

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 6 (1960)

Rubrik: Vb. Redistribution of stresses due to creep

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

V b 1

Das Problem der Zwängungsspannungen infolge Kriechen und Schwinden bei aus Stahlbetonfertigteilen hergestellten Konstruktionen und seine praktische Bedeutung

The Problem of Stresses Due to Restraint, Induced by Creep and Shrinkage, in Structures Composed of Precast Reinforced Concrete Members and its Practical Significance

Le problème des contraintes coercitives résultant du fluage et du retrait dans les ouvrages construits à partir d'éléments préfabriqués en béton armé. — Importance pratique

HERRMANN RÜHLE

Dr. Ing., Dresden

1. Allgemeines

Es liegt in der Natur des Stahlbetons, daß wohl die meisten Konstrukteure auch bei der Verwendung von Fertigteilen versuchen, zu den für diese Bauweise typischen Konstruktionen zu kommen. Dabei bedient man sich in der Praxis gern der folgenden beiden Lösungen:

- a) Vollständig vorgefertigte Betonelemente werden zunächst ohne Zusammenschluß montiert und anschließend durch Verbindungsmittel wie z. B. Überdeckungs-, Vorspann-, Schweiß- oder Bolzenstöße biegesteif oder gelenkig zu dem gewünschten System verbunden.
- b) Man fertigt das Bauwerk nur teilweise vor, indem man Fertigteile montiert und dann durch bauseitig eingebrachten Beton ergänzt.

Beide Konstruktionsmethoden führen zu Tragwerken, die sich im System oft nur wenig von denen aus Monolithbeton hergestellten unterscheiden.

Eben, weil eine Anpassung an die monolithische Betonbauweise erreicht wird, ist es durchaus naheliegend, daß auch Berechnung und Bemessung der beschriebenen Bauwerke oft nach den für Monolithbeton zutreffenden Grund-

sätzen vorgenommen werden. Zweifel an der Zuständigkeit solcher Untersuchungen führten in den letzten Jahren zu einer beachtlichen Anzahl von Arbeiten, die sich mit diesem Problem theoretisch und versuchstechnisch auseinandersetzen ([1]—[38] u. a.).

Da der 6. Kongreß der IVBH diesen Fragenkomplex zur Diskussion stellt, möchte es der Verfasser — obwohl seine diesbezüglichen theoretischen und versuchstechnischen Erkenntnisse schon veröffentlicht sind — nicht unterlassen, eine Zusammenfassung derselben besonders im Hinblick auf die praktische Bedeutung vorzulegen. Gleichzeitig werden einige hauptsächliche Vorschläge für die Berechnung und Bemessung bekanntgegeben.

2. Zur Berechnung der durch Stöße nachträglich biegesteif verbundenen Tragwerke aus Stahlbetonfertigteilen

In der Regel beschränkt man sich bei Montagebauten auf eine Untersuchung der verschiedenen Montagezustände, rechnet das endgültige vorhandene System nach den Gesichtspunkten des Monolithbetons, wobei man sich bei beiden Vorgängen der üblichen Mittel der Elastizitätstheorie bedient. Ist es richtig, die Berechnung praktisch auf Untersuchungen und Superposition der Spannungszustände vor und nach der Verbindung der Fertigteile beruhen zu lassen?

Es soll versucht werden, diese grundsätzlichen Fragen in der Folge zu beantworten.

Wie mehrere Arbeiten [2], [12], [15], [18], [26] theoretisch nachgewiesen haben, bleiben bei zusammengesetzten und nachträglich biegesteif verbundenen Fertigteilkonstruktionen nach dem Verbund der Elemente Dauerspannungen und damit Formänderungen bestehen, die die Kontinuitätsbedingungen nicht erfüllen. Dadurch entstehen infolge der plastischen Formänderungen Zwängungsspannungen, die wiederum Schnittkraftumlagerungen auslösen. Mit der Zeit können sich die Schnittkräfte bei genügend großem und infolge z. B. sehr kleinen Bewehrungsgehaltes nur geringfügig behindertem Kriechvermögen derart ausgleichen, als wären die Verbindungen bereits vor den Deformationen geschlossen gewesen. In einem solchen Falle ergeben sich Schnittkräfte, die nahe an die eines gleichen monolithischen Systemes heranreichen.

Als erster hat wohl CRAEMER [2] auf die Tatsache derartiger Einflüsse hingewiesen. Darauf aufbauend führte der Verfasser theoretische Untersuchungen nach dem Differentialgleichungsverfahren durch, deren Ergebnisse in [12] ausführlich beschrieben sind.

Den Betrachtungen lagen die von DISCHINGER geschaffenen Grundlagen der Kriechtheorie [1] uneingeschränkt zugrunde. Erweitert man bei einem System die Kontinuitätsbedingungen aus den elastischen Verformungen mit

$$\epsilon_{elast} + \epsilon_{plast} = \epsilon_0 + \epsilon_0 \varphi_n (1 - e^{-t}) \quad (1)$$

auf die plastischen, so erhält man als 1. Zeile für den Fall, daß die Last im Zeitpunkt $t=0$ aufgebracht wird, folgenden Drehwinkel am einen Ufer des betrachteten Stabes:

$$\psi'_{i,r} = \psi_{i,r0} + \psi_{i,r0} \varphi_n (1 - e^{-t}) + \psi_{i,r} + \psi_{i,r} \varphi_n (1 - e^{-t}). \quad (2)$$

Schließt man zwei Stäbe in einem Punkt biegesteif zusammen, dann gilt:

$$\frac{d\psi'_{i,rt}}{dt} = \frac{d\psi'_{k,lt}}{dt}. \quad (3)$$

Wird Gl. (2) nach dt differenziert, so ergibt sich nach Umformung für ein statisch n -fach unbestimmtes System statt der üblichen Elastizitätsgleichungen ein System simultaner Differentialgleichungen, das bei Annahme der Randbedingungen $t=0$ und $\varphi_t=0$ lösbar ist. Weisen die einzelnen Fertigteilelemente Altersunterschiede oder infolge längerer Ablagerung Kriechschonzeiten auf, so lassen sich diese durch entsprechende Wahl der Kriechzahlen berücksichtigen. Ebenso kann man durch Einführung einer «behinderten» Kriechzahl die Einflüsse der Bewehrung abschätzen. KOLLÁR [18] kommt zu gleichen Ergebnissen, benutzte aber dazu die Colonettischen Sätze für das Kriechen. Diese Annahmen vereinfachen die Rechenarbeit ganz wesentlich und führen zu einfachen Rechenbeziehungen, die z. B. für praktische Untersuchungen sehr zu empfehlen sind.

In einer Dissertation beschäftigte sich PASCHEN [26] mit diesen Problemen, wobei er besonders auf den Fall einging, daß das Tragwerk aus lauter verschiedenen alten, zu verschiedenen Zeitpunkten miteinander verbundenen Fertigteilen zusammengesetzt ist.

HABEL [15] schätzte in einer interessanten Arbeit den Einfluß der Bewehrung auf die Zwängungsspannungen ab und folgerte, daß die aufgebauten Schnittkräfte klein ausfallen und auch die Betonzugspannungen wegen des langsamen Anwachsens der Stützenmomente während des Kriechens kleiner als die nach anderen Theorien erhaltenen sind.

Der Verfasser neigt bei Betrachtung aller dieser Ergebnisse zu folgender Auffassung:

a) Die Schnittkräfte infolge Zwängungen sind nur für den Gebrauchszustand, also eine Einschätzung der Rissesicherheit, interessant. Bei einer Betrachtung des Tragwerkes nach Grenzzuständen sind sie ohne Bedeutung.

b) Bei durch biegesteife Stöße zusammengeschlossenen Fertigteilen werden infolge Kriechen an ausgezeichneten Punkten, z. B. beim Durchlaufträger an den Mittelstützen, mit der Zeit wachsende Eigengewichtsmomente entstehen, die bei unbehinderten und hohen Kriecheigenschaften des Betons bis nahe an die elastizitätstheoretischen Sollwerte des Durchlaufträgers heranreichen können.

c) Diese Schnittkraftumlagerungen fallen um so niedriger aus, je höher der Bewehrungsgrad des Betons liegt. Sie sind, wie HABEL ausführlich nachgewiesen hat, in starkem Maß vom Bewehrungsgrad abhängig.

d) Macht die ständige Last nur einen geringen Teil der Gesamtlast aus, so dürften derartige Untersuchungen überhaupt gegenstandslos sein, da die Schnittkraftumlagerungen vernachlässigbar klein sind. Die später hinzukommenden Lasten bedingen dann meistens über den Stützen sowieso eine entsprechende Bewehrung.

e) Besondere statische Untersuchungen sind nur dann angebracht, wenn das Eigengewicht oder auch die ständige Nutzlast den größten Anteil der Gesamtlast ausmachen. Es ist dann eine reichlichere obere Bewehrung des Stützenquerschnittes ratsam, die einerseits die Reißdehnung und damit Reißzugspannungen des Betons erhöht und andererseits auch nach dem Auftreten von Rissen die Reißbreiten in vertretbaren Grenzen hält. Ob man für eine Dauer von 2—3 Monaten — das ist ungefähr die Zeit, in der ein großer Teil der Kriechverformungen ablaufen kann — durch grundsätzlich geringere Bemessung der Feldquerschnitte (also z. B. auch für Eigengewicht als Durchlaufträger) eine kleinere Sicherheit im Bauwerk in Kauf nehmen kann, sei noch zu überlegen. Man könnte dann monolithische und aus Fertigteilen hergestellte Durchlaufträger angenähert gleich bewehren, was zu üblichen Berechnungsmethoden führt.

f) Wenn X_0 das elastizitätstheoretische Sollmoment ist, so läßt sich nach HABEL einfach das etwa auftretende Umlagerungsmoment mit

$$X_1 = X_0(1 - e^{-\varphi_n}) \quad (4)$$

bestimmen. Diese Gleichung trifft an sich für den unbewehrten Balken zu. Da das Kriechverhalten infolge seiner vielen Einflüsse schwerlich genau festlegbar ist und auch der Einfluß der Bewehrung nur roh abgeschätzt werden kann, sind genaue Berechnungen sowieso illusorisch. In Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad könnte man etwa mit folgenden Kriechzahlen arbeiten:

$\mu = \frac{F_e}{F_B} \cdot 100$	0	5—7	8—10	11—14	15—20	21—30	31—40
	1	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7
φ_n	2	1,8	1,75	1,65	1,55	1,4	1,2
	3	2,7	2,6	2,4	2,2	2,0	1,7

Selbstverständlich ist bei diesen Untersuchungen stets eine vorhandene Kriechschonzeit zu berücksichtigen, mit der wir ja gerade bei Fertigteilen oft rechnen müssen.

