Contribution à la solution du problème des voiles minces cylindriques, à directrices quelconques, sous charges non uniformes

Autor(en): **Larras, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **5 (1956)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5984

IIa4

Contribution à la solution du problème des voiles minces cylindriques, à directrices quelconques, sous charges non uniformes

Contribution to the solution of the problem of thin cylindrical shells of sundry cross-section under non uniform loading

Beitrag zur Lösung des Problems der dünnen Zylinderschalen mit beliebiger Leitkurve und ungleichförmiger Belastung

Contribuição à resolução do problema dos invólucros delgados cilíndricos, de secção qualquer, sob cargas não uniformes

JEAN LARRAS

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Laboratoire National d'Hydraulique
Chatou

I – *Introduction.* –

Les méthodes de calcul actuelles des voiles minces cylindriques ne conviennent généralement pas au cas des directrices non circulaires ni des charges non uniformes.

Ces méthodes laissent d'autre part tout à fait dans l'ombre certains phénomènes dont on n'est pas à même d'affirmer qu'on soit toujours bien en droit de les négliger: moments de torsion, déformations dans le sens des génératrices (par lesquelles se traduit l'influence des pignons), différences de répartition des efforts dans l'épaisseur même du voile, et phénomènes de dilatation transversale dépendant du coefficient de Poisson μ de la théorie de l'élasticité.

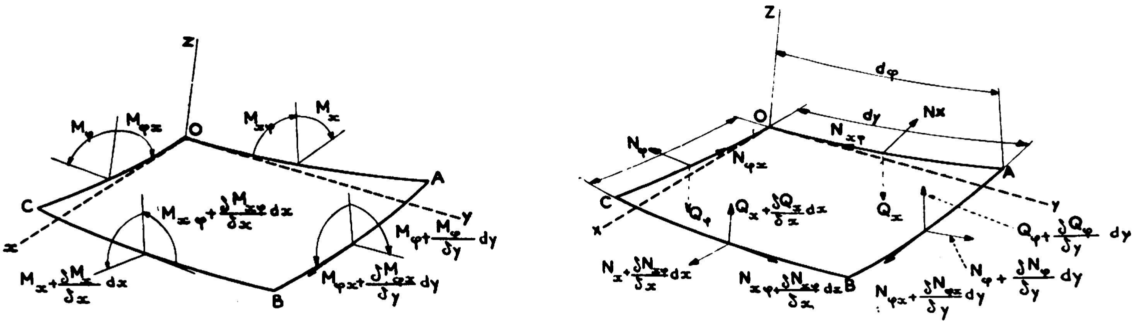
La Société des Grands Travaux de l'Est a fait preuve de beaucoup de largeur d'esprit scientifique et de libéralité en s'attachant depuis plusieurs années à résoudre complètement le problème, avec de larges moyens, pour l'ensemble de la profession des travaux publics.

La présente étude a pour objet d'indiquer le principe général d'une des méthodes de calcul que nous avons reçu l'autorisation de mettre directement au point avec elle dans le cadre de ces recherches d'ensemble.

II – ***Mise en equations.*** –

Soit un voile cylindrique mince d'épaisseur h, qui ait une longueur 21 dans le sens des génératrices.

Considérons un point O du voile, sa distance x (positive ou négative) au milieu de la longueur, et l'angle φ (positif ou négatif) de la tangente à la directrice au point O avec une direction de référence, qui peut être par exemple l'horizontale ou la tangente au sommet.



A *B*

FIG. 1

Désignations en chaque point O par:

R le rayon de courbure de la directrice, variable avec l'angle φ
N_x la traction par unité de longueur le long des génératrices
N_φ la traction par unité de longueur le long des directrices
$N_{x\varphi}$ le cisaillement par unité de longueur dans le plan tangent
Q_x l'effort tranchant par unité de longueur le long des directrices [1]
Q_φ l'effort tranchant par unité de longueur le long des génératrices [1]
M_x le moment fléchissant par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des directrices [2]
M_φ le moment fléchissant par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des génératrices [2]
$M_{x\varphi}$ le moment de torsion par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des génératrices [2]
$M_{\varphi x}$ le moment de torsion par unité de longueur dont l'axe est dans le sens des directrices [2]
u le déplacement élastique de long des génératrices [3]
v le déplacement élastique le long des directrices [3]
w le déplacement élastique le long de la normale à la surface du voile [4]
E le coefficient d'élasticité du matériau qui constitue le voile
μ le coefficient de dilatation transversale du même matériau (coefficient de Poisson)

---

[1] Le sens positif des efforts tranchants allant vers l'extrados du voile.

[2] Le sens positif des moments allant dans le sens où les moments s'opposent à toute augmentation de courbure du voile.

