

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Rubrik:** Va: Behaviour of structures with regard to temperature, humidity and  
time (e.g. deflection and collapse under longtime loading)

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen

*The Analysis of Creep and Shrinkage of Non-homogeneous Concrete Structures*

*Le calcul du fluage et du retrait dans les constructions en béton non homogènes*

ZDENĚK P. BAŽANT

Ing., C. Sc., Dopravoprojekt Prag

Die Mehrzahl moderner Betonkonstruktionen ist durch die Nichthomogenität des Kriechens und Schwindens gekennzeichnet. Diese Nichthomogenität wird hervorgerufen entweder dadurch, daß der Beton der verschiedenen Konstruktionsteile bedeutend unterschiedliches Alter hat, oder dadurch, daß der Beton mit Stahl zusammenwirkt, oder weil der Baugrund nicht als steife, sondern als elastische Unterstützung oder Einspannung wirkt<sup>1)</sup>. Das Kriechen solcher Konstruktionen ruft die Zeitveränderungen der Innenkräfte hervor, und zwar zum Unterschied von den homogenen Konstruktionen auch dann, wenn keine Veränderung des statischen Wirkens oder keine Stützenverschiebung entsteht. Diese Umlagerungen beeinflussen hauptsächlich die Reißsicherheit und die Durchbiegungen.

Manche Teillösungen wurden schon von zahlreichen Forschern gegeben<sup>2)</sup>. Trotzdem sind aber noch viele Aufgaben ungelöst geblieben. In diesem Aufsatz wird die völlig allgemeine Lösung des Problems erklärt, die vom Autor schon 1961 [2] und 1962 [3] angedeutet wurde. Sie wird hier besonders mit Rücksicht auf die Verwendung der elektronischen Rechenmaschinen vorgelegt.

### Die Annahmen über das Kriechen

1. *Die Dischingersche Annahme.* Diese vereinfachende Annahme setzt den linearen Verlauf des Betonkriechens voraus, bei welchem die Dauerlast die

---

<sup>1)</sup> Zur ersten Gruppe gehören z. B. die im Freivorbau hergestellten Konsolbrücken, die aus Fertigteilträgern (evtl. unterschiedlichen Alters) hergestellten Roste und Durchlaufträger, die Tragwerke aus Fertigteilträgern, welche mit der oberen Ort betonplatte zusammenwirken, die sukzessiv betonierte Konstruktionen, wie z. B. am selbsttragenden geschweißten Bewehrungs skelett, die in eine ältere steife Gründung eingespannten Betonbehälter usw. Zur zweiten Gruppe gehören z. B. die Schrägseil- und Hängebrücken mit Betonbalken, die Beton-Stahl-Verbundträger, die Träger aus vorgespanntem Beton, die Bogen mit Zugband u. a.

<sup>2)</sup> Z. B. die Lösungen des nichthomogenen Querschnitts der homogenen Konstruktion, der Schrägseilbrücke, des Bogens mit Zugband, der einfach statisch unbestimmten Konstruktion mit der vereinfachten Veränderung des Betonalters u. a.

gesamte plastische Formänderung im Zeitabschnitt von  $t=0$  bis  $t$  bewirkt, die dem Kriechmaß  $\varphi(t)$  proportional ist [4], wobei  $\varphi(t)$  eine im vorhinein gegebene stetige, wachsende Funktion der Zeit  $t$  mit dem endlichen Limit  $\varphi(\infty)$  für  $t \rightarrow \infty$  darstellt. Die Zeitveränderung des  $E$ -Moduls kann man hierin einbeziehen, so daß  $E$  als konstant (federnder  $E$ -Wert) angenommen werden kann [4].

2. *Die Kriechaffinität.* Um die Konstruktionsnichthomogenität auszudrücken, wird die Voraussetzung gemacht, daß die Kriechkurven  $\varphi_r(t)$  für die Teile  $r$  mit verschiedenem Betonalter  $t_r$  miteinander affin werden in der Weise, daß die Affinitätsachse parallel zur Zeitachse wird und daß die Werte  $\varphi_r(t)$  für den Ausgangszeitpunkt  $t=t_k$  und für  $t \rightarrow \infty$  unverändert bleiben (Fig. 1).

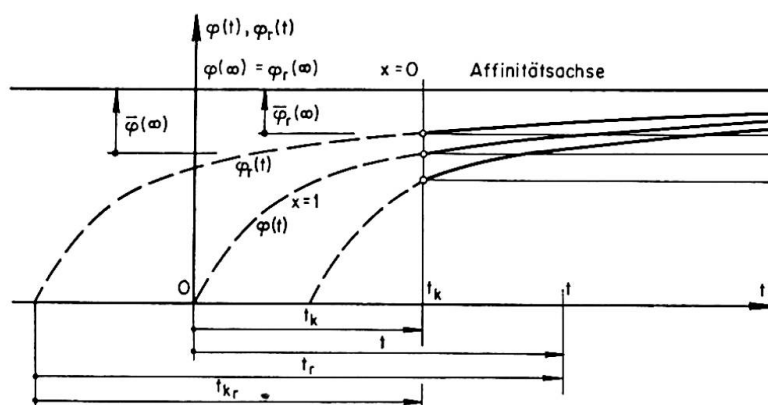


Fig. 1.

Wählt man eine gewisse Grundkriechkurve  $\varphi(t)$ , wo  $t$  ungefähr das mittlere Alter ausdrücken soll und bezeichnet man als  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_k)$ ,  $\bar{\varphi}_r(t) = \varphi_r(t) - \varphi_r(t_k)$ , kann man schreiben

$$\bar{\varphi}_r(t) = \kappa \bar{\varphi}(t), \quad \kappa = \frac{\bar{\varphi}_r(\infty)}{\bar{\varphi}(\infty)} = \frac{\bar{\varphi}_r(\infty)}{\varphi(\infty)} \frac{\varphi(\infty) - \varphi(t_{kr})}{\varphi(\infty) - \varphi(t_k)}, \quad (1)$$

wo  $t_{kr}$  das zu  $t_k$  entsprechende Ausgangsalter verschiedener Teile  $r$  bedeutet (Fig. 1). Der Wert  $\kappa$  wird bezeichnet als Koeffizient der Kriechaffinität für den Teil  $r$ . Die Kriechaffinität des Betons ist mathematisch genau erfüllt für  $\varphi(t) = \varphi(\infty)(1 - e^{-at})$ . Für den anderen Verlauf von  $\varphi(t)$  gilt die Gl. (1) nur approximativ, jedoch kann man den Fehler vernachlässigen. Das Grafikon der Werte  $\kappa$  für  $\varphi(t) = \varphi(\infty)\sqrt{1 - e^{-\sqrt{t}}}$  ist in [3] und [2] gegeben. Weil der Zeitverlauf von  $E$  mit  $\varphi(t)$  angenähert affin ist, stimmt die Kriechaffinität gut mit der Annahme von konstantem  $E$ -Wert überein.

Für Beton gleicher Zusammensetzung gilt  $\varphi_r(\infty) = \varphi(\infty)$ . Bei der Biegung der Stahlbetonquerschnitte sind die plastischen Querschnittsdrehungen infolge der Rißbildung in der Zugzone bedeutend kleiner als bei der Biegung unter Druck oder Vorspannung, wie folgende Beziehung zeigt

$$\frac{\varphi(\infty)}{\varphi_r(\infty)} \cong 1 + \frac{\nu_a}{\nu_b} \frac{E_b}{E_a} \cong 3 \text{ bis } 6, [4].$$

Das langjährige Kriechen des Stahls ist im Verhältnis zum Betonkriechen unbedeutend und demzufolge kann man für Stahl  $\kappa \cong 0$  einsetzen. Die elastische Unterstützung oder Einspannung im Baugrund kann man außer durch den Elastizitätsmodul approximativ auch durch den von der Bodenart abhängigen Wert  $\kappa$  charakterisieren (z. B. Sand und Kies  $\kappa \cong 0$ ).

Als bezogenes Schwinden  $\bar{\epsilon}_{schw_r}(t)$  des Betons vom Alter  $t_r$  im Zeitabschnitt von  $t_k$  bis  $t$  leitet man ein

$$\bar{\epsilon}_{schw_r}(t) = \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \bar{\varphi}(t).$$

3. *Die Reduktion der Zeit.* Die Witterungswechsel im Verlauf der Jahreszeiten beschleunigen oder verlangsamen das Kriechen und Schwinden des Betons. Man kann das ausdrücken, wenn in  $\varphi(t)$  anstatt der tatsächlichen Zeitabschnitte die reduzierten Zeitabschnitte eingesetzt werden. Im Sommer setzt man die  $\rho$ -fachen, im Winter die  $(2-\rho)$ -fachen und im Frühling und Herbst die 1-fachen der tatsächlichen Zeitabschnitte ein, wobei ungefähr  $\rho \cong 1,3$  bis  $1,7$  ist. Die Witterungseinflüsse rufen die Kräfteumlagerungen nur bei der Konstruktion aus verschieden altem Beton hervor und demzufolge ist die Reduktion besonders bei der Bestimmung von  $x$  mit Hilfe von  $\varphi(t_{k_r})$  und  $\varphi(t_k)$  wichtig. Die vorgeschlagene Reduktion aller Kriechkurven  $\varphi_r(t)$  im gleichen Verhältnis stimmt mit der Annahme der Kriechaffinität überein.

### Die Problemlösung

4. *Die transformierte Konstruktion.* Wir bezeichnen als transformierte Konstruktion (oder Körper, System) solche elastische Konstruktion (Körper, System), die mit der gegebenen geometrisch identisch ist, aber anstatt der Elastizitätsmoduln  $E$  und der Poissonschen Zahlen  $\mu$  (und  $G = \frac{1}{2} E/(1 + \mu)$ ) die Moduln  $E' = E/\kappa$  und die Zahlen  $\mu'$  (und  $G' = \frac{1}{2} E'/(1 + \mu')$ ) besitzt. Dabei bedeutet  $\mu'$  das Verhältnis der plastischen Querkriechdehnung zur Längskriechdehnung, welches allgemein von  $\mu$  verschieden angenommen werden soll.