In diesem Zusammenhang soll die Aufmerksamkeit noch auf eine Tatsache gelenkt werden, die hinreichend bekannt ist, aber oft übersehen wird. Sogenannte «natürliche» Vorspannungen, z. B. durch plötzlich eingetragene und in der weiteren Zeit unverändert wirkende Stützenverschiebungen sind *zwecklos*, da die hierdurch erzeugten Schnittkräfte durch Kriechen zu einem großen Teil wieder abgebaut werden. Der Verfasser hat hierüber einige in [12] gezeigte Untersuchungen durchgeführt. Anders verhält es sich, wenn die Stützen-

senkung langsam mit der Zeit durchgeführt wird, was aber wohl kaum praktische Bedeutung für Fertigteilkonstruktion hat. Selbstverständlich ist hierbei wieder das Kriechvermögen des Betons maßgebend. Wenn man z. B. die Fertigteile sehr lang ablagert, so besteht eine Möglichkeit, bestehenbleibende Schnittkräfte in einer weniger abgeminderten Größenordnung zu erzielen.

3. Zur Berechnung und Bemessung der durch Ortbeton nachträglich verstärkten, teilweise vorgefertigten Betonelemente

Verstärkt man Stahlbetonfertigteile mit Ortbeton, so weisen beide Beton- zonen in der Regel ein unterschiedliches Alter sowie verschiedene Abmessungen und Qualitäten auf. Bei getrennter Betrachtung der beiden einmal verbundlos angenommenen Körper, die auf Biegung beansprucht sein sollen, werden sich ungleiche elastische Verformungen einstellen. Die von der Zeit abhängigen plastischen Formänderungen infolge Kriechen und Schwinden zeigen bei beiden Teilen ebenfalls verschiedene Größe und Verlauf. Durch Bügel, schräge Schub- eisen und *in sehr starkem Maß* auch durch die Haftung wird der notwendige starre Verbund zwischen den beiden Beton- zonen hergestellt. Die Biegelinien beider Körper müssen demzufolge identisch werden. Es entstehen Zwängungs- spannungen, d. h. es wird ein Eigenspannungszustand aufgebaut, der zu Spannungsumlagerungen am Verbundquerschnitt führt.

Besitzen die unter 2. angeführten theoretischen Untersuchungen über Schnittkraftumlagerungen an nachträglich zusammengesetzten Fertigteil- systemen doch eine gewisse praktische Verwendbarkeit, auch wenn man sich über den konventionellen Charakter der Elastizitätstheorie bei Stahlbeton- bauten durchaus klar sein muß, so sind *rein theoretische Spannungsunter- suchungen*, die mit Hilfe eines mathematisch exakten Aufwandes an Stahl- betonquerschnitten durchgeführt werden, immer sehr kritisch zu betrachten. Das soll nicht heißen, daß man besser darauf verzichtet. Erst durch Theorie und Versuch wird man den etwa zutreffenden Verhältnissen auf die Spur kommen können. Natürlich unter der Einschränkung, daß so manche grund- sätzliche Gesetzmäßigkeiten des Betons noch nicht geklärt sind.

3.1. Stand der theoretischen und versuchstechnischen Erkenntnisse

In letzter Zeit haben sich einige Arbeiten theoretisch und versuchstechnisch mit diesen Problemen beschäftigt. Mehrere versuchten mit mathematischen Mitteln zu einer Abschätzung der Größenordnung der Spannungsumlagerungen oder zu Rechenansätzen zu kommen, so u. a. CRAEMER [2], GOSCHY [24], KOLLÁR [25], LIPTAK [31], AVRAM und PESCARU [28], ARUTJUNJAN [9]. Ver- suchstechnisch befaßten sich vorwiegend mit der Erschöpfungslast von Beton- verbundquerschnitten u. a. GRAF und WEIL, EVANS, KLIZ [17], REVESZ,

ZACOPCEANU [27], GOSCHY [35], MICHAILOW [36], wobei es oft galt, die praktische Verwendbarkeit derartiger Konstruktionen nachzuweisen.

Der Verfasser führte theoretische und versuchstechnische Untersuchungen der Eigenspannungsprobleme und Erschöpfungslasten durch (siehe [13], [19], [21], [22], [33], [34], [37], [38]) mit dem Ziel, aus beiden aufklärende Antwort zu erhalten. Bei allen bisher aufgeführten Arbeiten handelt es sich also vorwiegend darum, mehr oder minder zutreffende Bemessungsvorschläge bzw. Spannungs- und Bruchlastnachweise aufzustellen oder das Problem nach I. oder II. Ordnung einzustufen.

Einer anderen Betrachtungsweise, nämlich neue Grundgedanken durch die Betonverbundweise an Konstruktionen heranzutragen, sind, soweit man das überschauen kann u. a. ABELES, HAJNAL-KÓNYI [6], [11], [4] u. a., KLIZ [17], MICHAILOW, GESSNER, KOSAK, GRZERGORZEWSKI, ausgeprägt nachgegangen. Sie legten ihren Arbeiten den sogenannten «Spannbrett-Gedanken» zugrunde. Ein solcher Querschnitt ist in seinem Gebrauchsspannungszustand und Rißbildung mit monolithischen Stahlbetonbalken wenig vergleichbar. ABELES und HAJNAL-KÓNYI sehen für ihre Konstruktionen von vornherein in Quantität und Qualität stark unterschiedliche Betonzonen voraus und kombinieren diese oft mit einer teilweisen Vorspannung.

Alle Arbeiten haben sich gegenseitig zweifellos befruchtet und wesentlich ergänzt, so daß man es wagen kann, in der Folge einige Konstruktions- und Bemessungsvorschläge zu bringen.

3.2. Die praktischen Auswirkungen des Zwängungsspannungsproblem

3.21. Kriechen und Schwinden

Im Laboratorium lassen sich diese Verformungszustände einigermaßen erfassen und dann mathematisch festlegen. Die Problematik steht wohl in vielen Beziehungen noch offen und bietet für Forschungen reichliche Gelegenheit.

Bringt man 2 verschieden alte, in ihren Kriech- bzw. Schwindverhalten und Elastizitätseigenschaften unterschiedliche Betone biegesteif zusammen, so versuchen die plastischen Vorgänge verschiedenartig abzulaufen, wobei sie sich gegenseitig notgedrungen «zwängen». Dadurch werden Eigenspannungen aufgebaut, die mathematisch über die Verbundtheorie erfaßbar sind. Das mag alles theoretisch zutreffen. Praktisch verlaufen das Schwinden und auch das Kriechen oft völlig anders. Man hat es hier mit einem komplizierten, von der Luftfeuchte, den Temperaturen, der Sonnenbestrahlung und anderen atmosphärischen Einflüssen abhängigen Vorgang zu tun, der stark unterschiedlich ist und zu den eigentümlichsten Erscheinungen führen kann. Somit scheidet eine absolute Betrachtung von vornherein aus; man kann den tatsächlichen Zustand nur durch Grenzfälle einschließen. Allein so wird es möglich sein, rechnerisch zu einigermaßen glaubhaften Ergebnissen zu kommen. Beim Ver-

bundbalken ist das noch schwieriger als beim monolithischen Spannbetonbalken. Hier haben relative Versuchsbeobachtungen des Verfassers [33], [37] im Laboratorium, kurz zusammengefaßt, folgendes ergeben:

a) Die Schwindmaße sind in hohem Maße von der Luftfeuchte, der Betonmischung und -behandlung, dem Betonvolumen sowie der Lage der Meßstelle abhängig. Das Schwinden als Deformation infolge der Schwindkräfte (Austrocknungszustand) ist ebenfalls vom Erhärtungszustand des Betons abhängig. Bei Verhältnissen im Freien ist man sehr variablen und empfindlichen Größen gegenübergestellt, deren Ansatz in Berechnungen nur mit Vorsicht vorgenommen werden darf. Man kann aber zu Recht jedem Beton die Grenzen seines Schwindverhaltens zuordnen. Das Schwindkriechen spielt hierbei eine wesentliche Rolle.

b) Das Kriechen setzt sich im Hauptteil aus folgenden Komponenten zusammen:

- Irreversible spontane plastische Längenänderung in Art einer Setzung.
- Irreversible Längenänderung als sogenanntes Kriechen.
- Elastische Nachwirkung.

Während bei den üblichen theoretischen Untersuchungen meist das gesamte Kriechen in Ansatz gebracht wird, haben die Versuche gezeigt, daß nur die irreversiblen Längenänderungen (das sind etwa 60 bis 80% des Gesamtkriechens) auf den Eigenspannungszustand von Einfluß sein dürften, da nur diese Teile des Kriechens vom Alter des Betons abhängig sind. Man kann also auch hier nur mit Vorsicht an eine rechnerische Erfassung der Eigenspannungen herangehen.

