

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 5 (1956)

Artikel: Die statische Berechnung von zylindrischen Stahlbeton-Behältern auf
Grund der Bruchtheorie

Autor: Menyhárd, I.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5990>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II c 2

Die statische Berechnung von zylindrischen Stahlbeton- -Behältern auf Grund der Bruchtheorie

Cálculo estático baseado na teoria da rotura de um reservatório cilíndrico de betão armado

Calcul statique fondé sur la théorie de la rupture d'un réservoir cylindrique en béton armé

Statical calculation based upon the collapse theory of a reinforced cylindrical concrete tank

DR. I. MENYHÁRD

Budapest

1. Problemstellung.

Die statische Berechnung von gekrümmten dünnen Platten — Schalen — ist eines der schwierigsten Probleme der Elastizitätslehre. Die statische Berechnung von Trägern und Platten aus plastischem Material auf Grund der Bruchtheorie ermöglicht aber eine bedeutende Vereinfachung im Vergleich zu den Untersuchungen der Elastizitätslehre.

Die Anwendung der Bruchtheorie wird durch den Umstand erschwert, dass der Bruch der Schalen sich oft als Folge der ungenügenden Stabilität ergibt. Wenn aber unter den Schnittkräften der Schale die Druckkraft eine untergeordnete Rolle spielt, verliert die Frage der Stabilität seine Wichtigkeit und hiermit kann die Bruchtheorie schon auf Grund unserer heutigen Kenntnisse zur Anwendung kommen.

Um dies zu illustrieren, werden wir im Folgenden mit Hilfe der Bruchtheorie die statische Berechnung eines auf der unteren und oberen Fläche teilweise eingespannten kreiszylinderförmigen Flüssigkeitsbehälters durchführen. Die Beanspruchungen, die hierbei eine Rolle spielen, sind die Biegemomente in Richtung der Erzeugenden und die auf diese Richtung lotrechten Zugkräfte (Ringkräfte).

Hierbei werden wir uns auf die selben Annahmen stützen, wie die dies bezügliche Literatur. Diese Annahmen beziehen sich einerseits auf das in der Bruchtheorie eine bedeutende Rolle spielende Bruchbild, andererseits auf diejenigen Biegemomente, die in den Querschnitten beim

Bruch auftreten, die sogenannten Bruchmomente. Die Annahmen sind die folgenden:

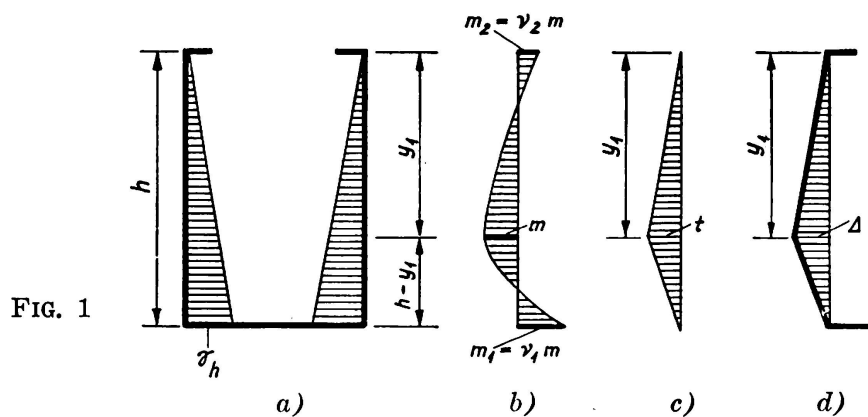
a.) Die von den Bruchlinien begrenzten Plattenteile (bezw. Flächenteile) bleiben nach der plastischen Deformation eben (bezw. von unveränderter Krümmung).

b.) Die die Bruchlinien kreuzenden Armierungseisen fließen und bei Platten mit konstanter Dicke und gleichmässig verteilter Armierung sind die Bruchmomente entlang dieser Linien ebenfalls konstant und unabhängig von der Grösse der plastischen Deformation.

c.) Man schliesst diejenigen Deformationen aus, für welche die Dehnung der Armierung die Verfestigungsgrenze überschreitet d. h. es soll keine grössere Stahlspannung als diejenige, die im Fliessbereich entstehen.