[3] Les déplacements u, v étant positifs dans le sens contraire à celui des tractions N_x, N_φ

[4] Les déplacements w étant positifs dans le sens qui va vers l'intrados du voile.

p_x, p_φ, p_z les composantes de la charge unitaire locale p (x, φ) suivant les génératrices, les directrices et les normales à la surface du voile (composantes qu'il est parfois tout indiqué de développer chacune en série de Fourier double).

L'on démontre dans les traités classiques que l'équilibre élastique du voile est régi en chaque point par le système de 12 équations aux derivées partielles, à 12 fonctions inconnues, suivant:

$$\frac{1}{R} N_\varphi + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = - p_z \tag{1}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{R} Q_\varphi = - p_\varphi \tag{2}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_x}{\partial \varphi} = - p_x \tag{3}$$

$$N_x = A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{R} w \right) \tag{4}$$

$$N_{x\varphi} = \frac{A}{2} (1 - \mu) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{5}$$

$$N_\varphi = A \left(\mu . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} w \right) \tag{6}$$

$$M_x = - B \left(\frac{\mu}{R^2} w + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{R^2} . \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \tag{7}$$

$$M_\varphi = - B \left(\frac{1}{R^2} w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \tag{8}$$

$$M_{x\varphi} = \frac{B}{R} (1 - \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \tag{9}$$

$$M_{\varphi x} = - \frac{B}{R} (1 - \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \tag{10}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} . \frac{\partial M_x}{\partial \varphi} \tag{11}$$

$$Q_\varphi = \frac{1}{R} . \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \tag{12}$$

en posant pour simplifier:

$$A = \frac{E\,h}{1-\mu^2} \qquad B = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\mu^2)}$$

Ce système d'équations est absolument général et il ne comporte aucune hypothèse restrictive: ni sur l'angle au centre, ni sur l'épaisseur du voile, ni sur le rapport entre la longueur et le diamètre, ni sur le coefficient d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau du voile, ni sur l'importance relative des efforts secondaires (moments fléchissants, moments de torsion, efforts tranchants) ni sur la nature et la rigidité des pignons et des rives, pourvu (comme le veut la théorie générale des voiles minces) qu'on puisse négliger les déplacements élastiques par rapport à l'épaisseur du voile et qu'on puisse négliger l'épaisseur elle-même par rapport au rayon.

III – *Méthode de résolution du système précédent.* –

Posons en première aproximation $Q_x = Q_\varphi = O$

L'équation (1) donne immédiatement:

$$N_\varphi = -R\,p_z$$

formule dans laquelle R représente une fonction connue de φ et p_z une fonction (également connue) de x et de φ.

L'équation (2) donne ensuite $N_{x\varphi}$ (par une dérivation par rapport à φ suivie d'une intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à:

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - p_\varphi$$

et puisqu'on connait déjà R, N_φ , p_φ

L'équation (3) donne N_x (par une deuxième opération du même genre) puisqu'elle équivaut à:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} - p_x$$

et puisqu'on connait déjà R, $N_{x\varphi}$, p_x

L'équation (4) donne u (par une combinaison avec l'équation (6) suivie d'une intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{A\,(1-\mu^2)} \cdot (N_x - \mu\,N_\varphi)$$

et puisqu'on connait déjà N_x, N_φ

L'équation (5) donne v (par une dérivation par rapport à φ suivie d'une d'une intégration par rapport à x) puisqu'elle équivaut à:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{A(1-\mu)} \cdot N_{x\varphi} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

et puisqu'on connait déjà R, u, $N_{x\varphi}$

L'équation (6) donne w (par une dérivation par rapport à x suivie d'une dérivation par rapport à φ) puisqu'elle équivaut à:

$$w = \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{R}{A(1-\mu^2)} \cdot (N_\varphi - \mu N_x)$$

et puisqu'on connait déjà R, v, N_x, N_φ

Les équations (7), (8), (9), (10) donnent M_x, M_φ, $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$ (en y remplaçant v, w par leurs expressions précédentes).

Et les équations (11), (12) donnent enfin Q_x, Q_φ puisqu'on connait déjà M_x, M_φ, $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$

Les expressions qu'on obtient ainsi pour Q_x, Q_φ ne cadrent pas tout à fait avec l'hypothèse de départ $Q_x = Q_\varphi = O$. L'on devrait donc les réintroduire dans le système (1) à (12) pour passer à la solution de deuxième approximation, et ainsi de suite indéfiniment jusqu'à tel degré d'approximation qu'on voudrait.