3.22. *Der Verbund*

Wohl der wesentliche Bestandteil derartiger Betrachtungen ist der Verbund.

Mit dem grundsätzlichen Grenzflächen-Problem des Verbundes zwischen Betonen haben sich bisher leider nur wenige Arbeiten befaßt [3]. Auf welchen physikalischen Gesetzen er beruht, ist noch schwerlich zu sagen. Laboratoriumsversuche des Verfassers in Form von mikroskopischen Betrachtungen mineralogischer Dünnschliffe und die Praxis zeigen eindeutig, daß dieser Verbund außerordentlich gut sein kann. Selbst bei Verzicht auf eine zusätzliche Verdübelung durch Schrägstäbe, Bügel u. a. bleibt der Verbund im ungerissenen Gebrauchszustand starr. Gegenseitige Verschiebungen konnten dann nicht beobachtet werden. Diese Feststellung ist wesentlich. Versuche des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton haben zudem erbracht, daß sich senkrechte oder schräge Verbundflächen in dieser Hinsicht günstiger verhalten als waagrechte. Überschreitet man bei Bildung von Rissen die Gebrauchslast, so bleibt der Haftverbund beider Betonzonen schon etwas mehr einem Zufall überlassen; die Verbundmittel (Schrägstäbe, Bügel usw.) gewinnen so Bedeutung für diesen Zustand. Der Verbund kann dann elastisch sein [23], [30]. Dies ist von

der Größe der Haftspannungen, also von Lage und Umfang der Verbundfläche, abhängig. Die Betrachtungen sind wichtig für die Bemessung der Verbundmittel. Bei durch geeignete Fugenausbildung niedrig gehaltenen Haftspannungen wird der Verbund auch bis zum Bruch starr bleiben.

3.23. Eigenspannungen

Durch die schon beschriebenen Verformungsbedürfnisse beider Beton- zonen werden Eigenspannungen aufgebaut (CRAEMER, GOSCHY, LIPTAK und der Verfasser haben hierüber theoretische und versuchstechnische Unter- suchungen durchgeführt, die in der Literatur ausführlich beschrieben sind).

Theorie und Versuche lassen zusammengefaßt folgende Ergebnisse erken- nen:

a) Die Eigenspannungen aus den verschiedenen Schwindzuständen beider Beton- zonen führen im Richtungssinn theoretisch und versuchstechnisch zu etwa gleichen Ergebnissen. Der Abbau durch Schwindkriechen ist nicht so kräftig, da das Schwinden über die Zeit sehr ungleichmäßig verläuft, wobei das Quellen infolge veränderlicher äußerer Zustände eine Rolle spielt.

Verwenden wir für den größeren Anteil des Querschnittes Ortbeton und halten den Fertigteilquerschnitt klein, so folgen in Größe und Vorzeichen günstigere Eigenspannungen als theoretisch oft vermutet. Das ist plausibel und an Spannbrettern auch praktisch beobachtbar. Bei Plattenbalken, deren Platte aus Ortbeton nachträglich hergestellt wird, kann man für den Eigen- spannungszustand mit einer mitwirkenden Plattenbreite $b = (2,0 \text{ bis } 2,5) \cdot b_0$ rechnen. Es ist viel zu ungünstig, bei Untersuchungen mit der vollen Platten- breite zu rechnen, da die äußeren Fasern zum wirklichen oder gedachten Rand der Platte zu wenig oder nicht von dem Fertigteil behindert werden.

b) Alle theoretischen Arbeiten ergeben, daß bei größerem Ortbetonanteil und weit auseinanderliegenden Kriechzuständen beträchtliche Spannungs- umlagerungen entstehen können.

Nach Versuchen zu urteilen, ist dies nicht in dem Maß der Fall. Hier spielt u. a. der schon beschriebene, einzig in die Rechnung einzuführende irreversible Anteil des Gesamtkriechens mit eine wesentliche Rolle. Im Zustand I der Stahlbetontheorie verlagert sich tatsächlich die Nulllinie bei Zunahme der Zugspannungen etwas nach unten.

c) Die Durchbiegungen lassen interessante Schlüsse auf das Arbeiten des Verbundbalkens zu. Zum Beispiel erzielt man bei Kombination eines schlech- ten Betons in der Druckzone und eines guten Betons in der Zugzone Verhält- nisse, wie man sie hätte, wenn man den gesamten Querschnitt aus gutem Beton herstellt. Dabei gilt als Voraussetzung, daß die Zugzone ungerissen bleibt.

d) Zweifellos müssen die Spannungsumlagerungen nach der Art des Riß- zustandes betrachtet werden. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, Auf- schlüsse über Risse zu geben, die etwa durch Spannungsumlagerungen auf-

treten könnten. Über diesen wesentlichen Punkt läßt sich folgendes zusammenfassen:

Bei zum Fertigteil relativ kleinen Ortbetonverstärkungen sind Rißverhalten und Rißbild wie bei einem monolithischen Balken aus der Betongüte des Fertigteiles. Bei großem Ortbetonanteil ist die Rißlast wesentlich von der Güte des Fertigteiles abhängig. Hohe Zugfestigkeit des Fertigteiles schafft hier dem monolithischen Balken gleichwertige Verhältnisse.

Vergleicht man einen monolithischen Balken mit einem Balken, der aus einem Fertigteilbrett und Ortbeton besteht, so sieht man, daß beim Verbundbalken die Risse (sehr oft bis nahe an die Bruchlast heran) nur bis zur Fuge reichen, während der Ortbeton ungerissen bleibt. MICHALLOW [36] hat nachgewiesen, daß bei einer Koppelung von nicht vorgespanntem Beton mit vorgespannten Elementen das Entstehen von Zugrissen im Ortbeton bis etwa zu $0,3\text{‰}$ Dehnung hinausgeschoben werden kann. Diese Ergebnisse werden auch von Versuchen des Verfassers bestätigt.

e) Zum Bruch zu werden die Zwängungsspannungen kompensiert. Die Erschöpfungslast wird von den Eigenspannungen nicht beeinflußt.

3.24. Zusammenfassende Betrachtung

Die Spannungsumlagerungen haben für die Brauchbarkeit von Betonverbundbalken folgende Bedeutung:

Bei schlaffer Bewehrung

a) Grundsätzlich ist nach theoretischen und versuchstechnischen Untersuchungen festzustellen, daß das Eigenspannungsproblem als ein Problem II. Ordnung angesehen werden sollte.

Es steht fest, daß durch Kriechen Spannungsumlagerungen zum Fertigteil hin entstehen. Das Mehrschwinden erzeugt im Ortbeton Zugspannungen und im Fertigteil Druckspannungen bzw. je nach Querschnitt in den unteren Fasern Zugspannungen. Bei vielen gebräuchlichen Querschnitten werden sich diese Spannungen zu denen aus der Belastung im günstigen Sinne superponieren können. Die Eigenspannungszustände aus Kriechen und auf Schwinden gleichen sich so oft angenähert aus. Dies gilt für Zustand I der Stahlbetontheorie.

b) Dieser Ausgleich ist auch im Zustand II vertretbar, wie KOLLÁR [25] nachgewiesen hat. Da man dazu neigt, die Stahlbetonbemessung immer mehr nach Grenzzuständen durchzuführen, dürfte im Zustand II das Eigenspannungsproblem sowieso schon an Interesse verlieren.

c) Für Verstärkungen mit einem Verhältnis $\frac{F_{\text{Ortbeton}}}{F_{\text{Fertigteil}}} \leq 0,5$ kann man auf jeden Fall den Gesamtquerschnitt untersuchen, als wäre er insgesamt aus dem Beton des Fertigteiles hergestellt. Dies auch in Hinsicht auf Durchbiegungen bzw. Rißzustand.

Bei einem Verhältnis $\frac{F_{\text{Ortbeton}}}{F_{\text{Fertigteil}}} \geq 0,5$ superponieren sich die Spannungs-

umlagerungen im günstigen Sinn. Das Reißbild fällt andersartig aus als bei monolithischen Balken. Es sind dabei immer die Spannungen infolge Vorbelastung zu beachten.

d) Über die Umlagerungen der Schubspannungen wurden ebenfalls theoretische Untersuchungen angestellt [34]. Man darf diese mit Recht wie bei einem monolithischen Balken betrachten.

Bei vorgespannter Bewehrung

a) Hier kann es bei großen ständigen Lasten und großen Altersunterschieden sowie merklich auseinanderliegenden Schwindzuständen von Ortbeton und Fertigteil (wenn $\frac{F_{\text{Fertigteil}}}{F_{\text{Ortbeton}}} \leq 0,5$) angebracht sein, die Eigenspannungen mit einfachen Methoden nachzurechnen. Spannt man die Konstruktion voll vor, so ist man daran interessiert, daß keine Zugspannungen in der unteren Faser auftreten. Da die Spannungsumlagerungen aber dazu führen können, möchten sie beachtet werden. Dies gilt auch für die beschränkte Vorspannung, wo man die Zugspannungen unbedingt in vertretbaren Grenzen halten will.

b) Vorschläge für die Spannungsnachweise. Man kann die Eigenspannungen nach der Verbundtheorie (u. a. [2], [13], [24], [31]) rechnen, was an sich nicht kompliziert, aber doch mit einigem Arbeitsaufwand verbunden ist. In Hinsicht auf die Unzulänglichkeiten der Kriech- und Schwindannahmen ist eine auch noch so exakte Berechnung auf jeden Fall einer Eingrenzung mit mehreren Annahmen unterlegen. Man sollte den Umfang der Berechnungen nicht weiter anschwellen lassen und für alles, was mit Kriechen und Schwinden zu tun hat, einfachste Ansätze wählen und mit diesen Grenzfälle untersuchen.