2. Die statische Berechnung auf Grund der Bruchtheorie.

Der Mantel des in Abb. 1a schematisch dargestellten kreiszylinderförmigen Eisenbetonbehälters ist mit der Bodenplatte und mit dem am oberen Rand befindlichen Versteifungsring verbunden. Die Bodenplatte und der Versteifungsring sichern die Ränder des Mantels gegen eine horizontale Verschiebung. Beide Elemente sind zur Aufnahme eines



negativen, vom Mantel übertragenen Biegemomentes von bestimmter Grösse fähig. Als gegebene äussere Belastung wirkt auf den Mantel ein dreieckförmig verteilter hydrostatischer Druck (Abb. 1a). Die Seitenwand des Behälters ist in der Richtung der Erzeugenden mit einer äusseren und inneren Bewehrung versehen, und ist fähig, ein positives Biegemoment von bestimmter Grösse m und Einspannungsmomente $m_1 = \nu_1 m$ bzw. $m_2 = \nu_2 m$ an dem unteren bzw. oberen Rande des Mantels aufzunehmen (Abb. 1b).

Der Mantel ist auch in tangentialer Richtung bewehrt. Diese Bewehrung dient zur Aufnahme von Ringzugkräften. Die Ringarmierung sei gemäss einem Dreieck (Abb. 1c) verteilt und so gewählt, dass die Bewehrung im Fliesszustande an der Stelle des grössten Armierungsgehaltes gerade zur Aufnahme der spezifischen Zugkraft t fähig ist. Die Spitze des Dreiecks liegt auf der später zu bestimmenden horizontalen Bruchlinie. Die Mantelfläche des kreiszylinderförmigen Behälters nimmt

beim Bruch die aus Abbildung 2 ersichtliche Form an, wobei die Erzeugenden gemäss der Abb. 1d gebrochen werden und damit verwandelt sich der Kreiszyylinder in zwei sich berührende stumpfe Kegel. Die Form des Bruchbildes wird also durch die am Mantelrand und an der Stelle des grössten positiven Moments auftretenden horizontalen Bruchlinien, sowie durch die dicht (theoretisch unendlich dicht) auftretenden vertikalen Bruchlinien charakterisiert. Die Lage der horizontalen Bruchlinie ist dabei noch unbekannt. Sie sei mit dem Parameter y_1 gekennzeichnet (Abb. 2).

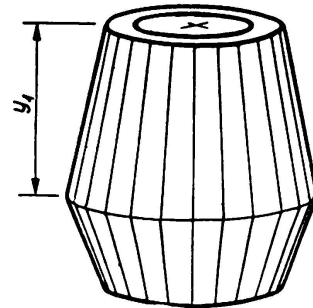


FIG. 2

Unser Endziel ist also, die statische Berechnung unter Benützung des jetzt beschriebenen Bruchbildes durchzuführen.

Als Grundlage zu dieser Berechnung diene die Tatsache, dass die äusseren Kräfte mit den inneren Kräften zusammen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen müssen. Die Gleichgewichtsbedingung sei durch das Arbeitsprinzip ausgedrückt, dass aussagt, dass die Arbeit L_a der äusseren Kräfte der Arbeit L_i der inneren Kräfte gleich ist. Im vorliegenden Falle ist

$$(1) \quad L_a = 2 \pi r \gamma \Delta \left[\int_0^{y_1} \frac{y^2}{y_1} dy + \int_{y_1}^h \frac{y(h-y)}{h-y_1} dy \right] = \frac{\pi r \gamma \Delta h}{3} (y + y_1),$$

$$(2) \quad L_i = 2 \pi r \Delta \left[\frac{y_1 (v_1 - v_2) + h (1 + v_2)}{y_1 (h - y_1)} m + \frac{h}{3r} t \right].$$

Die Grössen γ , r , h , und Δ sind aus den Abbildungen 1 a-d ersichtlich.

