

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 3 (1948)

Rubrik: IVc: Strength and stability of discs and shells in curved or cord form in
concrete

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IVc1

Rapport sur les voiles minces construits en Espagne

Bericht über die in Spanien ausgeführten Schalenbauten

Report on thin slabs constructed in Spain

PROF. E. TORROJA

Directeur du Laboratoire central de Ensayo de Materiales de Construcción, Madrid

Malgré les réalisations parfaitement réussies déjà conçues, on peut dire que l'avenir des constructions en voile mince reste toujours à faire et, en réalité, ce procédé est encore peu exploité.

Les difficultés que présente son calcul d'une part, et la nécessité d'établir des cintres et coffrages coûteux d'autre part, limitent assez leurs possibilités d'application.

Mais il faut espérer que la perspective changera dans peu d'années puisque pour la résolution des problèmes de ces voiles, aucune solution n'offre actuellement, du point de vue technique, de possibilités plus grandes, ni meilleures.

A part les voiles polyédriques, très intéressants, les surfaces continues (non seulement cylindriques mais de double courbure positive ou négative) présentent des avantages inestimables et des solutions adéquates à chaque problème qui se présente en pratique.

Malheureusement, les conditions de bord ne s'accomplissent en général pas dans un équilibre de voile sans flexion, et l'oubli de cette condition (hypothèse simplificatrice très attrayante) a été la cause de beaucoup plus de désastres que ceux commentés dans les publications techniques.

Le problème des voiles, en considérant la rigidité à la flexion, nécessaire pour établir l'équilibre est, en général, difficile à résoudre; on est tenté de les abandonner fréquemment, sauf pour les cas bien connus des voiles cylindriques ou de révolution et de ne pas profiter des avantages constructifs des surfaces réglées.

D'autre part, les grandes réalisations en voiles cylindriques, torales et de révolution, et leur bon comportement, constituent un indice des énormes portées qu'on peut atteindre. L'utilité du précontraint ou d'autres systèmes qui permettent l'introduction pratique des dislocations analogues à celles de Volterra ou de Somigliana, et aussi des dislocations continues dans toute la surface, ouvre un grand champ pratiquement inexploré, quoiqu'on en ait déjà réalisé des exemples de voiles précontraints dans toute

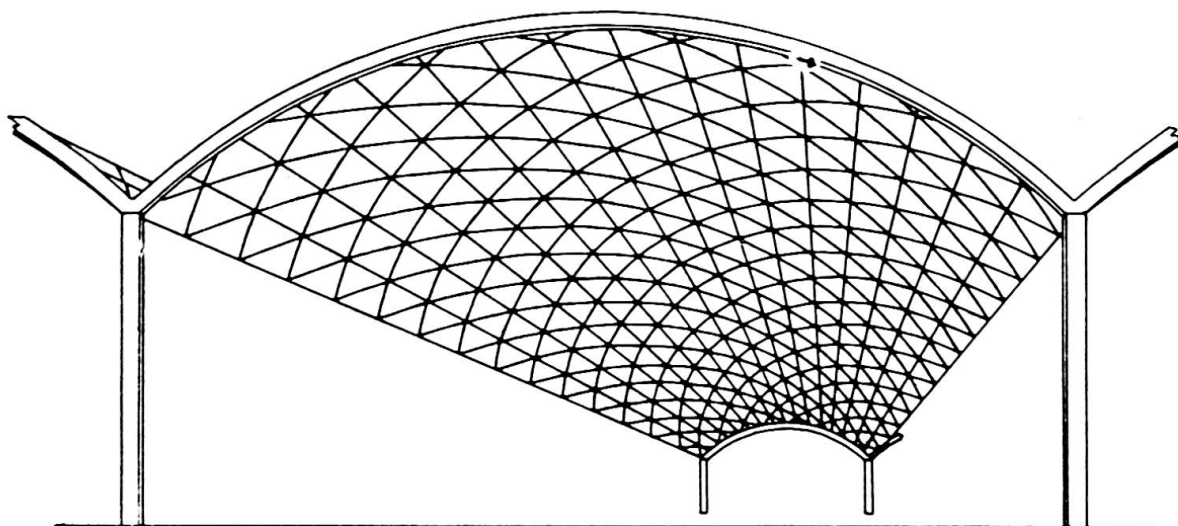


Fig. 1. Grande couverture métallique constituée par un voile continu en treillis métallique.

leur surface qui assurent des avantages importants comme celui de l'imperméabilité des parois de dépôts.

On peut étudier, du moins théoriquement, la possibilité de rabaisser les flexions ou de les altérer de telle façon qu'elles puissent accomplir les conditions de bord correspondantes aux voiles avec la simplification du calcul conséquente.

Une indication importante c'est que, malgré la légèreté de ces voiles qui arrivent à des sveltesse de $\frac{1}{600}$ (quotient de l'épaisseur à la portée) c'est le poids mort qui détermine le prix; ce poids ne peut guère être réduit, même avec des matériaux de meilleure qualité et un choix plus heureux de la forme de la surface, car il existe le danger d'un manque de stabilité ou de flambage qui limite la sveltesse; ce danger augmente par la présence des déformations lentes ou plastiques que souffre le béton sous l'action des compressions permanentes comme celles produites par le poids mort; nous donnerons plus loin un exemple d'un tel cas, quoiqu'il s'agit de fortes déformations produites par des causes imprévues qui donnèrent lieu à ce phénomène.

Il s'agit donc d'alléger le poids de ces constructions sans diminuer excessivement la rigidité du voile. Une bonne solution consiste à établir des anneaux de rigidité plus ou moins rapprochés. Mais ceux-ci présentent des inconvénients par suite de la difficulté inhérente aux coffrages et dispositifs d'imperméabilisation.

On peut également substituer le voile continu par un treillis métallique (fig. 1). Les grandes couvertures métalliques projetées normalement avec des éléments superposés en formant des constructions calculables par les simples méthodes de la résistance des matériaux, peuvent être substituées par d'autres où le treillis est disposé selon la surface.

A mon avis et, par tout ce que j'ai pu calculer et tâtonner, cette solution peut offrir des grands avantages et permettre la réalisation de couvertures économiques très élégantes d'aspect et faciles à réaliser.

Si la maille est suffisamment petite il semble parfaitement acceptable

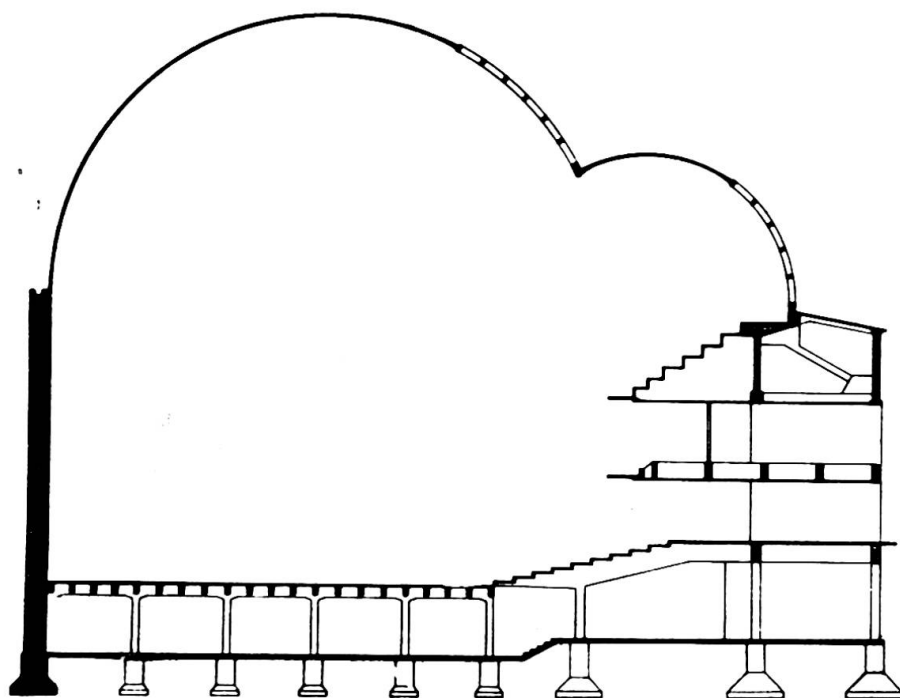


Fig. 2. Elévation du Recoletos construit en Espagne en 1936.

d'appliquer le calcul de voile continue pour déterminer après, et avec ses résultats, les efforts résultant à chaque barre de la triangulation.

Les études que j'ai pu faire dans ce sens indiquent clairement que ce type de construction peut être très économique par suite de la diminution du poids par rapport au béton, et aussi par la suppression des coffrages et échafaudage; on a déjà fait quelques projets en Espagne dans ce sens, pas encore réalisés, mais desquels on peut beaucoup espérer.

En dehors du problème théorique de calcul, il sera nécessaire de développer des investigations expérimentales dans les laboratoires, pour mieux connaître le comportement de ce type de construction et savoir si les efforts principaux dans les barres correspondent avec la théorie, et si les efforts secondaires, tels ceux de torsion dans les barres, sont négligeables ou non.

Une solution pratique est de disposer des profils droits selon les génératrices du cylindre et selon les diagonales nécessaires pour former avec les génératrices un treillis triangulaire; dans ce cas. les contraintes selon les directrices se traduisent par des compressions et selon les diagonales par des tractions produites isostatiquement dans les génératrices. Au contraire, l'effort selon la génératrice donne lieu à des compressions et déformations transversales très petites. Peut-être devrait-on étudier la lame anisotrope, mais ce problème nécessite une étude minutieuse théorique et expérimentale. On peut admettre les flexions, en première approximation, décomposées vectorialement sur les diagonales, quoique ceci donne lieu à des efforts de torsion et aussi à des anomalies difficiles à étudier. J'espère pouvoir réaliser une étude expérimentale qui promet d'être intéressante du point de vue technique.

Je termine cette communication en complétant l'information que j'ai donné au Congrès de 1936 sur un voile cylindrique qui est entré dans l'histoire pendant la guerre espagnole. Un mémoire détaillé de ce voile a été

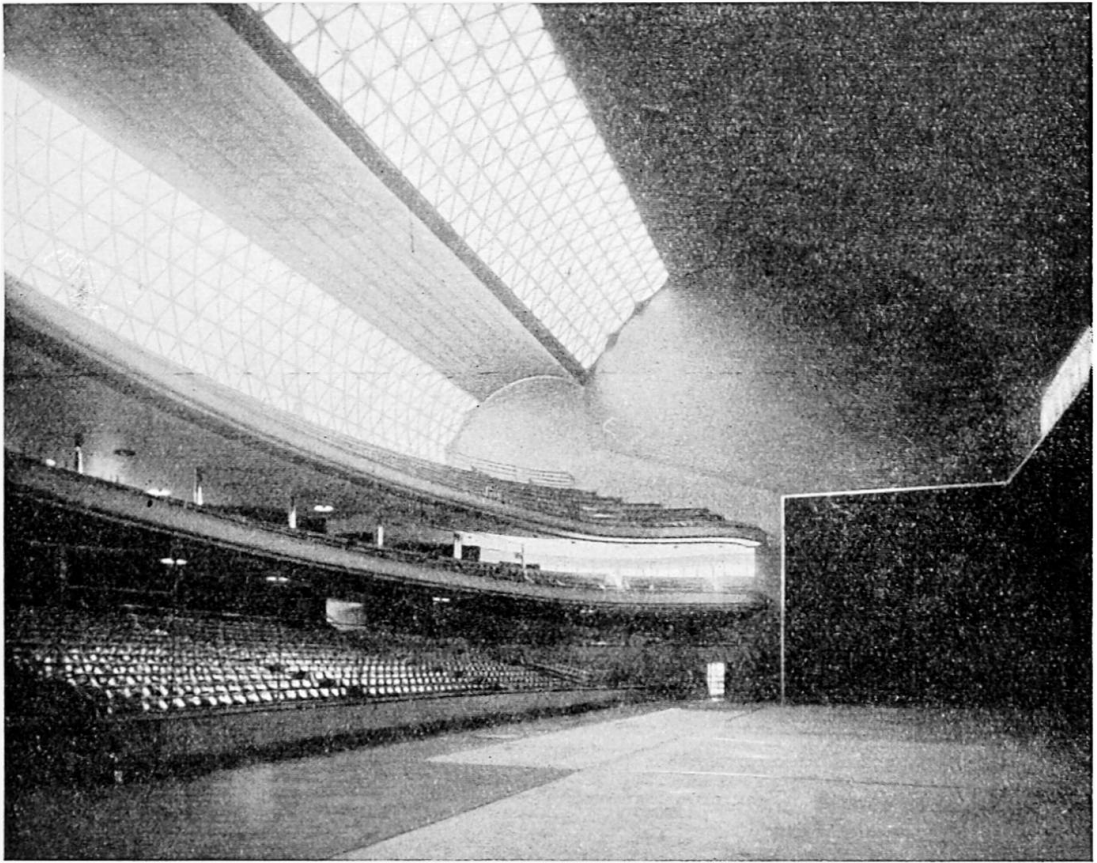


Fig. 3. Vue intérieure de la salle du Recoletos.

publié dans les annales de l'Académie des Sciences de Madrid que je mets à la disposition de ceux qui s'intéressent à ce thème. Notons d'abord quelques raisons sur les phénomènes observés avant son écroulement, dû aux bombardements; ces phénomènes confirment les points que je viens d'indiquer.

On a exécuté en Espagne différents exemples de constructions en voiles minces, dont quelques-unes sont déjà connues par les publications faites dans différentes revues techniques, notamment celle du Fronton Recoletos, qui constitua l'objet d'une courte note que je présentai au Congrès de 1936. J'en dirai quelques mots sur son écroulement, à la suite des bombardements au cours de la guerre espagnole.

La toiture (fig. 2) peut être définie comme un voile cylindrique de génératrices horizontales, en béton armé, dont la directrice est formée par deux arcs de cercle inégaux lesquels, en partant des tangentes verticales aux bords, se rejoignent orthogonalement. Le voile a une épaisseur de 8 cm et est substitué sur une partie de sa surface par des treillis triangulaires du même matériau. La longueur des génératrices est de 55 mètres et la longueur entre les bords ou génératrices extrêmes de 32^m50. La figure 3 donne l'aspect intérieur de la salle.

La figure 4 donne le réseau des isostatiques ou lignes de tension principales obtenues par le calcul. La figure 5 représente un détail des armatures du voile, dont l'épaisseur de 8 cm augmente dans la zone immédiate à la mouette jusqu'à 17 cm. On peut aussi remarquer la disposition du tirant

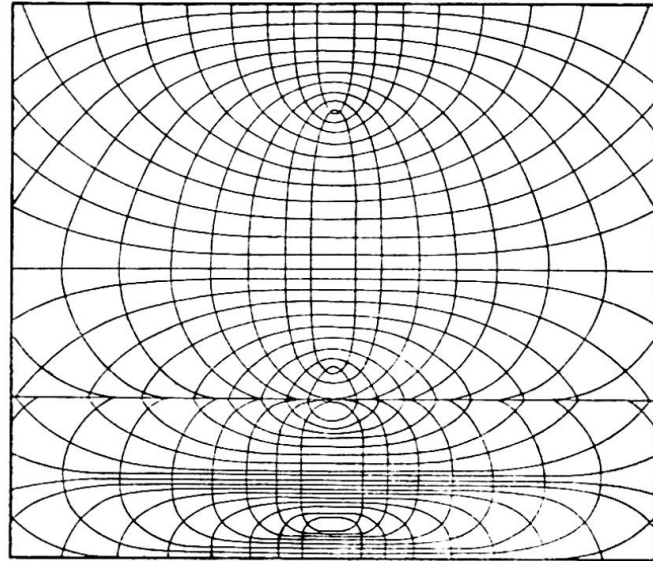


Fig. 4. Réseau des isostatiques obtenues par le calcul.

formé de 16 carrés de 50 mm, soudés bout à bout au moyen de soudure à l'arc avec électrodes enrobées.

L'importance de l'ouvrage justifia des essais sur modèle réduit (fig. 6) à échelle de 1/10, sur lequel on pourrait non seulement vérifier la résistance à la rupture, avec une surcharge supérieure à celle du calcul, mais aussi vérifier la correspondance entre les résultats du calcul et la réalité. On vérifia aussi cette correspondance par des mesures très minutieuses sur l'ouvrage même.