Der Verfasser möchte in der Folge einige einfache Berechnungsvorschläge für die Eigenspannungen geben:

Kriechen

Man erfaßt den elastischen und plastischen Gebrauchszustand durch Einführung eines dem Spannungsnachweis zugrunde gelegten ideellen Querschnittes in der Art, wie Rüsçh in den Erläuterungen zu DIN 4227 empfohlen hat. Diesen Querschnitt erhält man durch Einführung des Verhältnisses der E -Module von Ortbeton und Fertigteil in die Querschnittswerte. Dieses Verhältnis η reduziert die Breite des nachträglich aufgebrauchten Querschnittes aus Ortbeton.

Mit einer solchen Annahme lassen sich die Spannungen am Verbundquerschnitt vor dem Kriechen ($t=0$) leicht bestimmen. Es gilt:

$$\eta = \frac{E_a}{E_n}, \quad (5)$$

$$I_{a+n} = I_n + s_n^2 F_n + \eta (I_a + s_a^2 F_a), \quad (6)$$

$$\alpha \equiv \text{Fertigteil}, \quad n \equiv \text{Ortbeton},$$

$$M_a = \eta \frac{I_a}{I_{a+n}} M_0; \quad M_n = \frac{I_n}{I_{a+n}} M_0, \quad (7)$$

$$N = \frac{F_n s_n}{I_{a+n}} M_0 = \eta \frac{F_a s_a}{I_{a+n}} M_0,$$

$$\sigma_{n,o/u} = \frac{N}{F_n} \pm \frac{M_n n, n'}{I_n}; \quad \sigma_{a,o/u} = \frac{N}{F_a} \pm \frac{M_a a, a'}{I_a}. \quad (8)$$

Die Spannungsumlagerungen nach dem Kriechen kann man mit folgenden Annahmen einfach untersuchen.

Für die Stahlverbundbauweise wurde von FRÖHLICH [5] vor Jahren ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, das darin besteht, den Kriecheinfluß durch eine Erhöhung der Zahl n zu erfassen. Der n -Wert, von dem alle Querschnittswerte und damit auch Spannungen abhängen, ergibt sich in Abhängigkeit von der Kriechzahl

$$\varphi_n \quad \text{zu} \quad n = n_0 \cdot (1 + \varphi_n). \quad (9)$$

Diese Näherung bedeutet nichts anderes, als daß der Dischingersche ideale E -Modul des Betons für eine Ermittlung der Spannungen nach dem Kriechen zugrunde gelegt wird

$$1/E_B = (1 + \varphi_n)/E_{B0}. \quad (10)$$

FRÖHLICH hat nachgewiesen, daß man so für gewisse Verhältnisse ausreichende Übereinstimmung mit der exakten Theorie bekommt.

Diesen an sich alten Gedanken hat der Verfasser auf Betonverbundkonstruktionen ausgedehnt und versucht, zu sehr einfachen Methoden der Erfassung von Spannungsumlagerungen zu kommen.

Die Näherung zur streng theoretischen Lösung wurde an etwa 120 Fällen untersucht. Zudem konnten noch versuchstechnische Ergebnisse zum Vergleich herangezogen werden.

Es ist zutreffend, die Berechnung der Spannungsumlagerungen wie folgt durchzuführen:

a) Dem Ort- und Fertigteilbeton werden in oberer und unterer Begrenzung abhängig von der Art der Lagerung, Kriechschonzeit usw. Kriechzahlen zugeordnet. Es folgt:

$$\varphi_{n,a,1}, \quad \varphi_{n,a,2}, \quad \varphi_{n,n,1}, \quad \varphi_{n,n,2}, \quad (11)$$

$$\mu'_1 = \frac{\varphi_{n,a,1}}{\varphi_{n,n,1}}; \quad \mu'_2 = \frac{\varphi_{n,a,2}}{\varphi_{n,n,2}}.$$

b) Wird der Ortbeton erst später auf den schon seit längerer Zeit verlegten Fertigteil aufgebracht, so gilt:

$$\mu'' = e^{-t_0}, \quad (12)$$

t_0 Altersunterschied von Fertigteil und Ortbeton
 t läuft ab Zeitpunkt der Verstärkung

c) Die weitere Berechnung erfolgt mit

$$\mu_1 = \mu'_1 \mu''; \quad \mu_2 = \mu'_2 \mu'', \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= \eta [1 + \varphi_{n,n,1} 0,6 (1 - \mu_1)], \\ \eta'_2 &= \eta [1 + \varphi_{n,n,2} 0,8 (1 - \mu_2)] \end{aligned} \quad (14)$$

nach den Formeln (5) bis (8).

Dabei wird auf $\varphi_{n,n}$ bezogen, das nur mit seinem irreversiblen Kriechanteil (etwa 60 bis 80%) in Grenzen angenommen werden soll.

Umfangreiche Untersuchungen und Vergleiche für verschiedene Querschnittsformen haben ergeben, daß diese Berechnungsart eine zutreffende Näherung zu den theoretischen und versuchstechnischen Werten darstellt. Der Rechengang selbst ist äußerst einfach, so daß es sich stets lohnt, eine Einschätzung der Spannungsumlagerungen vorzunehmen.

Schwinden

Die Eigenspannungen infolge Mehrschwinden des Ortbetons kann man in folgender Weise nachrechnen:

a) Fertigteil und Ortbeton werden in oberer und unterer Begrenzung Schwindzahlen $\epsilon_{s,a,1}$; $\epsilon_{s,a,2}$; $\epsilon_{s,n,1}$; $\epsilon_{s,n,2}$ und die dazugehörigen Kriechzahlen (Schwindkriechen) zugeordnet: Es gilt:

$$\mu_{s,1} = \frac{\epsilon_{s,a,1} \varphi_{n,n,1}}{\epsilon_{s,n,1} \varphi_{n,a,1}}; \quad \mu_{s,2} = \frac{\epsilon_{s,a,2} \varphi_{n,n,2}}{\epsilon_{s,n,2} \varphi_{n,a,2}}. \quad (15)$$

b) Für die Grenzfälle $\mu_{s,1}$ und $\mu_{s,2}$ wird folgende Rechnung durchgeführt:

$$M_{s,1} = N_{s,1} c; \quad N_{s,1} = \frac{E_n \epsilon_{s,n,1} (1 - \mu_{s,1})}{\frac{1}{F_n} + \frac{1}{\eta F_a} + \frac{1}{I_n + \eta I_a}}. \quad (16)$$

Daraus folgt:

$$M_{n,s,1} = \frac{M_{s,1} I_n}{I_n + \eta I_a}; \quad M_{a,s,1} = \frac{M_{s,1} \eta I_a}{I_n + \eta I_a}. \quad (17)$$

Die Spannungen erhält man mit

$$\sigma_{n,o/u} = + \frac{N_{s,1}}{F_n} \pm \frac{M_{n,s,1} n, n'}{I_n}; \quad \sigma_{a,o/u} = - \frac{N_{s,1}}{F_a} \pm \frac{M_{a,s,1} a, a'}{I_a}. \quad (18)$$

Obwohl das Schwindkriechen an sich durch ein hohes Kriechmaß φ_n zu berücksichtigen wäre, da es unabhängig von äußeren Belastungen gleich nach dem Abbinden und Erhärten des Betons einsetzt, darf man es auf Versuche schließend aus erläuterten Gründen nicht zu hoch annehmen. Aus ähnlichen Gründen ist ein niedriger E-Modul zu empfehlen.

Vergleichuntersuchungen ergeben eine gute Näherung zur Theorie und zum Versuch für die μ -Werte zwischen 0,7 und 1,0, die in den meisten Fällen prak-

tisch vorkommen werden. Man sollte in dieser Art stets zwei Grenzfälle untersuchen.

Diese Nachweise lassen sich auch bei schlaff bewehrten Querschnitten für Zustand I führen, falls dieser einmal unbedingt einzuhalten ist.

Die Spannungen werden in üblicher Weise superponiert. Dabei müssen die Montagezustände sorgfältig berücksichtigt werden.

c) Hauptzugspannungen. Da bei einer geringfügigen Überschreitung der zulässigen Hauptzugspannungen im Spannbetonbalken eine erhebliche Stahlmenge zur Abdeckung benötigt wird, besitzen die Eigenspannungen hierfür oft große Bedeutung. Verbundquerschnitte begünstigen derartige Überschreitungen. Man soll deshalb von Anfang an darauf achten, daß die rechnerischen Hauptzugspannungen im Gebrauchszustand um einiges kleiner bleiben als die zulässigen. Ein Nachweis läßt sich bei Anwendung eines ideellen Querschnittes in schon beschriebener Weise führen [34]:

$$\begin{aligned} \text{Vor dem Kriechen:} \quad \tau_{xy} &= \frac{Q_x}{2 I_{a+n}} \eta (y_u^2 - y^2), \\ \text{nach dem Kriechen:} \quad \tau_{xy} &= \frac{Q_x}{2 I_{a+n}} \eta' (y_u^2 - y^2). \end{aligned} \quad (19)$$

d) Für Durchbiegung und Rißbild gilt das für die schlaffe Bewehrung schon Gesagte.

e) Die Haftspannungen in den Berührungsflächen von Ortbeton und Fertigteil berechnet man, ohne auf deren Verlauf näher einzugehen, mit:

$$\tau_1 = \frac{Q S_a}{I_{a+n} U},$$

wobei sind:

S_a statisches Moment der η -fachen Querschnittfläche F_a , bezogen auf die Nulllinie.