5. *Die Formänderungsgleichungen des Körpers.* Die Lösung des Spannungszustandes eines nicht homogenen isotropen Körpers wird durch die bekannten Differentialgleichungen des Gleichgewichtes, den Kompatibilitätsgleichungen und durch die geometrischen Gleichungen beschrieben, zu denen die Formänderungsgleichungen hinzuzufügen nötig ist, die man in folgender Form ableiten kann [3].

$$E \frac{d\epsilon_x(t)}{d\bar{\varphi}} = \frac{d\sigma_x(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_y(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_z(t)}{d\bar{\varphi}} + \kappa \sigma_x(t) - \mu' \kappa \sigma_y(t) - \mu' \kappa \sigma_z(t) + E \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \tag{2}$$

$$E \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} = 2(1 + \mu) \frac{d\tau_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} + 2(1 + \mu') \kappa \tau_{xy}(t),$$

.....



Die Aufgabenstellung muß noch mit den Randbedingungen des Körpers, der Belastung insgesamt, und mit ihren Anfangsbedingungen für  $t=t_k$  ergänzt werden. In der Gl. (2) bedeutet  $\epsilon_x(t), \gamma_{xy}(t), \dots$  die bezogene Dehnung und Winkeldrehungen im Zeitpunkt  $t$ ;  $\sigma_x(t), \tau_{xy}(t), \dots$  die Normal- und Schubspannung in  $t$ ;  $\kappa = \kappa(x, y, z)$  den Koeffizient der Kriechaffinität als Funktion der Koordinaten  $x, y, z$ . Als Folgerung der Linearität der Gl. (2) gilt das Superpositionsprinzip, welches auch für die von verschiedenen Zeitpunkten wirkenden Belastungen gültig ist.

Man kann zeigen, daß die Partikularlösung  $\sigma_{xp}, \tau_{xyp}, \dots$  der Gl. (2) für ständige Belastung ein konstanter Spannungszustand ist, der als elastischer Spannungszustand des transformierten Körpers für die gegebene Belastung und für die bezogenen Schwinddehnungen von der Größe  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  bestimmt werden kann [3]. Aus dem rheologischen Gesichtspunkt bedeutet die Partikularlösung den Spannungszustand auf einem Körper aus der rein viskosen Flüssigkeit. Den gegebenen Anfangsbedingungen entspricht als Lösung der Verlauf der Spannungen, die sich aus den Ausgangswerten sukzessiv den den Werten  $\bar{\varphi}(\infty)$  entsprechenden Endwerten nähern. Diese Endwerte liegen gewöhnlich zwischen der Anfangs- und Partikularlösung.

6. *Der Substitutionssatz.* Setzt man  $\mu' = \mu$  und vernachlässigt man die Volumenkräfte, so bestimmt man durch Vergleich des ganzen Gleichungssystems für das Kriechen samt den Gl. (2) mit dem bekannten Gleichungssystem für den elastischen Zustand, daß das erste System aus dem zweiten entsteht, wenn darin  $\frac{1}{E}$  durch  $\left(\frac{1}{E} \frac{d}{d\bar{\varphi}} + \frac{1}{E'}\right)$ ,  $\epsilon_{schw}(\infty)$  durch  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ ,  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  durch  $\sigma_x(t), \tau_{xy}(t), \dots$ ,  $\epsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$  durch  $\epsilon_x(t), \gamma_{xy}(t), \dots$  und die Verschiebungen und Drehungen durch ihre Ableitungen nach  $\bar{\varphi}(t)$  ersetzt werden, was auch für die Randbedingungen gilt<sup>3)</sup>.

7. *Die Formänderungsgleichungen der Konstruktion.* Für die veränderlichen statisch unbestimmten Größen  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  der Konstruktion  $K$  kann man folgendes System ableiten [2, 3]

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{dX_j(t)}{d\bar{\varphi}} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} + \delta'_{schw_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Hier bedeutet  $\delta_{ij}$  bzw.  $\delta'_{ij}$  die elastische Formänderung des statischen Grundsystems der gegebenen bzw. transformierten Konstruktion von der Belastung  $\bar{X}_i = 1$  im Sinne der Größe  $X_j(t)$  und  $\delta'_i(t)$  bzw.  $\delta_j(t)$  bzw.  $\delta'_{schw_j}$  die Formänderung des Grundsystems der transformierten bzw. gegebenen Konstruktion von der gegebenen äußeren Belastung bzw. von den bezogenen Schwinddeh-

<sup>3)</sup> Diese Substitution ist allgemein gültig, man muß aber beachten (z. B. bei Schalen), daß sie nur in den in den Innenkräften ausgedrückten Gleichgewichtsgleichungen oder in den Formänderungsgleichungen zwischen Innenkräften und Formänderungen durchgeführt werden darf, nicht aber z. B. in der Endgleichung zwischen den Formänderungen allein (einer Schale oder Platte) u. a.

nungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  im Sinne der Größe  $X_j(t)$ . Mittels  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_j$  und  $\delta'_{schw_j}$  wird der Einfluß der Nichthomogenität, der elastischen Unterstützung oder Einspannung im Baugrund und des mit dem Kriechen verbundenen Schwindens eingeleitet<sup>4)</sup>.

Für die Konstruktion mit nicht homogenen Querschnitten kann gezeigt werden [3], daß die Gl. (3), zum Unterschied von der nicht homogenen Konstruktion mit homogenen Querschnitten, nur approximativ nach Vernachlässigung gewisser Ausdrücke gilt.

8. *Das statische Grundsystem.* Es kann nicht nur statisch bestimmt, sondern auch statisch unbestimmt gewählt werden, aber nur im Falle, daß es sich um ein zwingungsfreies System handelt, dessen plastische Formänderungen zu  $\bar{\varphi}(t)$  proportional sind. Das Grundsystem ist zwingungsfrei, wenn seine Teile homogen sind und freie Formänderungen durch Schwinden möglich sind.

9. *Die allgemeine Lösung für die ständige Belastung.* Für diesen Fall gilt  $\delta'_j(t) = \delta'_j = \text{konst.}$  und  $\frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} = 0$ . Die Gl. (3) bildet dann ein System von  $n$  simultanen linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die unbekanntes  $X_j(t)$  als Funktionen von  $\bar{\varphi}(t)$ , d. h. zusammengesetzte Funktionen von  $t$ . Die allgemeine Lösung ist [2, 3]

$$X_i(t) = X_{ip} + \sum_{j=1}^n C_j k_i^{(j)} e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Die Konstanten  $X_{ip}$  bedeuten die Partikularlösung, die durch das System

$$\sum_{i=1}^n \delta'_{ij} X_{ip} + \delta'_j + \delta'_{schw_j} = 0 \quad (5)$$

gegeben ist und stellt also den Spannungszustand der transformierten Konstruktion für die gegebene Belastung und die bezogenen Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  dar.

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind die Wurzel der algebraischen charakteristischen Gleichung  $n$ -ter Stufe, die mit der Determinante  $(\delta_{ij} \lambda + \delta'_{ij}) = 0, (i, j = 1, \dots, n)$  bestimmt wird. Wenn  $\lambda_j$  ihre  $m$ -fache Wurzel ist, muß man in die Gl. (4) anstatt  $e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}$  nacheinander  $e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \bar{\varphi}(t) e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \dots, \bar{\varphi}(t)^{m-1} e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}$  einsetzen, was aber nur dann gilt, wenn die Determinante  $n - 1$  linear unabhängige Zeilen hat. Im negativen Falle hängen einige  $X_i(t)$  von weniger als  $n$  willkürlichen Konstanten ab. Jedem Werte  $\lambda_j$  entsprechen  $n$  Werte  $k_1^{(j)}, \dots, k_n^{(j)}$ , welche man als proportional zu den  $1, (-1)^1, \dots, (-1)^{n-1}$ -fachen Subdeterminanten irgend

<sup>4)</sup> In  $\delta'_j(t)$  muß man auch den Einfluß einer eventuellen Vorspannung einbeziehen. Wenn sich die Querschnittsmomente von Dauerlast mit den Momenten von den Querschnittsvorspannkraften annähernd eliminieren (kleine Differenz von großen Zahlen), muß man die Möglichkeit der Abweichungen (etwa um  $\pm 5$  bis  $\pm 15$  %) in der Größe der Vorspannkraft rechnerisch durch Berechnung beider Grenzfälle beachten.

einer Zeile findet. Die Konstanten  $C_j$  werden den Ausgangswerten  $X_i(t_k)$  (oder bzw. den Endwerten  $X_i(\infty)$ ) gemäß bestimmt, mittels denen der Einfluß der Stützenverschiebung, der Veränderung des statischen Wirkens bei den verbundenen Fertigteil-Systemen, der Vorspann-Größe u. a. ausgedrückt wird<sup>5)</sup>.

Wenn die Belastung in  $\bar{\varphi}(t)$  exponential veränderlich ist, kann man auch eine einfache Lösung geben [3].

10. *Die numerische Integration und Anwendung der elektronischen Rechenmaschinen.* Wenn die statische Unbestimmtheit größer als 2 bis 3 ist, kann man bequemer das System (3) mittels sukzessiver numerischer Integration lösen, die man einzeln für die verschiedenen Ausgangszustände durchführen muß. Den Wert  $\bar{\varphi}(\infty)$  verteilt man auf  $m_0$  Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}$ , durch deren Verkleinerung beliebige Genauigkeit erzielt werden kann. Dem System (3) entsprechen die Differenzgleichungen

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \Delta X_j^{(m+1)} + \left( \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m)} + \delta_i^{(m)} + \delta'_{schw_i} \right) \Delta \bar{\varphi} + \Delta \delta_i^{(m+1)} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

die ein System von  $n$  linearen Gleichungen mit der Matrix  $[\delta_{ij}]$  für die Veränderungen  $\Delta X_j^{(m+1)}$  im entsprechenden Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}^{(m+1)}$  bilden. Hier bedeutet  $X_j^{(m)}$  den Endwert von  $X_j(t)$  im vorhergehenden Abschnitte  $\Delta \bar{\varphi}^{(m)}$ . Den Ausgangswert für den folgenden Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}^{(m+1)}$  erhält man als  $X_j^{(m+1)} = X_j^{(m)} + \Delta X_j^{(m+1)}$  (Tafel 1). Umgekehrt ist es auch möglich, aus den verlangten Endwerten rückwärts die erforderlichen Ausgangswerte zu errechnen, die in die Konstruktion während des Bauvorgangs eingeführt werden müssen. Mit Hilfe  $\Delta X_j^{(m)}$  kann man auch die Formänderungen nach der Gl. (12) errechnen.