L'ouvrage se comporta parfaitement pendant trois années; avant la fin de la guerre, un bombardement d'aviation produisit plusieurs trous très importants tel que celui visible sur la figure 7 et un autre beaucoup plus grand, de 15 à 20 mètres, qui ne put être photographié. Jusqu'après

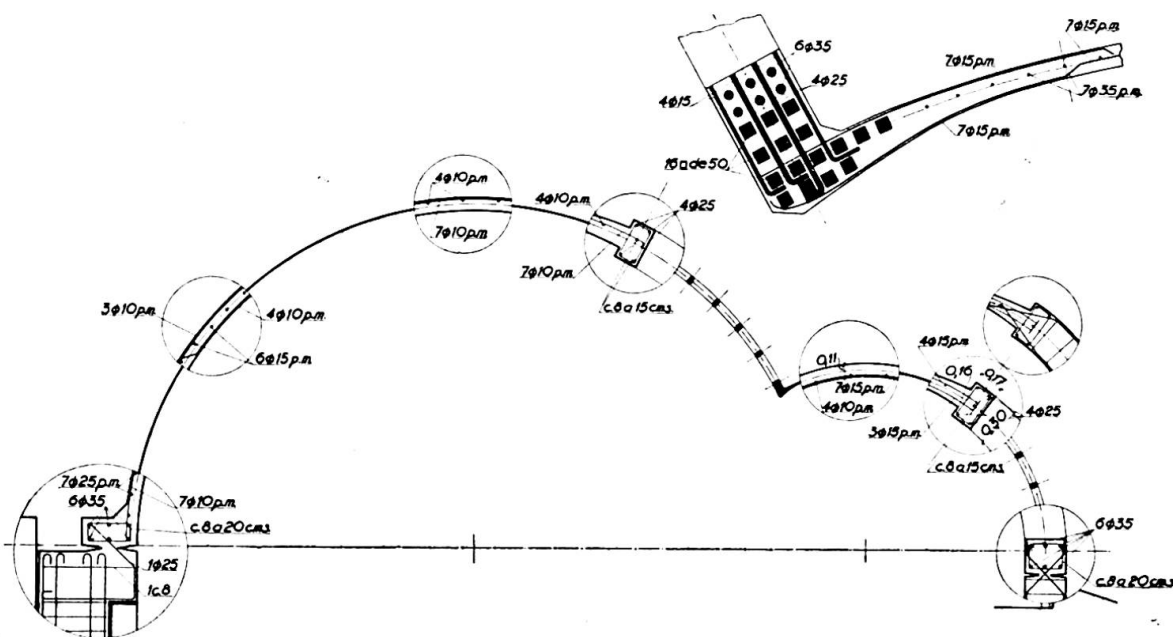


Fig. 5. Section transversale et détails constructifs du Fronton Recoletos.

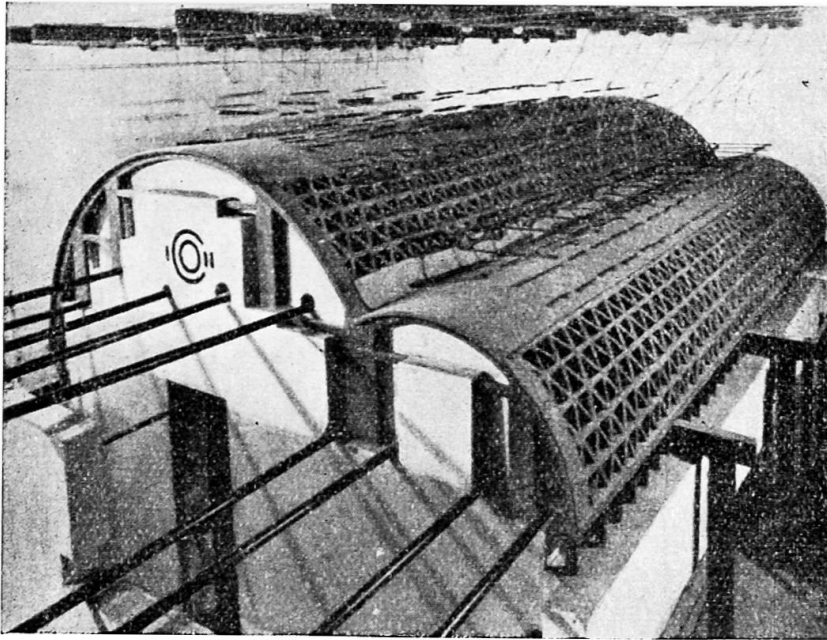


Fig. 6. Modèle réduit du Recoletos utilisé lors des essais de laboratoire.

la fin de la guerre, on ne put faire aucune inspection de l'ouvrage ni commencer les travaux de réparation qui ne purent avoir lieu par suite de l'écrasement qui survint entretemps.

Une fois la guerre terminée et la vie normale rétablie à Madrid, on découvrit le voile pour entreprendre sa réparation; on observa des fissures de deux millimètres dans les diagonales tendues de la lucarne, une descente ou enfoncement général de la lucarne, qui dans les directrices centrales dépassait 60 centimètres et déformait violemment la directrice dans la clef, avec des ouvertures de fissures qui atteignaient plusieurs millimètres et il était possible qu'il y eut encore d'autres défauts qu'on ne put déceler.

Tout paraissait indiquer que ce n'était pas l'impact même (auquel

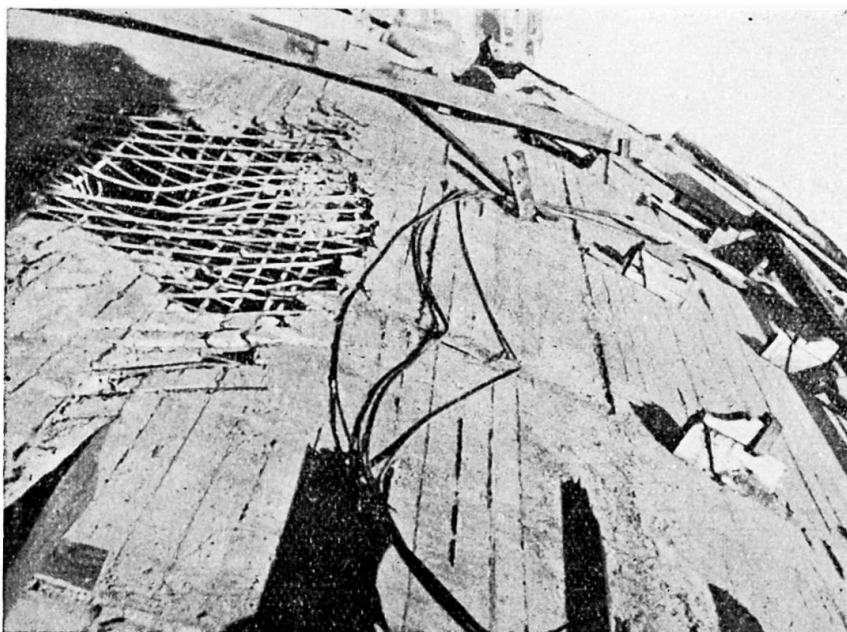
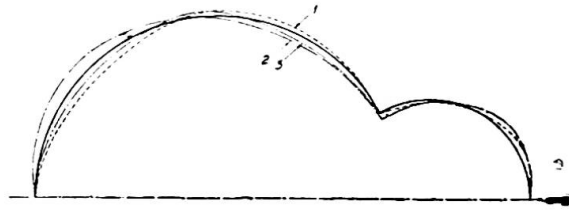


Fig. 7. Etat de la toiture après son bombardement au cours de la guerre civile.

Fig. 8. Déformations consécutives à l'onde explosive :

1. Effet instantané de l'onde positive. — 2. Effet instantané de l'onde négative. — 3. Stabilisation de la forme de la toiture après l'explosion.



l'ouvrage aurait résisté dans de bonnes conditions) mais l'onde explosive produite par les bombes qui fut la cause de toutes les anomalies observées.

En considérant le phénomène au moment de l'onde positive, c'est-à-dire de pression centripète sur l'arc, celui-ci dut éprouver un déplacement radial très grand vers l'intérieur (courbe 1, fig. 8); la dalle put résister sans dépasser sa limite élastique grâce à sa grande élasticité; la lucarne avait tendance à se lever; mais, non seulement sa plus grande rigidité, mais la courbure même du voile donnèrent lieu à un déplacement radial produisant une flexion beaucoup plus forte de la directrice vers la clef et, par conséquent, il s'y produisit une déformation plastique de l'armature, avec une dislocation complète du voile. Dans le moment de l'onde négative (courbe 2, 8) le phénomène fut contraire et la lucarne descendit. Des déplacements horizontaux durent se produire également dans la clef, et en particulier la composante de l'onde de succion poussa la clef vers la gauche et ouvrit les fissures par traction.

Une fois la résistance à la flexion nulle dans ce point, la lucarne dut descendre, en perdant sa courbure, et la clef s'éleva.

Il est intéressant d'indiquer qu'une fois qu'un déplacement important des génératrices hautes de la lucarne vers l'intérieur avait été produit, ces génératrices qui travaillent en compression, ont une forte tendance au flambage.

La génératrice comprimée, courbée vers l'intérieur tend naturellement à augmenter cette déformation par flambage. Les déformations plastiques du béton dans ces nouvelles conditions de travail, bien que petites à cause de l'âge du béton peuvent produire, vu le grand élancement de la pièce (c'est-à-dire les génératrices), des déplacements radiaux relativement grands dans une période de temps suffisamment longue. C'est pour cette raison que je conseillai la mise en place d'appareils de mesure pour observer si la déformation continuait ou non. On constata qu'elle continuait très lentement.

En envisageant le problème sur ces données et possibilités, on étudia l'avant-projet d'une réparation du voile (fig. 9) consistant à bétonner des anneaux ou nerfs armés selon les directrices sur le grand lobule jusqu'à la lucarne, fortement ancrés à la génératrice de celle-ci (la lucarne) d'un côté et dans la partie verticale du lobule de l'autre, et en les dotant de tenseurs dans l'armature longitudinale extérieure et des étriers d'ancrage à la dalle, unis aussi par des tenseurs à la face extérieure des anneaux.

Pour effectuer les opérations que je viens d'indiquer on commença à monter un échafaudage et à découvrir la voûte en enlevant le revêtement de fibro-ciment de la partie supérieure et les verres des lucarnes, afin de faire aussi une révision plus détaillée de l'ouvrage.

Dans ces conditions, dans l'après-midi du 15 août 1939, lors d'un orage assez violent et d'une augmentation du degré hygrométrique, les

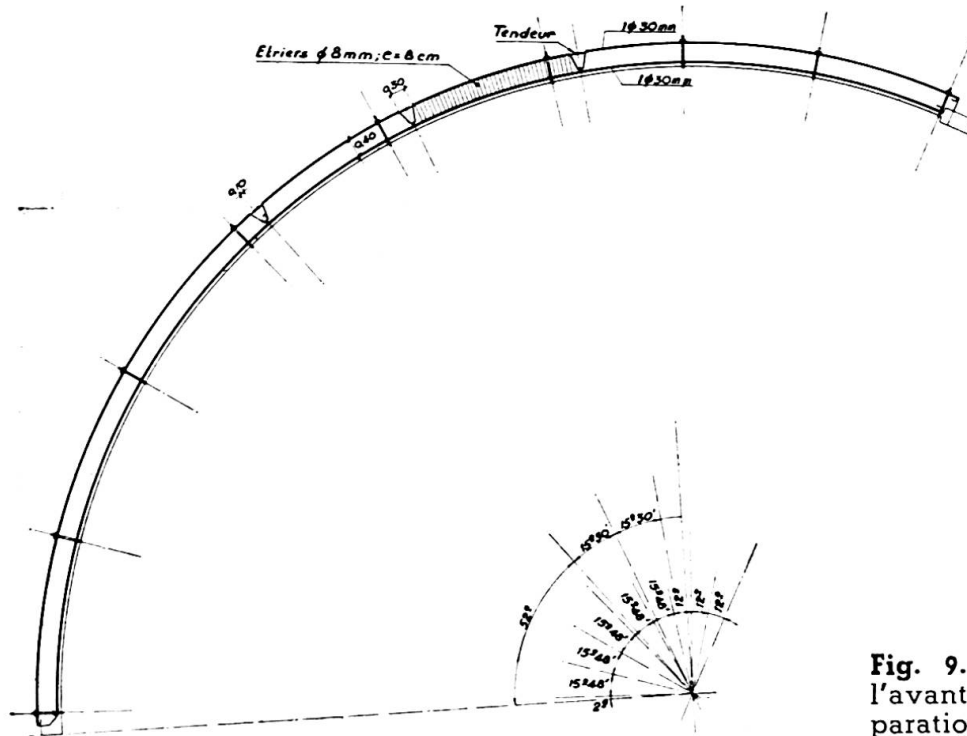


Fig. 9. Croquis pour l'avant-projet de réparation du voile.

appareils de contrôle accusèrent une accélération rapide de la descente de la lucarne.

Avant minuit, l'éroulement complet survint, dû à la continuation des mouvements (fig. 10) c'est-à-dire provoqué par un accroissement très important de la perte de courbure des directrices centrales de la lucarne, avec une torsion initiale importante de ces directrices et avec une forte

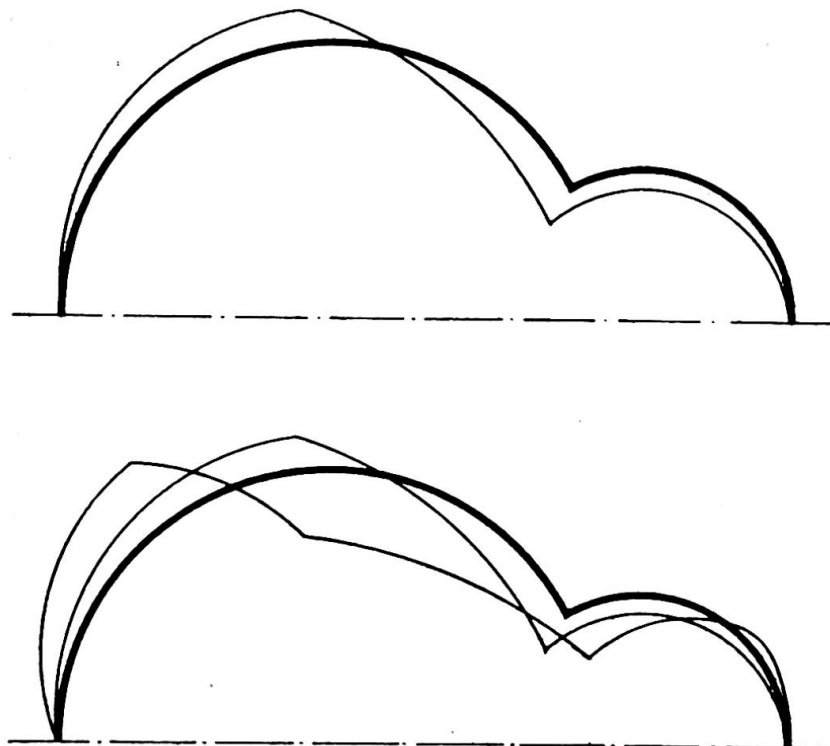


Fig. 10. Diverses phases de l'éroulement de la toiture endommagée.

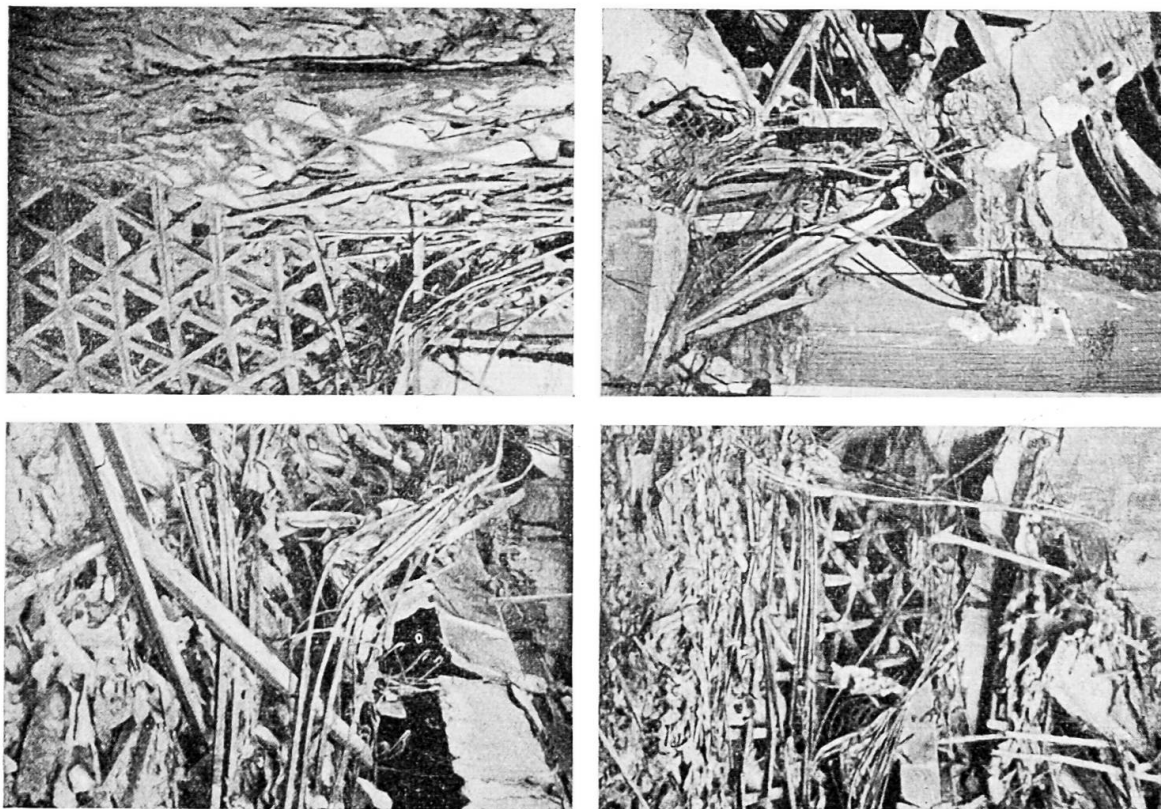


Fig. 11. Divers aspects de la désagrégation du béton.

augmentation de la poussée horizontale dans la clef, laquelle poussa le grand lobe, en tombant une partie de celui-ci dans la zone latérale, en dehors du mur.

