Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Artikel: Deux problèmes relatifs à l'étude des portiques étagés multiples

Autor: Dubas, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6974

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III a 2

Deux problèmes relatifs à l'étude des portiques étagés multiples

Zwei theoretische Untersuchungen an mehrstieligen Stockwerkrahmen

Two Problems Relating to the Design of Framed Tier Buildings

PIERRE DUBAS
Dr sc. techn., Chargé de cours à l'E. P. F., Zurich, Ingénieur aux Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey

Introduction

Dans la présente contribution, nous traiterons deux problèmes, fort différents certes, mais qui concernent tous deux l'étude des ossatures métalliques à étages.

Nous considérerons d'abord l'influence de l'allongement ou du raccourcissement des montants sous l'effet des efforts axiaux. Comme cette influence est souvent négligée en pratique, il nous a semblé intéressant de présenter quelques résultats numériques et de tenter d'en dégager des conclusions générales.

Nous examinerons ensuite un nœud de portique étagé et nous essayerons de déterminer aussi exactement que possible la distribution des contraintes dans l'âme, à l'aide de la théorie de l'élasticité plane. Les conditions au contour seront données à la fois sous forme de contraintes (problème aux tensions) et sous forme de conditions de compatibilité entre les allongements spécifiques des divers éléments en présence (problème aux déformations). Nous chercherons, ici aussi, à généraliser les résultats numériques obtenus.

Influence des déformations dues aux efforts axiaux sur les sollicitations des portiques étagés multiples

Le calcul des cadres étagés multiples ne pose plus de problème de principe. De nombreux procédés ont été proposés, généraux ou spéciaux[1]), mais qui

[1]) On consultera, par exemple, M. Beschkine, Les méthodes américaines de calculs hyperstatiques, Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Circulaire

finalement se rattachent tous, plus ou moins directement, à la méthode dite des déformations. Cette méthode est en effet spécialement indiquée pour les ossatures hautement hyperstatiques, puisque le nombre des déformations inconnues — angles de rotation des nœuds et de translation des étages — est nettement moins élevé que le degré d'indétermination du système.

Que l'on écrive explicitement les équations d'équilibre [2]) ou que l'on utilise un des nombreux procédés de relaxation ou d'itération, la méthode des déformations ne permet cependant pas — sans des complications qui lui feraient perdre la plus grande partie de ses avantages — de tenir compte directement de l'effet de l'allongement ou du raccourcissement des montants et des traverses [3]). Il est par contre aisé de déterminer cette influence dans un calcul complémentaire, à partir des efforts axiaux ressortant du calcul principal. Pour améliorer la précision, on procédera par approximations successives, en considérant chaque fois les efforts axiaux correctifs de l'étape précédente.

Les déformations axiales n'affecteront la répartition des sollicitations que dans les ossatures élancées, pour lesquelles les efforts axiaux des traverses sont pratiquement négligeables par rapport à ceux des montants. Les déformations d'un étage quelconque sont donc celles données à la fig. 1, les angles ζ étant

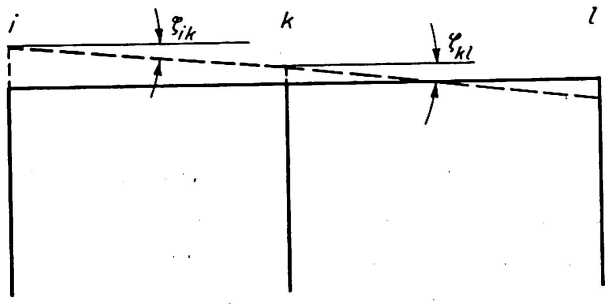

Fig. 1. Rotations ζ sous l'influence des déformations.

déterminés géométriquement à partir de l'allongement (ou du raccourcissement) cumulé des montants jusqu'à l'étage considéré, et de la longueur des traverses.

Les rotations ζ connues peuvent être introduites dans les équations expri-

---

Série I, No 33, Paris, 1947, ou G. Worch, Rahmenberechnung so oder so, Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 12, Stahlbau-Tagung München 1952, W. Dorn, Bremen-Horn, 1952.

[2]) Comme ces équations sont bien connues, nous renonçons à les reproduire ici. On consultera, par exemple, F. Stüssi, Baustatik II, Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1954.

[3]) Il pourrait donc sembler étrange que la méthode des déformations, à l'origine, ait été appliquée au problème des contraintes secondaires des treillis (O. Mohr, 1892), puisque les flexions des barres des treillis sont provoquées justement par les déformations axiales. Il ne faut cependant pas oublier que les efforts axiaux des treillis dépendent peu des flexions secondaires et qu'on peut ainsi les introduire directement dans le calcul.

mant l'équilibre des moments agissant dans un nœud. Au nœud k, par exemple, on obtient [4]):

$$\begin{array}{c} 2\lambda_{hk}\bar{\varphi}_h \\ 2\lambda_{ik}\bar{\varphi}_i + 4(\lambda_{ik}+\lambda_{hk}+\lambda_{km}+\lambda_{kl})\bar{\varphi}_k + 2\lambda_{kl}\bar{\varphi}_l \\ 2\lambda_{km}\bar{\varphi}_m \end{array} \begin{array}{c} -6\lambda_{hk}\bar{\psi}_{hk} \\ \\ -6\lambda_{km}\bar{\psi}_{km} \end{array} \qquad (1)$$

$$= 6\lambda_{ik}\bar{\zeta}_{ik} + 6\lambda_{kl}\bar{\zeta}_{kl}.$$

Les équations exprimant l'équilibre des efforts transversaux ne comportent par contre pas de termes connus, ceci naturellement dans le calcul complémentaire seulement. Les angles inconnus $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ sont aisés à déterminer, puisque le système d'équations linéaires a déjà été résolu pour le calcul principal et que seuls les termes connus subissent un changement [5]).

Nous allons examiner maintenant les résultats numériques obtenus lors du calcul de deux portiques étagés. Il s'agit des cadres de contreventement principaux d'un bâtiment comportant actuellement six étages seulement, mais prévu pour recevoir plus de vingt étages supplémentaires [6]).

Le premier des cadres étudié est sollicité par des charges horizontales, provenant du vent soufflant sur les façades de la surélévation future. Au dernier étage de la construction actuelle agissent donc un effort résultant horizontal et un moment d'excentricité, remplacé par un couple d'efforts verticaux, égaux et opposés, dans l'axe des montants extérieurs.