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt sich eine Gleichung, woraus γ sich berechnen lässt. Damit erhalten wir

$$(3) \quad \gamma = \frac{6 (1 + v_2) m}{h^5} \frac{(\eta K + 1)}{\eta (1 - \eta) (\mu + \eta)} = \frac{6 (1 + v_2) m}{h^5} \frac{1}{\varrho},$$

worin

$$(4) \quad K = \frac{v_1 - v_2}{1 + v_2}, \quad \mu = 1 - \frac{2t}{\gamma r h}, \quad \eta = y_1 / h$$

und

$$(5) \quad \varrho = \frac{\eta (1 - \eta) (\mu + \eta)}{\eta K + 1}$$

ist.

In der Formel (3) ist der Parameter η , welcher an Stelle von y_1 eingeführt wurde, noch unbekannt.

Die Gleichung (3) bedeutet folgendes: an einer durch η charakterisierten Stelle wird ein Biegemoment von der Grösse m (d. h. der Bruch) dann auftreten, wenn die Belastung γ den Wert (3) annimmt, (vorausge-

setzt, dass an den anderen Stellen der Biegungswiderstand hinreichend gross ist, um den Bruch zu verhindern). Da aber eine konstante Wanddicke und eine gleichmässig verteilte, vertikale Bewehrung vorausgesetzt wird und hiermit der Biegungswiderstand auch an anderen Stellen gleich m ist, wird der Bruch an jenem Ort auftreten, wo γ als Funktion von η seinen Minimalwert erreicht.

Um η zu ermitteln, muss man folglich die Gleichung

$$\frac{d\gamma}{d\eta} = 0$$

benützen, oder ausführlich geschrieben und nach K aufgelöst

$$(6) \quad K = \frac{\eta(2 - 3\eta) + \mu(1 - 2\eta)}{\eta^2(2\eta + \mu - 1)}.$$

Die geometrische und statische Grössen nehmen beim Bruch solche Werte an, welche die Gleichungen (3), (6) erfüllen. Man wird diese zwei Gleichungen, entsprechend der gegebenen Aufgabe, in einer modifizierten Form verwenden. Sind z. B. ausser den geometrischen Grössen die Werte K und μ gegeben und will man m berechnen, so schreiben wir die Gleichung (3) in folgender Form an:

$$(7) \quad m = \frac{\gamma h^5}{6(1 + \nu_2)} \frac{\eta(1 - \eta)(\mu + \eta)}{\eta K + 1} = \frac{\gamma h^5}{6(1 + \nu_2)} \rho$$

Wir haben also zwei Gleichungen, nämlich die Gleichung (6) und die Gleichung (3) oder (7). Die erste von diesen ist von dritten Grade in η . Das Auflösen der Gleichungen wird durch die Benützung der Abbildungen 3a und 3b erleichtert. In Abb. 3a ist η als Funktion von K und μ , in Abb. 3b μ als Funktion von K und ρ dargestellt.

Beschränken wir uns auf die praktischen Fälle

$$-0,4 < \mu < 0,6 \quad \text{und} \quad 0,4 < K < 4,$$

so liefern die Formeln

$$(8) \quad \rho = 0,85 \frac{0,73 - \mu}{(1,62 + 0,62\mu + K)(2,62 - \mu)},$$

$$(9) \quad \mu = 14,7 \frac{(1,5 + K)\rho - 0,226}{(1,5 + K)(1,9 + K)\rho + 4,41},$$

$$(10) \quad \eta = 0,24 \frac{4,08 + \mu}{1,62 + \mu} + 0,11 \frac{1,5 - K}{2,5 + K} (0,75 + \mu)$$

eine gute Näherungslösung. Punkt 3 bezieht sich auf die Benützung der Abbildungen 3a, 3b und der Formeln (8), (9), (10).