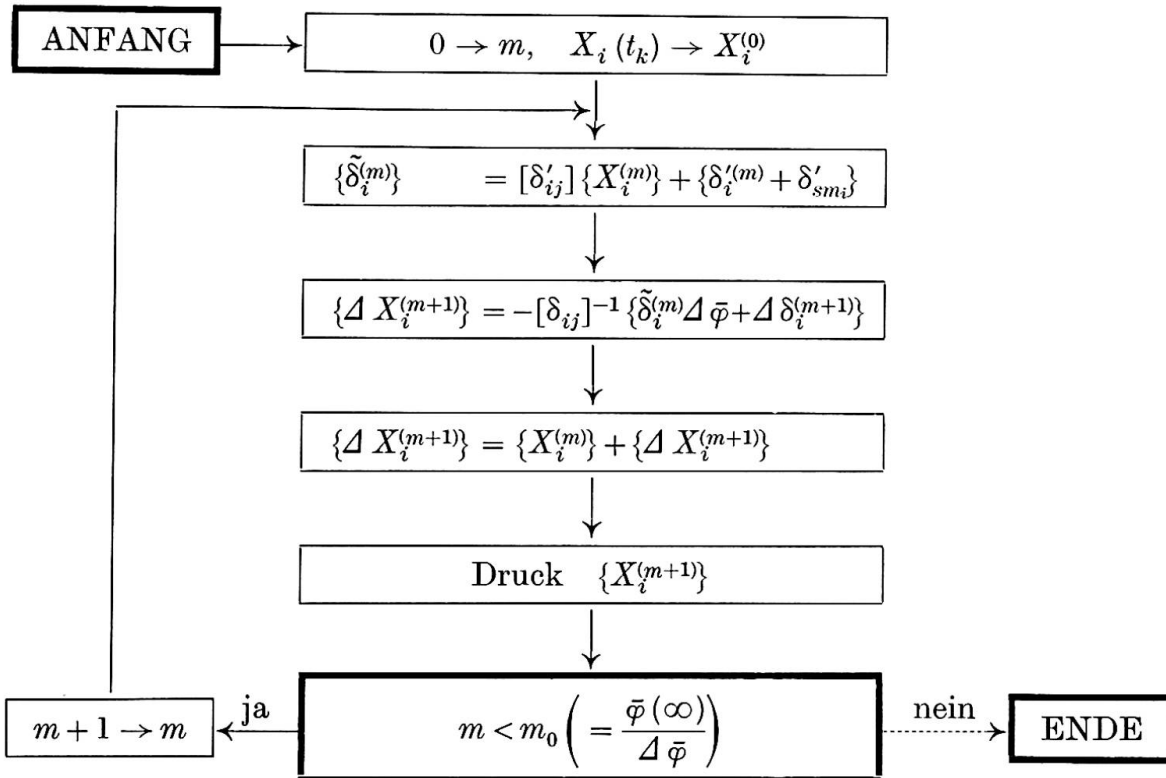
Dieser Integrationsvorgang hat die allgemeine Gültigkeit für alle elastischen Aufgaben, z. B. für die Platten, Körper u. a. Die Veränderung  $\Delta S$  von der Innenkraft  $S$  (Biegemoment, Spannung usw.) im Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}$  ist gleich den Innenkräften, die auf der gegebenen elastischen Konstruktion von den inneren Verformungen  $D'_s \Delta \bar{\varphi}$  und von den Schwinddehnungen  $\kappa \Delta \bar{\epsilon}_{schw}$  hervorgerufen werden und zu denen man noch den Einfluß der Veränderung äußerer Belastung addiert.  $D'_s$  bedeutet die zur Innenkraft  $S$  auf der transformierten Konstruktion entsprechende innere Verformung. Die numerische Integration überführt also das Kriechproblem auf die elastische Aufgabe. Alle Aufgaben, die für beliebige innere Verformungen auflösbar sind, können auch für nicht homogenes Kriechen und Schwinden gelöst werden.

<sup>5)</sup> Als spezieller Fall für  $\kappa \equiv 1$  ergibt sich die Lösung der homogenen Konstruktion oder Körper. Für  $d \delta_i / d \bar{\varphi} = 0$  kann man aus der Gl. (3) ableiten [2, 3]

$$\frac{d X_i(t)}{d \bar{\varphi}} + X_i(t) = X_{ip}, \quad \rightarrow X_i(t) = X_i(t_k) + [X_{ip} - X_i(t_k)] (1 - e^{-\bar{\varphi}(t)}).$$

Analoge Gleichungen ergeben sich auch für die Spannungen  $\sigma_x(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$  des Körpers, bei welchem  $\mu' \approx \mu$  ist.

Tafel 1. Das Programmschema für die numerische Integration von  $X_i(t)$



Bei dieser Lösung ist es vorteilhaft, daß sich in jedem Abschnitt  $\Delta \bar{\varphi}$  die Lösung des elastischen Systems mit derselben Matrix  $[\delta_{ij}]$  wiederholt. Darum wird die Form (6) sehr geeignet für die Berechnung auf der elektronischen Rechenmaschine, besonders wenn die Lösung für mehrere Ausgangszustände bestimmt werden soll. Die Kehrmatrix  $[\delta_{ij}]^{-1}$  wird gewöhnlich früher bei der Berechnung der Einflußlinien gefunden und steht hier also schon im vorhinein zur Verfügung. Das Programm für die numerische Integration besteht aus einer Reihe der Programme für die elastischen Aufgaben. Die Einleitung des Begriffs der transformierten Konstruktion ermöglicht weiter auch die Koeffizienten  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_j$ ,  $\delta'_{schw_j}$  mit Hilfe der schon vorhandenen Programme für die elastischen Konstruktionen automatisch zu errechnen. Die vorliegende Formulierung gibt also die Möglichkeit einer voll automatischen Berechnung der Kriecheinflüsse, was nicht nur die Beschleunigung und Zeitersparnis bedeutet, sondern auch die Möglichkeit der Beurteilung vieler Ausgangszustände bietet. Einerseits wird die automatische Berechnung der Kriecheinflüsse noch vorteilhafter als für die elastischen Fälle, denn hier wird dieselbe elastische Lösung vielfach wiederholt, so daß das Programm mehrfach ausgenutzt wird.

11. Andere Näherungslösungen. System (3) kann man auch lösen in der Form einer Potenzreihe

$$X_j(t) = X_j(t_k) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \tilde{X}_{j(\alpha)} \bar{\varphi}^\alpha. \tag{7}$$

Die Konstanten  $\tilde{X}_{j(\alpha)}$  erhält man für den gegebenen Ausgangszustand sukzessiv aus den folgenden Gleichungssystemen [ $\tilde{X}_{j(0)} = X_j(t_k)$ ]

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \tilde{X}_{j(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \tilde{X}_{j(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha!} \left[ \frac{d^{\alpha-1}}{d\bar{\varphi}^{\alpha-1}} (\delta'_i + \delta'_{schw_i}) + \frac{d^\alpha}{d\bar{\varphi}^\alpha} \delta_i \right]_{t=t_k} = 0, \quad (8)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

wieder mit gleicher Matrix  $[\delta_{ij}]$ , wobei für  $\alpha > 1$   $d^{\alpha-1} \delta'_{schw_i} / d\bar{\varphi}^{\alpha-1} = 0$  wird. Bei ständiger Belastung werden auch übrige Ableitungen null. Auch diesen Vorgang kann man verallgemeinern für alle elastischen Aufgaben.

Eine grobe Näherungslösung bietet die Idealkonstruktion mit den idealen Moduln

$$E_{id}(t) = \frac{E}{1 + \kappa \bar{\varphi}(t)} \quad \text{und} \quad \mu_{id}(t) = \frac{\mu + \mu' \kappa \bar{\varphi}(t)}{1 + \kappa \bar{\varphi}(t)},$$

was aus der Annahme eines unveränderlichen Spannungszustandes resultiert. Man erhält ( $\delta_i = \text{konst.}$ )

$$\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} + \delta'_{ij} \bar{\varphi}(t)] X_j(t) - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j(t_k) + (\delta'_i + \delta'_{schw_i}) \bar{\varphi}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Sind die Endwerte  $X_j(\infty)$  gegeben und sucht man die erforderlichen Ausgangswerte  $X_j(t_k)$ , dann ist die Matrix der Gleichungen wieder durch  $[\delta_{ij}]$  gegeben. Man kann beweisen, daß diese Lösung zwischen der Anfangs- und Partikularlösung liegt [3].