Pour résoudre le problème, on a tout d'abord établi [7]) les 28 équations linéaires liant les 21 rotations $\bar{\varphi}$ des nœuds et les 7 déplacements $\bar{\psi}$ des étages. Le système a été résolu à l'aide de l'algorithme de GAUSS, ce qui, avec une machine à calculer ordinaire, se fait en quelques heures si l'on écrit les inconnues dans un ordre judicieux [8]). Il est ensuite aisé de déterminer les moments aux nœuds, permettant de tracer le diagramme représenté en traits discontinus à la fig. 2. Les efforts axiaux N dans les montants, ou plutôt les contraintes axiales correspondantes N/F sont également indiquées. Ces contraintes définissent à leur tour les allongements des montants, c'est-à-dire les angles ζ (fig. 1)

---

[4]) Le nœud k est entouré, à droite et à gauche, des nœuds l et i, en haut et en bas, des nœuds h et m. On a posé $\bar{\varphi} = EJ_c\,\varphi$, $\bar{\psi} = EJ_c\,\psi$, où J_c représente un moment d'inertie de comparaison. Enfin on a $\lambda = \dfrac{J}{lJ_c}$.

[5]) Dans les procédés de relaxation, il faudra naturellement recommencer l'itération dès le début.

[6]) Une description de ce bâtiment est donnée dans l'article suivant: CH. DUBAS, Extension du Palais des Nations à Genève, L'Ossature Métallique, 1951, p. 531.

[7]) Les longueurs des divers éléments ressortent de la figure 2. Quant aux sections, ce sont les suivantes: montants extérieurs et intermédiaires, 2 DIN 50 sur les quatre premiers étages et 2 DIE 50 sur les trois derniers; montants intérieurs, DIN 75 puis DIE 75; traverses, du bas vers le haut, DIE 45, DIE 50, DIE 50, DIE 50, DIE 45, DIE 45, DIE 45.

[8]) Voir notamment F. STÜSSI, op. cit. à la note 2, p. 262.

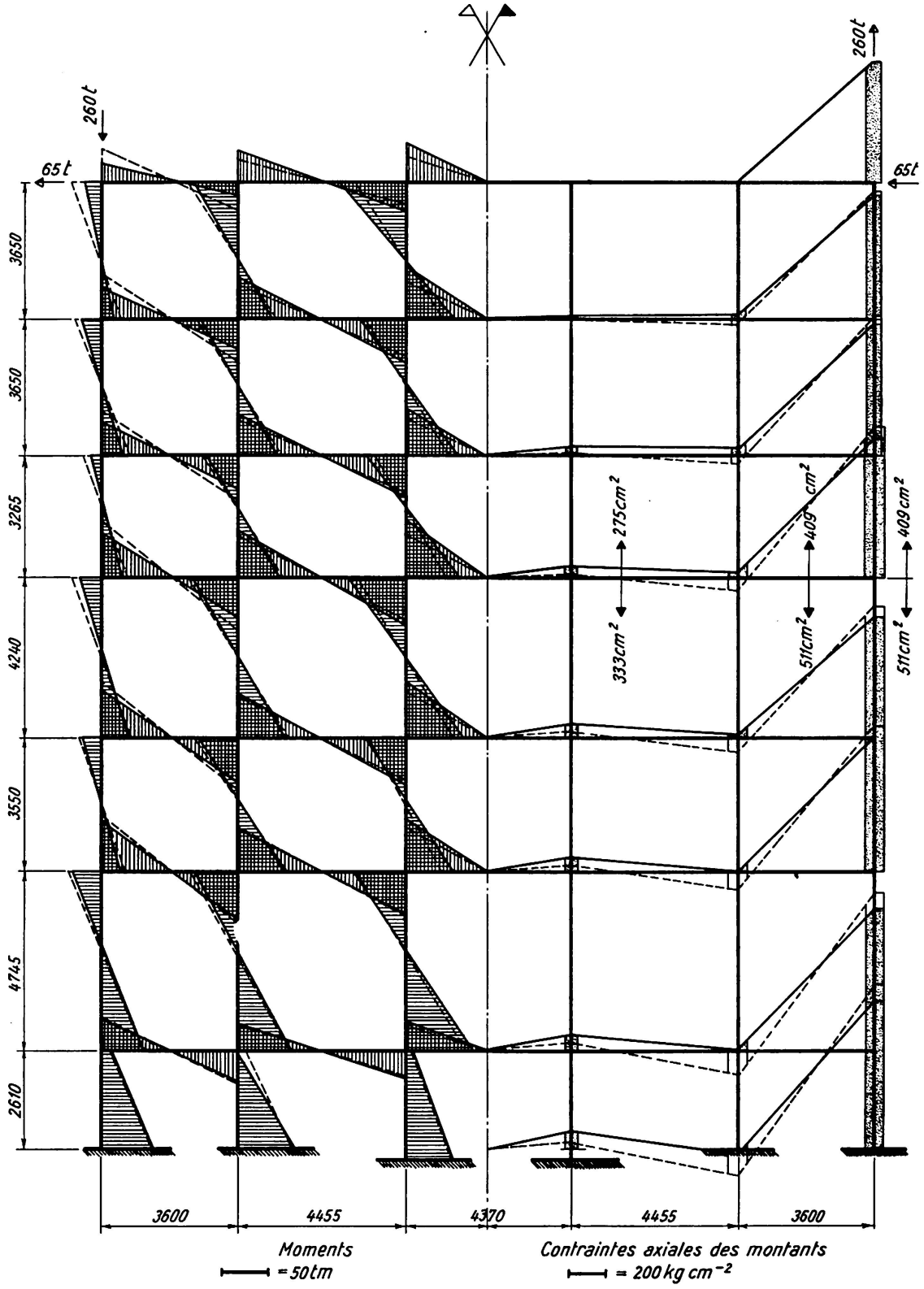

Fig. 2. Portique soumis à des charges horizontales.

– – – Sollicitations calculées sans l'influence des efforts axiaux.
—— Sollicitations calculées avec l'influence des efforts axiaux.