U Berührungsumfang zwischen Ortbeton und Fertigteil.

In der Regel fallen diese Spannungen für den Gebrauchszustand sehr niedrig aus. Man sollte sie immer kleiner als folgende Werte halten:

Ortbeton	B 225	B 300	B 450
	6	8	9 kg/cm ²

3.3. Der Erschöpfungszustand von Betonverbundbalken

3.31. Ergebnisse theoretischer und versuchstechnischer Untersuchungen

Von Fachleuten wurde sehr häufig die Meinung vertreten, daß die Erschöpfungslast von Betonverbundbalken kleiner sei als die monolithischer Balken mit einer Betongüte des Fertigteiltes. Zur Klärung dieser Fragen wurden viele Versuche durchgeführt (u. a. in England von ABELES, HAJNAL-KÓNYI, REVESZ, SAMUELY, EVANS, in Rumänien von ZACOPCEANU, in Polen von

KLUZ, in Ungarn von GOSCHY und in Deutschland von GRAF, RÜHLE) (vgl. Schrifttum). Man kann aus allen Versuchen folgern, daß unter folgenden konstruktiven Bedingungen die Erschöpfungslast eines Verbundquerschnittes gleich der eines monolithischen ist.

- a) Starrer Verbund zwischen den zwei Betonzonen.
- b) Ausschluß von Schubzerstörungen.
- c) Schwaches Bewehrungsverhältnis mit

$$k_x = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon_e} < 0,5.$$

Das Bewehrungsverhältnis ist von ausschlaggebender Bedeutung. Bei starker Bewehrung $k_x > 0,5$, die man aus wirtschaftlich-konstruktiven Gründen immer vermeiden sollte, ist die Güte der Druckzone von größerer Bedeutung als bei schwachbewehrten Balken. Hier kann ein spontanes Versagen der Druckzone Anlaß zum Bruch geben. Wesentlich ist der gute Haftverbund zwischen beiden Betonen. Versuche haben gezeigt, daß bei Lösung desselben, also in einem Zustand, wo nur noch ein elastischer Verbund durch die Bügel zwischen Ort-beton und Fertigteil besteht, die Erschöpfungslast um rund 20% sinken kann. Viele Versuche bestätigen, daß der Haftverbund bei normaler Aufrauung des Fertigteiles, sorgfältiger Ausführung und Bügelanordnung meist bis zum Bruch aushält.

Der Unterschied der E -Module der Betone sowie die Eigenspannungen sind also ohne nennenswerten Einfluß auf die Erschöpfungslast.

3.32. Vorschläge für den Nachweis des kritischen Zustandes vor dem Bruch

Schlaffe Bewehrung

Wie schon festgestellt wurde, besitzen für schlaff bewehrte Verbundquerschnitte die Spannungsumlagerungen in den meisten Fällen eine untergeordnete Bedeutung. Werden solche Querschnitte nach dem Traglastverfahren bemessen, so sollte man wie folgt verfahren:

Werden die in 3.31 angegebenen Bedingungen grundsätzlich eingehalten, so kann man unter folgender Voraussetzung Verbundquerschnitte als einen aus dem Beton des Fertigteiles gedachten Gesamtquerschnitt bemessen:

$$k_x = 0,1 \text{ bis } 0,4 \quad (\epsilon_b < \max \epsilon_b).$$

Bei Verbundbalken mit

$$k_x = 0,41 \text{ bis } 0,5 \quad (\epsilon_b \leq \max \epsilon_b)$$

ist es empfehlenswert, den Nachweis für einen mit dem Verhältnis η errechneten ideellen Querschnitt zu führen oder die niedrigere Würfelfestigkeit des Betons in den Rechenansätzen des Traglastverfahrens für die Druckzone einzuführen.

Bei Fällen mit $k_x > 0,5$

empfiehlt es sich, den gesamten Querschnitt für die Güte des Ortbetons nachzuweisen. Man wird in solchen Fällen tatsächlich eine um 10 bis 20% niedrigere kritische Last erhalten können.

Vorgespannte Bewehrung

Diese Feststellungen gelten auch für vorgespannte Verbundkonstruktionen.

Hier läßt sich der Nachweis auch sehr einfach nach RÜSCH führen. Der Verfasser hält diese Feststellungen für die ausschlaggebenden bei der Bemessung von Verbundquerschnitten und schließt sich der von ABELES und HAJNAL-KÓNYI schon länger vertretenen Meinung nach Durchführung weitgehender Versuche voll an.

3.33. Bemessung der Verbundmittel zwischen Ortbeton und Fertigteil

Um den Verbund auch im Bereich vor der Erschöpfungslast starr zu halten, müssen für seinen Nachweis noch einige Festlegungen getroffen werden.

Zunächst sollte man auf jeden Fall versuchen, durch geeignete Querschnittsausbildung die Haftspannungen zwischen Ortbeton und Fertigteil in Grenzen zu halten, die sich mit

$$\tau_{1,Br} = \frac{Q_{Br}}{Uz} \quad (20)$$

genau genug abschätzen lassen.

Diese Haftspannungen sollen folgende Werte möglichst nicht überschreiten:

B 225	B 300	B 450
10	12	14 kg/cm ²

Die Schubmessungen schlaff bewehrter Betonverbundquerschnitte müssen sich an die üblichen Regeln für monolithischen Beton halten, solange keine neueren und zutreffenderen Ergebnisse vorliegen. GOSCHY [35] gibt für die Schub-sicherheit eine brauchbare Lösung an, indem er eine Bruchschubkraft bestimmt, die entweder zur Lösung beider Betonzonen oder im wohl selteneren Fall zum Bruch der Verbundbewehrung führt. Um diese zu verhindern, muß sein:

$$N_{Bx} = \tau_B b x \geq D_{Bx} \quad (21)$$

oder
$$Z_{B,Sx} = \sqrt{2} n_1 f_{e1} \sigma_{1,g} + 2 n_2 f_{e2} \sigma_{2,g} \geq D_{Bx}. \quad (22)$$

Dabei bedeuten:

- $\tau_B = \sigma_{B/6}$ Bruchschubspannung.
- n_1, f_{e1} Anzahl und Fläche der Schrägstähle im Abstand x vom Balkenende.
- n_2, f_{e2} Anzahl und Fläche der Bügel im Abstand x vom Balkenende.
- $\sigma_{1,g}$ Grenzspannungen = $0,9 \cdot \sigma_s$.
- $\sigma_{2,g}$ Grenzspannungen = $0,5 \cdot \sigma_s$.

- $\sum D_{ix}$ Betondruckkraft im Gebrauchszustand im Abstand x vom Balkenende.
 x Länge vom Balkenende.

Die Schubsicherheit soll sein:

$$n_s = \frac{N_{Bx}}{\sum D_{ix}} \geq 2; \quad n_s = \frac{Z_{BSx}}{\sum D_{ix}} \geq 2. \quad (23)$$

Dieser Nachweis wird in [35] u. a. ausführlich beschrieben.

Bei Stahlbetonverbundkonstruktionen mit vorgespanntem Zuggurt können die Verbundmittel aus Stahl wie folgt nach GESSNER [23], [30] vorteilhaft bemessen werden:

$$\Delta Z_{ev, Br} = (Z_{ev, Br} - Z_{ev, \infty}), \quad (24)$$

$$erf F_{e, B\ddot{u}gel} = \frac{\max \Delta Z_{ev, Br}}{\sigma_s} \quad (25)$$

(für halbe Trägerlänge).

- $Z_{ev, Br}$ Unter rechnerischer Bruchlast in der Spannbewehrung auftretende Zugkraft.
 $Z_{ev, \infty}$ Vorspannung nach $S + K$.
 σ_{Sr} Spannung des B\ddot{u}gelstahles bei Erreichen der Streckgrenze.

Zweifellos drängt der gesamte Komplex der Schubprobleme noch viele Fragen auf. Mit vorliegenden Nachweisen und einer wohlüberlegten Konstruktion dürfte man stets auf der sicheren Seite liegen.

3.4. Statisch unbestimmte Stahlbetonverbundsysteme

Stellt man statisch unbestimmte Systeme durch Verstärkung von vorgespannten oder schlaff bewehrten Fertigteilen mit Ortbeton her, so wirken sich in bestimmten Fällen die Eigenspannungen auf die statisch unbestimmten Größen aus. Erweitert man die grundlegenden Erkenntnisse DISCHINGERS [1] über die Beeinflussung der Schnittkräfte statisch unbestimmter Stahlbetonbauwerke durch Kriechen und Schwinden des Betons auf die Beton-Verbundbauart, wobei man auf die Arbeiten von KLÖPPEL [7] und SATTLER [10] über die Stahlverbundtheorie zurückgreifen kann, so erhält man folgende Ergebnisse, deren Ableitungen in einer Arbeit des Verfassers [19] beschrieben sind.

- Die infolge unterschiedlicher plastischer Formänderungen von Fertigteil und Ortbeton am Verbundquerschnitt auftretenden Eigenspannungen beeinflussen die statisch unbestimmten Größen und somit das Schnittkraftbild.
- Die bei der Berechnung von statisch unbestimmten Stahlverbundsystemen angewendete Näherungslösung nach KLÖPPEL und SATTLER ist bei sinn-gemäßen Voraussetzungen auch für den Betonverbund brauchbar.