Für das System, das approximativ auf einfach statisch unbestimmtes System vereinfacht werden kann, gilt die Näherungsformel

$$X_j(t) \approx X_j(t_k) + (X_{jp} - X_j(t_k)) \left( 1 - e^{-\frac{\delta_{ij}}{\delta_{ij}} \bar{\varphi}(t)} \right). \quad (10)$$

*12. Das Variationsprinzip.* Der Zeitverlauf des Spannungszustandes kann, wenn man in den Gleichgewichtsgleichungen die Volumenkräfte vernachlässigt, mit dem *Prinzip vom Minimum des Formänderungswiderstands* folgenderweise formuliert werden: Aus allen Gleichgewichtszuständen des Körpers im Zeitpunkt  $t$  entsteht ein solcher, bei dem der Formänderungswiderstand  $\Phi(t)$  ein Minimum hat [3]. Für einen Körper gilt das Prinzip nur für  $\mu' \approx \mu$ , für eine Rahmenkonstruktion gilt es allgemein. Den Formänderungswiderstand definiert man als den Funktional  $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \frac{d\Pi(t)}{d\bar{\varphi}} + \Pi'(t) + \Pi'_{schw}(t). \quad (11)$$

Hier bedeutet  $\Pi(t)$  bzw.  $\Pi'(t)$  das elastische Potential,  $\Pi'_{schw}(t)$  die Arbeit der inneren Kräfte auf den bezogenen Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ . Für Körper folgt nun

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left( \frac{d}{d\bar{\varphi}} + \kappa \right) \frac{1}{2E} \{ \sigma_x^2(t) + \sigma_y^2(t) + \sigma_z^2(t) \right. \\ & - 2\mu [\sigma_x(t)\sigma_y(t) + \sigma_y(t)\sigma_z(t) + \sigma_z(t)\sigma_x(t)] \\ & + 2(1 + \mu) [\tau_{xy}^2(t) + \tau_{yz}^2(t) + \tau_{zx}^2(t)] \} \\ & \left. + [\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)] \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (11a)$$

und für Konstruktion mit den Innenkräften  $M(t), \dots$

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \frac{d}{d\bar{\varphi}} \int_K \frac{1}{2} \left[ \frac{M^2(t)}{EJ} + \frac{N^2(t)}{EF} + \frac{\alpha T^2(t)}{GF} \right] ds \\ & + \int_K \frac{1}{2} \left[ \frac{M^2(t)}{E'J} + \frac{N^2(t)}{E'F} + \frac{\alpha T^2(t)}{G'F} \right] ds + \int_K N(t) \kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} ds. \end{aligned} \quad (11b)$$

Bezeichnet man die Funktion hinter dem Integrationszeichen in Gl. (11a) als den spezifischen Formänderungswiderstand  $f(t)$ , dann kann man finden

$$\frac{\partial f(t)}{\partial \sigma_x} = \frac{d \epsilon_x(t)}{d \bar{\varphi}}, \quad \frac{\partial f(t)}{\partial \tau_{xy}} = \frac{d \gamma_{xy}(t)}{d \bar{\varphi}}, \dots$$

13. *Die Formänderungen.* Die Formänderung  $\delta(t)$  einer statisch unbestimmten Konstruktion im Sinne der statischen Größe  $X$  ist mit der Gleichung

$$d\delta(t) = [\delta'_{el}(t) + \delta'_{schw}] d\bar{\varphi}(t) + d\delta_{el}(t) \quad (12)$$

gegeben. Hier bedeutet  $\delta_{el}(t)$  bzw.  $\delta'_{el}(t)$  die elastische, den Innenkräften  $M(t), \dots$  entsprechende Formänderung der gegebenen oder der transformierten Konstruktion im Sinne der Größe  $X$  und  $\delta'_{schw}$  die durch die Schwinddehnungen  $\kappa \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)}$  hervorgerufene Formänderung im Sinne der Größe  $X$ . Die Gl. (12) kann in einfachen Fällen in geschlossener Form, in den komplizierten numerisch oder in einer Reihe integriert werden. Es gilt auch die Beziehung  $\frac{d\delta(t)}{d\bar{\varphi}} = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x}$ .

14. *Die Anwendung für Querschnittslösung.* Für die Lösung eines nicht homogenen, aus  $m$  homogenen Teilen verbundenen Querschnitts kann man die angeführten Gleichungen anwenden, denn es handelt sich auch um ein elastisches System. Man bezeichnet die auf einzelne Teile in ihren Schwerpunkten wirkenden Normalkräfte und Biegemomente mit  $N_i(t)$  und  $M_i(t)$ . In einer statisch unbestimmten Konstruktion können sie allgemein auch bei ständiger Belastung veränderlich sein. Die Kräfte  $M_i(t), N_i(t)$  müssen mit dem äußeren Querschnittsmoment  $M(t)$  und der Normalkraft  $N(t)$  zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, und infolgedessen ist der Querschnitt  $2(m - 1)$ -fach statisch unbestimmt.

Für den aus zwei Teilen verbundenen Querschnitt (Fig. 2) wählt man als die statisch Unbestimmten z. B.  $M_1(t), N_1(t)$ . Die Formänderungsbedingung



zur Bewahrung ebener Querschnitte erfordert, daß die Formänderungen des Grundsystems im Sinne der Größen  $M_1, N_1$  null werden. Weil es sich um ein elastisches System handelt, müssen die Formänderungsgleichungen die Form (3) haben. Man kann ihre Koeffizienten einfach mit Hilfe der unabhängigen,

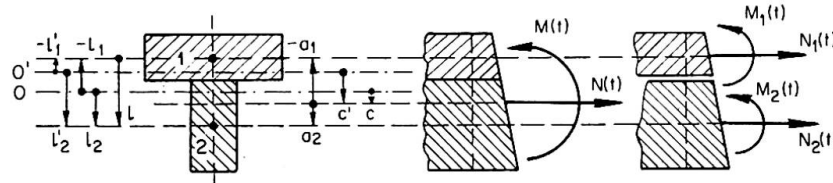


Fig. 2.

O' — Schwerlinie des gegebenen Querschnitts ( $E_1 F_1, E_2 F_2$ )  
 O — Schwerlinie des transformierten Querschnitts ( $E'_1 F_1, E'_2 F_2$ )

die zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllenden Zustände des gegebenen und transformierten Querschnitts bestimmen. Ihre Werte sind <sup>6)</sup>

$$\begin{aligned} \delta_{1MM} &= \frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2}, & \delta_{1MN} &= -\frac{e}{E_2 J_2}, \\ \delta_{1NN} &= \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{e^2}{E_2 J_2} + \frac{1}{E_2 F_2}, \\ \delta'_{1MM} &= \frac{\kappa_1}{E_1 J_1} + \frac{\kappa_2}{E_2 J_2}, & \delta'_{1MN} &= -\frac{e \kappa_2}{E_2 J_2}, \\ \delta'_{1NN} &= \frac{\kappa_1}{E_1 F_1} + \frac{e^2 \kappa_2}{E_2 J_2} + \frac{\kappa_2}{E_2 F_2}, \\ \delta'_{1M}(t) &= -[M(t) - N(t) a_2] \frac{\kappa_2}{E_2 J_2} - \left( \frac{dM(t)}{d\bar{\varphi}} - \frac{dN(t)}{d\bar{\varphi}} a_2 \right) \frac{1}{E_2 J_2}, \\ \delta'_{1N}(t) &= [M(t) - N(t) a_2] \frac{e \kappa_2}{E_2 J_2} - N(t) \frac{\kappa_2}{E_2 F_2} \\ &\quad + \left( \frac{dM(t)}{d\bar{\varphi}} - \frac{dN(t)}{d\bar{\varphi}} a_2 \right) \frac{e}{E_2 J_2} - \frac{dN(t)}{d\bar{\varphi}} \frac{1}{E_2 F_2}, \end{aligned}$$

wo  $J_1, J_2$  die Trägheitsmomente,  $i_1, i_2$  die Trägheitshalbmesser und  $F_1, F_2$  die Flächen der einzelnen Teile bezeichnen. Für die unveränderliche Belastung  $M, N$  kann man die Partikularlösung finden <sup>6)</sup>

$$M_{1p} = \frac{M + N c' + \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} (e'_1 E_1 F_1 + e'_2 E_2 F_2)}{i_1^2 + e_1'^2 + \frac{E_2 F_2 \kappa_1}{E_1 F_1 \kappa_2} (i_2^2 + e_2'^2)} i_1^2, \quad (14)$$

<sup>6)</sup> Als spezieller Fall ergibt sich hieraus sehr einfach die Lösung des Verbundquerschnitts Beton-Stahl (als Limite der angeführten Ausdrücke für  $\kappa_2 \rightarrow 0, \kappa_1 \rightarrow 1, e'_1 \rightarrow -e, e'_2 \rightarrow 0, c' \rightarrow -e_2$ ) oder des vorgespannten Querschnitts (als Limite für  $\kappa_2 \rightarrow 0, \kappa_1 \rightarrow 1, i_2 \rightarrow 0, J_2 \rightarrow 0, e'_2 \rightarrow 0, e'_1 \rightarrow -e, c' \rightarrow -e_2$ ) samt den Spannungsverlusten. Freilich kann man auch eine analoge direkte Lösung durchführen (siehe [3]).



$$N_{1p} = M_{1p} \frac{e_1'}{i_1^2} + \frac{N + \frac{\epsilon_{schw}(\infty)}{\varphi(\infty)} \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) E_2 F_2}{1 + \frac{E_2 F_2 \kappa_1}{E_1 F_1 \kappa_2}}. \tag{14}$$

15. *Andere Anwendungen.* Wir zitieren hier nur: Der Querschnitt mit stetig verteilter Nichthomogenität, der zylindrische Betonbehälter, die in zwei Richtungen vorgespannte Platte usw. [3].

16. *Die Bedeutung der Kriechaffinität.* Die Bedeutung liegt darin, daß die Koeffizienten  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_i$ ,  $\delta'_{schw_i}$  konstant sind, womit die Lösung wesentlich vereinfacht wird. Wenn jede Kurve  $\varphi_r(t)$  eine beliebige, mit  $\varphi(t)$  nicht affine stetige wachsende Funktion würde, gelten die Gl. (2), (3), (8), (10), (13) unverändert, aber die Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\delta'_{ij}$ ,  $\delta'_i$ ,  $\delta'_{schw_i}$  würden dann zeitveränderlich sein.

17. *Weitere Entwicklungsmöglichkeiten.* Die gezeigte Lösung ist die möglichst allgemeine Lösung in den Grenzen der Dischingerschen Annahme, deren Einfachheit den mathematischen Vorgang bis zum Ziel zu bringen ermöglicht hat.