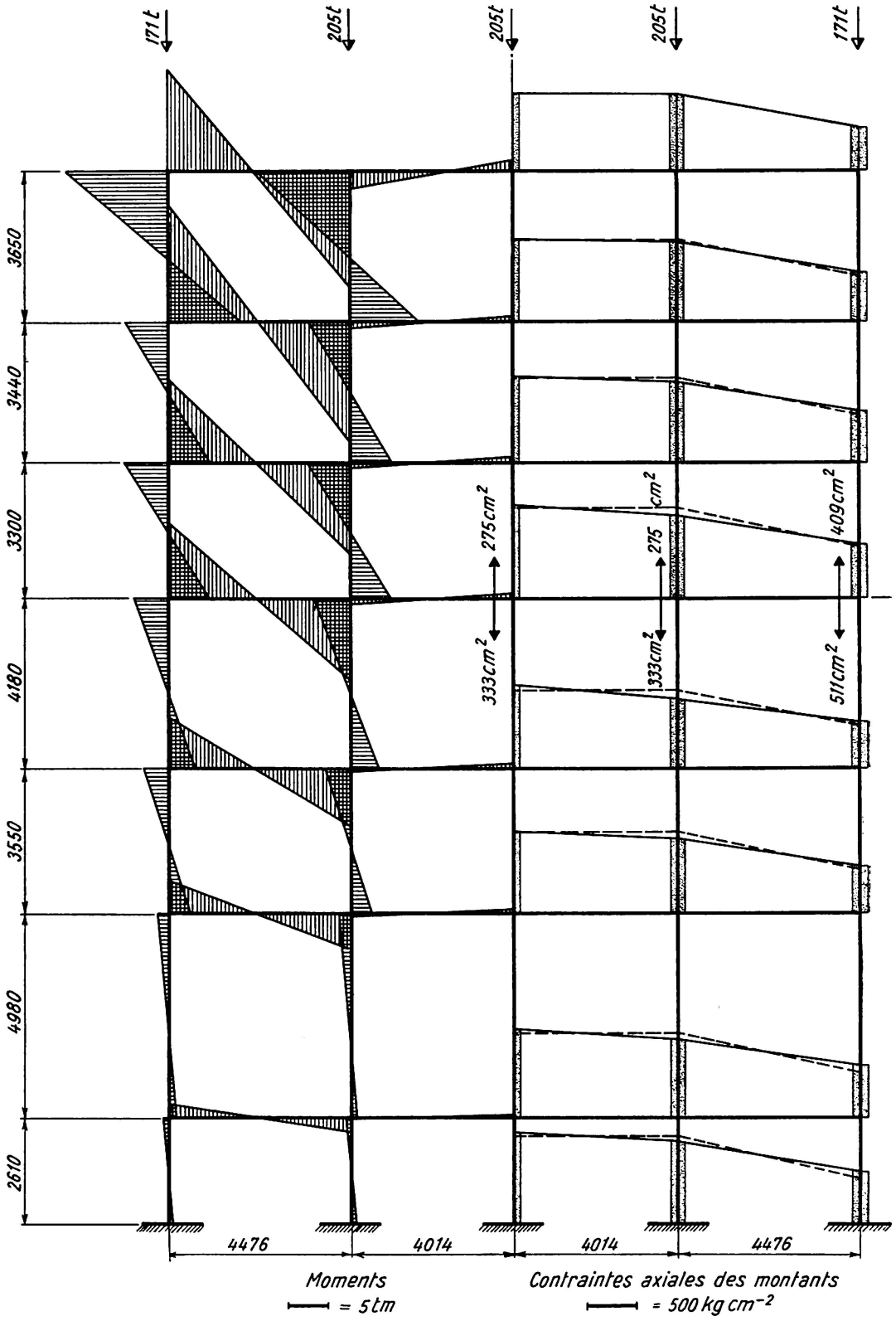

Fig. 3. Portique soumis à des charges verticales agissant dans l'axe des montants.

– – – Sollicitations calculées sans l'influence des efforts axiaux.
—— Sollicitations calculées avec l'influence des efforts axiaux.

et par là, les termes connus du système pour le calcul complémentaire. Par superposition, on obtient finalement les moments définitifs et les contraintes axiales correspondantes (fig. 2, en traits pleins).

Sous l'influence des déformations axiales, les moments diminuent donc dans les éléments extérieurs et s'accroissent dans les éléments intérieurs du portique. Cet effet est le plus marqué dans la partie supérieure de l'ossature. Quant aux contraintes axiales, elles tendent, pour une section horizontale à travers l'ensemble du cadre, à moins s'éloigner d'une répartition linéaire[9]); la différence reste cependant importante. Ceci s'explique facilement si l'on assimile l'ensemble du portique à une poutre en console fléchie, très déformable sous l'action des efforts tranchants transversaux, puisque ceux-ci, comme dans un *Vierendeel*, ne peuvent être repris que par flexion des montants et traverses. Dans une poutre pleine, d'élancement normal, la répartition linéaire conforme à la loi de BERNOULLI-NAVIER est pratiquement réalisée, car l'influence des efforts tranchants est négligeable. Dans un portique, au contraire, les déformations axiales des montants ne prévaudront sur celles provoquées par les flexions dues aux efforts transversaux que si l'élancement est très grand.

La fig. 3 représente un portique soumis à des charges verticales axiales. Le calcul ordinaire ne donne ici aucun moment. En tenant compte des raccourcissements, on obtient par contre des flexions importantes, de l'ordre du quart de celles causées par le vent. Ici encore, les contraintes axiales tendent à se répartir linéairement.

Bien que les fig. 2 et 3 correspondent à des cas particuliers, elles permettent cependant d'émettre les considérations générales suivantes:

Les déformations axiales des montants affectent sensiblement les sollicitations des portiques multiples. L'influence est d'autant plus marquée que le portique est plus élancé. De plus, dans une section horizontale de l'ensemble du cadre, la répartition des contraintes axiales des montants s'écarte moins de la loi linéaire admise dans la flexion des poutres.

Calcul d'un nœud de portique à l'aide de la théorie de l'élasticité plane

Données générales

Dans les portiques étagés multiples, les nœuds à l'intersection des traverses et des montants posent des problèmes à la fois constructifs et théoriques. Nous ne retiendrons ici que l'aspect théorique, en étudiant le nœud schématisé de la fig. 4.