- c) Bei gleichen Trägheitsmomenten bleiben die Eigenspannungen ohne Auswirkungen auf die statisch unbestimmten Größen.
- d) Veränderliche Trägheitsmomente führen zu Schnittkraftumlagerungen, die aber wegen Geringfügigkeit vernachlässigbar sind.
- e) Nachteilige Einflüsse des Schwindens werden bei Betonverbund durch Kriechen noch stärker als bei monolithischem Stahlbeton abgemindert, wobei man ein kleines Schwindkriechen berücksichtigen sollte.
- f) Die Schnittkräfte infolge Stützenverschiebungen werden nicht in dem Maß wie bei den monolithischen Tragwerken durch Kriechen abgebaut; man muß ihnen daher die notwendige Aufmerksamkeit schenken.

Praktische Untersuchungen in dieser Richtung dürften nur bei Konstruktionen gem. 2. e) in Sonderfällen außergewöhnlicher Belastung und Bedeutung des Bauwerkes von Interesse sein.

Schrifttum

1. DISCHINGER, «Verformung und Kriechen des Betons bei Bogenbrücken». Bauingenieur (1937) Hefte 33/34, 35/36, 39/41, (1939) Hefte 5/6, 21/22, 31/32.
2. CRAEMER, «Spannungsumlagerungen in Stahlbetontragwerken, die nachträglich verstärkt oder abschnittsweise hergestellt werden». Ing.-Archiv 14 (1943), S. 119.
3. PFEFFER, «Über die Haftfestigkeit von Neu- und Altbeton». Nachrichten des Österreichischen Beton-Vereins VIII. Jahrgang (1948). Folge 5. Österreichische Bauzeitschrift 3. Jahrg., H. 8/9.
4. ABELES, «Balkenversuche mit britischen vorgespannten Betonschwellen und eine neue Art von Straßenbrücken über Bahnen in England». Beton- und Stahlbetonbau (1950), H. 2, S. 36.
5. FRÖHLICH, «Theorie der Stahlverbund-Tragwerke». Der Bauingenieur (1950), S. 80.
6. ABELES, «Some New Developments in Prestressed Concrete». The Structural Engineer (1951) Nov.
7. KLÖPPEL, «Die Theorie der Stahlverbundbauweise in statisch unbestimmten Systemen unter Berücksichtigung des Kriecheinflusses». Der Stahlbau (1951), S. 17.
8. SAMUELY, «Some Recent Experience in Composite Pre-Cast and In-Situ Construction, with Particular Reference to Prestressing». Proc. Inst. n. Civ. Engrs. Part. III Vol. 1 (1952), S. 222.
9. ARUTJUNJAN, «Einige Fragen der Kriechtheorie». Verlag für technische Literatur, Moskau (1952).
10. SÄTTLER, «Theorie der Verbundkonstruktionen». Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1953).
11. ABELES and HAJNAL-KÓNYI, «Static and Fatigue Tests on Partially Prestressed Concrete Constructions». ACI Journal (1954) Prov. V. 51, p. 361.
12. RÜHLE, «Die Herstellung statisch unbestimmter Systeme durch nachträgliche Verbindung von Stahlbetonfertigteilen». Beton- und Stahlbetonbau (1954), S. 32. Bauplanung und Bautechnik (1954), S. 27.
13. RÜHLE, «Die Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundkonstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen mit Ortbeton». Bauplanung und Bautechnik (1954), S. 420—432.
14. ABELES, «Neuere Versuche und Erfahrungen mit vorgespanntem Beton in England». Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik (1955), H. 10.

15. HABEL, «Zwängungsspannungen statisch unbestimmter Stahlbeton- und Spannbetonbalken». Die Bautechnik (1955), S. 245.
16. HAJNAL-KÓNYI, «Diskussionsbeitrag zu Question II. Paper 6». Kongreßbericht der F.I.P. Amsterdam (1955).
17. KLUZ, «Strunobetonowe Wktadki Deskowe». Warszawa (1955), Budownictwo i Architektura.
18. KOLLAR und KEKEDY, «Über den Einfluß des Kriechens auf den Spannungszustand und auf die Formänderungen statisch unbestimmter Stahlbetonkonstruktionen». Bauplanung und Bautechnik (1955), S. 494.
19. RÜHLE, «Zur Theorie statisch unbestimmter Verbundsysteme aus Stahlbetonfertigteilen und Ortbeton bei Berücksichtigung der Eigenspannungen aus Kriechen und Schwinden». Beton- und Stahlbetonbau (1955), S. 194.
20. RÜHLE, «Konstruktive Fragen einer teilweisen Vorfertigung». Die Bautechnik (1955), S. 137.
21. RÜHLE, «Die Berechnung von Spannbetonkonstruktionen in Montagebauweise bei besonderer Berücksichtigung des Betonschwindens und -kriechens». F.I.P. Second Congress Amsterdam (1955), Session II, Paper No. 6.
22. RÜHLE, «Die Herstellung statisch unbestimmter Systeme durch nachträgliche Verstärkung und Verbindung von Stahlbetonfertigteilen». «Die Montagebauweise mit Stahlbetonfertigteilen und ihre aktuellen Probleme». VEB Verlag Technik, Bln. (1955), S. 285.
23. GESSNER, «Die Berechnung der Bügelbewehrung in Stahlbetonverbundkonstruktionen mit vorgespanntem Zuggurt». Betonstein-Zeitung (1956), S. 503.
24. GOSCHY, «Berechnung der Stahlbetonfertigteilkonstruktionen, verbunden an Ort und Stelle», Vorbericht 5. Kongreß der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Lissabon (1956).
25. KOLLÁR, «Die Wirkung des Schwindens und Kriechens des Betons auf eingerissene Stahlbetonträger». Acta Technica, Tornus XIV, Fasciculi 3-4, Budapest.
26. PASCHEN, «Beitrag zur Frage der Kriechumlagerungen in statisch unbestimmten Betontragwerken». Dissertation TH München (1956).
27. ZACOPCEANU, «Deficientele sistemelor actuale de imbináre a prefabricatelor de beton armat si posibilitatile de imbunatatite a lor». Industrie Constructiilor si a Materialelor de constructii, Bukarest (1956), H. 6.
28. CONSTANTIN AVRAM und PESCARU, «Elementi mixte de plansen de beton si beton precompromat». Buletinul stiintifice si Tehnic at Institutului Polotehnic Timisoara (1957), Tomut 2, Fa. 2.
29. ABELES, "Cracking of concrete under dynamic loading". RILEM, Symposium on Bond and Crack Formation in Reinforced Concrete, Stockholm 1957.
30. GESSNER, «Berechnung der Bügelbewehrung in Stahlbetonverbund-Konstruktion mit vorgespanntem Zuggurt». Betonstein-Zeitung (1957), S. 101.
31. LIPTAK, «Rábetonozással, erősített eggütdolgozó vasbetonszerkezetek szamitása UVATERV». Müszaki osztály (1957), Budapest, S. 46.
32. PATY, «Shelesobetonye Konstukui. Armirowanye Struno etonnymk Älementami». Beton Shelesobeton (1957), H. 3.
33. RÜHLE, «Ergebnisse von Dauerstand- und Bruchlastversuchen an schlaff bewehrten Betonverbundbalken». Bauplanung-Bautechnik (1957), Hefte 3, 5 und 6.
34. RÜHLE, «Über den Einfluß des Kriechens auf die Schubspannungen in Betonverbundkonstruktion». Bauplanung-Bautechnik (1957), S. 75.
35. GOSCHY, «Über die Tragfähigkeit von Stahlbetonverbundkonstruktionen». Bauplanung-Bautechnik (1958), H. 7, S. 311.
36. MICHAILOW, "Recent research on the action of unstressed concrete in composite

structures (precast monolithic structures)". Third Congress of F.I.P., Berlin 1958, Session I, Paper No. 7.

37. RÜHLE, «Ergebnisse von Dauerstand- und Bruchlastversuchen an vorgespannten Betonverbundbalken. Die Montagebauweise mit Stahlbetonfertigteilen in Industrie- und Wohnungsbau». VEB Verlag Technik, Berlin (1958), S. 327.
38. RÜHLE, «Vorschläge für Bemessung und Konstruktion von Betonverbundkonstruktionen mit schlaffer oder vorgespannter Bewehrung». Bauplanung und Bautechnik (1958), H. 5 und H. 6.

Zusammenfassung

Die Bedeutung der Zwängungsspannungen und der daraus folgenden Schnittkraft- bzw. Spannungsumlagerungen, die bei nachträglicher Verbindung oder Verstärkung von Stahlbetonfertigteilen entstehen, ist in letzter Zeit häufig in der Literatur behandelt worden. Der Verfasser gibt einen gedrängten Überblick über die Ergebnisse seiner längeren Forschungsarbeiten, die mit denen anderer Arbeiten verglichen werden. Der Beitrag beschäftigt sich zunächst mit den Dauerspannungen und Formänderungen, welche bei Konstruktionen bestehen bleiben, die nach Verlegen vorgefertigter Elemente zu Tragsystemen biegefest oder gelenkig verbunden werden, wobei die praktischen Auswirkungen der infolge Kriechens und Schwindens auftretenden Schnittkraftumlagerungen gezeigt werden.

Ferner werden theoretische wie auch versuchstechnische Untersuchungen an durch Ortbeton nachträglich verstärkten Stahlbetonelementen beschrieben. Die durch Kriechen und Schwinden infolge verschiedener Abmessungen, Altersunterschieden sowie der unterschiedlichen Qualitäten beider Betonzone hervorgegerufenen Spannungsumlagerungen werden in ihrer Größenordnung für den Gebrauchslastenzustand und den Grenzzustand vor dem Bruch sowie hinsichtlich Rissebildung untersucht. Es wird versucht, aus Theorie und Versuch in dieser Hinsicht gültige Berechnungs- bzw. Bemessungsregeln anzugeben.