Etant donné la grande hauteur du bâtiment (25 m) le béton se désagrégea complètement (fig. 11). Comme je l'ai déjà dit auparavant la résistance de la poutre en mouette fut beaucoup plus grande que prévue, puisque les zones extrêmes de la lucarne qui supporte les efforts tranchants minima, restèrent intactes en grande partie. Les armatures du tirant formées de 16 carrés de 50 mm soudées électriquement bout à bout et recouvertes d'une section de béton relativement petite, furent arrachées du béton mais sans se rompre, pas même dans leur section soudée, malgré les efforts énormes qu'elles durent éprouver aux derniers moments:

Abstraction faite des détails et hypothèses des causes immédiates de l'effondrement, il est important de noter, du point de vue technique, que l'écrasement fut produit indubitablement, pas par un défaut dans les travaux que nous pourrions considérer comme principaux de la construction, mais exclusivement par un manque de rigidité transversale des directrices centrales de l'arc dans le grand lobe, causé par la rupture et déformation brusque de ces directrices, sous l'action de l'onde explosive.

On voit aussi la grande importance que peut avoir le flambement causé par la déformation lente ou plastique du béton; c'est un des points sur lesquels il est intéressant d'investiguer, puisque dans la plupart des cas, c'est précisément le danger du flambage plastique qui détermine les limites de sveltesse qu'on peut atteindre dans ce genre de constructions en béton armé.

Résumé

On expose les observations effectuées pendant l'éroulement d'un voile cylindrique de lobules inégaux, produit par suite des bombardements, qui introduisirent des fortes ruptures et déformations plastiques suivies d'un flambage des génératrices comprimées.

L'auteur signale aussi l'intérêt que peut avoir la substitution des voiles continus en béton par des treillis métalliques inscrits dans la surface.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt das Verhalten eines aus zwei Zylinderschalen mit ungleichen Radien zusammengesetzten Bauwerks nach dessen Bombardierung. Diese verursachte grosse plastische Deformationen, die zum Knicken der gedrückten Erzeugenden führten, sodass die Tragkonstruktion zusammenbrach. Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Schlüsse werden gezogen.

Der Verfasser erwähnt auch die Möglichkeit, die vollen Betonschalen durch metallische Fachwerke zu ersetzen, die nach der Oberfläche geformt sind.

Summary

The author explains the observations carried out during the collapse of a cylindrical slab of unequal lobules, caused as a result of bombardments and which produced serious ruptures and plastic deformations followed by a buckling of the compressed generators.

He also points out the advantage that may lie in substituting for continuous reinforced concrete slabs, metal latticework implanted in the surface.

IVc2

Réalisation récente d'une construction voûtée

Beispiel eines Schalenbauwerkes neueren Datums

Example of a recent shell structure

H. SCHERER

Dipl. Ing. ETH, Luzern

Unter den Zylinderschalen haben in den letzten Jahren die Shedkonstruktionen aus Eisenbeton für grosse Fabrikationshallen wachsende Bedeutung erlangt. Sie können den Wettbewerb mit anderen Bauweisen im allgemeinen erfolgreich bestehen, da sie den Anforderungen, die an solche Objekte gestellt werden müssen, weitgehend gerecht werden: sie ermöglichen eine gute und gleichmässige Belichtung, lassen einen verhältnismässig grossen Stützenabstand zu und sind auch in wirtschaftlicher Hinsicht konkurrenzfähig.

Für die vorliegende Fabrikationshalle, 132 m lang und 42 m breit, war eine gute und gleichmässige Belichtung erwünscht, der Raum sollte von möglichst wenigen Stützen unterbrochen sein und mit Kranen von 5 t Nutzlast bestrichen werden können. Beim gezeigten Bau (Abb. 1, Modell) handelt es sich um einen ersten Ausbau. In jeder der 21 m breiten Hallen fährt ein Laufkran. Im Anbau im Vordergrund sind Kesselhaus und Wohlfahrtseinrichtungen untergebracht, in der Halle des Kopfbaus vorne rechts fährt ein Kran quer über die Längskrane der Shedhallen.

Bei den aus Zylindersektor und Randträger zusammengesetzten Shed-schalen beträgt die grösste bis jetzt erreichte Breite (in Richtung des Gewölbes, senkrecht zur Erzeugenden gemessen) ca. 10 m. Werden grössere Stützenabstände verlangt, so können die in einer Ebene liegenden Endscheiben zu Fachwerkträgern zusammengefasst werden. Am bequemsten sind die als rautenförmige Fachwerkträger ausgebildeten einfachen Balken, da sich bei diesen gewisse Schwierigkeiten in der Ausbildung der Knotenpunkte und Stösse vermeiden lassen.

Im vorliegenden Fall (Abb. 2, Grundriss u. Schnitte) beträgt die Stützweite des Fachwerkträgers, bei zwei hintereinanderliegenden Schalen von je 10,5 m Breite, 21 m. Die Schalen selbst haben eine Spannweite von 24 m. Sowohl die Baugrundverhältnisse als auch das Interesse an einer mehrmaligen Verwendung der Schalung führten dazu, die Schale als einfachen Balken auszubilden. Die dadurch bei den Endscheiben entstehenden Doppelträger sind wohl etwas komplizierter, aber dennoch vorteilhaft. Das Prinzip der rautenförmigen Träger kam schon bei der bekannten Halle der Textilfabrik « Grafa » in Buenos Aires zur Anwendung; dort entfiel jedoch auf eine Stütze eine Grundfläche von 120 m², hier sind es 504 m².

Für die statische Berechnung wurden im Hallenquerschnitt bei Stützen und Fachwerkträgern die Einspannverhältnisse berücksichtigt. Bei der Schale bestand anfänglich die Absicht, zur Berechnung der Schnittkräfte eine Näherungslösung anzuwenden. Der Umstand jedoch, dass zwischen

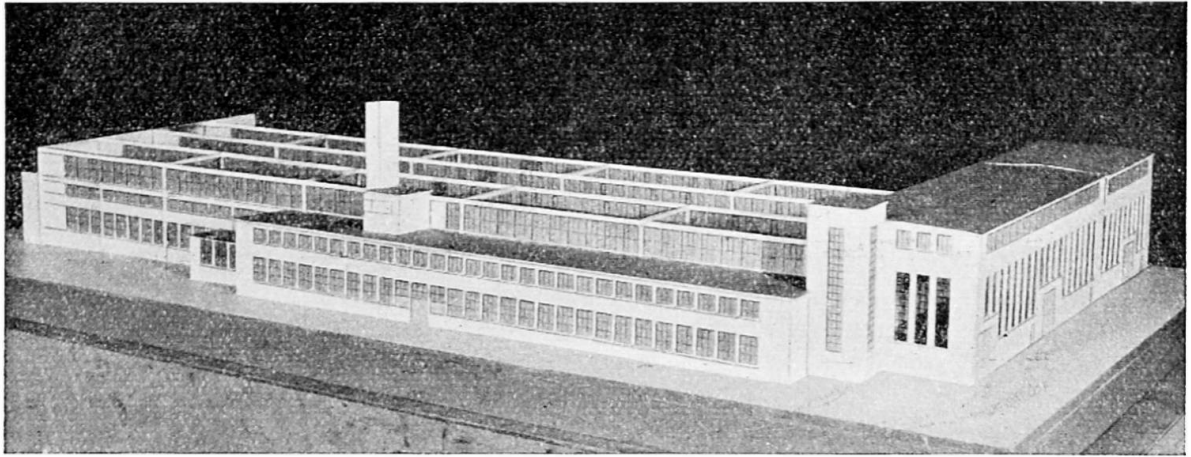


Abb. 1. Modell der ersten Ausbautetappe.

den Näherungslösungen, welche Finsterwalder, bezw. Jakobsen angegeben haben, für die Momente Differenzen bis zu 33 % für Schalen mit ähnlichen Kennziffern auftreten, liessen eine Lösung nach der genauen Theorie angezeigt erscheinen, dies umso mehr, als der untere Randträger wegen der Aufhängung der Kranbahn relativ steif ausgebildet werden musste. Der obere Randträger ist so nachgiebig, dass dort $M_{\varphi} = 0$ und $N_{\varphi} = 0$ angenommen werden durften. Die am oberen Rande der Shedschale entstehenden Zugspannungen lassen sich beim Ausrüsten gut beobachten. Man sieht, dass die Schale nicht nur in der Lotrechten durchgebogen wird, sondern dass auch eine wagerechte Verschiebung eintritt. Die Randstörungen beim Anschluss an den Fachwerkträger und die Torsionsbeanspruchungen des Randträgers müssen berücksichtigt werden.

Die Aufhängung der Kranbahnen am unteren Randträger der mittleren Stützenreihe erforderte besondere Beachtung. Dieser Randträger musste

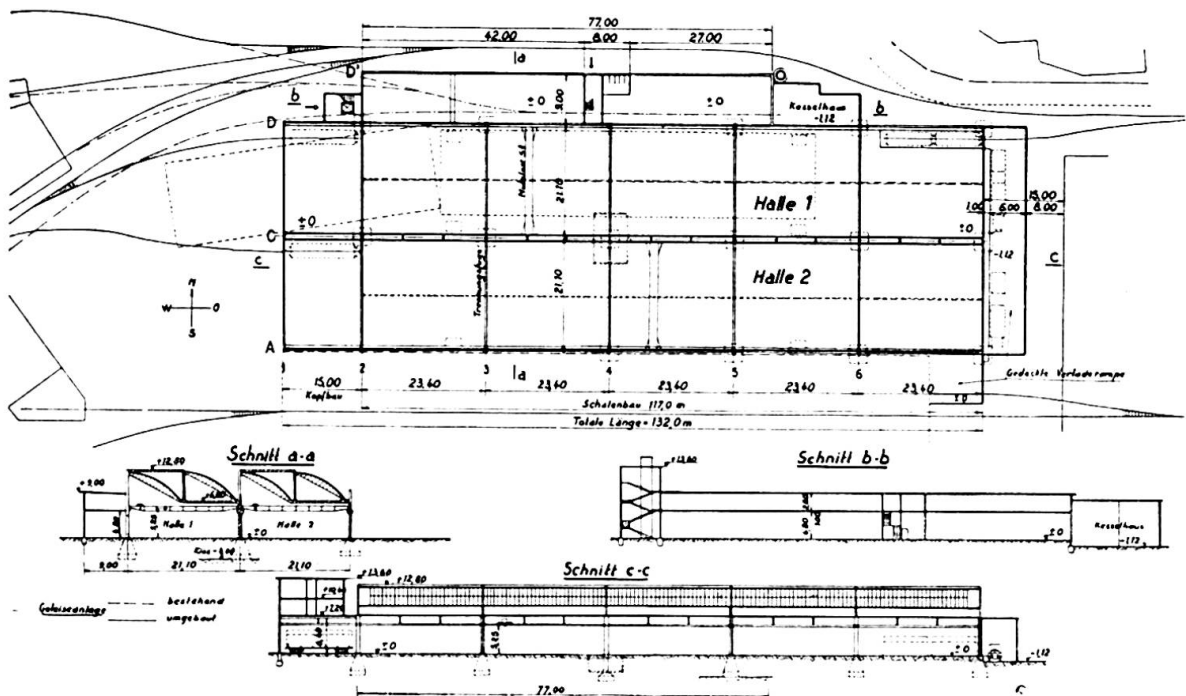


Abb. 2. Grundriss und Schnitte.

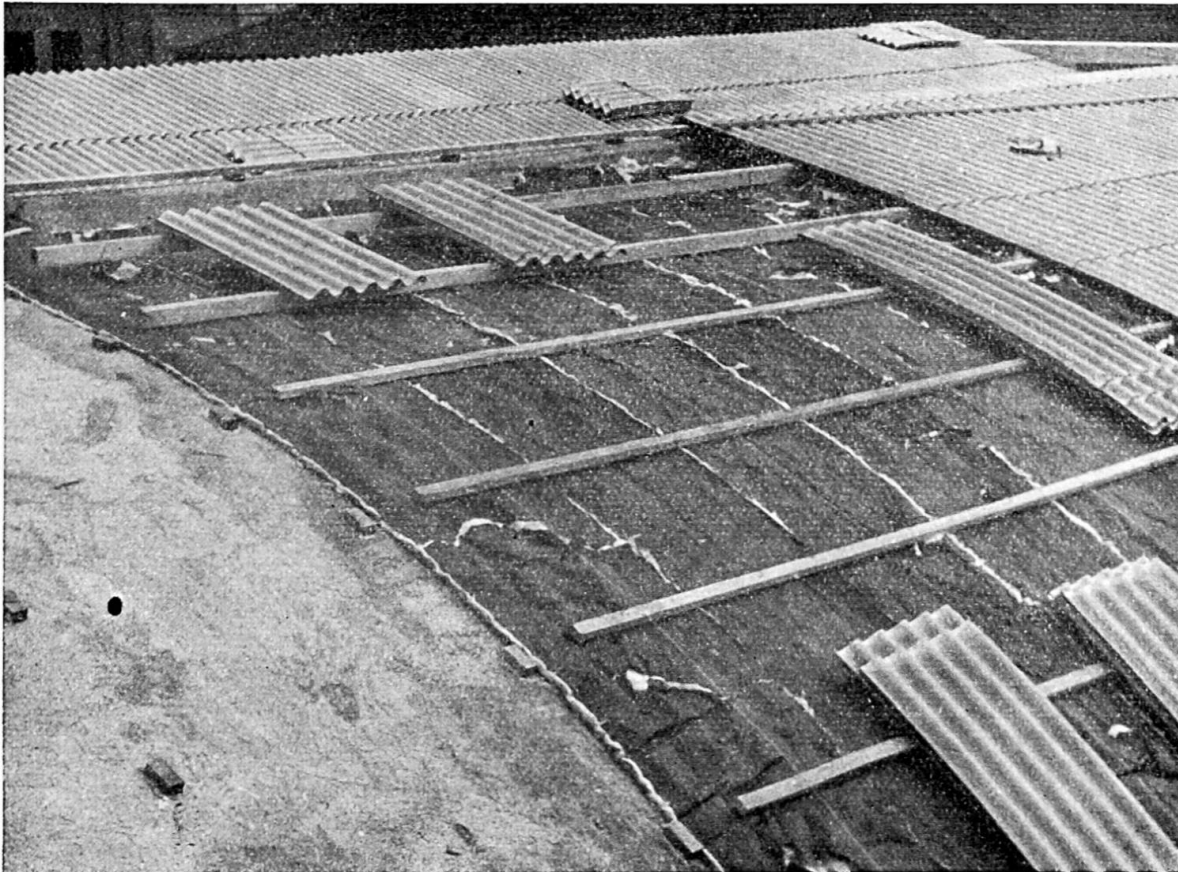


Abb. 3. Isolation und Eindeckung der Schalen.

kräftig ausgebildet werden, um eine gute Verteilung der Einzellasten auf die Schale zu ermöglichen. Es widerspricht dies allerdings etwas dem allgemeinen Prinzip, den Randträger möglichst schwach zu dimensionieren, und die Schale selbst zur Uebertragung ihres Schubes heranzuziehen. Durch die Kranlasten werden die Spannungen infolge Eigengewicht und Schnee an der ungünstigsten Stelle um ungefähr 25 % erhöht.

Durch die Fensterpfosten sind die beiden übereinanderliegenden Randträger zweier benachbarter Scheiben gelenkig miteinander verbunden, sodass vom oberen Randträger nur vertikale Verschiebungen auf den unteren übertragen werden.

Für die Arbeitsplätze in der Halle wurden die bestmöglichen Belichtungsverhältnisse verlangt. Nun erfordern zwar senkrecht angeordnete Fensterpfosten gegenüber solchen mit einer Neigung von 60° etwas mehr Dachfläche samt deren Isolation und Eindeckung. Durch Versuche der A. E. G. Zürich ⁽¹⁾ wurde jedoch nachgewiesen, dass bei lotrechten Shedfenstern im Zusammenhang mit der Reflexion der Schale eine gleichmässige Raumbelichtung möglich ist, als bei geneigten Fenstern. (Wird das so reflektierte Licht in eine vertikale, eine linke und eine rechte horizontale Komponente zerlegt, so weichen die Grössen der beiden horizontalen Komponenten am wenigsten von der Grösse der vertikalen Komponente ab.) Ein weiterer Grund, die Shedfenster vertikal anzuordnen, bestand darin, dass statt dem teureren Drahtglas gewöhnliches, lichtdurchlässigeres

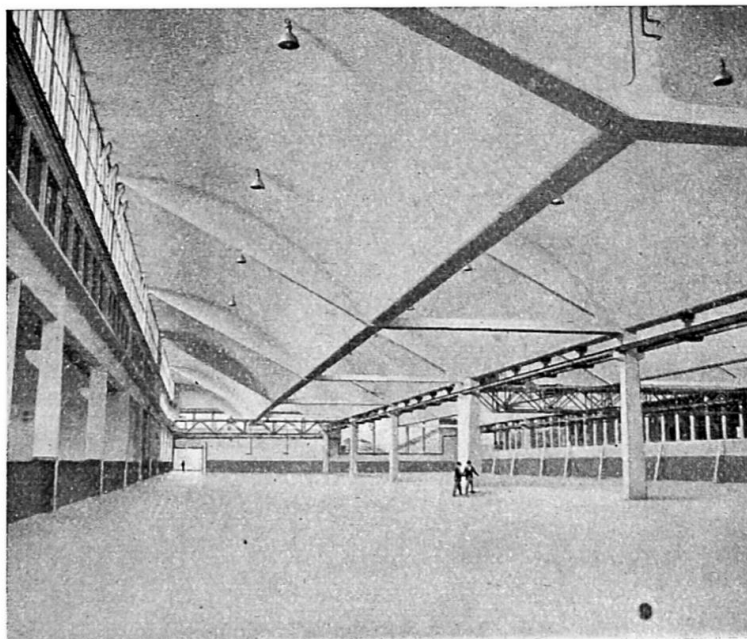
⁽¹⁾ A. STAUB, *Das Schalensheddach aus Eisenbeton der Schweiz. Bindfadefabrik Schaffhausen* (SBZ, B. 115 v. 6-1-40).