Les moments M des quatre barres concourant au nœud sont admis égaux et opposés deux à deux. Cette condition est pratiquement réalisée pour les

[9]) Les contraintes axiales sont bien entendu, par définition, réparties uniformément sur la section des montants; nous parlons ici de la répartition sur l'ensemble du portique.

nœuds intérieurs des portiques sollicités par des charges horizontales (fig. 2). Nous supposons par ailleurs que les barres sont soumises à de la flexion pure, sans efforts tranchants [10]) ni efforts normaux.

Les dimensions principales admises pour le calcul ressortent de la fig. 4. On remarquera que les âmes, à l'extérieur, sont renforcées, sur une longueur égale à la moitié de la hauteur de l'âme, à la même épaisseur t que l'âme du nœud. La section de chaque aile vaut $0{,}75\, a\, t$ et l'effort correspondant environ $0{,}75\, a\, t\, \sigma$ [11]).

Nous pouvons étudier séparément la transmission des efforts des âmes (cas I de la fig. 4) et celle des efforts des ailes (cas II de la fig. 4).

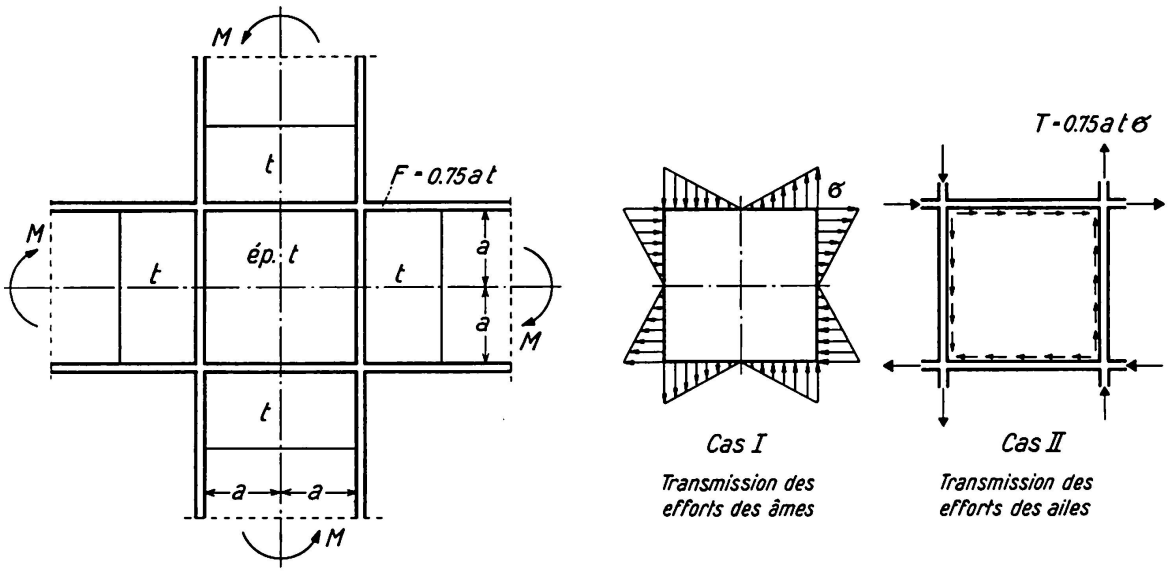

Fig. 4. Problème étudié. Séparation des sollicitations.

Cas I. Transmission des efforts des âmes

Nous admettons que la répartition des contraintes de flexion des âmes obéit, même au droit du nœud, à la loi linéaire de NAVIER. En toute rigueur, cette répartition devrait être calculée à partir des conditions de connexion, exprimant que les déformations des diverses âmes, perpendiculairement à leur contour, doivent être compatibles [12]).

---

[10]) Nous montrerons en fin de cette étude comment tenir compte de ces efforts.

[11]) Cet effort devant se transmettre à l'âme du nœud sur une longueur égale à a, la contrainte moyenne de cisaillement s'élèvera à $0{,}75\ \sigma$. Cette valeur est relativement élevée, mais il faut remarquer que la contrainte de flexion σ est sensiblement inférieure à σ_{adm} ; en effet, la section est renforcée près du nœud. D'autre part on aura généralement, en plus de la flexion, des efforts axiaux, ce qui limite la contrainte σ, surtout dans les montants.

[12]) Comme le montrera le résultat final, la solution que nous allons développer satisfait pratiquement aux conditions de compatibilité.

Puisque les contraintes sur les bords de l'âme du nœud sont données (ou plutôt admises), il suffit d'en étudier la répartition à l'intérieur: on a un problème aux tensions de l'élasticité plane.

En introduisant la fonction de tension d'AIRY F, on peut exprimer les contraintes par les relations suivantes:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{3}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}. \tag{4}$$

Le problème est alors régi par l'équation aux dérivées partielles bien connue [13]):

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{5}$$

La disposition des tensions au contour impose, de toute évidence, des contraintes σ_x et σ_y nulles le long des axes x et y. Il suffit dès lors de considérer le premier quadrant du carré (fig. 5).

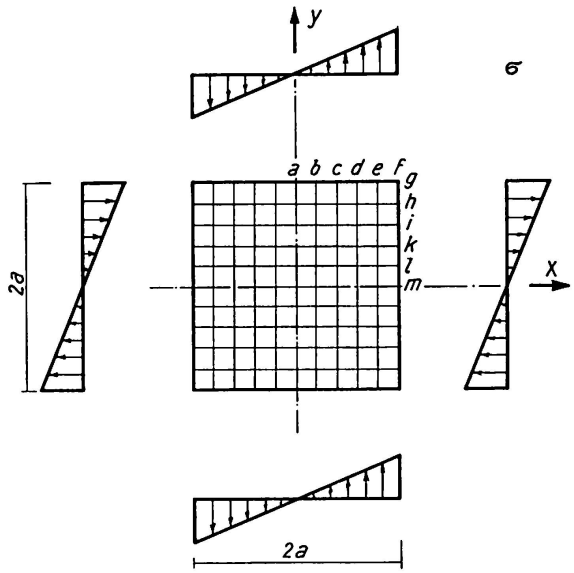

Fig. 5. Cas I. Système et réseau pour le calcul numérique.

Les conditions au contour sont les suivantes:

pour $x = a$: $$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sigma \frac{y}{a},$$

pour $y = a$: $$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sigma \frac{x}{a},$$

[13]) Voir notamment S. TIMOSHENKO, Théorie de l'Elasticité, Béranger, Paris et Liége, 1936, p. 27, ou K. GIRKMANN, Flächentragwerke, Springer, Wien, 1946, p. 21.

pour $x = a$ et $y = a$: $$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0$$

où σ désigne la contrainte maximum, au coin.