Jedoch ergibt die Lösung nur ein annäherndes Bild der Wirklichkeit. Die Möglichkeit einer besseren Näherung liegt in der Wahl der Konstanten  $\bar{\varphi}(\infty)$  und  $\kappa$ , welche man durch verschiedene Werte für verschiedene Fälle vorschreiben könnte, und  $\kappa$  bei der numerischen Integration auch für verschiedene Zeitabschnitte und Kraftgrößen (Nichtlinearität; das Superpositionsprinzip gilt dann nicht). Noch eine bessere Näherung könnte theoretisch die allgemeine lineare Kriechtheorie bieten [1], wobei zwei unabhängige Veränderliche — Zeit und Alter — erwogen werden. Dann aber wäre der Verlauf der Koeffizienten  $\delta'_i, \dots$  leider im vorhinein nicht gegeben, sondern würde von dem vorläufigen Verlauf der Innenkräfte abhängig sein, was praktisch unüberwindliche mathematische Komplikationen brächte.

### Schlußwort

Die praktischen Berechnungen zeigen, daß bei manchen modernen Betonkonstruktionen die Einflüsse des Kriechens und Schwindens sehr bedeutend sein können. Deshalb muß man beim Entwurf danach streben, die ungünstigen Einflüsse zu vermindern und, wenn es möglich ist, auch die Kriecheinflüsse auszunützen<sup>7)</sup>. Für die Berechnung von komplizierteren Fällen kann man vorteilhaft die elektronischen Rechenmaschinen verwenden, was durch Überführung der Aufgabe auf die Reihe der Lösungen elastischer Konstruktionen mit Hilfe der Einleitung des Begriffs von transformierter Konstruktion ermöglicht wurde.

<sup>7)</sup> Die beeinflussenden Faktoren sind: der Konstruktionstyp, das statische System, die Verteilung der Steifigkeiten, das Verhältnis der ständigen zur zufälligen Belastung und zur Vorspannung, die Stützenverschiebungen, der Bauvorgang, das Betonierungstempo, die Eigenschaften des Betons, der Anteil der Bewehrung, die Jahreszeit der Betonierung, die Witterungsverhältnisse und die Rektifikationen.

### Schrifttum

1. N. CH. ARUTJUNJAN: «Einige Fragen der Kriechtheorie» (russisch). Verlag für techn. Lit., Moskau 1952.
2. Z. P. BAŽANT: «Der Einfluß des Kriechens und Schwindens bei den statisch unbestimmten Konstruktionen mit veränderlichem Betonalter» (tschechisch). Inženýrské stavby 1961, H. 11, S. 426, Prag.
3. Z. P. BAŽANT: «Die Theorie des Kriechens und Schwindens des Betons in den nicht homogenen Konstruktionen und Querschnitten» (tschechisch). Stavebnický časopis 1962, H. 9, S. 552, Bratislava.
- 3a. Z. P. BAŽANT: «Die Näherungsmethoden der Berechnung des Kriechens und Schwindens des Betons bei den nichthomogenen Konstruktionen» (tschechisch). Stavebnický časopis (im Druck).
- 3b. Z. P. BAŽANT: «Die zeitliche Zusammenwirkung der Konstruktionen mit dem Baugrund» (tschechisch). Stavebnický časopis (im Druck).
- 3c. Z. P. BAŽANT: «Das Kriechen und Schwinden des Betons bei der Berechnung der Konstruktionen» (tschechisch). Verlag SNTL, Prag (im Druck).
4. F. DISCHINGER: «Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere Bogenbrücken.» Bauing. 1939, S. 53.

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die ganz allgemeine, für die elektronischen Rechenmaschinen geeignete Theorie des Autors für die Lösung der Kriech- und Schwindeinflüsse bei den nicht homogenen Konstruktionen aus Beton und Stahl oder aus Beton verschiedenen Alters entwickelt.

### Summary

In this paper a general theory for the solution of the creep and shrinkage influences in non-homogenous structures of concrete and steel or of concrete of different ages is developed. It is quite suitable for use with electronic computers.

### Résumé

Cette contribution a pour objet de présenter une méthode tout à fait générale de calcul des influences du fluage et du retrait dans les constructions mixtes acier-béton ou en bétons d'âges différents. Cette méthode se prête très bien à l'emploi de calculateurs électroniques.

## V a 2

### **Berechnung der Stahlbetonbrücken mit Rücksicht auf die Langzeitvorgänge**

*Design of Reinforced Bridges Taking into Account Long-term Effects*

*Le calcul des ponts en béton armé eu égard aux processus de longue durée*

E. GIBSCHMANN

Prof.

Die üblichen Methoden zur Berücksichtigung des Einflusses von Langzeitvorgängen (Kriechen, Schwinden) sind stark approximiert und ergeben bei der Berechnung von Stahlbetonbrücken eine oft unexakte und selbst falsche Bewertung der wirklichen Vorgänge in den Konstruktionselementen.

Die Kennzeichen des Kriechens und des Schwindens des Betons werden sehr annähernd angenommen, da diese Vorgänge an ausgeführten Bauwerken noch wenig untersucht sind.

Im Laufe der letzten Jahre wurden in der UdSSR umfangreiche Untersuchungen, zwecks Ausarbeitung von genügend genauen und einfachen Berechnungsmethoden für Stahlbetonbrücken unter Berücksichtigung der Dauerformungen, durchgeführt.

Zahlreiche Untersuchungen von B. ULIZKIJ, I. SEREGIN und anderen Forschern zeigen, daß Kriechen und Schwinden des Betons in Brücken nicht nur von den Betoneigenschaften, sondern auch in hohem Maße von klimatischen Faktoren abhängig sind.

Die den natürlichen Verhältnissen entsprechenden Beobachtungen haben ergeben, daß der Endkriechwert des Betons in den Gebieten der UdSSR mit gemäßigttem Klima  $\varphi_k = 1,5—2,5$  und in den südlichen, warmen Gebieten  $\varphi_k = 3—4$  beträgt.

Bei negativen Temperaturen klingt der Kriechvorgang fast völlig ab. Daher entstehen 80—90% der Kriechverformungen in der warmen Jahreszeit.

Temperatursenkungen während des Jahres verlangsamen den Kriechvorgang so stark, daß bei natürlichen Verhältnissen während der ersten 6 Monate weniger als 40—50% der Endkriechverformungen eintreten.

Durch Dampfbehandlung nimmt das Kriechen des Betons auf 15—40% ab.

Die experimentellen Untersuchungen zeigen auch, daß im belasteten Beton der lineare Zusammenhang von Kriechverformung und Spannung immer in einer bestimmten Zeit eintritt. Falls die Spannungen im Beton 50% seiner Würfeldruckfestigkeit nicht überschreiten, tritt der lineare Zusammenhang schon in 2 bis 3 Monaten nach der Belastung des Betons auf.

Unter langandauernder Belastung liegt die Grenze des linearen Kriechens nahe bei der Dauerfestigkeitsgrenze des Betons.

### Einfluß des Kriechens und Schwindens bei statisch bestimmten Konstruktionen

Die Methode der bedingten Ersatzprismen, von B. BUSEMANN vorgeschlagen und in den sowjetischen Forschungsarbeiten weiterentwickelt, erleichtert wesentlich die Berücksichtigung des Einflusses von Kriechen und Schwinden in Stahlbetonkonstruktionen.

Bekanntlich ermöglicht diese Methode, einen Stahlbetonträger mit willkürlicher Bewehrung durch 2 zentral bewehrte Stahlbetonprismen zu ersetzen.

Die Verformungen, die durch Kriechen und Schwinden des Betons solcher Prismen infolge Wirkung einer Längsbelastungskraft  $N$  und der zeitabhängigen Bewehrungsspannkraft  $N_a$  hervorgerufen werden, lassen sich in der bekannten Gleichung anschreiben

$$\frac{d N_a}{E_b F_b} + \frac{N_a + N}{E_b F_b} d \varphi_t + d \epsilon_t + \frac{d N_a}{E_a F_a} = 0,$$

dessen Lösung gibt

$$N_a = N_0 e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)} - B E_b F_b e^{-\beta \varphi_t} \int_{\tau}^t \frac{d \epsilon_t}{d t} e^{\beta \varphi_t} d t - N [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}].$$

Bei Berücksichtigung des Kriechens allein ergibt sich die Änderung der Bewehrungsspannung zu:

$$\Delta \sigma = \frac{N_0 - N}{F_a} = \frac{N_0 + N}{F_a} [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}] = \frac{\sigma_{b0}}{\mu} [1 - e^{-\beta(\varphi_t - \varphi_\tau)}],$$

dabei ist

$$B = \frac{1}{1 + \frac{E_b F_b}{E_a F_a}}.$$

Bedeutend schwieriger ist die Ermittlung von Bewehrungsspannungen, die durch Schwinden des Betons hervorgerufen werden.

Um die Lösung dieser Aufgabe zu erleichtern, wird oft angenommen, daß der zeitliche Verlauf des Kriechens und des Schwindens dem gleichen Gesetze folgen.

Das ist aber nicht exakt. Es wäre richtiger, das Kriechen und das Schwinden mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsmassen zu betrachten.

Nehmen wir für Kriechen  $\varphi_t = \varphi_k (1 - e^{-\beta t})$  an und für Schwinden  $E_t = E_k (1 - e^{-p t})$ , so bekommen wir für den Fall wenn Kriechen und Schwinden vom Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt

$$\int_0^t \frac{d \epsilon_t}{d t} e^{\beta \varphi_t} d t = \epsilon_k p e^{\beta \varphi_k} \int_0^t e^{-p t} e^{-\beta \varphi_k e^{-\beta t}} d t.$$

Diese Integrale kann man in unvollständige Gamma-Funktionen, die in der UdSSR von E. SLUZKIJ untersucht worden sind, darstellen. Dann erhält man

$$\int_0^t \frac{d\epsilon_t}{dt} e^{\beta\varphi t} dt = \frac{\epsilon_k p e^{\beta\varphi k}}{\beta (\beta\varphi k)^{p/\beta}} \left[ \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi k\right) - \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi k e^{-\beta t}\right) \right].$$

Die Änderung der Bewehrungskraft, die durch das Schwinden des Betons hervorgerufen wurde, beträgt

$$N_a = \frac{\epsilon_k E_b F_a}{\mu} K_y,$$

worin 
$$K_y = \frac{p}{\beta} \varphi_k^{-\frac{p}{\beta}} \beta^{-\frac{p}{\beta}+1} e^{\beta(\varphi k - \varphi t)} \left[ \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi k\right) - \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi k e^{-\beta t}\right) \right].$$

Für den Zeitpunkt ( $t \rightarrow \infty$ ), da die Kriechverformungen zu Ende sind, erhält man:

$$K_y = \frac{p}{\beta} \varphi_k^{-\frac{p}{\beta}} \beta^{1-\frac{p}{\beta}} \Gamma\left(\frac{p}{\beta}; \beta\varphi k\right).$$

Der Koeffizient  $K_y$  hängt wesentlich vom Verhältnis  $p/\beta$  ab. Je schneller die Schwindverformungen zunehmen, desto kleiner sind die Größen der von ihnen hervorgerufenen Spannungen, die nach Abschluß der Kriechverformungen erreicht werden.