Abb. 4. Innenansicht der Halle.

Fensterglas eingesetzt werden konnte. Dieses wird, da senkrecht, in der stark von Russ und Staub durchsetzten Luft, weniger verschmutzt, und ist zudem von den Rinnen aus leichter zu reinigen.

Zur Isolation der 7 cm starken Schale wurden Glaswollmatten verwendet. In gewissen Abständen wurden zuerst Holzklötzchen für die Auflagerung der Pfetten mit einem auch auf die Dauer als geeignet befundenen Leim auf die Schale versetzt. Alsdann erfolgte das Verlegen der Glaswollmatten, wobei die Auflagerstellen der Pfetten sorgfältig ausgeschnitten und abgedichtet wurden, um Kältebrücken zu vermeiden (Abb. 3). Hierauf wurden die Pfetten und schliesslich die Welleternitplatten verlegt. Diese wurden für den unteren Teil der Schale im Herstellungswerk gebogen. Die Glaswolle wird also durch die Eindeckung nicht zusammengedrückt und bildet eine hochwertige Wärmeisolierung.

Das Dachwasser aus der ersten und dritten Rinne (siehe Abb. 2, Schnitt *a-a*) wird längs dem Fachwerkuntergurtstab zur nächsten Stütze geleitet. Von dort aus können auch die Lüftungsflügel der Shedfenster durch ein Gestänge serienweise bedient werden. Abbildung 4 zeigt eine Innenansicht der Halle, aus welcher die sehr gleichmässige Belichtung ersichtlich ist.



Résumé

Ce mémoire donne la description, pour une construction voûtée récente, des principes de base, des calculs statiques, des détails d'exécution ainsi que des conditions d'isolation et d'éclairage.

Zusammenfassung

An einem Schalenbau neueren Datums werden die baulichen Grundlagen, die statischen Verhältnisse, konstruktive Einzelheiten, sowie Isolation und Belichtungsverhältnisse beschrieben.

Summary

A description is given of the structural rudiments, statical conditions, constructive details, as well as isolation and lighting conditions, of a shell structure recently built.

IVc3

**La résistance des murs minces en béton chargés axialement
sous une charge répartie**

**Die Festigkeit von dünnen, axial gedrückten Betonwänden
unter verteilter Belastung**

**The strength of thin concrete walls in axial compression
under distributed loading**

A. E. SEDDON

M. Sc., A. M. I. Struct. E.

Introduction

The tests described in this paper are part of a research programme in progress at the Building Research Station, of the Department of Scientific and Industrial Research, to investigate, in the first instance, the strength and performance of thin concrete walls. That programme has been outlined elsewhere ⁽¹⁾. Its purpose is to obtain experimental data on which design recommendations may be based for a more economic use of load-bearing reinforced concrete walls in multi-storey buildings.

Outline of the tests

Fourteen concrete test walls, 9 ft 0 in high and 4 in thick, were subjected to distributed axial compression in short-period tests to destruction.

An ordinary Portland cement and washed, uncrushed, natural river sand and gravel were used for the concretes, and these materials and the water were proportioned by weight to an accuracy of 0.1 %. The cement was obtained commercially and a quantity sufficient for all the tests was mixed in successive batches in a mechanical mixer in such a manner as to produce as uniform a material as possible. Representative samples were tested in the manner prescribed in B. S. S. No. 12 ⁽²⁾ and the cement was found to comply with the requirements of that British Standard. The aggre-

⁽¹⁾ F. G. THOMAS, *Structural Engineering Research at the Building Research Station (The Structural Engineer, Vol. 26, No. 2, pp. 81-103. Institution of Structural Engineers, London, February, 1948).*

⁽²⁾ B. S. S., No. 12. *Ordinary Portland and Rapid-Hardening Portland Cements*, British Standards Institution, London, 1947.

| Reference No. | Length (ft in) | Mean storage conditions | | Age at test (days) | Load at fracture (tons) | Mean crushing strength (lb/in ²) |
|---------------|-------------------|---------------------------|-------------------------------|-----------------------|----------------------------|---|
| | | Mean temperature (° F) | Mean relative humidity (%) | | | |
| 1A | 6' 0" | 70 | 54 | 22 | 395 | 3 070 |
| | | 69 | 51 | 15 | 351 | 2 730 |
| | | 70 | 53 | 14 | 308 | 2 390 |
| 1B | 6' 0" | 65 | 51 | 15 | 296 | 2 300 |
| | | 63 | 54 | 14 | > 500 | > 3 890 |
| | | 60 | 41 | | > 461 | > 3 580 |
| | | 58 | 50 | 350 | 2 720 | |
| 1C | 4' 6" | 63 | 58 | 14 | 272 | 2 820 |
| | | 58 | 50 | | 240 | 2 490 |
| | | 59 | 40 | | 287 | 2 980 |
| | 3' 0" | 62 | 59 | | 165 | 2 570 |
| | | 61 | 44 | | 152 | 2 360 |
| | 1' 6" | 60 | 54 | | 76.8 | 2 390 |
| | | 64 | 44 | | 80.0 | 2 490 |

TABLE 1. — Wall Test Data : Walls 9 ft 0 in high, 4 in thick.

gates were known to be of good quality, were dried before use and were well-graded with a maximum size of $\frac{3}{4}$ in.

The concretes were prepared in an open-pan, paddle-type mixer in a laboratory in which the temperature and relative humidity were controlled at 64° F and 65 %. From each batch of concrete a sample was drawn to cast control specimens concurrently with a portion of the wall. These specimens consisted of 4 in cubes, 6 in \times 12 in cylinders and 4 in \times 4 in \times 16 in beams, and the number of each type varied as the wall series proceeded but was in no case less than six for any one condition of storage. The cubes and beams were moulded in accordance with the British Standard Code of Practice ⁽³⁾, and the cylinders in a manner similar to that specified by the American Society for Testing Materials ⁽⁴⁾ with the exception that they were not capped. The walls were cast in the laboratory housing the com-

⁽³⁾ British Standard Code of Practice *The Structural Use of Normal Reinforced Concrete in Buildings*, British Standards Institution, London, 1948.

⁽⁴⁾ A. S. T. M. Designation C31-44 : *Making and Curing Concrete Compression and Flexure Test Specimens in the Field*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, 1944.

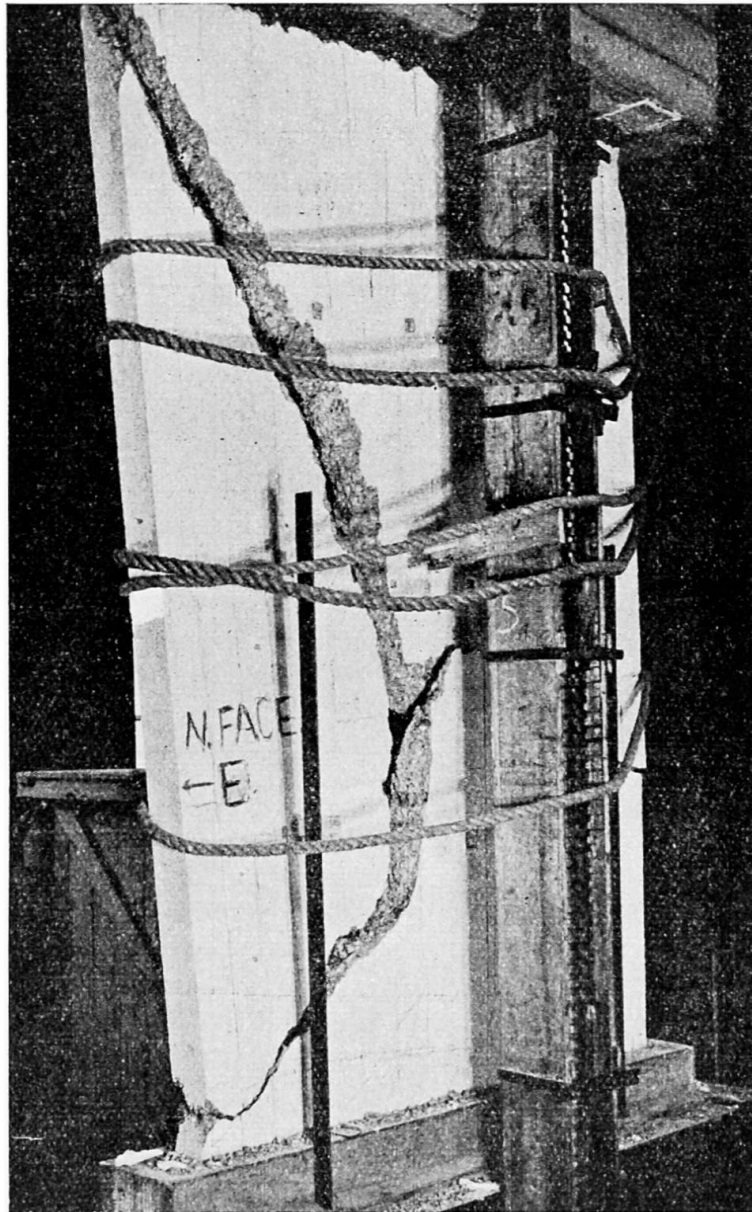


fig. 1. View of wall 1B4 after failure.

pression machine used in the wall tests, in one lift and on reinforced concrete pallets. The temperature and relative humidity of this testing laboratory were not controlled, but they were continuously recorded.

After casting the wall and its control specimens, damp sacking was spread over them until the wall forms were stripped or the specimens demoulded. The respective curing periods were three and two days. The walls were stored in the testing laboratory with certain of the control specimens, whilst the other specimens were stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 %.

The walls were loaded axially in a hydraulic compression machine of 500 tons capacity. The machine was of the twin-screw type, in which the walls were compressed by a hydraulic ram against a crosshead located by the screws. The load on the ram was recorded by a pendulum-type dynamometer, and this load was distributed along the full length of the wall by two stout loading beams located between the wall and the bearing plates

| Reference No. | Age at test (days) | 4 in cubes | | | | 6 in × 12 in cylinders | | | | |
|---------------|--------------------|--------------------------------------|---|-------------------|---|--------------------------------------|---|-------------------|---|-------|
| | | Controlled storage 64° F., 65% R. H. | | Storage with wall | | Controlled storage 64° F., 65% R. H. | | Storage with wall | | |
| | | N° | Crushing strength (lb/in ²) | N° | Crushing strength (lb/in ²) | N° | Crushing strength (lb/in ²) | N° | Crushing strength (lb/in ²) | |
| 1A | 1 | 22 | 6 | 3 720 | | | 6 | 2 890 | | |
| | 2 | 15 | 6 | 3 440 | | | 6 | 2 500 | | |
| | 3 | 14 | 6 | 3 340 | | | 6 | 2 220 | | |
| 1B | 1 | 15 | 6 | 2 860 | | | 6 | 2 110 | | |
| | 2 | | 6 | 5 260 | | | 6 | 3 680 | | |
| | 3 | 14 | 6 | 4 540 | 12 | 4 570 | | | 12 | 3 280 |
| | 4 | | 6 | 4 020 | 12 | 3 190 | | | 12 | 2 340 |
| 1C | 1 | 14 | 6 | 3 480 | | | 6 | 2 610 | | |
| | 4 | | 6 | 3 470 | 6 | 3 600 | | | 6 | 2 680 |
| | 5 | | 6 | 3 610 | 12 | 3 720 | | | 12 | 2 790 |
| | 2 | | 6 | 3 780 | 6 | 3 730 | | | 6 | 2 920 |
| | 6 | | 12 | 3 460 | 12 | 3 280 | 8 | 3 100 | 8 | 2 760 |
| | 3 | | 6 | 3 250 | 6 | 2 860 | | | 6 | 2 290 |
| | 7 | | 12 | 3 940 | 12 | 3 460 | 8 | 2 990 | 8 | 2 770 |

of the machine. The top of the wall and the pallet were bedded between these loading beams using a cement mortar. In loading the wall the procedure consisted of two test runs, a preliminary run and the test run proper.

During the test run proper the overall loading rate to failure of the wall ranged from about 15 to 20 lb/in²/min through the test series. The wall test data is given in Table 1 and a view of one of the walls after failure can be seen in Figure 1.

The control specimens were weighed before they were tested at the same age as that at which the corresponding wall was tested. The cubes and beams were tested in accordance with the above-mentioned B. S. Code of Practice, but the cylinders were crushed between two sheets of 3/16 in hard plywood inserted between the cylinders and the steel platens of the testing machine. The test data obtained from the control specimens is given in Table 2.

The strengths developed by the walls and those of the cubes and cylinders are compared in Table 3.

| 4 in × 4 in × 16 in beams | | | | Mean density (lb/cu. ft) | |
|--|---|-------------------|---|--|-------------------|
| Controlled storage 64° F., 65 % R. H. | | Storage with wall | | Controlled storage 64° F. 65 % R. H. | Storage with wall |
| N° | Modulus of rupture (lb/in ²) | N° | Modulus of rupture (lb/in ²) | | |
| 6 | 530 | | | 143.5 | |
| 6 | 530 | | | 143.2 | |
| 6 | 425 | | | 143.0 | |
| 6 | 415 | | | 143.3 | |
| 6 | 500 | | | 147.2 | |
| | | 6 | 455 | 144.0 | 142.4 |
| | | 6 | 365 | 144.8 | 142.5 |
| 6 | 435 | | | 144.4 | |
| | | 6 | 410 | 144.6 | 144.0 |
| | | 6 | 490 | 143.2 | 142.2 |
| | | 6 | 395 | 142.8 | 142.5 |
| 6 | 475 | 6 | 405 | 143.7 | 141.5 |
| | | 6 | 360 | 144.4 | 143.0 |
| 6 | 430 | 6 | 395 | 143.2 | 142.6 |

TABLE 2. — Control Specimens : Test Data.

Conclusions

The following conclusions were drawn from the tests :

(i) For 4 in walls stored under laboratory conditions of moderate temperature and humidity and of lengths not less than 4 ft 6 in, a fair average value of the wall strength (defined as the ultimate mean compressive stress) was 75 % of the mean crushing strength of 4 in cubes cast in the same concrete and stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 % (the controlled-stored cube strength).

(ii) For walls similar in size and materials, the values of the ratio wall strength : controlled-stored cube strength did not differ from their average by more than $\pm 7 \frac{1}{2}$ %

(iii) For shorter 4 in walls from 3 ft 0 in to 1 ft 6 in long there was a small reduction in the average value of the ratio wall strength : controlled-stored cube strength to a value not less than 65 %. The average value for walls of these lengths tended to approach the lower limit of the values for the longer walls.

| Reference No. | | Ratio $\frac{\text{wall strength}}{\text{4 in cube strength}}$ (%) | | Ratio $\frac{\text{wall strength}}{\text{6 in } \times \text{ 12 in cylinder strength}}$ (%) | |
|------------------|---|--|--------------|--|--------------|
| | | Controlled storage of cubes 64° F., 65 % R. H. | Same storage | Controlled storage of cylinders 64° F., 65 % R. H. | Same storage |
| 1A | 1 | 82.5 | | 106.0 | |
| | 2 | 79.5 | | 109.0 | |
| | 3 | 71.5 | | 107.5 | |
| 1B | 1 | 80.5 | | 109.0 | |
| | 2 | > 74.0 | | > 105.5 | |
| | 3 | > 79.0 | > 78.5 | | > 109.0 |
| | 4 | 67.5 | 85.0 | | 116.0 |
| 1C | 1 | 81.0 | | 108.0 | |
| | 4 | 72.0 | 69.0 | | 93.0 |
| | 5 | 82.5 | 80.0 | | 107.0 |
| | 2 | 68.0 | 69.0 | | 88.0 |
| | 6 | 68.0 | 72.0 | 76.0 | 85.5 |
| | 3 | 73.5 | 83.5 | | 104.5 |
| | 7 | 63.0 | 72.0 | 83.5 | 90.0 |

(iv) The wall strengths were related to the crushing strengths of 6 in \times 12 in cylinders stored in air at 64° F and a relative humidity of 65 %, and tested between plywood packings, in a manner consistent with a fair average value of the ratio cylinder strength : cube strength of 75 %. Thus, the walls not less than 4 ft 6 in long had strengths which compared favourably with those of controlled-stored 6 in \times 12 in cylinders.