Pour remplir ces conditions on peut choisir

pour $x = a$: $$F = \sigma\left(\frac{y^3}{6a} - \frac{ay}{2}\right); \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

pour $y = a$: $$F = \sigma\left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{2}\right); \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Pour trouver une solution de l'équation (5), nous avons eu recours à un procédé numérique, dérivé de la méthode du polygone funiculaire du professeur F. STÜSSI[14]). Il n'existe en effet à notre connaissance aucune fonction mathématique simple qui satisfasse à la fois à l'équation (5) et aux conditions au contour (6) et (7).

Le réseau choisi pour le calcul numérique est indiqué à la fig. 5. Des schémas appropriés[15]) permettent d'établir un système d'équations linéaires, dont les inconnues sont les ordonnées de la fonction d'AIRY F aux divers points intérieurs du réseau. En écrivant le système, on tient compte des conditions

Cas I. Equations linéaires pour les ordonnées intérieures F.

$F_{b,l}$	$F_{b,k}$	$F_{b,i}$	$F_{c,k}$	$F_{c,i}$	$F_{d,i}$	$F_{b,h}$	$F_{c,h}$	$F_{d,h}$	$F_{e,h}$	Termes connus
1732	-1216	136	-32	64	4	—	—	—	—	—
-1216	3536	-1152	-1152	80	64	136	64	8	—	—
136	-1152	3608	-64	-1088	144	-1216	-64	64	—	-27,648
-32	-1152	-64	1872	-1152	-32	64	144	64	4	—
64	80	-1088	-1152	3680	-1152	-56	-1088	80	64	-52,992
4	64	144	-32	-1152	1872	64	-64	-1152	-32	-72,394667
—	136	-1185	64	-124	51	3768	-768	120	—	157,248
—	64	-132	144	-1070	-132	-768	3896	-717	120	301,824
—	8	51	64	12	-1134	120	-704	3756	-768	368,317333
—	—	—	4	51	-90	—	120	-765	1908	386,349333

[14]) F. STÜSSI, Entwurf und Berechnung von Stahlbauten, Erster Band, Grundlagen des Stahlbaues, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958, p. 220; F. STÜSSI, Ausgewählte Kapitel aus der Theorie des Brückenbaues, Schleicher, Taschenbuch für Bauingenieure, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955, p. 962. On consultera également PIERRE DUBAS, Calcul numérique des plaques et des parois minces, Publication n° 27 de l'Institut de statique appliquée à l'E.P.F., Leemann, Zurich, 1955, où l'application du procédé aux problèmes de l'élasticité plane est expliquée en détail, avec de nombreux exemples.

[15]) Voir les ouvrages cités à la note 14.

de symétrie de la fonction d'AIRY par rapport à la diagonale et de symétrie inversée par rapport aux axes x et y, ce qui réduit le nombre des ordonnées inconnues à dix. Nous reproduisons ci-dessus le système des équations linéaires.

La résolution du système à l'aide de l'algorithme de GAUSS est simple. Les ordonnées F des points intérieurs, ordonnées satisfaisant aux équations, ainsi que celles imposées sur les bords d'après les relations (6) et (7), sont reproduites dans le tableau I et représentées graphiquement à la fig. 6.

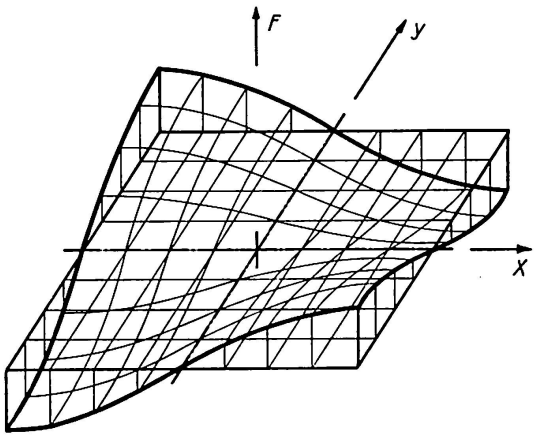

Fig. 6. Cas I. Fonction d'AIRY F.

Tableau I
Cas I (transmission des efforts des âmes), fonction d'AIRY F

	a	b	c	d	e	f
g	0	−98,66667	−189,33333	−264	−314,66667	−333,33333
h	0	−92,44108	−177,52579	−247,93439	−296,31507	−314,66667
i	0	−76,67930	−147,50252	−206,62041	−247,93439	−264
k	0	−54,51161	−105,02726	−147,50252	−177,52579	−189,33333
l	0	−28,26326	−54,51161	− 76,67930	− 92,44108	− 98,66667
m	0	0	0	0	0	0

$\cdot 10^{-3}\,\sigma\,a^2$

A partir des valeurs de la fonction F, on peut remonter sans difficultés aux contraintes $\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ (symétriques des contraintes σ_x par rapport à la diagonale) et $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. On obtient ainsi[16]) les tableaux II et III et les fig. 7 et 8.

[16]) On utilise, pour ce faire, un tableau semblable à ceux donnés dans l'ouvrage de l'auteur, cité à la note 14, p. 57.

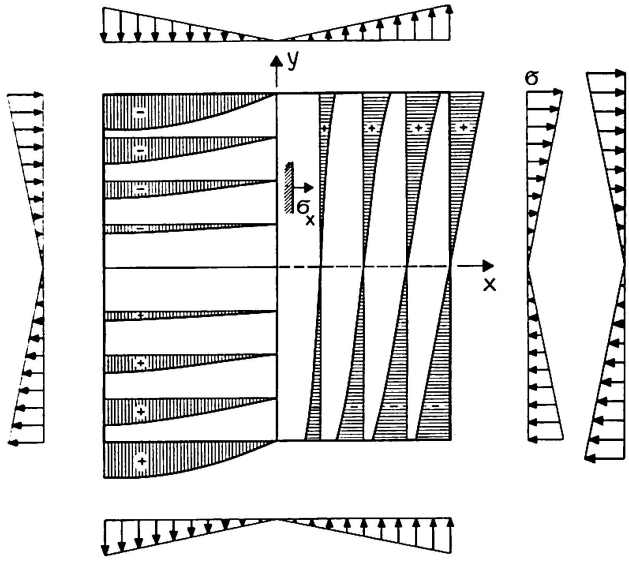

Fig. 7. Cas I. Contraintes σ_x.

