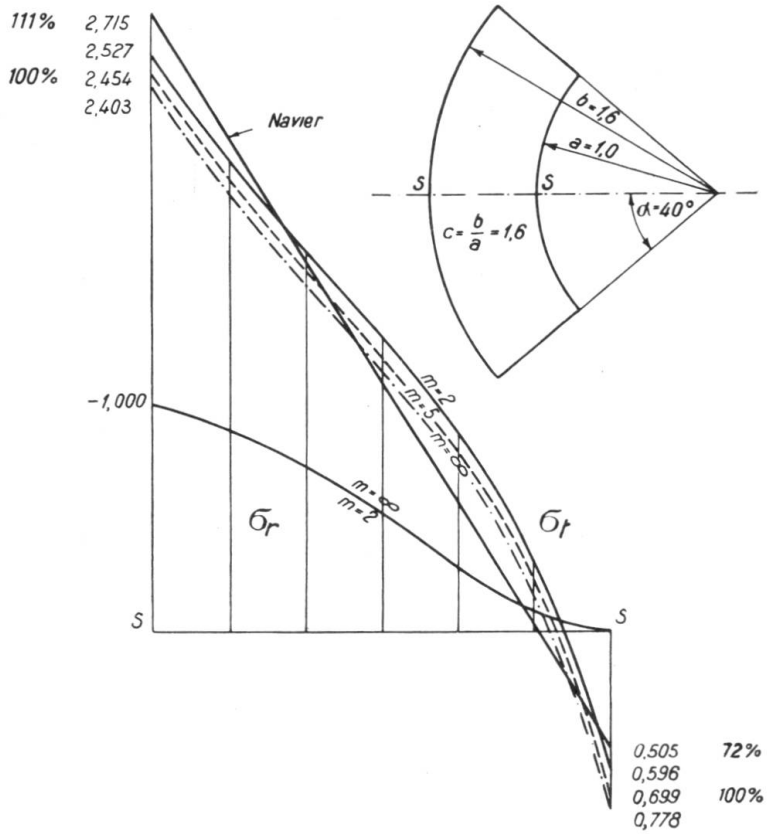


Fig. 7.

que de $^1/_3$ % plus grande que la valeur calculée. Cette concordance suffit à justifier les bases théoriques du problème.

Si l'on calcule le fléchissement à la clé de l'intrados, en tenant compte des déplacements mesurés des points extrêmes de la section d'encastrement, le résultat s'écarte d'env. 4 % de la valeur d'essai. La fig. 7 montre le modèle de l'arc rigidement encastré. Si, dans ce cas, on admet que la loi des contraintes et des déformations est valable jusqu'au point d'encastrement, le calcul donne un fléchissement à la clé d'env. 15 % plus petit que le fléchissement mesuré. Les grandes déformations qui se produisent en réalité aux environs de l'encastrement résultent de la concentration de contraintes vers l'intrados. Les investigations[2] effectuées dans ce sens jusqu'à ce jour admettent un encastrement rigide.

Par un exemple d'arc de barrage soumis à la pression de l'eau, nous avons comparé les diagrammes des contraintes, donnés par la théorie exacte, avec les résultats de la solution approximative de Navier, qui seule jusqu'à présent servait au calcul des arcs élastiquement encastrés. La fig. 7 fait en même temps ressortir l'influence sur les contraintes du nombre de Poisson m. La solution approximative donne, en admettant un nombre de Poisson $m = 5$ pour le béton, des contraintes de traction d'environ 28 % trop faibles à la clé.

---

[2] *M. Caquot:* Annales des Ponts et Chaussées, 1926, IV, juillet-août, p. 21; *R. Chambaud:* Génie Civil 1926 (vol. 99 et 100).