Summary

The significance of stresses due to restraint and the consequent redistribution of the internal forces or stresses, which occurs when precast reinforced concrete members are subsequently joined together or completed with in-situ concrete, has in recent years received much attention in literature. The author gives a brief survey of the results of his researches extending over a fairly considerable length of time and compares them with those obtained by other investigators. The present paper primarily considers the permanent stresses and strains which continue to exist in structures which are composed of precast members assembled into structural systems and connected by articulated or rigid joints; the practical effects of the redistribution of internal forces due to creep and shrinkage are indicated.

Furthermore, theoretical and experimental investigations on precast members subsequently completed by the addition of in-situ concrete are described. The order of magnitude of the stress redistribution produced by creep and shrinkage due to differences in the dimensions, the age and the quality of the two concretes is analysed for working-load and for ultimate conditions as well as with respect to cracking. An attempt is made to indicate appropriate rules for analyses and design, based on the theoretical and experimental results obtained.

Résumé

L'importance des contraintes coercitives et des modifications des forces intérieures ou des contraintes qui en résultent, phénomènes qui se produisent quand les éléments préfabriqués en béton sont assemblés ou renforcés ultérieurement, ont été fréquemment étudiées dans la littérature spécialisée récente. L'auteur donne une brève récapitulation des résultats obtenus au cours de ses longues investigations, qu'il compare avec les résultats fournis par d'autres travaux. Sa contribution porte tout d'abord sur les contraintes permanentes et les déformations qui subsistent dans les ouvrages formés d'éléments préfabriqués, assemblés en systèmes porteurs d'une manière rigide ou articulée. L'auteur montre les effets pratiques des variations des forces intérieures dues au fluage et au retrait.

En outre, il expose ses recherches théoriques et expérimentales sur les éléments en béton préfabriqué renforcés ultérieurement et sur place à l'aide de béton. Ce procédé met en jeu des modifications du régime des contraintes, sous l'influence du fluage et du retrait qui résultent des différences de dimensions, d'âge et de qualité entre les deux zones de béton; l'auteur a étudié l'ordre de grandeur de ces modifications, tant pour le régime de la charge de service et l'état limite avant la rupture, que du point de vue de la formation des fissures. A partir de la théorie et de l'expérimentation, il s'est efforcé de dégager des règles corrélatives de calcul.

V b 2

The Effect of Creep in Compressed Plates

Phénomènes d'écoulement dans les dalles comprimées

Kriecherscheinungen in gedrückten Scheiben

GEORGE HERRMANN

Department of Civil Engineering, Columbia University, New York, U. S. A.

Introduction

The phenomenon of creep, which consists in the property of a solid to change its shape with time under constant loading, has gained considerable significance during the past decade and a half. Even though such structural materials as for example concrete, possess this undesirable feature, it is only with the advent of structures and machinery operating at elevated temperatures, that aluminum alloys and even steel began to exhibit the property of creep. As a result, the concept of useful life-time of a structure had to be introduced and became one of the chief characteristic design quantities to be determined by the structural analyst.

The concept of life-time of a structural element is based on experimental evidence that under constant loads the deformations increase at a certain rate with time and become eventually so large that the structure has to be considered useless. In case of plates or columns subjected to compressive loads, it has been observed that creep causes instability in a sense similar to classical buckling, which occurs after a definite lapse of time subsequent to the application of constant loads.

A variety of viewpoints may be adopted to determine analytically this critical time. For example, expressions for the deflection of a compressed element as a function of time can be found, and the critical time can be defined as the time at which this deflection becomes infinite. Another approach could consist in assuming an initial imperfection that would increase with time. The critical time (or life-time) could then be defined as the time at which a certain allowable quantity, such as stress, strain or deflection, is reached. A very comprehensive and illuminating survey of the theories of creep buckling was presented by HOFF [1].

Still another point of view was adopted in a more recent study by this author [2]. It was assumed that the plate is perfectly flat and that the constant compressive stresses will cause a time-dependent decrease of Young's (or shear) modulus, which in turn is proportional to the flexural rigidity. This decrease is determined by establishing the plate equations on the basis of stress-strain relations derived from spring-dashpot models, as is customary in visco-elasticity. The critical time was defined as the instant at which the flexural rigidity reaches a value that would make a corresponding elastic plate unstable under the given loading.

It was shown that for a certain aluminum alloy and a certain temperature level, the theoretically predicted life-times compared favorably with experimental data. Because of the scarcity of information on material properties and life-times a comparison on a broader scale could not be carried out.

The purpose of the present contribution is to suggest an improved version of the approach described above. Whereas in the preceding study [2] the plate was considered isotropic with regard to all its properties, and thus paralleled in this respect the assumptions of the few other plate creep buckling investigations [3, 4], the assumption of different creep behavior in the two principal directions of a uniaxially compressed plate is made in what follows. Regarding this anisotropy, precisely the same point of view is taken as in solving the problem of elasto-plastic buckling of a rectangular plate (see, for example [5, 6], and also [7]), under the same loading.

It is believed that the present version represents a theoretically more satisfactory variant of the approach adopted in [2]. Furthermore, a comparison with experimental results reported in [8] shows a better overall agreement between theory and experiment.

Basic Equations

A flat rectangular plate with edge lengths a and b and thickness h is referred to the system of coordinates shown in fig. 1 and is loaded along the edges $x=0, a$ by a uniformly distributed (compressive) force per unit of length F . All four edges are simply supported.

The stress equation of equilibrium is

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

where w is the deflection and the plate moments M_x, M_y, M_{xy} are defined in the usual way.

In the present linearized analysis the force F is not related to w . To express equilibrium in terms of one single unknown (deflection w), the stress-strain relations of the material and the geometrical strain-displacement relations have to be specified. If the plate is assumed to be orthotropic and the strain-

displacement relations are taken to be those of the linear classical plate theory, the well-known stability equation of an orthotropic plate is obtained from (1) in the form

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

where D_x and D_y are the two flexural rigidities, while D_{xy} is the twisting rigidity.

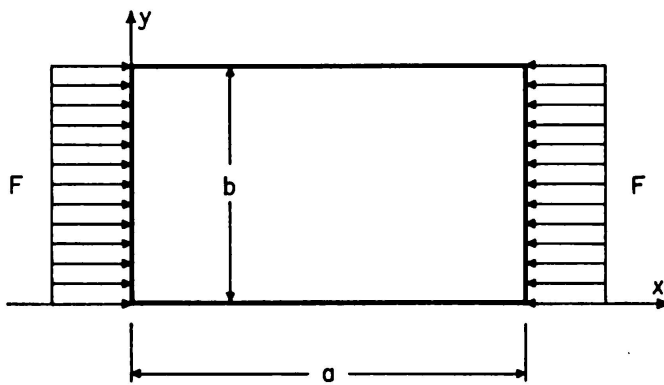


Fig. 1.

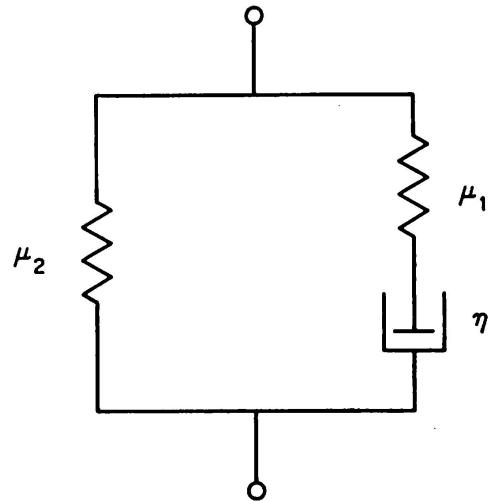


Fig. 2.

The assumption of the plate being orthotropic is introduced for similar reasons as in the case of buckling of plates in the elasto-plastic range, as is discussed below.

To describe its creep behavior, the material is considered to be linearly visco-elastic and its response in shear to be governed by a three-parameter model (see fig. 2). This model of a so-called "standard linear solid" consists of 2 springs with constants μ_1 and μ_2 and a dashpot with constant η . The instantaneous response is governed by

$$\mu_1 + \mu_2 = G_u, \quad (3)$$

which may be called the unrelaxed shear modulus; after a very long time the spring μ_1 will become ineffective and

$$\mu_2 = G_r \quad (4)$$

is called the relaxed shear modulus. The quantity

$$\tau_\epsilon = \eta/\mu_1 \quad (5)$$

is known as the time of relaxation of stress under constant strain, while

$$\tau_\sigma = \eta/\mu_1 + \eta/\mu_2 \quad (6)$$

is the time of relaxation of strain under constant stress.

It will be assumed now that since the plate is subjected to a uniaxial state of stress, it creeps only in the direction of stress, while no creep takes place in the direction perpendicular to it. This implies that the flexural modulus D_x decreases with time, while the flexural modulus D_y does not change as long as the plate remains flat. As regards the twisting modulus D_{xy} , it may be assumed that it also decreases, but slower than D_x . The above assumptions are completely analogous to the ones made in elasto-plastic analysis of plate buckling, [5, 6].