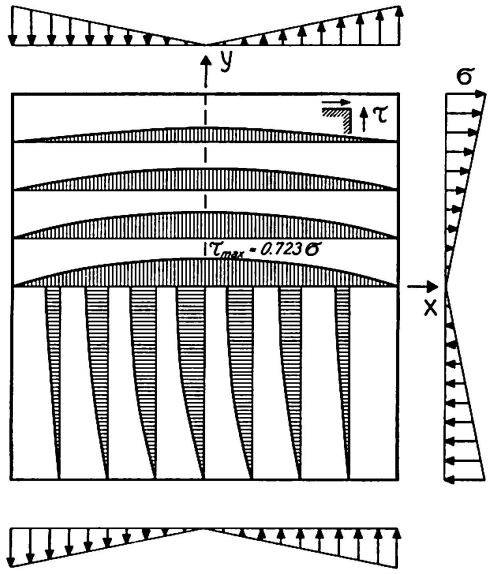

Fig. 8. Cas I. Contraintes de cisaillement τ_{xy}.

Tableau II

Cas I (transmission des efforts des âmes), contraintes σ_x

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
g	0	0,3551	0,6718	0,9067	1,0133	1
h	0	0,2347	0,4484	0,6225	0,7446	0,8
i	0	0,1586	0,3087	0,4426	0,5497	0,6
k	0	0,1015	0,2004	0,2922	0,3669	0,4
l	0	0,0503	0,0998	0,1465	0,1840	0,2
m	0	0	0	0	0	0

$\cdot\sigma$

Tableau III

Cas I (transmission des efforts des âmes), contraintes τ_{xy}

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
g	0	0	0	0	0	0
h	0,296	0,282	0,237	0,163	0,067	0
i	0,492	0,471	0,406	0,300	0,163	0
k	0,622	0,598	0,525	0,406	0,237	0
l	0,698	0,673	0,598	0,471	0,282	0
m	0,723	0,698	0,622	0,492	0,296	0

$\cdot\sigma$

Cas II. Transmission des efforts des ailes

La répartition des contraintes de cisaillement qui agissent entre les âmes et les ailes ne peut être déterminée par de simples considérations d'équilibre.

Pour résoudre ce problème hyperstatique[17]) il faut tenir compte de la connexion des divers éléments, d'où découlent les conditions de compatibilité des déformations. Pour le bord $x=a$, par exemple, la répartition des cisaillements entre l'aile et les deux âmes devra être telle que les allongements spécifiques $\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\,\sigma_x)$ des trois éléments soient égaux en chaque point du contour (voir la fig. 9, établie d'après les résultats du calcul)[18]).

Avec notre procédé de calcul numérique, nous ne pouvons naturellement observer les conditions de compatibilité que pour certains points des bords, correspondant aux mailles du réseau choisi. Comme inconnues hyperstatiques nous adoptons, non pas les cisaillements proprement dits $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$, mais leurs intégrales (le long du bord $x=a$) $-\int_0^y \tau_{xy}\,dy = \frac{\partial F}{\partial x}$, c'est-à-dire les tangentes de la fonction d'Airy[19]). Comme notre réseau comprend six points sur la longueur a, il y a en principe douze inconnues. Cependant, par raison de symétrie inversée, les deux intégrales des cisaillements s'annulent au milieu des âmes. De plus, l'intégrale des cisaillements entre l'âme extérieure et l'aile doit être nulle[20]) au coin $x=y=a$, tandis que l'intégrale des cisaillements entre l'aile et l'âme intérieure doit valoir l'effort total $0{,}75\,a\,t\,\sigma$ agissant dans l'aile avant le nœud. Il reste donc huit grandeurs hyperstatiques seulement.

Pour établir le système d'équations qui permettra de déterminer ces huit inconnues, on procède comme dans un calcul hyperstatique classique: on calcule, pour chaque élément, les allongements ϵ_y provoqués par les contraintes données d'une part[21]) et par les inconnues unitaires d'autre part. Nous ne donnerons pas le détail des calculs, mais nous remarquerons seulement que l'on emploie pour l'âme intérieure le même système d'équations que pour le cas I, avec bien entendu d'autres termes connus. On obtient ainsi les contraintes σ_x et σ_y sur les bords, qui permettront à leur tour de déterminer les allongements

---

[17]) Pour des indications générales sur les problèmes de connexion, on consultera P. Lardy, Les méthodes de calcul actuelles au service de l'ingénieur civil, Bulletin du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scientifiques des Constructions du Génie civil et d'Hydraulique fluviale, Tome VI, 1953, p. 287.

[18]) Les quelques articles que nous connaissons, et qui traitent le problème semblable du coin de cadre, partent tous d'une répartition arbitraire des cisaillements le long du contour. On consultera notamment G. Grüning, Spannungsverteilung in stählernen Rahmenecken, Der Bauingenieur, 1937, p. 158; H. Maul, Amerikanische Versuche mit einem genieteten stählernen Halbrahmen mit rechteckiger Ecke, Der Stahlbau, 1940, p. 28; D. T. Wright, The Design of Knee Joints for Rigid Steel Frames, British Welding Journal, 1957, p. 265. La plupart des solutions indiquées dans ces articles, par exemple celle de Osgood, ne satisfont d'ailleurs pas à l'équation aux dérivées partielles (5).

[19]) Les conditions au contour sont ainsi plus faciles à établir.

[20]) D'après nos hypothèses de départ, aucun effort tranchant n'agit sur les barres.

[21]) Les contraintes données comprennent, d'une part les contraintes de flexion du cas I (fig. 9, σ_x) et d'autre part l'intégrale connue $0{,}75\,a\,t\,\sigma$ des cisaillements au coin $x=y=a$.