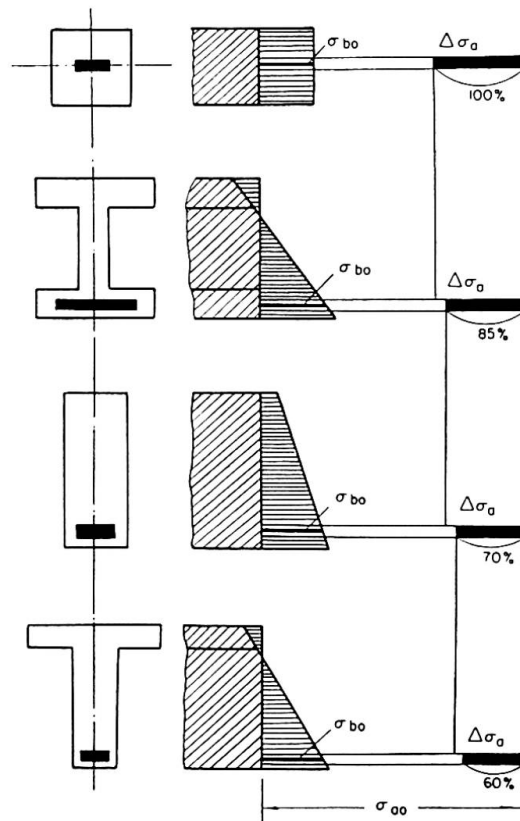


Fig. 1.

Bei  $\frac{p}{\beta} > \sim 5$ , d. h. bei schneller Zunahme des Schwindens, wenn dieses die Kriechverformung wesentlich überholt, erreichen die vom Schwinden hervorgerufenen Endspannungen das Minimum.

Die Untersuchungen des Kriech- und Schwindeinflusses auf die Spannungsumlagerungen in Stahlbetonelementen zeigen, daß die Spannungsänderungen durch Querschnittsform und Bewehrungsziffer stark beeinflußt werden.

Fig. 1 zeigt Spannungsänderungen in der Bewehrung, die durch das Kriechen des Betons bei verschiedenen Querschnittsformen mit gleicher Bewehrungsziffer und gleicher Anfangsspannung des Betons in der Bewehrungsebene hervorgerufen werden.

Der Zusammenhang zwischen Spannungsänderungen der Bewehrung und der Bewehrungsziffer des Querschnittes ist in Fig. 2 dargestellt.

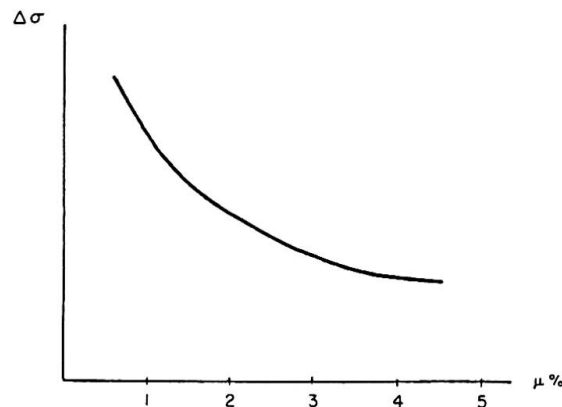


Fig. 2.

Der große Einfluß der Querschnittsform von Stahlbetonelementen auf die Spannungsumlagerungen, die infolge plastischer Verformungen des Betons entstehen, ist auch experimentell bestätigt worden.

### **Einfluß des Kriechens von Beton bei statisch unbestimmten Konstruktionen**

In statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen kann infolge des Vorhandenseins der Bewehrung das Kriechen des Betons eine Veränderung der statisch Überzähligen und der inneren Kräfte im System hervorrufen.

Die Berechnung dieser Systeme erfordert die Kenntnis des Gesetzes der durch das Kriechen des Betons bedingten zeitlichen Änderung der statisch Überzähligen  $X_{it}$ .

Dieses Gesetz kann man wie folgt anschreiben

$$X_{it} = X_i \frac{1 - e^{-\varphi t + \varphi \tau_0}}{1 - e^{-\varphi k}}, \quad (1)$$





Die plastischen Verformungen des Betons beeinflussen sehr stark Spannungen, die in statisch unbestimmten Stahlbetonbrücken künstlich geschaffen werden.

Meist gebraucht sind folgende 3 Typen der künstlichen Regelung der Spannungen in den Brücken:

- a) Einsatz von äußeren Belastungen.
- b) Schaffung von künstlichen Verschiebungen.
- c) Veränderung des statischen Systems der Konstruktion.

Die Spannungen, die bei der Regelung der Kräfte durch Einsatz von äußeren Belastungen auftreten, weisen trotz Zunahme der Kriechverformungen keine Veränderung mit der Zeit auf.

Die Wirkung der künstlichen Regelung nach b) und c) vermindert sich im Laufe der Zeit stark.

Nehmen wir zum Beispiel eine Zweisystemkonstruktion, worin ein System im Zeitpunkt  $t=0$  und das zweite im Zeitpunkt  $t=\tau_0'$  betoniert und bei  $t=\tau$  zu einer statisch unbestimmten Konstruktion zusammengesetzt wird. In dieser Konstruktion tritt unter Einfluß des Kriechens die überzählige Unbekannte  $X_{it}$  auf, die aus folgender Differentialgleichung zu ermitteln ist:

$$\delta_{11} d X_{1t} + \delta_{11}^{\cdot} X_{1t} d \varphi_t + \delta_{11}' X_{1t} d \varphi_{t-\tau_0}' - \Delta^{\cdot} p_1 d \varphi_t - \Delta' p_1 d \varphi_{t-\tau_0}' = 0, \quad (2)$$

worin  $\delta_{11}$  = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von der Kraft  $X_i = 1$ .

$\delta_{11}^{\cdot}$  = elastische Verschiebung von der Kraft  $X_i = 1$ , die nur von Elementverformungen aus dem ersten Beton ( $E_{bi} \varphi_t$ ) hervorgerufen wird.

$\delta_{11}'$  = das gleiche von Elementverformungen aus zweitem Beton ( $E_{b'} \varphi_t'$ ).

$\Delta^{\cdot} p_1$  = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von Belastungen, die auf die Elemente des ersten Betons einwirken.

$\Delta' p_1$  = das gleiche für die Elemente aus zweitem Beton. Dabei sind  $\delta_{11} = \delta_{11}^{\cdot} + \delta_{11}'$  und  $\Delta p_1 = \Delta^{\cdot} p_1 + \Delta' p_1$ .

worin  $\Delta p_1$  = elastische Verschiebung in Richtung der überzähligen Unbekannten von Belastungen, die im Zeitpunkt  $\tau$  auf das zusammengesetzte System einwirken.

Die Lösung der Gleichung (2) für den Zeitpunkt  $t=\infty$  bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen des Kriechens für beide Betone ( $\beta = \beta^1$ ) ist:

$$X_{1t} = \left( \Delta^{\cdot} p_1 + \frac{\varphi_k'}{\varphi_k} \Delta' p_1 \right) \frac{1 + e^{-\frac{\varphi_k}{\delta_{11}} \left( \delta_{11}^{\cdot} + \delta_{11}' \frac{\varphi_k}{\varphi_k} \right)}}{\delta_{11}^{\cdot} + \delta_{11}' \frac{\varphi_k}{\varphi_k}},$$

worin  $\varphi_k$  = Kriechwert des ersten Betons mit Rücksicht auf den Belastungsbeginn im Alter  $\tau_1$ .  
 $\varphi'_k$  = Kriechwert des zweiten Betons mit Rücksicht auf den Belastungsbeginn im Alter  $(\tau_1 - \tau_0)$ .

Diese Lösung kann man auch für die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter zusammengesetzter Tragwerke, die aus Konstruktionselementen mit verschiedenartigem Beton hergestellt wurden, verwenden.

### Zusammenfassung

Die in der UdSSR durchgeführten Untersuchungen zeigen, daß Kriech- und Schwindverformungen von Brücken in hohem Maße von klimatischen Faktoren abhängig sind.

Für praktische Berechnungen kann man — unter Berücksichtigung von plastischen Verformungen — die Methode von Ersatzprismen von Buseman anwenden. Diese Methode wurde in sowjetischen Forschungsarbeiten weiterentwickelt.

Zur Berücksichtigung des Schwindens muß von der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten der Kriech- und Schwindzunahmen verschieden sind, ausgegangen werden. Für die Lösung sind Gamma-Funktionen zu verwenden.

Das vorgeschlagene Gesetz der Veränderung der überzähligen Unbekannten erleichtert wesentlich die Berechnung von statisch unbestimmten Brückenkonstruktionen.

Für die Berechnung zusammengesetzter Systeme ungleicher Betonqualität wird ein Verfahren entwickelt, das den Einfluß der Kriechverformungen des Betons berücksichtigt.

### Summary

Investigations carried out in the U.S.S.R. show that creep and shrinkage deformations of bridges depend to a large extent on climatic factors.

For practical design, Busemann's equivalent prism method may be used, which allows for plastic deformations. Soviet research enables this method to be developed further.

For shrinkage, it is necessary to assume that the rates of increase of creep and of shrinkage are different. Gamma functions are used for the solution.