(v) For 4 in walls which were similar in other respects, no significant decrease in the ratio wall strength : cube strength was evident over a range of controlled-stored cube strengths from about 2 500 to 5 000 lb/in².

(vi) In no test was instability the criterion of failure of the wall. The walls crushed without appreciable bending.

Acknowledgment

The work described above has been carried out as part of the research programme of the Building Research Board of the Department of Scientific and Industrial Research, and this paper is published by permission of the Director of Building Research.

| Ratio $\frac{6 \text{ in } \times 12 \text{ in cylinder strength}}{4 \text{ in cube strength}}$ (%) |
|---|
| Same storage |
| 77.5 |
| 72.5 |
| 66.5 |
| 74.0 |
| 70.0 |
| 71.5 |
| 73.0 |
| 75.0 |
| 74.5 |
| 75.0 |
| 78.0 |
| { 89.5 |
| { 84.0 |
| 80.0 |
| { 76.0 |
| { 80.0 |

TABLE 3. — *Walls and Control Specimens : Proportional Strengths.*

(Ratios quoted to ± 0.25 %)

Résumé

Les résultats d'essai obtenus sur des murs en béton de 10 cm d'épaisseur chargés axialement montrent qu'en réduisant la longueur du mur de 1,80 m à 0,45 m, le rapport de sa charge de rupture moyenne par rapport à celle du cube d'essai de 10 cm de côté exécuté dans le même béton s'abaisse de 0,75 à 0,65. On n'a pas pu déterminer si ce rapport est influencé par la résistance du cube pour des tensions de 175 à 350 kg/cm². Les essais donnent une valeur moyenne constante de 0,75 pour le rapport de la charge de rupture de cylindres de 15 cm \times 30 cm (essayés entre plaques de multiplex) à celle des cubes d'essai de 10 cm de côté, dans le cas où cylindres et cubes ont été conservés dans l'air ambiant. Pour tous les essais, la rupture du mur fut causée par dépassement de la tension de compression du béton. Aucune valeur sensible pour la flèche ou voilement n'est à signaler.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse von Versuchen an 10 cm dicken, einstöckigen, axial gedrückten Betonwänden zeigen, dass bei Verkleinerung der Wandlänge von 1,50 m auf 0,45 m das Verhältnis der höchsten mittleren Druckspannung in der Wand zur mittleren Druckfestigkeit von 10 cm Würfeln aus gleichem Beton von ungefähr 0,75 auf höchstens 0,65 sinkt. Es konnte nicht festgestellt werden, dass dieses Verhältnis durch die Änderung der Würfeldruckfestigkeit innerhalb eines Bereichs von 175 bis 350 kg/cm² beeinflusst wurde. Die Ergebnisse zeigten einen gleichbleibenden Durchschnittswert von 0,75 für das Verhältnis der Druckfestigkeit von 15 × 30 cm Zylindern (geprüft zwischen harten Sperrholzfassungen) zu derjenigen von 10 cm Würfeln, wenn die Zylinder und die Würfel zusammen an der Luft gelagert wurden. Bei allen Versuchen versagte die Wand durch Ueberwindung der Druckfestigkeit des Betons. Weder nennenswerte Biegung noch Knicken trat auf.

Summary

Data obtained from tests on 4 in concrete walls of single-storey height under distributed axial compression suggests that as the wall length is reduced from 6 ft 0 in to 1 ft 6 in the ratio between the ultimate mean compressive stress in the wall and the mean crushing strength of 4 in cubes of the concrete used is reduced from about 0.75 to not less than 0.65. There was no evidence to suggest that the ratio is affected by the cube strength within a range of cube strengths from about 2 500 to 5 000 lb/in². The data was consistent with a fair average value of 0.75 of the ratio between the crushing strengths of 6 in × 12 in cylinders (tested between hard plywood packings) and 4 in cubes, when the cylinders and cubes were stored together in air. In all the tests the wall failed by crushing of the concrete, and neither appreciable bending nor buckling occurred.

IVc4

**Contribution à l'intégration de l'équation différentielle
pour voiles minces non fléchis**

**Ueber die Integration der Differentialgleichung
für dünne Schalen ohne Biegung**

**On integration of the differential equation
for thin shells without bending**

K. W. JOHANSEN

Dr techn. Copenhagen

For thin shells without bending it is known ⁽¹⁾ that the horizontal components of the membrane forces may be given by a stress function :

$$N_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \int X dx; \quad N_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \int Y dy; \quad N_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

which is determined by the differential equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = Z - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \int X dx \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial z}{\partial y} \int Y dy \right]$$

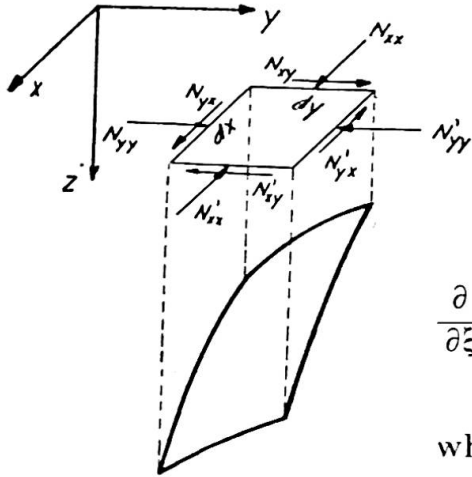
X and Y are the horizontal components of the load, Z the vertical, and z the ordinate of the middle surface of the shell. In well-known notation it may be written :

$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = G. \quad (1)$$

We now use Laplace's method for transformation of linear equations by changing the independent variables x and y to ξ and η , where ξ and η are the solutions of

$$t dy^2 + 2s dy dx + r dx^2 = 0 \quad (2)$$

⁽¹⁾ L. BESCHINE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 201, p. 935, 1935.
B. LAFFAILLE, *Mémoire sur l'étude générale des surfaces gauches minces* (*Publications IABSE*, vol. 3, p. 295, 1935).



or

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t} \tag{3}$$

We then get

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{s^2 - rt} \frac{\partial F}{\partial \tau_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\sqrt{s^2 - rt} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = GD \tag{4}$$

where D is the functional determinant.

Substituting $H = \sqrt[4]{s^2 - rt}$ and $u = HF$, we get

$$2 H \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2 \partial \tau_1} - 2 u \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2 \partial \tau_1} = G \cdot D. \tag{6}$$

This equation may be integrated at once, when $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2 \partial \tau_1} = 0$, and that is the case when

$$H^4 = s^2 - rt = a^2 = \text{constant}. \tag{7}$$

The solution of this differential equation is obtained by eliminating q from

$$\left. \begin{aligned} z &= qy + \Phi \left(q - \frac{x}{a} \right) + \Psi \left(q + \frac{x}{a} \right) \\ 0 &= y + \Phi' \left(q - \frac{x}{a} \right) + \Psi' \left(q + \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

where Φ or Ψ are arbitrary functions.

We now have

$$\xi = q - \frac{x}{a}; \quad \eta = q + \frac{x}{a} \tag{9}$$

and

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} (\eta - \xi); & y &= -\Phi'(\xi) - \Psi'(\eta); \\ z &= \Phi(\xi) + \Psi(\eta) - \frac{1}{2} (\xi + \eta) [\Phi'(\xi) + \Psi'(\eta)]. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

The differential equation (1) then becomes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2 \partial \tau_1} = \frac{a^2}{4} [\Phi''(\xi) + \Psi''(\eta)] G. \tag{11}$$

which is solved by two quadratures.

When a is real, the shell surface has hyperbolic curvature. When a is imaginary, $a = ib$, the shell surface has elliptic curvature. The equation is more convenient put into real form, and we get the equation of the potential

$$b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = GD \quad (12)$$

where ξ and η are the real and imaginary parts, respectively, of the solution $\zeta = \xi + i\eta$ to (2) or (3).

Finally, when $rt = s^2$, the shell surface is developable. Then $\xi = x$ and η is the solution of $\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t}$. The equation is transformed into

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{t}{r_y} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = \frac{G}{r_y}; \quad r_y = \frac{\partial r_i}{\partial y}. \quad (13)$$

This equation is solved by two quadratures.

$H = \text{constant}$ is a very special solution of the equation $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Transforming $\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ into the original variables x and y and putting $\frac{1}{H} = h$, we get the more general differential equation

$$r \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0; \quad h = (s^2 - rt)^{-\frac{1}{4}} = H^{-1}. \quad (14)$$

It is of the 4th order, and the general solution may be difficult to find, but special solutions are

$$\begin{aligned} \frac{z}{c} &= \frac{x}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{b}, & \frac{z}{c} &= \frac{x}{a} \operatorname{th}^{-1} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \operatorname{th}^{-1} \frac{y}{b}, \\ \frac{z}{c} &= \frac{x}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \operatorname{th}^{-1} \frac{y}{b}, & \frac{z}{c} &= \frac{a^2}{x^2} \pm \frac{b^2}{y^2}, \\ \frac{z}{c} &= \log \frac{y}{x}, & \Phi(z) &= x + Aye^{az}. \end{aligned}$$

By the mathematical methods it may be somewhat difficult to satisfy the boundary conditions. I should therefore like to call attention to a very simple practical method. In most cases the shell is designed for one load only, dead load and snow, as the wind-pressure has little influence. We may now reverse the problem, choose the stress function, and determine the shell surface. Usually it will not be difficult to choose a stress function satisfying the boundary conditions. For the shell surface there are generally no boundary conditions at all, or only very limited ones.

This circumstance facilitates the solution of the differential equation, which may be solved by the methods of finite differences in the simplest form. In other applications of finite differences one may solve a great number of linear equations and the solution must finally be differentiated once or twice to get the stresses. This process involves much work and

great accuracy. But in our case the ordinate z gives the final solution at once, and the lack of boundary conditions makes it possible to choose some ordinates arbitrarily and thus in most cases compute the rest successively. One may also start with a rough net, and then interpolate to intermediate points. In this connection it should be noted that the net need not fit the contour, when there are no boundary conditions.

Résumé

Grâce à la transformation de Laplace, on peut obtenir une forme simple (6) pour l'équation différentielle des tensions (1). Pour le type de voûte défini par l'équation (8), cette équation peut encore se simplifier pour prendre la forme (11) qui peut être résolue par deux intégrations. Pour les voûtes à courbure elliptique on obtient l'équation différentielle (12). Cette même forme simple est également obtenue par les voûtes du type (14).

L'auteur montre en outre qu'il est possible de choisir d'abord la forme de l'équation des tensions et d'en déduire la forme de la voûte, et cela d'une manière très simple par le calcul différentiel.

Zusammenfassung

Mit Hilfe der Transformation von Laplace kann die Differentialgleichung (1) der Spannungsfunktion in die einfache Form (6) gebracht werden. Für den Schalentyp, der durch (8) beschrieben wird, kann die Gleichung weiter vereinfacht werden auf (11), welche durch zwei Integrationen gelöst werden kann. Für Schalen mit elliptischer Krümmung erhält man die Potentialgleichung (12). Die gleiche einfache Form wird auch erhalten für Schalen vom Typus (14).

Ferner wird gezeigt, dass in vielen Fällen die Spannungsfunktion gewählt und die Schalenform danach bestimmt werden kann. Dies kann z.B. ganz einfach mittels Differenzenrechnung durchgeführt werden.

Summary

By Laplace's transformation the differential equation (1) for the stress function can be converted into the simple form (6). For the shell type represented by (8) the equation is further reduced to (11), which is solved by two integrations. For surfaces with elliptic curvature, the potential equation (12) is obtained. The same simple forms are also obtained for shell types which satisfy (14).

Furthermore, it is pointed out that in many cases the stress function can be chosen and the shell surface determined thereafter. This determination can, for instance, be made quite simply by the method of finite differences.

IVc5

**Considérations concernant le calcul
et le projet des voûtes cylindriques**

**Kritische Betrachtungen zur Berechnung
und zum Entwurf von Zylinderschalen**

**Critical notes on the calculation
and design of cylindrical shells**

K. W. JOHANSEN

Dr techn. Copenhagen

The forces and bending moments in cylindrical shells are usually determined by a differential equation of the 8th order. The mathematical work is very complicated, especially the determination of the arbitrary constants at the boundary conditions. The numerical computations must be worked out to six decimals, when the final results are required to have three. The forces and moments thus obtained determine the dimensions and reinforcement of the shell. How this is done is never mentioned in the literature, and, I think, with good reason. The fact is that it is done in a very irrational manner. The tensile stresses are summed up into a tensile force, and the area of reinforcement is determined by dividing this tensile force by the working stress, ignoring the fact that the deformation and the working stress do not correspond, as they are not constant over the entire region of tension. With this serious discrepancy between stress and strain the basis of all the fine mathematical work and all the complicated computations is gone, the basis being the theory of elasticity, where stress and strain correspond. We may put it this way : First we calculate the forces and moments according to the theory of elasticity, and then we design according to assumptions contrary to the same theory. Being very sensitive to the distribution of the shear forces, the transversal bending moments may be multiplied when cracks develop and the bars yield, and we must therefore calculate the shell in a state of rupture at the ultimate load, the more so as the working load must be fixed according to the ultimate load.

For long shells the theory of rupture is very simple. The shell may be considered as a reinforced concrete beam, and the tension of the concrete in the tension zone is not taken into account. The neutral axis is determined

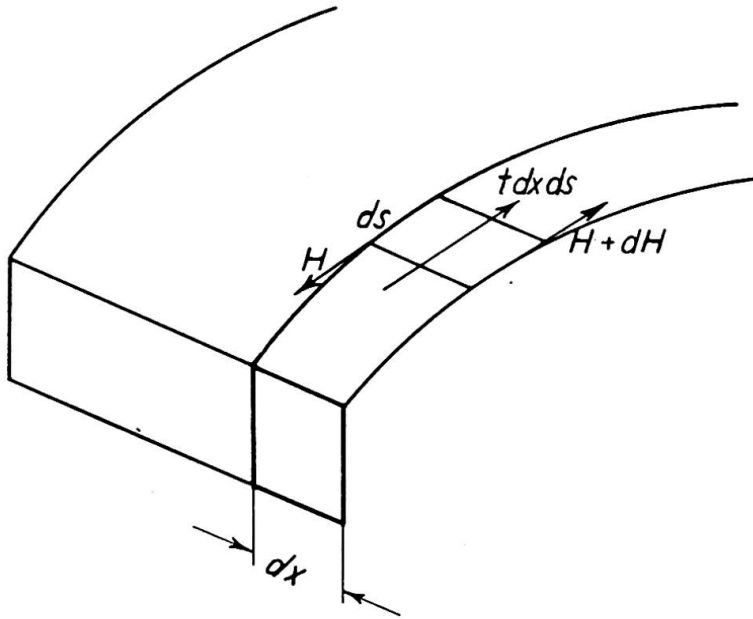


Fig. 1.

as corresponding to the stresses in the concrete and the reinforcement. Then also the moment arm h_i is determined, whereby the tensile force T , equal to the compressive force C , can be calculated, as $M = T \cdot h_i$. On a strip of the shell act the shear forces $-H$ and $H + dH$, calculated according to the elementary theory for reinforced concrete beams. The resultant of $-H$ and $H + dH$ acts as a tangential force $t dx$ on the shell. The forces $t = \frac{dH}{dx}$ and the load p then determine the transverse moments m in the shell. Between the reinforcement and the neutral axis, H , and consequently also t , are constant. For the sake of simplicity the compressive stress is assumed constant, as in the modern methods for calculation of reinforced concrete beams. H will then vary in the compression zone proportionally to the arc length of the normal section.

When calculating the transverse moment m , the normal force n , and

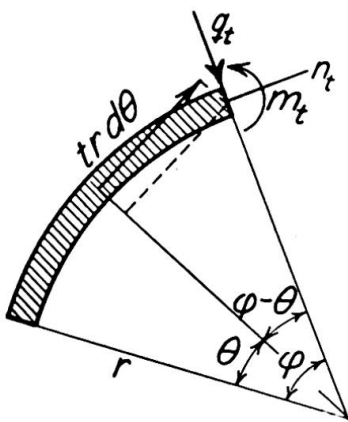


Fig. 2.

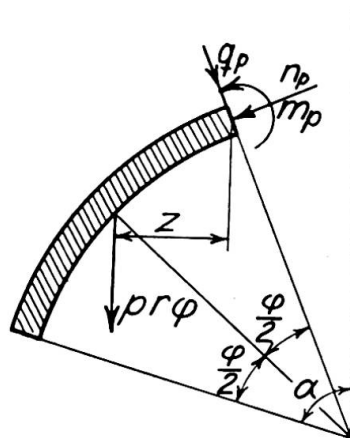


Fig. 3.