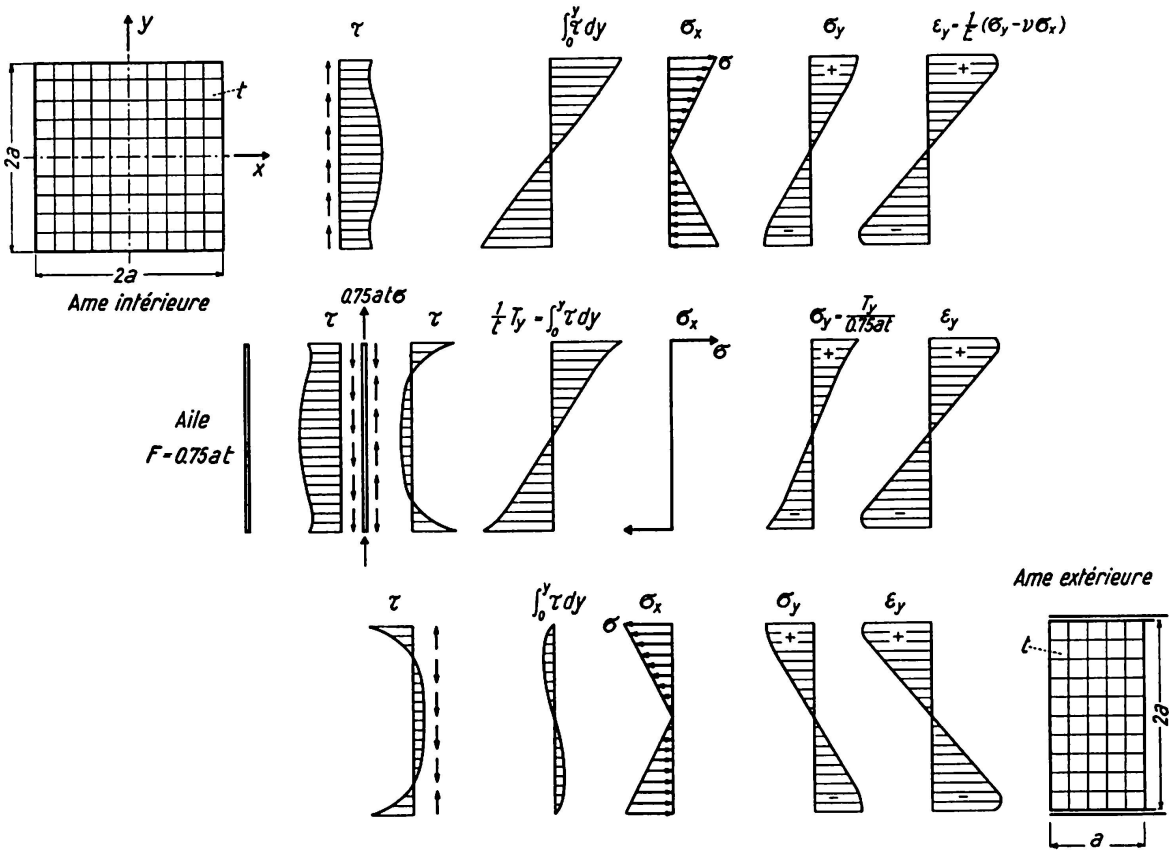

Fig. 9. Cas II. Contraintes et allongements au contour.

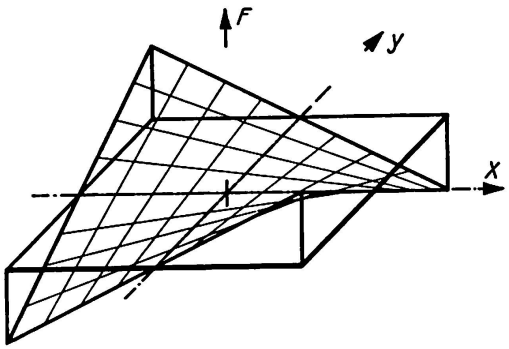

Fig. 10. Cas II. Fonction d'AIRY F.

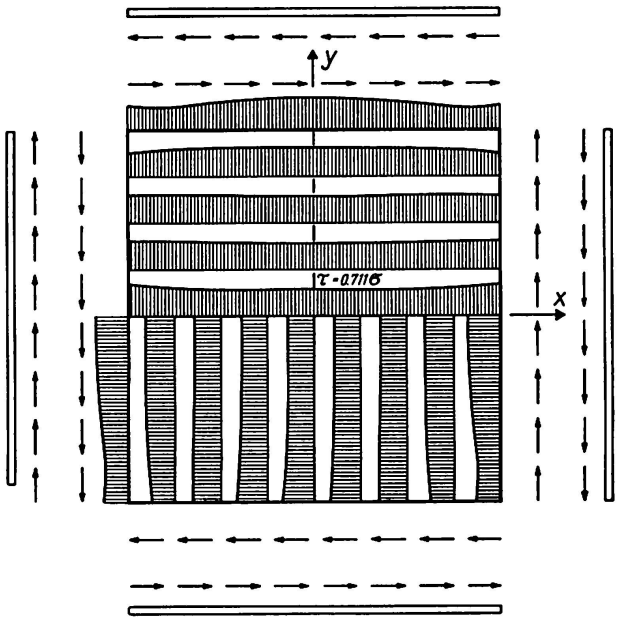

Fig. 11. Cas II. Contraintes de cisaillement τ_{xy}.

ϵ_y. Pour l'âme extérieure, on utilisera un procédé semblable, avec le réseau indiqué à la fig. 9. Quant à l'aile, les allongements sont immédiats, puisqu'il s'agit d'une barre soumise à la traction simple [22]).

Une fois déterminées les huit intégrales des cisaillements, on remonte à la fonction d'AIRY du cas II (fig. 10) et aux contraintes correspondantes. La répartition des cisaillements, sauf au bord, est presque uniforme (fig. 11).

Contraintes totales (fig. 12 et 13)

La répartition des contraintes σ_x le long des sections perpendiculaires à l'axe des x n'est pas loin d'être linéaire. Les sections resteront donc pratiquement planes et l'hypothèse, faite dans le cas I, d'une répartition linéaire des contraintes σ_x sur le bord de l'âme est ainsi justifiée.