The suggested law for the variation of redundant unknowns simplifies substantially the calculation of statically indeterminate bridge structures.

For the calculation of composite systems consisting of concretes of different quality, a method is developed which takes into account the effect of creep deformations of the concrete.

### Résumé

Des recherches exécutées en URSS, il ressort que les déformations des ponts dues au fluage et au retrait dépendent, dans une large mesure, des facteurs climatiques.

Pour le calcul, compte tenu des déformations plastiques, on peut utiliser la méthode du prisme équivalent de Buseman. Les recherches soviétiques ont permis de poursuivre le développement de cette méthode.

En ce qui concerne le retrait, il faut partir de l'hypothèse qu'il s'agit d'un processus dont la vitesse n'est pas égale à celle du fluage. On utilise les fonctions gamma pour le calcul.

On présente une loi de la variation des inconnues hyperstatiques qui facilite grandement le calcul des ouvrages hyperstatiques.

Une méthode est en outre présentée, qui permet de tenir compte du fluage du béton dans le calcul des systèmes composites constitués par des bétons de qualités différentes.

## Time-dependent Effects in Compressed Bound Elements

*Phénomènes retardés en pièces comprimées frettées*

*Zeitabhängige Erscheinungen in umschnürten Druckelementen*

W. OLSZAK

Professor Dr., Dr. h. c.

A. STEPIEŃ

Dipl. Ing.

1. If a structural element is subjected to the action of external loads maintained over long periods of time, time-dependent effects occur (creep and relaxation). These phenomena result in a redistribution of interior forces and, for this reason, are essential for the determination of the actual factor of safety of the structural element under consideration. Previous research work has been mainly concerned with the redistribution of interior forces (chiefly bending moments) produced by plastic and time-dependent deformations in structures such as beams, frames, arches and, partly, plates. However, pronounced "migration" of interior forces occurs also in reinforced concrete elements loaded axially which are of basic importance in the domain of structural engineering. Here, the existing research work is related nearly exclusively to compressed elements with longitudinal reinforcement.

The present paper is devoted to the problem of redistribution of interior forces, produced by the time-variable creep of the concrete core in spirally bound elements, as well as to the role of these phenomena in the determination of the limit load of such elements and their real factor of safety.

2. The bound element under consideration is assumed to be composed of a core (radius  $r=a$ ) with rheological properties and a binding which, for simplicity, is treated as a substitute continuous coating (thickness  $g$ ), covering the core. We also assume (in agreement with reality) that the spiral binding is not capable of transferring longitudinal loads. The axis of the core coincides with the axis  $z$  of a cylindrical coordinate system  $r, \varphi, z$ . The labels  $r, \varphi, z$  of  $\sigma$  and  $\epsilon$  denote radial, circumferential and longitudinal stress and strain, respectively.

With the above assumptions, we have, for the elastic range, the following relations between the strains and stresses in the core:

$$\epsilon_p = \frac{1-\nu}{E} p - \frac{\nu}{E} \sigma_z, \quad \epsilon_z = -\frac{2\nu}{E} p + \frac{1}{E} \sigma_z, \quad (2.1)$$

where  $E$  denotes Young's modulus of the core and  $\nu$  its Poisson's ratio. We have taken into consideration the equalities  $\sigma_r = \sigma_\varphi = p$  and  $\epsilon_r = \epsilon_\varphi = \epsilon_p$ .

To assess the elastic as well as the rheological phenomena of the core, we adopt N. КН. ARUTYUNYAN'S model of a body, [1], which for concrete is in a fair agreement with reality. Accordingly, the elastic response depends on the age of the material, whereas the creep effects are determined by the time dependence of the loading programme. So, e. g., for uniaxial stress we have, [1],

$$\epsilon_p(t) = \frac{1}{E(t)} p(t) - \int_{\tau_0}^t p(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + \eta(t, \tau) \right] d\tau, \quad (2.2)$$

where  $\tau$  denotes the age of the material (counted from a certain conventional instant),  $t$  being reserved for the current time coordinate;  $\eta(t, \tau)$  stands for the creep term and we assume that the load has been applied at the instant  $t = \tau_0$ . Let us, in addition, introduce  $\nu_1(\tau)$  for Poisson's ratio for the elastic state depending on the age of the concrete, whereas  $\nu_2(t)$  stands for the coefficient of transverse expansion for rheological deformations.

For the analysis we should consider that for technical applications bound reinforced columns may be provided with initial prestress of the spirals. Such a mode of design and execution results in an increase of the load-carrying capacity of the column and presents also some other advantages in the working stage of the element, [3]. Consequently, let us assume that, for  $t = \tau_0$ , a lateral pressure  $p_1(t)$  has been applied on the core. Further on, at the instant  $t = \tau_1$ , a vertical load  $\sigma_z$  starts acting; this is considered to be constant,  $\sigma_z = P/\pi a^2$ , and to induce an additional lateral pressure  $p_2(t)$  on the core.

Now if we account for elastic as well as rheological effects, we have to replace the relations (1.1) by

$$\begin{aligned} \epsilon_p(t) = & \frac{p_1(t) + p_2(t)}{E(t)} [1 - \nu_1(t)] - \int_{\tau_0}^t p_1(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \tau) d\tau \\ & - \int_{\tau_1}^t p_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) d\tau - \sigma_z \frac{\nu_1(\tau_1)}{E(\tau_1)} - \sigma_z \eta(t, \tau_1) \nu_2(t, \tau_1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z(t) = & -2 \frac{p_1(t) + p_2(t)}{E(t)} \nu_1(t) + 2 \int_{\tau_0}^t p_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) d\tau \\ & + 2 \int_{\tau_1}^t p_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) d\tau + \frac{\sigma_z}{E(\tau_1)} + \sigma_z \eta(t, \tau_1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

with 
$$\Phi(t, \tau) = \frac{1 - \nu_1(\tau)}{E(\tau)} + \eta(t, \tau) - \nu_2(t, \tau) \eta(t, \tau),$$

$$\Psi(t, \tau) = \frac{\nu_1(\tau)}{E(\tau)} + \nu_2(t, \tau) \eta(t, \tau).$$

3. The binding is assumed to be linearly elastic (up to the yield limit  $Q$  or rupture  $\zeta Q$ ) and its rheological deformations are disregarded when compared with those of concrete. Therefore, the stress-strain relation for steel is simply

$$\epsilon_s(t) = \frac{1}{E_1} \sigma_s(t). \quad (3.1)$$

The ration of the area of binding  $F_s$  to that of the core  $F_c$  will be denoted by  $\lambda$ . So we have

$$\lambda = \frac{F_s}{F_c} = \frac{2 \pi a g}{\pi a^2} = 2 \frac{g}{a}. \tag{3.2}$$

We have to determine the quantities  $p(t), \epsilon_p(t), \epsilon_z(t), \epsilon_s(t), \sigma_s(t)$  from (2.3), (2.4), (2.5). For this, the two additional required relations are provided by the equilibrium and compatibility conditions:

$$\left. \begin{aligned} F_s \sigma_s(t) + F_c p(t) &= 0, \\ \epsilon_s(t) &= \epsilon p(t) + \epsilon_0, \end{aligned} \right\} \text{ for } r=a, \tag{3.3}$$

$$\tag{3.4}$$

where  $\epsilon_0$  denotes the initial strain in the steel jacket necessary to produce the prestress  $\sigma_0$ .

Now the procedure to adopt is the following one: we replace the left hand side of (2.3) by the expressions following from (3.3) and (3.4) and we obtain integral equations for the unknown functions  $p_1(t)$  and  $p_2(t)$ .

4. For the creep function we introduce  $\eta(t, \tau) = \eta_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$ . For simplicity it is assumed that  $\nu_1(t, \tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const}(t, \tau)$ . Then we obtain, for  $p_1(t)$ , the Volterra integral equation

$$-\frac{2 p_1(t)}{\lambda E_s} - \frac{\sigma_0}{E_s} = \frac{p_s(t)}{E} (1 - \nu) - \int_{\tau_0}^t p_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - \nu) \eta_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] d\tau \tag{4.1}$$

(we consider the time interval  $t_0 \leq t \leq t_1$ ) and an analogous one for  $p_2(t)$ .

After solution and computation of the constants, we readily find the expressions for the stress and strain components in the bound element. If, for matured concrete, we introduce  $E(t) = E = \text{const}(t)$ , all these components may be expressed in closed form by combinations of elementary functions. They are graphically represented in Fig. 1 and 2.

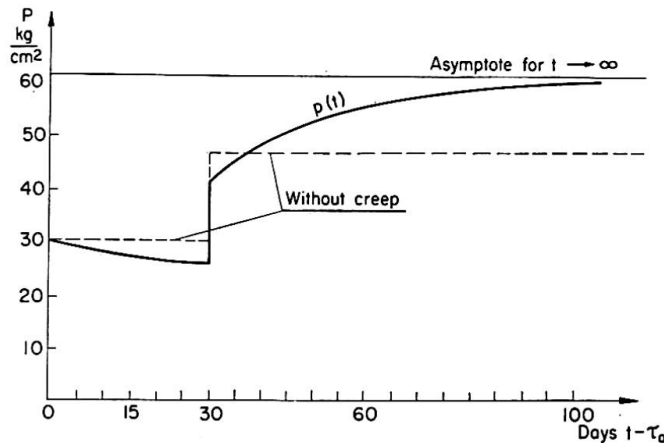


Fig. 1.

Of course, all the above results hold also for elements without prestress. It simply suffices to put everywhere  $p_1(\tau_0) = 0$ , especially also in the final results.