Bemerkung: Bei der Herleitung der Formel (2) haben wir den Umstand ausser Acht gelassen, dass die in den kleinen oberen und unteren Partien des zylindrischen Mantels befindliche Ringbewehrung die Streckgrenze noch nicht erreicht und somit die Spannung hier kleiner als die Fließspannung ist. Der infolge dieser Vernachlässigung

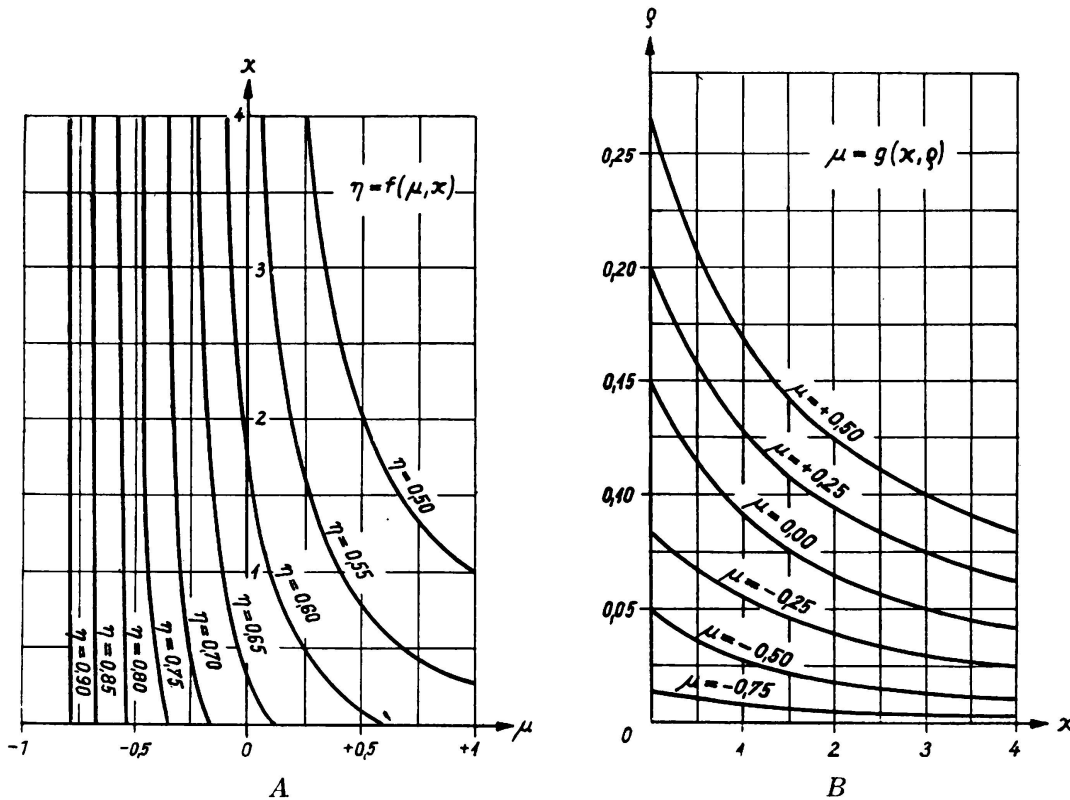


FIG. 3

entstehende Fehler in unserer Berechnung ist aber vernachlässigbar klein, da nach unserer Annahme der Armierungsgehalt der Ringbewehrung dreieckförmig variiert.

3. Rissfreiheit. Wahl der Bewehrung.

Für den Gebrauch der Flüssigkeitsbehälter ist die Rissfreiheit meistens eine unerlässliche, oder wenigstens wichtige Bedingung. Was das Entstehen der Haarrisse anbelangt, verhalten sich die auf Biegung beanspruchten Eisenbetonkonstruktionen wie elastische, aber gleichzeitig spröde Körper, d. h. dem Auftritt der Haarrisse geht kein plastische Formänderung voraus und die Rolle der Bewehrungsstäbe ist im Hinblick auf die Vermeidung der Haarrisse unbedeutend. Hieraus folgt, dass im Falle einer erforderlichen Rissfreiheit die Wanddicke des Behälters aus den nach der Elastizitätstheorie berechneten Beanspruchungen zu ermitteln ist, wobei auf die Zugfestigkeit des Betons Rücksicht genommen werden muss. Die Bewehrung des Behälters ist vor allem deshalb

notwendig, dass in folge eines unvorgesehenen Risses kein plötzlicher Zusammenbruch entsteht. Dies ist die Sicherheitsforderung gegen Bruch.