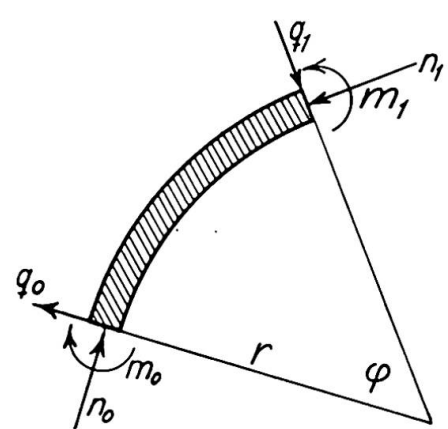


Fig. 4.

the transverse force q we have the following formulae for circular shells

$$\left. \begin{aligned} m_t &= \int_0^\varphi r^2 t [1 - \cos(\varphi - \theta)] d\theta; & n_t &= \int_0^\varphi r t \cos(\varphi - \theta) d\theta; \\ q_t &= \int_0^\varphi r t \sin(\varphi - \theta) d\theta. \end{aligned} \right\} (1)$$

For $t = \text{constant}$ are obtained

$$m_t = tr^2(\varphi - \sin \varphi); \quad n_t = tr \sin \varphi; \quad q_t = tr(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

For $t = k \cdot \theta$, i.e. proportional to the arc length, are obtained

$$\left. \begin{aligned} m_t &= kr^2 \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{kr^2 \varphi^4}{24}; & n_t &= kr(1 - \cos \varphi); \\ q_t &= kr(\varphi - \sin \varphi). \end{aligned} \right\} (3)$$

From constant vertical load we get

$$\left. \begin{aligned} m_p &= -pr^2 \left(\cos \alpha - \cos(\alpha - \varphi) \right) + \varphi \sin(\alpha - \varphi); & n_p &= -pr \varphi \sin(\alpha - \varphi); \\ q_p &= -pr \varphi \cos(\alpha - \varphi). \end{aligned} \right\} (4)$$

Finally, from support, or from the adjacent part, we obtain

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_0 + n_0 r (1 - \cos \varphi) + q_0 r \sin \varphi; & n_1 &= n_0 \cos \varphi - q_0 \sin \varphi; \\ q_1 &= q_0 \cos \varphi + M_0 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} (5)$$

The calculation can be made by means of a combination of these formulae. Some of the expressions are not suitable for practical calculations, but can be developed in series as shown, or tables of these expressions may be calculated once and for all.

With a skew load, or unsymmetrical cross-section, the influence of the twisting may become so great that two compression zones may be required. This will complicate the calculations somewhat, but they remain elementary all the same. It is, however, best — and frequently also feasible — to design the shell and the supports in such a way that this case does not occur. As an example, let us consider the well-known saw-tooth roof. The resultant P of the load acts here at a distance a from the resultant — P of the shear forces by mere bending. We then have at twisting moment $P \cdot d$ per unit length of the shell. The best way of getting rid of this is to design the top-lights so that they can transfer a force $F = \frac{Pd}{l}$ per unit length from shell to shell. In a thesis for the doctorate, now in the press, H. Lundgren has offered a further contribution on this point — also as far as short shells are concerned.

The stresses being proportional to the load, it is possible to divide by the coefficient of safety, whereby the permissible stresses and the permissible loads will be included in the calculation instead of the rupture values.

Example. — A circular shell of the cross-section shown in the figure is calculated for symmetrical loading. Its length is 30.0 m, and the load is :

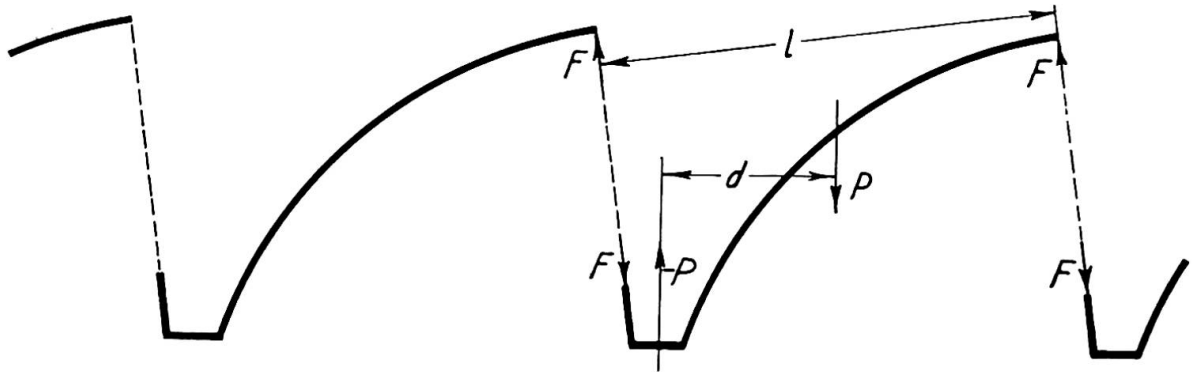


Fig. 5.

Circular Part :

| | | |
|------------------|-----------------------------------|---|
| Self-weight | $0.08 \cdot 2\,400 = 192$ kg/sq.m | } For the whole arc $2 \cdot 0.6 \cdot 8.85 \cdot 320 = 3\,400$ kg/m |
| Insulation, etc. | 53 " | |
| Snow | 75 " | |
| In total | <u>320</u> kg/sq.m | |

Vertical Part :

| | | |
|---------------------|-----------------------------------|---|
| Reinforced concrete | $0.15 \cdot 2\,400 = 360$ kg/sq.m | } For the whole edge girder $2 \cdot 0.9 \cdot 400 = 720$ kg/m |
| Insulation, etc. | 40 " | |
| In total | <u>400</u> kg/sq.m | |

For the whole cross-section $P = 4\,120$ kg/m. $M = 1/8 \cdot 4\,120 \cdot 30^2 = 464\,000$ kg/m. The neutral axis is assumed to correspond to $\beta = 0.3$, i.e. 0.40 m under the top. The

centre of pressure is then $8.85 \left(1 - \frac{\sin \beta}{\beta}\right) - \frac{1}{6} \cdot 8.85 \cdot \beta^2 = 0.13$ m

under the top, so that the moment arm h_t is $2.30 - 0.13 = 2.17$ m. The tensile force and the compressive force will then be $464\,000 : 2.17 = 214\,000$ kg. The concrete stress will be

$$\sigma_b = \frac{214\,000}{2 \cdot 0.3 \cdot 8.85 \cdot 8} = 50.5 \text{ kg/sq. cm.}$$

With the reinforcement rod tension = 1 800 kg/sq.cm, $\frac{214\,000}{2 \cdot 1\,800} = 59.4$ sq.cm be required for each edge girder, for instance 19 reinforcement rods of 20 mm dia.

Owing to the symmetry, $H = \frac{Q}{2 \cdot h_t}$, where Q is the transverse force in the shell considered as beam with 30 m span. We then have $t = \frac{1}{2 h_t} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{P}{2 h_t}$, where P is the load per unit length, i.e. $t = \frac{4\,120}{2 \cdot 2.17} = 950$ kg/sq.m between the reinforcement and the neutral axis. From the latter to the top it decreases to zero proportionally to θ . The factor of proportionality k is $950 : 0.3 = 3\,170$ kg/m. In the edge girder we get no moment, and the resultant of t and the load is $R = 950 \cdot 0.75 - 400 \cdot 0.9 = 353$ kg/m. The following transverse moment is then found

$$m = R (5.00 - 8.85 \sin \theta) + m_p + m_t,$$

where m_p is calculated from formula (4), m_t from (2), which, for points over the neutral axis, is corrected by means of formula (3). n and q are calculated correspondingly. As a check serves that $q = 0$ at the top, i.e. $q_t = 1/2 \cdot 4\,120 - 0.75 \cdot 950 = 1\,345$ kg/m = $tr (1 - \cos \alpha) - \frac{tr}{3} (\beta - \sin \beta) = 950 \cdot 8.85 \cdot 0.16$, which tallies. tr^2 being = $950 \cdot 8.85^2 = 74\,400$ kg. $1/24 kr^2 = 103\,000$ kg, and $pr^2 = 320 \cdot 8.85^2 = 25\,100$ kg, we get in kg

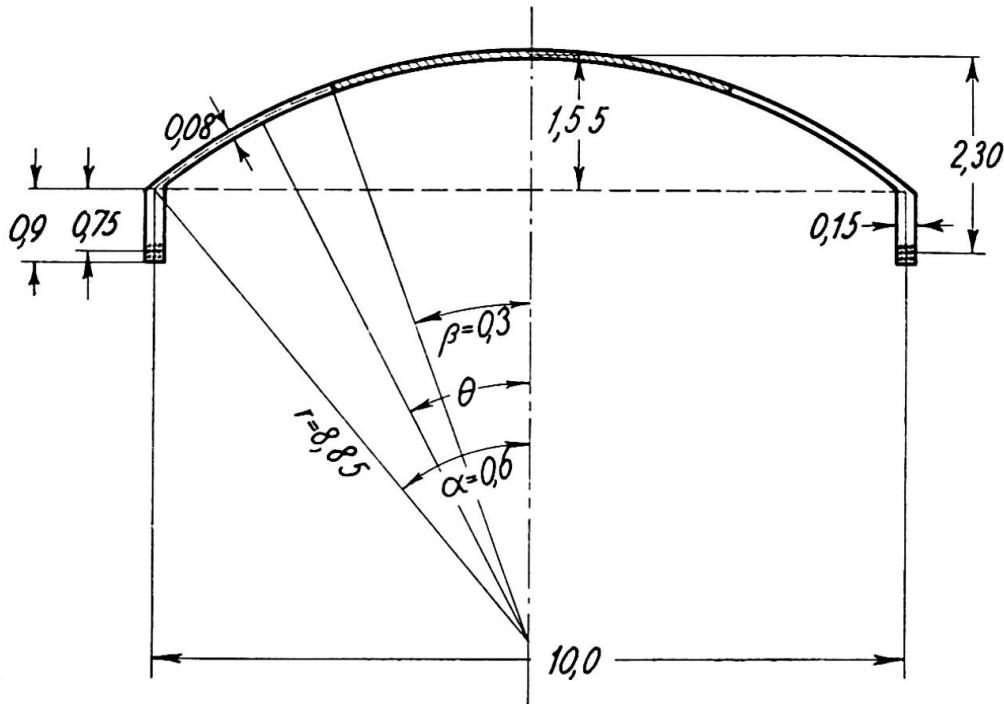


Fig. 6.

| θ | 0.60 | 0.55 | 0.50 | 0.45 | 0.40 | 0.35 | 0.30 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0 |
|----------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| m_R | 0 | 131 | 266 | 405 | 547 | 691 | 840 | 991 | 1145 | 1290 | 1450 | 1610 | 1765 |
| m_P | 0 | -28 | -107 | -246 | -448 | -712 | -1036 | -1430 | -1888 | -2411 | -3006 | -3662 | -4386 |
| m_t | 0 | 2 | 13 | 42 | 99 | 193 | 332 | 528 | 785 | 1120 | 1525 | 2030 | 2620 |
| corr. | 0 | - | - | - | - | - | - | 0 | -1 | -5 | -16 | -40 | -83 |
| m | 0 | 105 | 172 | 201 | 198 | 172 | 136 | 89 | 41 | -6 | -47 | -62 | -84 |

It will be seen that the location of the neutral axis can have little influence on m , the correction terms in the compression zone being rather small.

Résumé

On calcule en général les voûtes cylindriques en se basant sur la théorie d'élasticité, mais les dimensions choisies ne sont pas en accord avec cette théorie. C'est contraire à la logique. Comme la charge de rupture est à la base de la détermination de la charge utile, l'auteur indique une méthode de calcul se basant sur l'état de rupture. Il l'applique à un exemple numérique.

Zusammenfassung

Zylinderschalen werden gewöhnlich nach der Elastizitätstheorie berechnet, aber unter Annahmen dimensioniert, die mit dieser Theorie nicht übereinstimmen. Dies ist nicht logisch. Da die Bruchlast als Grundlage für die Bestimmung der Tragkraft genommen werden muss, wird gezeigt, wie eine einfache Berechnungsmethode, die vom Bruchstadium ausgeht, entwickelt werden kann. Sie wird angewendet auf ein Beispiel.

Summary

Cylindrical reinforced concrete shells are usually calculated on the theory of elasticity, but are dimensioned under assumptions at variance with this theory. This is irrational. As the ultimate load must be the starting point for the estimation of the carrying capacity, it is shown how a simple calculation-method based on the rupture stage can be developed. It is illustrated by an example.

IVc6

Application de l'équation du travail virtuel au calcul des poutres-parois

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf die Berechnung der wandartigen Träger

The application of the virtual work equation for calculating walls-beams

PROF. DR JERZY MANDES

1. Definition of Wall-Beam

A wall-beam is a flat element, having its height greater than its span and a small thickness. We assume, that there does not exist any danger of buckling. They are used for building of : silos, shelters, coal-storages, etc. Walls-beams could be of single span, continuous, with brackets, having rigid or elastic support and constant or variable thickness.

2. The Methods of Calculation for Walls-Beams

The methods of calculation for walls-beams are based, until now, on the works of Bay, Bortsch, Cramer, Dischinger, L'Hermite, Hager and Hobel. All those methods could be brought to three fundamental types such as : general equilibrium equations, Airy's functions and differential equations. Since in this case the ordinary theory of bending is not applicable and previous ones have a number of faults like : limited adaptation, boundary or deformation conditions not fulfilled, disability to choose the right function of stresses etc., there was applied, therefore, Ritz-Timoshenko's method of virtual work. This method has following advantages : easy choice of stresses function, simple equations for stresses, generalizes the results for variable height, seizes the problem of buckling, applies to all kinds of loading by using continuous functions. An element supported continuously, at two points and a bracket were calculated by this method.

3. Base of Virtual Work in Application to Walls-Beams

The fundamental equation for a two-dimensional problem with the omission of the volumetric forces is :

$$\delta \int \int V \, dx \, dy = \int (\delta X_v u + \delta Y_v v) \, dx \, (dy) . \quad (1)$$

Strain energy per unit volume

$$V = \frac{1}{E} \left[\frac{1}{2} \sigma_x^2 + \frac{1}{2} \sigma_y^2 - \mu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + (1 + \mu) \tau^2 \right] . \quad (2)$$

Surface forces

$$X_v = \sigma_x \cos (xv) + \tau \cos (yv) \quad Y_v = \tau \cos (xv) + \sigma_y \cos (yv) \quad (3)$$

Constituent transfers

$$u = \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \mu \sigma_y) \, dx \quad v = \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \mu \sigma_x) \, dy . \quad (4)$$

The angles of the normal to the edge of an element with axis x and y : xv , yv .

Let the function of stresses be of a type

$$F(x, y) = k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y) + \dots + k_n f_n(x, y) \quad (5)$$

with unknown parameters $k_1, k_2 \dots k_n$, which are obtained from the equations

$$\frac{\partial}{\partial n} \int \int V \, dx \, dy = \int \left(\frac{\partial X_v}{\partial n} u + \frac{\partial Y_v}{\partial n} v \right) \, dx \, (dy) . \quad (6)$$

Functions f_i must fulfil the boundary conditions. The stresses are determined from following equations :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \quad (7)$$

4. Calculation of a Single Element Supported at Two Points

Let the stresses function be :

$$F = p \left[-\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 h^5} (a^2 - x^2) \cdot (-5.5 h^2 y^4 + 5 h y^5 - 0.5 y^6) + \frac{k}{a^2 h^4} \cdot (a^2 - x^2)^2 \cdot (h^2 y^2 - 2 h y^3 + y^4) \right] . \quad (8)$$

By means of equation (8) we obtain : stresses (7), strain energy (2), surface forces (3), constituent transfers (4). By substituting the obtained values from this expression into equation (6) we shall get the unknown parameter k :

$$k = - \left(2.73 \frac{h^2}{l^2} - 0.89 \right) : \left(\frac{l^2}{h^2} + 0.57 + \frac{h^2}{l^2} \right) . \quad (9)$$

expressed in the function of slenderness ratio $\frac{h}{l}$. Substituting now value of k , obtained from equation (9), into equation (7), we shall get three constituent stresses in a variable function x and y and also in the slenderness ratio $\frac{h}{l}$, having $\frac{h}{l} = 1$, $k = -0.72$ hence

$$\sigma_x = p \left[\frac{1}{2h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) \cdot (-66h^2y^2 + 100hy^3 - 15y^4) - \frac{2.88}{h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right)^2 \cdot (2h^2 - 12hy + 12y^2) \right]; \quad (10)$$

$$\sigma_y = p \left[-1 - \frac{1}{h^6} \cdot (-5.5h^2y^4 + 5hy^5 - 0.5y^6) + \frac{11.52}{h^6} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - 3x^2 \right) \cdot (h^2y^2 - 2hy^3 + y^4) \right]; \quad (11)$$

$$\tau = p \left[\frac{1}{h^6} \cdot x \cdot (-22h^2y^3 + 25hy^4 - 3y^5) - \frac{11.52}{h^6} \cdot x \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2 \right) \cdot (2h^2y - 6hy^2 + 4y^3) \right]. \quad (12)$$

The distribution of stresses is shown in figure 1.