Mais ce serait une complication bien inutile. Il résulte en effet:

— des équations (11), (12) que Q_x, Q_φ sont du même ordre de grandeur que $\frac{1}{R} \times (M_\varphi$ ou $M_{\varphi x})$

— des équations (8), (10) que M_φ, $M_{\varphi x}$, sont du même ordre de grandeur que $\frac{B}{R^2} \times$ (v ou w)

— et des équations (4), (5), (6) que v, w sont du même ordre de grandeur que $\frac{R}{A} \times N_{x\varphi}$

Les efforts tranchants Q_x, Q_φ à réintroduire dans le système (1) à (12) pour passer à la solution de deuxième approximation sont donc du même ordre de grandeur que $\frac{B}{AR^2} \times N_{x\varphi}$ ou, ce qui revient au même, du même ordre de grandeur que $\frac{h^2}{12R^2}$ fois le cisaillement $N_{x\varphi}$ correspondant.

Or les équations de la théorie générale des voiles minces supposent implicitement qu'on puisse négliger le rapport $\frac{h}{R}$ devant l'unité.

Il est donc inutile d'encomber ces équations de termes correctifs (de deuxième approximation) dans lesquels on tiendrait compte du carré de ce rapport devant l'unité.

Et il suffit de s'en tenir en fin de compte à la solution (dite de première approximation) précédente pour obtenir une solution aussi complètement valable du problème que le degré d'approximation de la théorie générale des voiles minces le permet.

IV – *Remarques.* –

Le méthode précédente coïncide avec la méthode sommaire de la théorie de la membrane jusqu'à l'équation (3) incluse. Et c'est probablement pourquoi la méthode sommaire donne des résultats d'une exactitude surprenante dans certains cas.

Mais celle que nous proposons en diffère en ce sens qu'elle comporte 4 fonctions arbitraires au lieu de 2 pour répondre aux conditions aux limites: les 4 fonctions de φ qui résultent de l'intégration de $\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x}$, $\frac{\partial N x}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ au lieu de l'intégration de $\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x}$ et $\frac{\partial N_x}{\partial x}$ seulement.

Et ce nombre de fonctions arbitraires suffit généralement pour traiter la plupart des cas qu'on rencontre dans la pratique.

RÉSUMÉ

L'auteur s'est proposé de résoudre le système classique des 12 équations d'équilibre élastique et mécanique des voiles minces cylindriques, sans y apporter la moindre simplification, de façon à permettre d'apprécier l'influence — dans chaque cas particulier — des phénomènes considérés jusqu'ici comme négligeables et secondaires.

La méthode mise en oeuvre est une méthode d'intégration par approximations successives, dont l'hypothèse initiale est la nullité des efforts tranchants.

Cette méthode coïncide au départ avec la méthode de calcul sommaire classique de la théorie de la membrane, mais elle comporte en fin de compte un plus grand nombre de fonctions arbitraires pour répondre exactement aux conditions aux limites.

SUMMARY

The author solves the classical 12 equation-system of the elastic and mechanical equilibrium of the thin cylindrical shells, with no simplification whatever, in order to be able to judge, in each particular case, of the influence of phenomenae considered up to now as negligible or secondary.

This method is an integration method by successive approximations, the initial assumption of which is the nullity of the shearing forces.

This method coincides, initially, with the classical approximate method of calculation of the membrane theory, but includes in its final stage a greater number of arbitrary functions so as to exactly satisfy the boundary conditions.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser unternimmt die Lösung des klassischen Systems von 12 elastischen und mechanischen Gleichgewichtsgleichungen der dünnen Zylinderschalen, ohne die geringste Vereinfachung daran vorzunehmen. Damit ist es für jeden einzelnen Fall möglich, die bisher als nebensächlich und vernachlässigbar betrachteten Einflüsse abzuschätzen.

Die verwendete Methode ist eine Integrationsmethode nach dem Prinzip der fortschreitenden Annäherung, die auf der ursprünglichen Annahme verschwindend kleiner Querkräfte beruht.

Diese Methode stimmt zu Beginn mit dem vereinfachten klassischen Berechnungsgang der Membrantheorie überein, ergibt schliesslich aber eine grössere Anzahl von Integrationsfunktionen um den Grenzbedingungen genau genügen zu können.

RESUMO

O autor resolve o sistema clássico das 12 equações de equilíbrio elástico e mecânico dos invólucros delgados cilíndricos sem introduzir a mais pequena simplificação, de modo a tornar possível apreciar a influência, em cada caso particular, dos fenómenos até aqui considerados como desprezíveis e secundários.

O método utilizado é um método de integração por aproximações sucessivas, cuja hipótese inicial é a nulidade dos esforços cortantes.

Este método coincide no seu início com o método de cálculo sumário clássico da teoria da membrana, mas comporta no final um maior número de funções arbitrárias para satisfazer exactamente às condições nos limites.

Leere Seite
Blank page
Page vide