Demgemäss kann die Stärke der Bewehrung (die Menge der Bewehrungsstäbe) auf Grund der Bruchtheorie errechnet werden.

Wie wir im Vorausgegangenen gesehen haben, werden in der Bruchtheorie — im Gegensatz zu der Elastizitätstheorie — bestimmte Werte der Beanspruchungen, in unserem Falle die Kräfte in der Ringrichtung und die Biegemomente in der Richtung der Erzeugenden, durch funktionelle Zusammenhänge ersetzt. Dies bedeutet, dass wir aus einer Menge von Bewehrungssystemen auswählen können. Wir könnten z. B. im Sinne der Bruchtheorie, einen Flüssigkeitsbehälter ohne Ringbewehrung entwerfen; in diesem wird die Belastung nur von der Längsbewehrung getragen. Analog könnten alle Kräfte von der Ringbewehrung aufgenommen und sämtliche, den Biegemomenten entsprechende Längsbewehrungsstäbe weggelassen werden. Selbstverständlich sind solche extreme Anordnungen der Bewehrung nicht vorteilhaft und es scheint zweckmässig das folgende Verfahren anzuwenden. Nachdem die Wanddicke des Mantels aus der Bedingung der Rissefreiheit schon ermittelt worden ist, soll die Menge der Längsbewehrungsstäbe einerseits dem in den offiziellen Stahlbetonbestimmungen festgesetzten Wert entsprechen, andererseits den aus konstruktiven Gründen erforderlichen Werten genügen. (So beträgt z. B. — nach den ungarischen Bestimmungen — im Falle der Anwendung eines Betons mit 200 kg/cm^2 Würfelfestigkeit und einem Stahl mit einer Streckgrenze von 24 kg/mm^2 die minimale Bewehrung an der Stelle des grössten Biegemoments, $0,25\%$ der Betonfläche). Das grösste Biegemoment tritt im Allgemeinen im unteren Einspannungsquerschnitt der Mantelwand auf, demgemäss wählt man als vertikale Bewehrung auf der inneren Seite der Mantelfläche das in den Bestimmungen vorgeschriebene Mindestmass.

Was die an der äusseren Seite des Mantels anzubringende Bewehrung anbelangt, ist es zweckmässig diese nicht kleiner als die Hälfte der Minimalbewehrung anzunehmen. Und wenn auch schon jene Frage entschieden ist, ob am oberen Rande des Mantels eine Einspannung bis zu einem gewissem Grade berücksichtigt wird, bleibt dann nur noch die Lage der mittleren Bruchlinie und der notwendige Armierungsgehalt der Ringbewehrung zu bestimmen.

Nach den obigen Ausführungen wird der Rechnungsgang in einem Falle, wo der Mantel des Behälters unten eingespannt, oben frei drehbar und unverschieblich ist, der Folgende sein:

Die konstante Manteldicke wird so gewählt, dass die Forderung der Rissfreiheit erfüllt ist. Verwenden wir gemäss der vorherigen Erörterungen eine, den Vorschriften entsprechende minimale Längsbewehrung auf der inneren Seite des Mantels, und deren Hälfte auf ihrer äusseren Seite, so haben wir mit den Bezeichnungen der Abb. 1b

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_2 = 0$$

und gemäss (4)

$$K = \frac{v_1 - v_2}{1 + v_2} = 2 \quad ,$$

weil die Biegetragfähigkeit $m_1 = v_1 m$ des Mantels an seinem unteren Rande doppelt so gross ist, wie seine Biegetragfähigkeit für positive Momente. Aehnlicherweise ist $m_2 = v_2 m$ gleich Null.

Die letztere Behauptung folgt aus der Voraussetzung, dass der obere Mantelrand keinen Biegungswiderstand leistet.