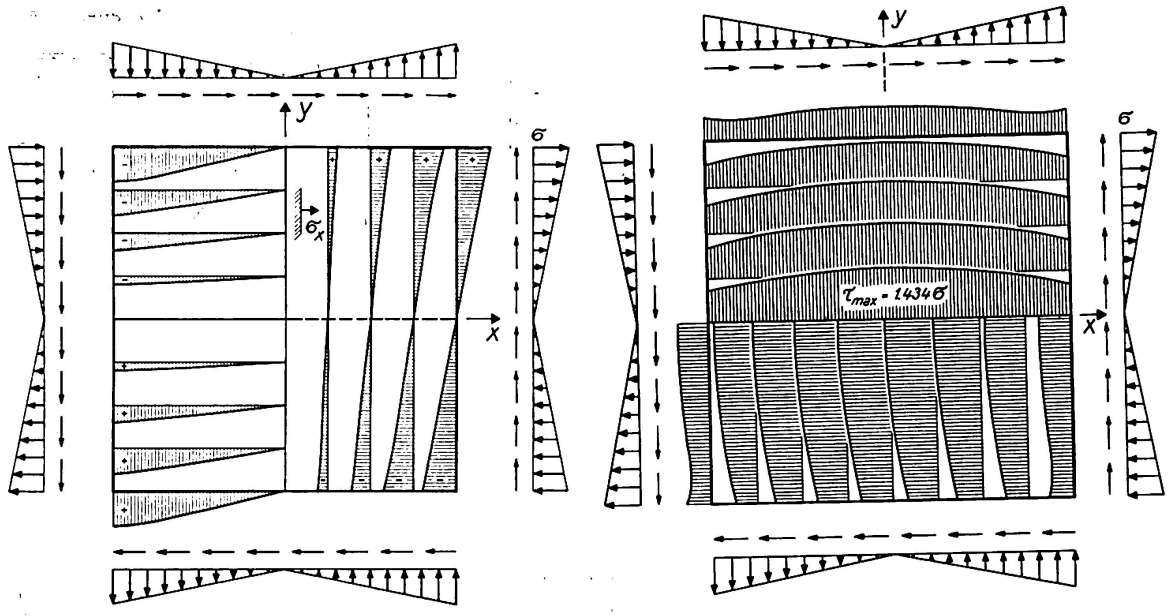

Fig. 12. Contraintes σ_x totales. Fig. 13. Contraintes de cisaillement τ_{xy} totales.

Nous ne donnons pas le diagramme des contraintes de comparaison σ_g, établies d'après la théorie du travail de déformation (HUBER-MISES-HENCKY). La répartition de σ_g est en effet voisine de celle du cisaillement τ_{xy}, avec $\sigma_{g\,max} = 2{,}48\,\sigma$ au centre. Le cisaillement maximum est donc déterminant.

---

[22]) Nous admettons que l'aile est large par rapport à l'épaisseur t; ainsi l'allongement ne dépend pratiquement que de l'effort T_y de l'aile, et non de la contrainte perpendiculaire σ_x, puisque celle-ci ne s'applique que sur une faible largeur. Il n'en est cependant plus de même au coin, où la contrainte σ_x agit sur toute l'aile, ce qui explique la diminution brusque de ϵ_y dans cette région (fig. 9).

Comparaison avec les formules de la résistance des matériaux

Pour déterminer la contrainte de cisaillement maximum par les formules de la résistance des matériaux, on partirait des efforts de cisaillement T suivants:

$$\text{Cas I} \qquad T_{âme} = M \frac{S_{âme}}{J}.$$

$$\text{Cas II} \qquad T_{aile} = M \frac{S_{aile}}{J}.$$

$S_{âme}$: moment statique de l'âme renforcée par rapport à l'axe neutre.
S_{aile}: moment statique de l'aile par rapport à l'axe neutre.
J: moment d'inertie total du profil renforcé.

Pour le cas I, le cisaillement provient de contraintes de flexion. Comme la section de l'âme est rectangulaire, la résistance des matériaux indique une répartition parabolique des cisaillements. Pour le cas II, le cisaillement est primordial et on peut admettre une répartition uniforme. Ce point de vue est confirmé par les fig. 8 et 11. On peut donc écrire:

$$\tau_{max} = \frac{M}{a\,t\,J}(S_{aile} + 1{,}5\,S_{âme}). \tag{8}$$

Dans notre exemple numérique il vient, avec $T_{âme} = 0{,}5\,a\,t\,\sigma$ et $T_{aile} = 0{,}75\,a\,t\,\sigma$,

$$T_{max} = 0{,}75\,\sigma + 1{,}5 \cdot 0{,}5\,\sigma = 1{,}5\,\sigma$$

au lieu de $\tau_{max} = 1{,}434\,\sigma$ (fig. 13). La différence est donc petite.

Si, en plus, on a des efforts tranchants Q, égaux dans chaque barre, il suffira de tenir compte des contraintes de cisaillement supplémentaires, réparties uniformément, mais de sens opposé à celles déterminées auparavant (fig. 4).

Les nœuds ont souvent une forme moins simple que celle admise ici et les efforts appliqués sont plus complexes. On peut toutefois penser que la résistance des matériaux fournira une approximation suffisante pour ces cas également, à moins qu'ils ne s'éloignent par trop du problème que nous venons d'étudier.

Résumé

L'auteur montre d'abord que les déformations des montants, sous l'effet des efforts axiaux, affectent notablement les sollicitations des portiques élancés. Il étudie ensuite, à l'aide de la théorie de l'élasticité plane, la distribution des contraintes à l'intérieur d'un nœud de portique. Pour ce faire, il utilise une méthode de statique appliquée. La contrainte de cisaillement maximum donnée par le calcul est comparée à celle obtenue à l'aide des formules élémentaires de la résistance des matériaux; la concordance est satisfaisante.

Zusammenfassung

Es wird zuerst gezeigt, daß bei schlanken Stockwerkrahmen die Längenänderungen der Stützen infolge der Normalkräfte einen bedeutenden Einfluß auf die Beanspruchungen haben können. Anschließend wird mit Hilfe der Scheibentheorie der Spannungszustand im Knoten eines Stockwerkrahmens untersucht. Dabei wird eine baustatische Methode angewendet. Die so berechnete maximale Schubspannung wird mit dem nach den einfachen Formeln der Biegelehre bestimmten Wert verglichen; die Übereinstimmung ist befriedigend.

Summary

In the first part this paper shows that for tall buildings the change in length of columns due to the axial forces has an appreciable effect on the stresses. The second part deals with the stress distribution in the joint of a framed construction, by means of the two-dimensional theory of elasticity. To do this, the "applied statics" method is used. The maximum shear stress obtained by this calculation compares satisfactorily with that given by elementary formulas of the strength of materials theory.