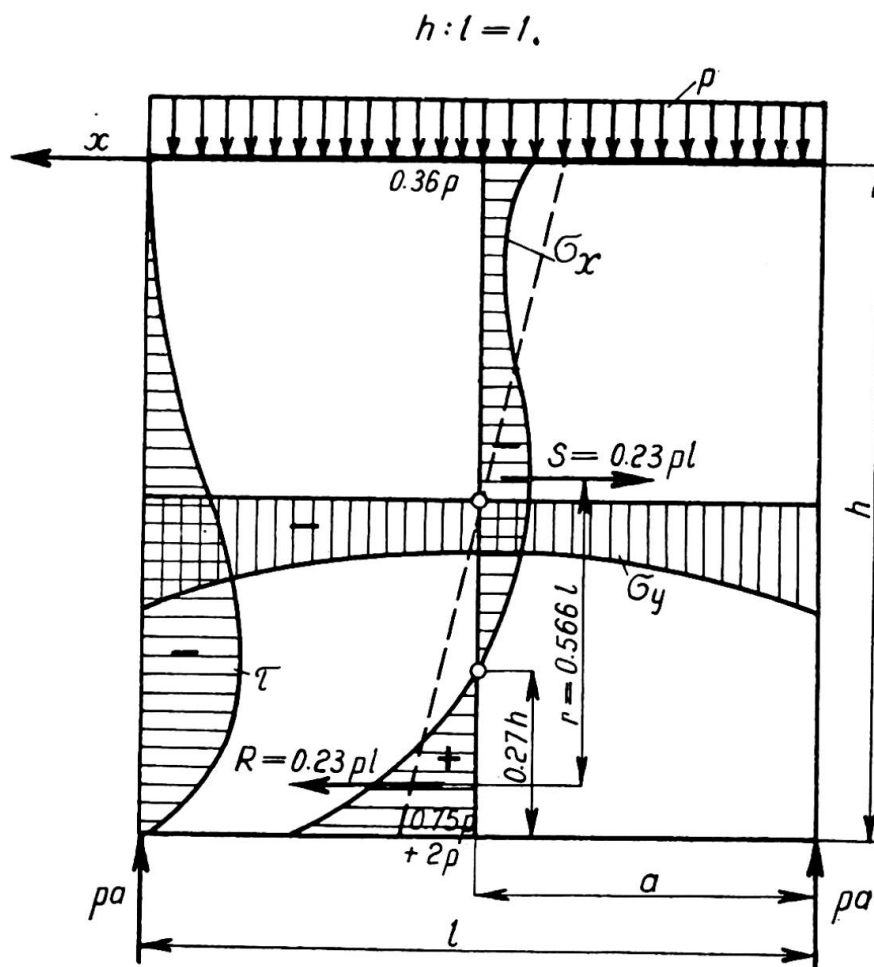


Fig. 1. Distribution of stresses.

The Curve σ_x introduces the normal horizontal stresses in the centre of the span of a beam. For comparison it is also given a curve of stresses obtained by means of Navier's theorem — dotted line. The numerical value, in the centre of the top edge of the beam, calculated by means of the equation for virtual work and also by Navier's theorem is $-0.36 p$ and $-0.75 p$. In the centre of the bottom edge the values of above stresses are $+2.0 p$ and $+0.75 p$.

The Curve τ introduces the tangential stresses in the section over the support but it is not a parabola as it happens in ordinary theory of bending. The greatest value of the tangential stresses on the neutral axis, with consideration of equation (12) is for $\frac{h}{l} = 1$ and $k = -0.72$, $y = 0.73 h$

$$\max \tau = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{h} p - 2 \frac{x^3}{h^3} p .$$

With ordinary theory of bending

$$\max \tau = -\frac{3}{2} \frac{x}{h} p$$

hence by the theory of wall-beams, the maximum tangential stress gets a greater value.

The Curve σ_y introduces the normal vertical stresses in the middle of the height of a beam. Those stresses are usually neglected in the ordinary theory of bending. It is interesting to compare in both the methods the positions of the neutral axis, the values of compressive and tensile forces and also the arms of internal moments.

Assuming in equation (10) $\sigma_x = 0$ and $x = 0$ we shall get the position of the neutral axis at the centre of the span equal to $0.73 h$. The value for the linear distribution of stresses is $0.5 h$; hence the position of the neutral axis is much lower in walls-beams than in ordinary beams.

The values of the compressive and tensile forces are obtained by integrating the negative and positive areas enclosed by curve σ_x when $x = 0$,

$$\frac{h}{l} = 1 \text{ i.e. } S = \int_0^{0.73 h} \sigma_x dy = - \int_{0.73 h}^h \sigma_x dy = -R = -0.23 pl .$$

By Navier's theorem we get a value

$$S_N = 0.5 \cdot \sigma_x \cdot 0.5 h = -0.1875 pl < S .$$

The arms of the internal moments, however, are respectively $m = 0.566 l$ and $m_N = 0.667 l$.

A simple account shows, that the moment of the internal forces is practically equal to the moment of external forces, e.g.

$$M_W = R \cdot m = 0.23 pl \cdot 0.566 l = 0.129 pl^2 ;$$

$$M_N = \frac{1}{8} pl^2 = 0.125 pl^2 .$$

The difference about 3 %.

The relationship between the stresses and the values of slenderness ratio

The investigation was done for the stresses in the centre of the top and bottom surface i.e.

$$(\sigma_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.5 p \frac{l^2}{h^2} k \quad (\sigma_x)_{\substack{x=0 \\ y=h}} = 0.5 p \frac{l^2}{h^2} (4.75 + k)$$

for the stresses σ_y in the section over the supports i.e.

$$(\sigma_y)_{x=\pm a} = p \left[-1 - \frac{1}{h^6} (-5.5 h^2 y^4 + 5 h y^5 - 0.5 y^6) + \frac{8 k}{h^4} (h^2 y^2 - 2 h y^3 + y^4) \right]$$

for tangential stresses τ , with $x = \frac{l}{3}$ i.e.

$$(\tau)_{x=\frac{l}{3}} = \frac{1}{3} p \frac{l}{h} \left[\frac{1}{h^5} (-22 h^2 y^3 + 25 h y^4 - 3 y^5) + \frac{20 k}{9 h^3} (2 h^2 y - 6 h y^2 + 4 y^3) \right]$$

and for tensile force in the centre of the span of a beam i.e. $x = 0$

$$R = - \int_0^{0.73 h} \sigma_x dy = (0.26 + 0.0455 k) p \frac{l^2}{h} .$$

Those stresses expressed by means of Navier's theorem will give :

$$(\sigma_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -0.75 \cdot p \frac{l^2}{h^2} \quad (\sigma_x)_{\substack{x=0 \\ y=h}} = +0.75 \cdot p \frac{l^2}{h^2}$$

$$(\tau)_{x=\frac{l}{3}} = -2 \frac{pl}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad R_N = 0.1875 p \frac{l^2}{h} .$$

Having done the analysis of the given groups of the corresponding equation we come to the following conclusions : as the ratio $\frac{h}{l}$ grows bigger, the stresses σ_x are coming to zero, and by $\frac{h}{l} < 0.5$ the stresses are quickly increasing. The compressive stresses calculated by use of virtual work with respect to Navier's theorem are greater for $\frac{h}{l} < 0.65$ and smaller for $\frac{h}{l} > 0.65$. The tensile stresses are getting always greater values using the accurate method.

The stresses σ_y show that they are constant at $\frac{h}{l} > 1.5$. The stresses σ_x show nearly the same limits of stability. It means, that high beams are working like columns. This fact is also confirmed by the tangential stresses.

Further investigations show that for slenderness ratio $\frac{l}{h} \leq 0.5$, the values of stresses calculated by means of both methods come very fast closer to each other and the positions of the neutral axis are practically identical.

Conclusion

The beams having short height i.e. $\frac{h}{l} \leq 0.5$ gets the numerical values of stresses very close to that from Navier's theorem, and they are closer as the height of the beam is shorter. The beams with a big height i.e. $\frac{h}{l} > 0.5$ cannot be calculated by means of Navier's theorem because of big divergences and they are bigger as the beam gets higher. Those results are confirmed by the investigations of the deformations of beams. The solutions received by means of virtual work were checked by differential equations getting practically the same answers.

Résumé

Une poutre-paroi est constituée par un élément plat dont la hauteur est supérieure à sa portée et à sa petite épaisseur. On admet que le cas de flambage n'a pas lieu. Application : pour la construction des silos, blindages, abris, magasins à charbon, etc.

Les poutres-parois peuvent être à une travée, continues, à consoles, à un appui rigide ou élastique, à épaisseur constante ou variable.

Le principe de calcul est basé sur l'application de l'équation du travail virtuel dans la forme de Ritz-Timoshenko.

Cette méthode présente les avantages suivants : facilité du choix de la fonction des tensions; généralisation des résultats pour la hauteur variable et accomplissement du problème des déformations; enfin, elle est applicable à tous les cas de chargement en employant des fonctions continues.

On a calculé à l'aide de cette méthode : 1° un élément appuyé sur toute sa longueur; 2° un élément sur deux appuis; 3° un élément-console.

L'ordre du calcul est le suivant : 1° on écrit l'équation du travail virtuel; 2° on calcule le travail élastique, les forces superficielles et les composantes des déplacements; 3° on substitue ces valeurs dans l'équation fondamentale; 4° on détermine les tensions comme les dérivées partielles de la fonction des tensions.

Zusammenfassung

Ein wandartiger Träger ist ein scheibenförmiges Element, dessen Höhe grösser als seine Spannweite und dessen Dicke gering ist. Man setzt voraus, dass Beulgefahr nicht existiert. Solche Träger werden für Silos, Luftschuttkeller, Kohlenbunker, etc., angewendet.

Wandartige Träger werden einfeldrig, durchlaufend, mit Konsolen, auf festen oder senkbaren Stützen und mit konstanter oder veränderlicher Stärke ausgeführt.

Die Berechnung beruht auf der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit in der von Ritz-Timoshenko vorgeschlagenen Form. Diese Methode bietet folgende Vorteile : Erleichterung in der Wahl der Spannungsfunktion und einfache Gleichungen für die Spannungsberechnung. Ferner können die Ergebnisse auf veränderliche Höhe verallgemeinert werden, das Beulproblem mit einbezogen und alle Arten von Belastungen durch Einführung stetiger Funktionen erfasst werden.

Die Berechnung geschieht wie folgt : Aufstellung der Gleichung für die virtuelle Arbeit als Funktion der Formänderungsenergie, der Oberflächenkräfte und der Verschiebungskomponenten. Die Spannungen werden aus den partiellen Ableitungen der Spannungsfunktion bestimmt.

Summary

A wall-beam is a flat element, having its height greater than its span and a small thickness. We assume, that there does not exist any danger of buckling. They are used for building of : silos, shelters, coal-storages, etc. Walls-beams could be of single-span, continuous, with brackets, having rigid or elastic support and constant or variable thickness.

The principles of calculation are based on the application of the virtual work equation in form of Ritz-Timoshenko. This method has following advantages : easy choice of stresses function, simple equations for stresses, generalizes the results for variable height, seizes the problem of buckling, applies to all kinds of loading by using continuous functions. An element supported continuously, at two points and a bracket were calculated by this method.

The order of calculation consists on : establishment of the equation of virtual work, expressed by the elastic energy, surface forces and displacement components. The stresses are determined as partial derivatives of stress function.

Leere Seite
Blank page
Page vide

IVc7

Le calcul des toits plissés par le procédé des limites de charge

Die Berechnung der faltwerke nach dem Traglastverfahren

The limit design of shells

Dr TECHN. G. DE KAZINCZY

Stockholm

Die Stahlbeton-Tragwerke werden unter der Annahme berechnet, dass der Beton keine Zugspannungen überträgt. Dagegen werden Probleme der Schalen und faltwerke in der Literatur in solcher Weise gelöst, als ob Stahlbeton ein homogener Stoff sei. Ich möchte zeigen, dass man auch diese berechnen kann, wie die üblichen gut bewährten Stahlbetonkonstruktionen und dass die Lösung sogar einfacher ist.

Ich behandle hier nur weitgespannte Dächer aus viereckigen Scheiben mit horizontalen Falten, die an deren Enden auf Querscheiben oder Rahmen frei oder durchlaufend gelagert sind. Ich nenne ein Glied Scheibe, wenn es in seiner Ebene und Platte, wenn es normal zu seiner Ebene belastet wird. Ich nehme weiter an, dass der Leser die Theorie der faltwerke für homogene Stoffe kennt, d.h. die Lösung mit den Dreimomentengleichungen. Ich behandle daher nur die Berechnung nach dem Traglastverfahren.

Die Berechnung beginnt mit einem Plattenstreifen, der rechtwinklig zu den Falten ist. Er wird berechnet als gerade, durchlaufende Platte, die an den Falten gestützt ist. Die Platten werden dementsprechend armiert. Als Belastung ist immer die zur Platte normale Komponente derselben in Rechnung zu stellen.

Der zweite Schritt besteht darin, die Auflagerkräfte der Platten an den an Stelle der Falten gedachten Stützen zu bestimmen. Für diesen Zweck werden für die ganze Last (nicht nur deren Komponente) in ihrer ursprünglichen Richtung die Auflagerkräfte der miteinander gelenkig verbundenen Platten bestimmt und nachher die auf die Platten normal wirkenden Kräfte, die von den Stützenmomenten stammen.

Bei der Berechnung der Momente besteht eine gewisse Freiheit. Ist nur eine ständige Last vorhanden, dann können die Momente an den Falten beliebig angenommen und die Feldmomente entsprechend berechnet werden. Die Bedingung ist, dass die Armierung dieser Annahme entspricht.

Wir können diese Möglichkeit für verschiedene Zwecke ausnützen: um z.B. die kleinste Plattendicke zu erreichen, wählen wir die $+$ und $-$ Momente gleich gross. Ein anderer Fall: Es gibt Faltwerke, wie die sogenannten „Nordlicht-Dächer“, wo diejenigen Scheiben, in welchen die Fenster sind, aus praktischen Gründen so klein wie möglich sein sollten. Es ist also wünschenswert, dass ihre Belastung möglichst klein sei. Durch entsprechende Wahl der Eckmomente kann das sehr gut erreicht werden.

Bei asymmetrischen oder asymmetrisch belasteten Faltwerken ist die Formänderung der Falten verschieden. Dadurch ändern sich die Momente an den Falten beträchtlich. Die Momente können aber nicht grösser sein, als es der verwendeten Menge der Armierung entspricht (Gelenke mit konstanten Momenten). Werden gleich am Anfang diese maximalen Momente in Rechnung gestellt, so muss wegen der durch die veränderte Höhenlage veränderten Faltenmomente die ganze Rechnung nicht wiederholt oder die Aufgabe mit komplizierten Differentialgleichungen gelöst werden. Ist die Belastung veränderlich, so muss zuerst die Maximalmomentenlinie bestimmt werden und die Freiheit besteht nur in der Verschiebung der Schlusslinie.

Die an den Falten wirkenden 4 Kräfte werden nun in je 2 zu den Scheiben parallele Komponenten zerlegt. Die Scheiben werden nun als frei aufgelagerte, bzw. durchlaufende Balken aufgefasst und die grössten Momente bestimmt. Da die Scheiben miteinander verbunden sind, müssen die Längsspannungen an den Berührungspunkten einander gleich sein. Hier müssen also Schubkräfte wirken und zwar so, dass die Spannungen gleich gross werden, wie unter Annahme eines homogenen Stoffes, d.h. wie sie sich aus den Dreimomentengleichungen ergeben. Ist aber die nötige Armierung in der Falte konzentriert und wird deren Menge so bestimmt, dass die gesamte Zugkraft und die Betondruckkräfte mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht stehen und die Stahleinlagen bis zur zulässigen Grenze beansprucht werden, dann wirken hier keine T-Kräfte, da die durch die Stahlspannung bedingte Dehnung die gleiche ist. So kann an denjenigen Falten, wo an beiden Seiten Zugkräfte angreifen, die ermittelte Menge der Armierung einfach addiert werden.

Berühren sich zwei Scheiben an ihren auf Druck beanspruchten Kanten und sind die anderen Seiten gezogen, so wirken gewisse T-Schubkräfte, die die Spannungen ausgleichen. Die Randspannungen ändern sich aber nicht linear mit den Momenten. Da eine Lösung auf numerischem Wege zeitraubend wäre, wenden wir eine graphische Methode an, die sehr einfach und rasch ist.