Aus der Manteldicke und aus der Stärke der äusseren Bewehrung lässt sich die positive Biegetragfähigkeit m berechnen, hieraus und aus Formel (7) ergibt sich

$$(11) \quad \rho = \frac{6m(1+v_2)}{\gamma h^3}$$

Wenn man ρ und K kennt, kann man den Wert μ aus Abb. 3a ablesen oder aus der Formel (9) berechnen, woraus der Betrag der Spezifischen Ringkraft gemäss Formel (4) sich zu

$$(12) \quad t = \frac{\gamma r h (1 - \mu)}{2}$$

ergibt (Abb. 1d).

Und schliesslich ist der Wert $\eta = y_1/h$ unter Benützung von ρ und μ aus der Abb. 3b zu entnehmen oder mittels der Formel (10) zu berechnen. Damit ist die Lage der Bruchlinie, d. h. die Lage des grössten Armierungsgehaltes der Ringbewehrung bestimmt.

ZUSAMMENFASSUNG

Unter den Schalen bildet der kreiszylindrische Behälter ein klassisches Beispiel, für dessen statische Berechnung die Bruchtheorie leicht anwendbar ist, da sein Kräftespiel äusserst einfach und seine Tragfähigkeit nicht durch Knicken gefährdet ist.

Die Abhandlung beschreibt ein Verfahren für die im Titel angegebene Berechnung. Das Verfahren beruht einerseits auf der Benützung der auf den Abbildungen 1d und 2 dargestellten Bruchfiguren, andererseits auf den üblichen Annahmen der Bruchtheorie. Die kinematische Betrachtung des Bruchvorganges führt zu einer Gleichung, die das Arbeitsprinzip ausdrückt, wonach die Arbeit der äusseren Kräfte der Arbeit der inneren Kräfte gleich ist. Dieses Gleichgewichtsprinzip wird dann mit einer Minimalforderung verknüpft. Hiermit ergeben sich Gleichungen, die zur Berechnung der unbekanntem statischen und geometrischen Grössen nötig sind.

RESUMO

O depósito cilíndrico constitui um exemplo clássico de um invólucro em cujo cálculo se pode empregar facilmente a teoria da rotura, dado que a distribuição dos esforços tem uma forma extremamente simples e que a resistência do mesmo não é afectada por discontinuidades de forma.

O autor descreve um processo de cálculo estático de um reservatório cilíndrico de betão armado. Este método baseia-se por um lado no emprego do diagrama de rotura indicado nas figuras 1d e 2, e por outro nos princípios da teoria da rotura. O estudo cinemático da rotura, permite estabelecer uma equação que traduz o princípio da igualdade dos trabalhos, pelo que o trabalho das forças interiores tem de ser igual ao das forças exteriores. Este princípio de equilíbrio tem de obedecer a uma condição de valor mínimo. Obtêm-se assim equações que permitem calcular as incógnitas estáticas e geométricas.

S U M M A R Y

Cylindrical tanks are classical examples of shells for the analysis of which the collapse theory can be easily used due to their very simple stress distribution and the fact that their resistance is not affected by shape discontinuity.

The author describes a method of statical analysis of a reinforced concrete cylindrical tank. This method is based on the use of the collapse diagram shown on figures 1d and 2 and on the principles of the collapse theory. The kinematic study of collapse leads to an equation expressing the principle of equality of works, by which the work of the internal forces must be equal to that of the external ones. This principle of equilibrium must obey a minimum value condition. Equations are thus obtained allowing the calculation of the static and geometric unknown quantities.

R É S U M É

Le réservoir cylindrique est un exemple classique d'un voile pour le calcul duquel on peut appliquer sans difficulté la théorie de la rupture, grâce à la forme extrêmement simple de la distribution des efforts et au fait que sa résistance n'est affectée par aucune discontinuité de forme.

L'auteur décrit une méthode de calcul statique d'un réservoir cylindrique en béton armé. Cette méthode se fonde d'une part sur l'emploi du diagramme de rupture indiqué aux figures 1d et 2, et d'autre part sur les principes de la théorie de la rupture. L'étude cinématique de la rupture conduit à une équation qui traduit le principe de l'égalité des travaux, par lequel le travail des forces intérieures doit être égal à celui des forces extérieures. Le principe d'équilibre doit ensuite à une condition de valeur minimum. On obtient ainsi des équations permettant de calculer les inconnues statiques et géométriques.