To establish the rate of decrease of D_x we recall that the flexural rigidity D is related to the shear modulus G by the expression

$$D = \frac{G h^3}{6(1-\nu)}. \quad (7)$$

Since the (constant) force F produces constant stresses in the perfectly flat plate, the stress-strain relation in shear, on the basis of the model of fig. 2, takes on the form

$$\tau_{xy} = G_r \left(1 + \tau_\sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma_{xy}. \quad (8)$$

During the interval of time $0 < t < \infty$, the shear modulus $G(t)$ will decrease from G_u to G_r . Since at $t=0$, $\tau_{xy} = G_u \gamma_{xy}$ we obtain from the above equation

$$\frac{G(t)}{G_u} = \frac{G_r}{G_u} \cdot \frac{e^{t/\tau_\sigma}}{e^{t/\tau_\sigma} + G_r/G_u - 1} \quad (9)$$

and further

$$\frac{D_x(t)}{D_u} = \frac{G(t)}{G_u} = \beta. \quad (10)$$

Similarly, as in elasto-plastic analysis of plate buckling we can assume

$$\frac{D_{xy}(t)}{D_u} = \beta^*, \quad \frac{D_y}{D_u} = 1, \quad (11)$$

where β^* is such that

$$\beta < \beta^* < 1 \quad (12)$$

and the buckling eq. (2) takes on the form

$$D_u \left[\beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\beta^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

This is the basic equation which can be used to determine the critical or lifetime of the plate.

Determination of Life-Time

Regarding the response of the plate subjected at a time $t=0$ to a constant force F the following observations can be made: If the force F is larger or

equal to an upper buckling force F_u which would cause an isotropic plate with stiffness D_u to buckle, then instability occurs, just as in the purely elastic plate, instantaneously, and no creep effects are exhibited. F_u is obtained from the basic eq. (13) by letting $\beta = \beta^* = 1$ and results in the classical expression

$$F_u = \frac{D_u \pi^2}{b^2} \left(\frac{b}{a} m + \frac{a}{b m} \right)^2. \quad (14)$$

If, on the other hand, the force F is smaller than the lower buckling force F_l , then no buckling will occur even after infinite time. F_l is obtained from the basic equation by taking the value for β reached after infinite time, namely $\beta = G_r/G_u$. This results in

$$F_l = \frac{D_u \pi^2}{b^2} \left(\frac{G_r b^2 m^2}{G_u a^2} + 2\beta^* + \frac{a^2}{m^2 b^2} \right). \quad (15)$$

If the force F has a value between F_u and F_l , then buckling will ensue after a finite period of time, which is referred to as the lifetime or critical time t_{cr} . Actually, it is more straightforward to find the buckling load corresponding to a given lifetime. All one has to do is to determine first β and β^* for this particular time, from eq. (10), and the buckling load, from eq. (13), will then be given by

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 D_u}{b^2} \left(\beta \frac{b^2 m^2}{a^2} + 2\beta^* + \frac{a^2}{m^2 b^2} \right). \quad (16)$$

Regarding the determination of β^* , we could assume, by analogy to the suggestion of BLEICH (see [5]),

$$\beta^* = \sqrt{\beta} \quad (17)$$

or a more refined relation, by analogy to the suggestion of KOLLBRUNNER (see [6])

$$\beta^* = \frac{\beta + \sqrt{\beta}}{2}. \quad (18)$$

It appears that both of the above expressions give nearly the same results in creep analysis.

Numerical Example

In order to predict a numerical value for the critical time, three material constants corresponding to the three elements of the model must be known, in addition to Poisson's ratio. These constants may be obtained from a standard creep test.

In reference [2] it was shown how the constants for a 2024-T3 aluminum sheet at 450° F subjected to a compressive constant stress of 26,000 pounds per square inch may be obtained from a curve which gives total strain against time. With Poisson's ratio of $\nu = 0.3$, the following values were obtained

$$\begin{aligned}
 G_u &= 2.5 \times 10^6 \text{ psi} \\
 G_u/G_r &= 4.5 \\
 \tau_\sigma &= 30 \text{ hours}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

The numerical value of the critical load (or stress), corresponding to any given time, can readily be calculated from eq. (16). To compare with experimental data of reference [8] (see also reference [2]), $b m/a$ can assumed to be equal to unity.

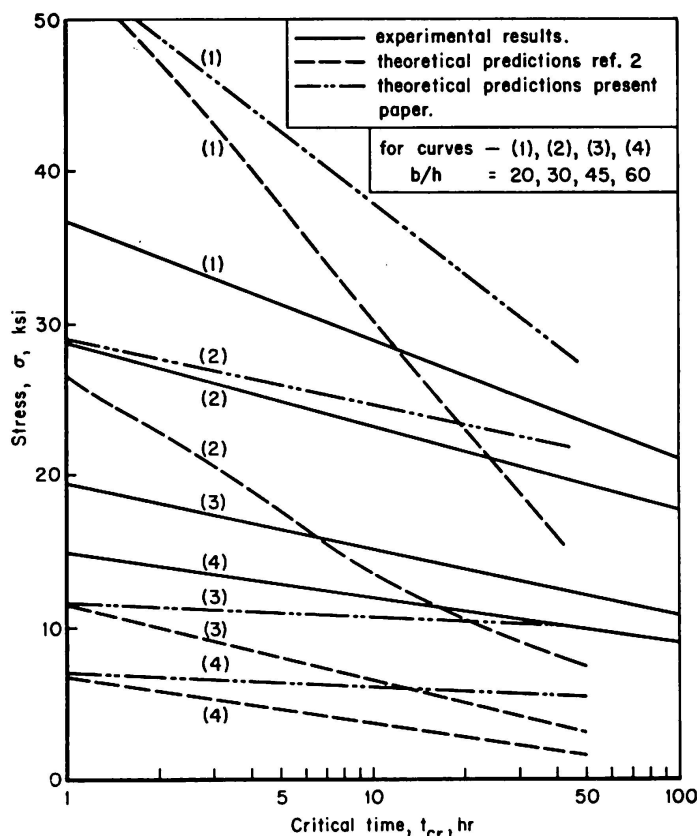


Fig. 3.

The critical stress σ , plotted against the critical time, is given in fig. 3. It is seen that the assumption of the plate being anisotropic in its creep behavior furnishes a somewhat better overall correlation with experimental data, than the earlier study [2], where the plate was assumed to be isotropic.

In conclusion it should be emphasized that it might be difficult to furnish a rigorous justification for the approach to creep buckling employed in this paper. However, the procedure adopted here appears to yield theoretical predictions which are reasonably close to experimental results; this is true not only for the actual numerical values for a given set of relevant parameters, but also with regard to the proper dependence of the critical times upon these parameters. Due to a large scatter of basic creep data, such as relaxation

times, an analysis of creep buckling, at least for the present, cannot hope to achieve more than to provide an order of magnitude of critical times. From this point of view the method of analysis suggested in this paper has the advantage that it conceptually reduces the time-dependent phenomenon of creep buckling to the more familiar time-independent buckling in the elasto-plastic range. Due to an extreme temperature sensitivity of material properties in creep (some examples are quoted in [2]), which excludes a priori a great accuracy in creep buckling analysis, this engineering-type approach to a very complex problem appears to be warranted. Much theoretical and experimental work however remains to be done to provide a firmer basis for a deeper understanding of time-dependent structural response.

Bibliography

1. N. J. HOFF, "A Survey of the Theories of Creep Buckling". Proceedings of the Third U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1958.
2. G. HERRMANN and HU-NAN CHU, "Theoretical Determination of Lifetime of Compressed Plates at Elevated Temperatures". NASA Memo 2-24-59W, Washington, March, 1959.
3. G. N. RABOTNOV and S. A. SHESTERIKOV, "Creep Stability of Columns and Plates". Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 6, p. 27, 1957.
4. T. H. LIN, "Creep Deflection of Viscoelastic Plate Under Uniform Edge Compression". Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, p. 883, September 1956.
5. F. BLEICH, "Buckling Strength of Metal Structures". McGraw-Hill, New York, 1952.
6. C. F. KOLLBRUNNER and M. MEISTER, «Ausbeulen». Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958.
7. C. F. KOLLBRUNNER and G. HERRMANN, «Stabilität der Platten im plastischen Bereich». Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der E.T.H., No. 20, Leemann, Zürich, 1947.
8. E. E. MATHAUSER and W. D. DEVEIKIS, "Investigation of the Compressive Strength and Creep Lifetime of 2024-T3 Aluminum Alloy Plates at Elevated Temperatures". NACA Report 1308, 1957.

Summary

It has been repeatedly observed that if a plate (or a column), made of a material which creeps, is subjected to compressive loads, instability may occur, provided the loads are applied over a sufficiently long period of time. Using a simple viscoelastic model to describe the material properties, this phenomenon of creep buckling of plates is reduced conceptually to the case of elasto-plastic buckling. Linearized equations are used throughout and a simple procedure to determine the critical time, at which the plate buckles, is indicated. The theoretical results compare favorably with some available experimental data.

Résumé

Il a été déjà constaté à plusieurs reprises qu'une dalle comprimée (ou un appui comprimé) constituée par un matériau susceptible de fluage peut être instable lorsque les contraintes s'exercent pendant un temps suffisamment long. Ce phénomène de voilement par fluage des dalles a été ramené au voilement élasto-plastique à l'aide d'un modèle visco-élastique. L'auteur emploie partout des équations linéarisées et indique une méthode simple pour la détermination du temps critique après lequel intervient le voilement. Les résultats théoriques concordent assez bien avec quelques résultats expérimentaux connus.

Zusammenfassung

Es wurde schon mehrere Male festgestellt, daß eine gedrückte Scheibe (oder Stütze) aus kriechfähigem Material instabil werden kann, wenn die Kräfte über eine genügend lange Zeit wirken. Mit Hilfe eines viskoelastischen Modells, das den Charakteristiken des Baustoffes entspricht, wird dieses Phänomen des Kriech-Beulens von Platten auf das elastoplastische Beulen zurückgeführt. Es werden durchwegs linearisierte Gleichungen angewendet, und es wird eine einfache Methode angegeben zur Bestimmung der kritischen Zeit, bei der das Beulen eintritt. Die theoretischen Ergebnisse stimmen ziemlich gut mit einigen vorhandenen Versuchsergebnissen überein.