Wir zeichnen die $\sigma_b = f(M_0)$ -Linie ein für allemal auf. (Unter Pauspapier gelegt kann sie wiederholt verwendet werden.) Das geschieht am einfachsten mit Hilfe einer gewöhnlichen Bemessungstabelle. Wir tragen als Ordinaten die Betonspannungen und als Abszissen die dazu gehörigen, reduzierten Momente auf. $M_0 = \frac{M}{bh^2} = \frac{1}{r^2}$, worin r der Koeffizient in der

bekannten Formel $h = r \sqrt{M:b}$ ist. Der Masstab der Abszisse ist kg/cm^2 . So bekommen wir die Kurve, Abb. 1, die aber für verschiedene σ_e zu 1 verschieden ist. Bedeuten M_2 und M_1 die grössten Feldmomente der beiden Scheiben 2 und 4 im Grundsystem, so sind die reduzierten Momente

$M_{02} = \frac{M^2}{b_2 h_2^2}$ und $M_{04} = \frac{M_4}{b_4 h_4^2}$. Wir markieren beide an der Abszissen-

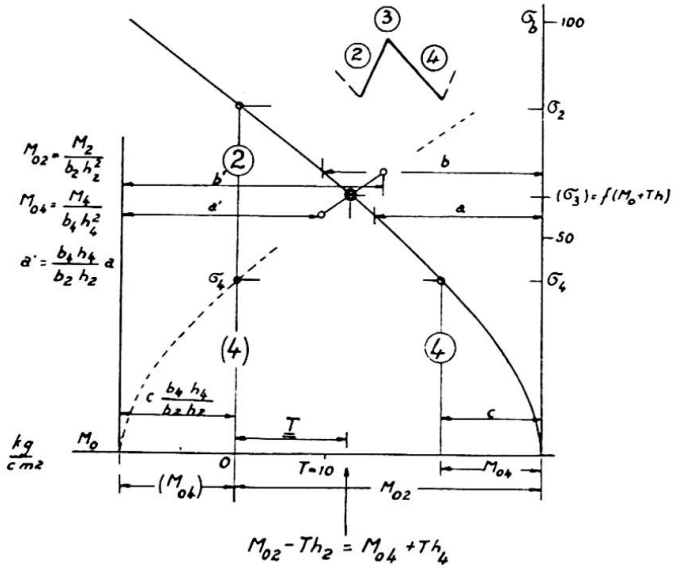


Abb. 1. Ermittlung der Längsdruckspannung bei zwei zusammenhängende Scheiben.

achse und ziehen je eine Vertikale bis zu der Kurve. Einer dieser Punkte, am besten der grössere ($M_{02} > M_{04}$), soll der Koordinaten-Nullpunkt der an der Berührungskante wirkenden T-Kraft sein, deren Masstab um $b_2 h_2$ grösser ist als für M_0 , sodass $T = M_0 b_2 h_2$ ist. Nach dieser Darstellungsweise zeigt die Kurve die Randspannungen bei gleichzeitig wirkenden M und T, wenn der dem M entsprechende Punkt an der Abszisse als Ausgangspunkt für die T-Kräfte angenommen wird. Wird eine Gegenkurve gezeichnet für die Scheibe 4, so, dass diese die 2 Vertikalen in der Höhe σ_4 schneidet, so zeigt diese zweite Kurve, dass bei einer Aenderung von T die Spannung in der Scheibe 4 der Gegenkurve entsprechend wächst. Wo die beiden Kurven sich schneiden, ist die Spannung in beiden Scheiben gleich gross. Ist $b_4 h_4 \neq b_2 h_2$, so muss für die Scheibe 4 eine Kurve in anderem Masstab gezeichnet werden, da die T-Kräfte den gleichen Masstab haben. Aber es genügt, zwei bis drei Punkte der Kurve zu konstruieren. Wie das geschieht, ist aus der Abb. 1 zu ersehen. Die so konstruierten zwei Punkte verbinden wir mit einer Geraden und bekommen damit den Schnittpunkt der beiden Kurven. Wir rechnen nun die nötige Querschnittsfläche der Armierung wie üblich aus dem Moment $M_2 - Th_2$ und zu dem so erhaltenen F_e' kommt noch $\pm F_e'' = \frac{T}{\sigma_{ezul}}$ (im Falle M_4 muss F_e'' von F_e' abgezogen werden).

Stösst eine Scheibe 4 an beiden Seiten an Scheiben 2 und 6, die stark auf Zug beansprucht sind, sodass die resultierenden Spannungen an beiden Seiten der Scheibe 4 Zugspannungen sind, ist die Armierung in der Falte $\pm F_e = \frac{M_4}{\sigma_{ezul} h_4}$. h_4 ist die Entfernung der Einlagen. Dieser F_e -Querschnitt soll zu dem — ohne Rücksicht auf die Scheibe 4 berechneten — Zugarmierungsquerschnitt der anderen Scheibe addiert und auf der anderen Seite abgezogen werden.

Liegt eine Scheibe 4 zwischen zwei Scheiben 2 und 6, die stark auf Druck beansprucht sind (Abb. 2), sodass die resultierenden Spannungen an beiden Seiten der Scheibe 4 in Druckspannungen übergehen, so wenden wir zur Berechnung wieder die erwähnte Kurve an. Es werden die aus den Momenten der frei beweglich gedachten Scheiben 2 und 6 be-

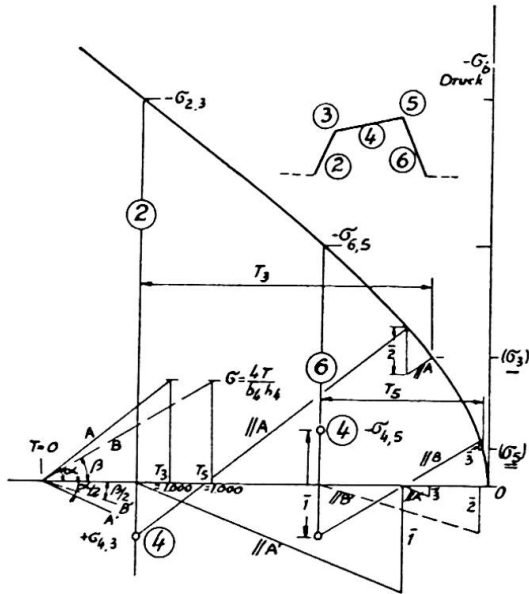


Abb. 2. Ermittlung der Längsdruckspannung in drei zusammenhängende Scheiben.

rechneten Spannungen an der Kurve bezeichnet, doch wird keine Gegenkurve mit verschiedenem Masstab konstruiert. T_3 und T_5 haben aber einen verschiedenen Masstab: für $T_3 = M_0 b_2 h_2$ und für $T_5 = M_0 b_6 h_6$.

Die Scheibe 4 wird wie eine homogene behandelt; deren $\sigma = f(T)$ — Diagramm ist eine Gerade. Die Randspannung im Grundsystem $\frac{M_4}{W_4}$, ($W = bh^2/6$) wird auf den Vertikalen 2 und 6 abgetragen, von wo die Geraden ausgehen mit den Neigungen α bzw. $\beta = 4/bh$. Beide sind im Masstab von T_3 bzw. T_5 zu messen, da diese verschieden sind, wie auch α verschieden von β ist. Spannungsausgleich ist vorhanden beim Schnittpunkt der Linie //A mit der Kurve. Dadurch wird die andere Spannung an der anderen Seite um die Hälfte (Strecke $\bar{1}$) geändert. Die Linie //B wird also um diesen Betrag tiefer gezogen bis zur Kurve. Das erzeugt wieder eine Spannungsänderung $\bar{2}$, von wo wieder eine Gerade bis zur Kurve unter die Neigung α //A zu ziehen ist, usw. Es genügen gewöhnlich 2-3 Wiederholungen. So erhalten wir die resultierenden Spannungen und die Faltenschubkräfte T_3 und T_5 .

Sind zwei oder mehr schwach beanspruchte Scheiben zwischen zwei stark auf Druck beanspruchten, sodass die übertragenen Spannungen die ersteren zu rein gedrückten Scheiben verwandeln, so ist das Verfahren dasselbe wie vorher; nur bestimmen wir die Randspannungen im Grundsystem der dazwischen liegenden Scheiben mit Hilfe der Dreimomentengleichungen, als ob sie unabhängig wären. Die Neigungen der Geraden sind

$$\alpha = f_4 \left(4 - \frac{f_4}{f_4 + f_6} \right) \text{ und } \beta = f_6 \frac{f_4}{f_4 + f_6}$$

$$\left(\frac{1}{f} = F = \text{Querschnittfläche} \right).$$

Dies sind die am häufigsten vorkommenden Fälle. Spezialfälle können wir wegen Platzmangel hier nicht behandeln.

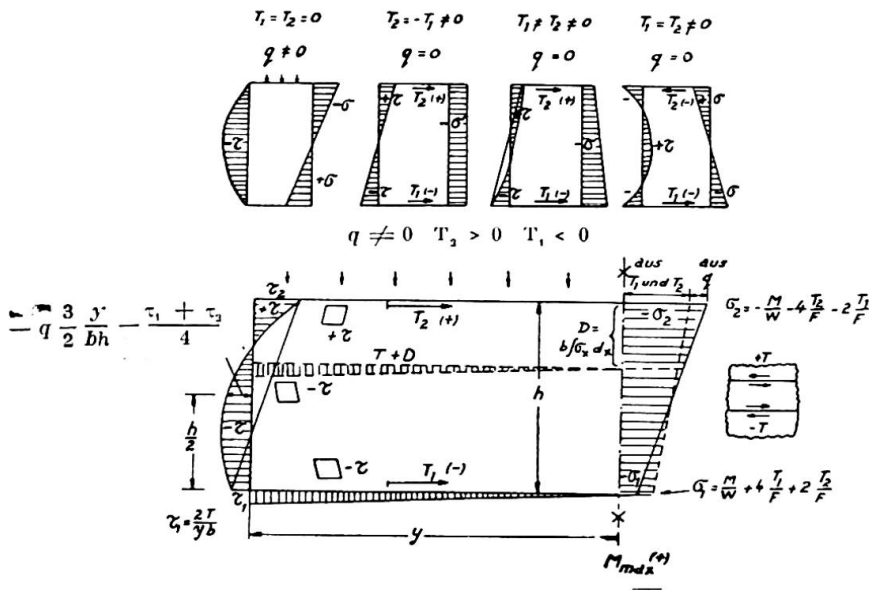


Abb. 3. Schubspannungen in der Scheibe.

Es scheint auf den ersten Blick, als ob man die Spannungen und die nötige Armierung über der Stütze bei durchlaufenden Fallwerken berechnen könnte, wie im Felde. Es besteht aber ein wesentlicher Unterschied. In der Mitte sind keine τ -Spannungen vorhanden und die Druckspannungen verteilen sich ziemlich gleichmässig auf die ganze Scheibe. Dagegen entstehen in der Nähe der Stützen grosse Schubspannungen und daher können auch die Druckspannungen nicht gleichmässig verteilt sein. Es ist also gerechtfertigt, gemäss den Bestimmungen nur die „mitwirkende“ Plattenbreite zu berücksichtigen.

Die Schubspannungen und die Schubarmierung

Diejenigen Scheiben, deren ganzer Querschnitt auf Druck beansprucht ist, werden so berechnet, als ob sie aus homogenem Material wären. Die Schubspannungen am Ort von $+ M_{max}$ sind Null und wachsen von hier aus in der Längsrichtung proportional mit der Entfernung. Ueber einen Querschnitt werden sie parabelförmig angenommen mit dem Maximalwert $\tau = \frac{3}{2} \frac{qy}{bh}$ in der Mitte des Querschnittes. Wirkt an der Kante (Falte) aber auch eine Längsschubkraft T, so wird durch T nur die Form der Verteilungskurve geändert. Das Integral der τ -Spannungen in einem Querschnitt ($y = const.$) ist von T unabhängig, hängt allein von q ab und hat den Wert

$$R_y = b \int_0^h \tau_x dx = \frac{qy}{2} .$$

Die Linie ist immer eine Parabel, die aus 3 gegebenen Punkten konstruiert werden kann. Zwei der Punkte sind die Falten-Randspannungen. Die Schubspannung in der Mitte ist (kein max.)

$$\tau_m = \frac{3}{2} q \frac{y}{bh} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{4} .$$

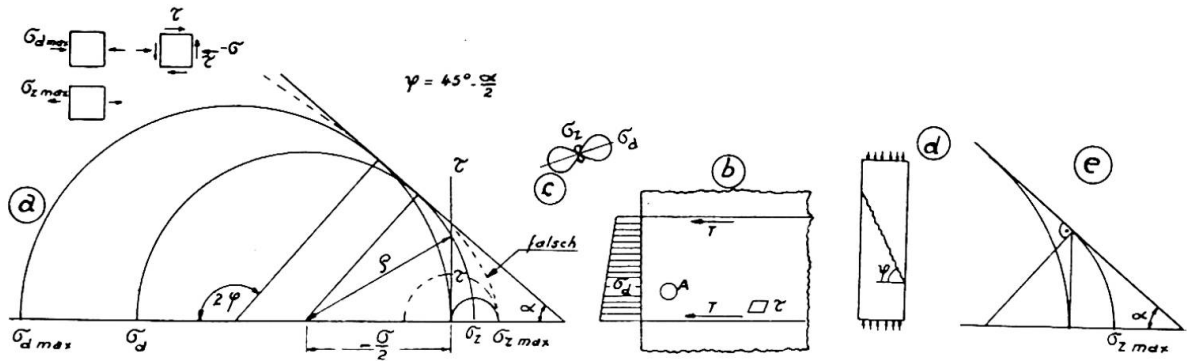


Abb. 4. Anstrengung des Betons bei gleichzeitiger Schub- und Druckbeanspruchung.

Es ist zu beachten, dass das Vorzeichen von τ_2 entgegengesetzt demjenigen von τ_1 ist, wenn die beiden T die Scheibe auf Druck beanspruchen. In der Abb. 3 sind einige Fälle gezeigt. Aus der von den T-Kräften unabhängigen Grösse des Integrals der τ -Spannungen (Querkräfte) folgt, dass die auf die Endscheiben (oder Rahmen) wirkenden Auflagerkräfte nur von den q -Kräften abhängen und nicht von den T-Kräften.

In einer gedrückten Scheibe haben die Schubspannungen eine andere Bedeutung als in einem auf Biegung beanspruchten Balken. Da die Armierung nicht für die Schubspannungen, sondern für die Hauptzugspannungen eingelegt wird, müssen diese bestimmt werden. Dazu ist die Mohr'sche Darstellungsweise besonders geeignet. Die Mohr'sche „Grenzkurve“ wird oft gemäss der punktierten Linie gezeichnet (Abb. 4); das ist aber vollkommen falsch, da der Zugwiderstand von anderen Bedingungen abhängt, als der Schubwiderstand. Die Grenzlinie (die beinahe eine Gerade ist) kennzeichnet ausschliesslich den Schiebungsbruch. Die Ueberwindung der Kohäsion ist durch einen einzigen Punkt an der Abszissenachse charakterisiert (wenn dies überhaupt von der grössten Spannung und nicht von der grössten Dehnung abhängt)⁽¹⁾. Ist der ebene Spannungszustand an einer Stelle eines Flächentragwerkes mit der Normalspannung $-\sigma$ (Druck) und auf dieselbe Ebene wirkende τ charakterisiert, und wirkt auf die dazu rechtwinklig stehende Ebene keine Normalkraft, dann soll

$$-\sigma \leq -\sigma_{dmax} \left[0,4 + \sqrt{0,36 - 7 \left(\frac{\tau}{\sigma_{\alpha max}} \right)^2} \right]$$

sein. Wo $-\sigma_{dmax}$ die auf einaxigen Druck zulässige Spannung bedeutet. (Bei dieser Formel ist $\alpha = 41^\circ$ angenommen. Einfach von Abb. 4 abgeleitet.)

Die zulässige Druckspannung wird also durch die zusätzliche Schubbeanspruchung beträchtlich, sogar bis zur Hälfte herabgesetzt und dies soll berücksichtigt werden.

In Scheiben, die an einer Seite auf Zug, an der anderen auf Druck

⁽¹⁾ Es scheint, dass die Zugfestigkeit bei Beton mit der Druckfestigkeit in solcher Weise zusammenhängt, wie das die Abb 4 e zeigt.

$$\sigma_z = \frac{\sigma d}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \psi} + t^2 q \psi - 1 \right) \text{ wo } \psi = 90 - \varphi.$$

beansprucht sind, werden die Schubspannungen so berechnet, wie im Steg eines Plattenbalkens. Doch die bekannte Formel $\tau = \frac{R}{R} \frac{bz}{2bz} = \frac{2bz}{2bz}$ ist dazu nicht geeignet, da ausser der Querkraft auch eine Längskraft wirkt. Dagegen gibt die folgende, auch für Plattenbalken gültige Formel richtige Resultate: $\tau = \frac{4F_c \sigma_c}{bl}$ und die gesamte Schubkraft ist $t = F_c \sigma_c$. Bei durchlaufenden Scheiben und Balken sind die maximalen Feld- und Stützenarmierungen zu addieren:

$$\tau = \frac{bl}{(F_{c+} + F_{c-}) \sigma_c l}$$

und $t = (F_{c+} + F_{c-}) \sigma_c$. Von t ist nur jener Teil durch die Schubarmierung aufzunehmen wo $\tau > \tau_{zul}$ ist, also nur

$$t = t \left(1 + \frac{\tau_{zul}^2}{\tau^2} \right)$$

Unter F_c ist nicht der volle in der Falle vorhandene Stahlquerschnitt zu verstehen, sondern nur jener Teil, der zu der untersuchten Scheibe gehört. Diejenigen Scheiben oder Scheibenteile, die ganz auf Zug beansprucht sind, sind auf Schubsticherheit nicht zu untersuchen. Sie sind sowieso überbeansprucht und durch die Hauptzugarmierung genügend bewehrt.

Résumé

L'auteur décrit une méthode pour le calcul d'un voile prismatique qui tient compte du fait que tous les efforts de traction sont supportés par l'armature du béton armé.

Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur Berechnung der prismatischen Fallwerke beschrieben, die berücksichtigt, dass der Beton keine Zugkräfte überträgt, sondern nur die Armierung.

Summary

The Author describes a method of designing prismatic thin-slab structures based on the assumption that all tensile stresses are taken by the reinforcement.

Leere Seite
Blank page
Page vide