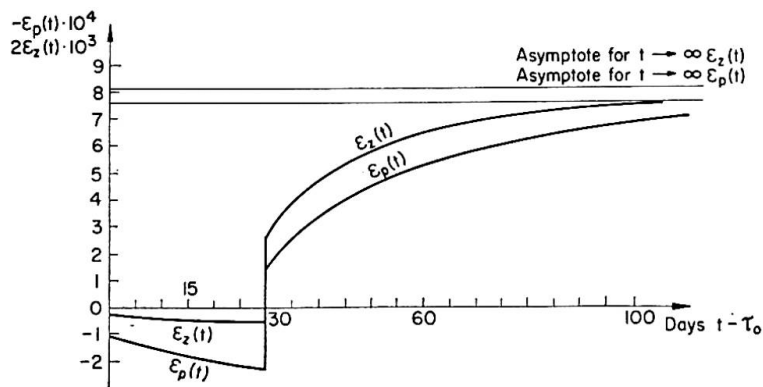


Fig. 2.

To illustrate the results, an example has been computed, with the following data for the core and steel:  $E = 2 \cdot 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.286$ ,  $\eta_0 = 2/E$ ,  $\gamma = 0.03$ ,  $\lambda = 0.04$ ,  $\sigma_z = 300$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\tau_1 - \tau_0 = 30$  days,  $E_s = 2.1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>. Fig. 1 shows the variability in time of  $p(t)$ , Fig. 2, the variability of the  $\epsilon_z(t)$  and  $\epsilon_p(t)$ . The diagrams hold for  $p_1(\tau_0) = 30$  kg/cm<sup>2</sup>. It is clearly seen that the influence of the rheological phenomena on stresses and strains is extremely pronounced. In responsible structural elements, this should be taken into account.

5. This time-dependent evolution of deformations and the "migration" of interior forces induces, of course, also a time-variation of the load-carrying capacity of the element and of its corresponding factor of safety.

Let us now find the functional coefficients  $\alpha_{(Ia)}$ ,  $\alpha_{(Ib)}$  and  $\alpha_{(II)}$ , characterizing the increase of the load-carrying capacity of the column due to the binding. These coefficients show how many times this load-carrying capacity increases when compared with a column without binding. The label denotes the destruction type of the structure. Thus (I) corresponds to the case when the load-carrying capacity of the core is exhausted, whereas (II) is related to the case when the load-carrying capacity of the binding is exhausted; (Ia) concerns the destruction of the core with undamaged binding, and (Ib) the destruction of the core due to the attainment of the yield limit of the coat (then the transverse pressure of the binding vanishes and the three-dimensional state is destroyed, and causes the destruction of the core which has now become free to deform transversally). This scheme was advanced by A. M. FREUDENTHAL ([2], pp. 62—66)<sup>1</sup>. Considering now the conditions in

<sup>1</sup>) Rheological phenomena were not taken into account. To facilitate comparison of the results, similar notations are, wherever possible, used in what follows. The argument is also explained in a similar manner.



which a bound element subject to the action of a compressive force attains its ultimate strength, we can express the coefficients  $\alpha$  of increase of the limit load.

For conglomerates such as concrete, the simplest mathematical expression determining Mohr's limit envelope may be expressed thus

$$\frac{\sigma_z}{R} = b + c \frac{p}{R}, \tag{5.1}$$

where  $R$  stands for the compressive strength of concrete, and  $b$  and  $c$  denote constants. Then the coefficients have the form

$$\alpha_{(Ia)}(t) = b + \frac{c p(t)}{R}, \tag{5.2}$$

$$\alpha_{(Ib)}(t) = b + \frac{1}{2} c \lambda \frac{\zeta Q}{R}, \tag{5.3}$$

$$\alpha_{(II)}(t) = \frac{\zeta Q \lambda \sigma_z}{2 p(t) R}. \tag{5.4}$$

The values  $b$  and  $c$  should be taken from experiment. The corresponding results available in literature differ considerably. For the numerical examples computed here, we adopted  $b \approx 1$ ,  $c \approx 3.33$ .

Fig. 3 shows the corresponding diagrams for a prestress  $p_1(\tau_0) = 30 \text{ kg/cm}^2$ , Fig. 4 represents the same diagrams for a smaller prestress,  $p_1(\tau_0) = 10 \text{ kg/cm}^2$ .

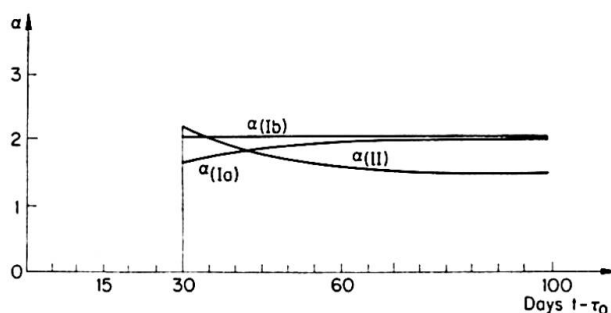


Fig. 3.

The Figs. 1—4 are very instructive. They show that the redistribution and transfer of interior forces is a function of time: the time-variable creep (longitudinal and transverse) of the core forces the steel to a gradually increasing action. The effect of this transfer is important and essential: the load-carrying capacity of the core gradually increases (because of the increase of the lateral pressure in the combined state of stress), whereas the carrying capacity of the steel binding gradually decreases. From Figs. 3 and 4 it may be seen that the coefficients  $\alpha_{(Ia)}$  and  $\alpha_{(II)}$  (which characterize this load-carrying capacity) are,

because of the rheological effects, themselves, respectively, monotonically increasing and monotonically decreasing functions of time, and so are the corresponding factors of safety, which likewise vary monotonically in time.

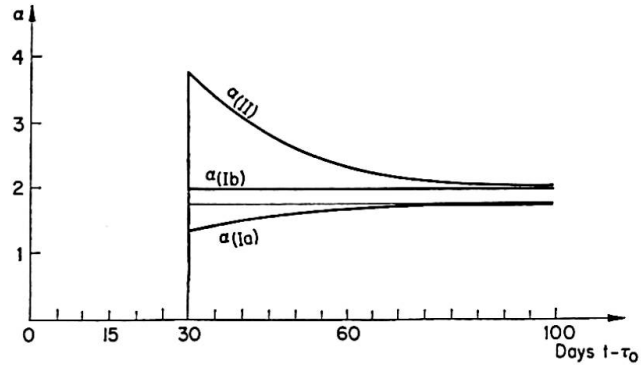


Fig. 4.

It can be observed that the action of creep increases the efficacy of the prestress because, by increasing the lateral pressure, the load-carrying capacity of the core is augmented (with a corresponding reduction of the load-carrying capacity of the steel coating. There is, however, no quantitative correspondence between these phenomena).

In the second example, the creep has an advantageous influence on the structure, because it tends to equalize the coefficients  $\alpha_{(Ia)}$ ,  $\alpha_{(Ib)}$ , and  $\alpha_{(II)}$ . In the first example (Figs. 1—3), this influence is apparently less advantageous (always the smallest of the coefficients is decisive). However, let us recall our assumption concerning the properties of binding: this has been supposed to be perfectly elastic up to the yield limit  $Q$  (or ultimate strength  $\zeta Q$ ) and not to exhibit creep.

In practice, there are considerable deviations from this rule, because the binding passes, before rupture, through a phase of plastic strains. As a result, the stress in the binding does not increase in such a degree as would follow from the assumption of linear elasticity. The coefficient  $\alpha_{(II)}$  does not fall, therefore, to the value such as would follow from the theoretical assumptions.

For every bound column there exists an optimum prestress. On the other hand, it is quite possible that, under unfavourable circumstances, the element may undergo collapse under longtime loading. The value of the corresponding loads may readily be computed.

Therefore, in important structures, the influence of creep on their behaviour should be investigated in an individual manner, depending on the material constants and the percentage of binding. This will enable us to select the most advantageous value of prestress.

Further corrections to the above theory, due to the non-linearity and anisotropy of the core, are discussed separately.

### References

1. N. KH. ARUTYUNYAN: "Some Problems of Creep" (in Russian). Moscow-Leningrad 1952.
2. A. M. FREUDENTHAL: «Verbundstützen für hohe Lasten.» Ernst und Sohn, Berlin 1933.
3. W. OLSZAK: "Prestressed Spiral Reinforcement." Proc. 7th Internat. Congr. Appl. Mech., vol. I, London 1948; Travaux 196, 1951, Paris.
4. W. OLSZAK, A. STĘPIEŃ: "Rheological Effects in Prestressed Bound Elements" (in Polish). Symp. Pol. Soc. Theor. Appl. Mech., 1961, 39—51.

### Summary

The redistribution of interior forces in bound compressed reinforced concrete elements is analyzed. The variation of stresses and strains, due to the creep of the concrete core, is expressed as a function of time, as well as the variation of the load-carrying capacity of such elements and of their real factors of safety.

### Résumé

Le mémoire présente l'analyse de la redistribution des efforts intérieurs dans des éléments en béton armé frettés. La variation des contraintes et des déformations, due au fluage du noyau en béton, est exprimée en fonction du temps, ainsi que la variation de la capacité portante de tels éléments et de leur coefficient de sécurité.

### Zusammenfassung

Die Umlagerung der inneren Kräfte in spiralumschnürten Stahlbetonelementen wird untersucht. Infolge der Kriecherscheinungen des Betonkernes werden der Spannungs- und Formänderungszustand als Funktionen der Zeit ermittelt. Ebenso wird die charakteristische Abhängigkeit der Tragfähigkeit derartiger Konstruktionselemente und deren tatsächlichen Sicherheitsfaktors als Zeitfunktion bestimmt.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Dauerstandversuche mit Stahlbetonbalken

*Tests on Reinforced Concrete Beams Under Long-Term Loads*

*Essais sur poutres en béton armé soumises à des charges de longue durée*

G. BRENDEL

Professor, Dipl.-Ing.,  
Technische Universität Dresden

H. RÜHLE

Dr.-Ing., Dresden

### 1. Zweck der Versuche

Neben einer ausreichenden Bruchsicherheit wird von Stahlbetonkonstruktionen auch die Einhaltung unschädlicher Rißweiten und Durchbiegungen gefordert. Im Zusammenhang mit der Einführung neuer Berechnungsverfahren im Stahlbetonbau wurden im Deutschen Amt für Material- und Warenprüfung Dresden u. a. 8 Balken durch gleichbleibende Lasten beansprucht, um die Auswirkungen einer Dauerbelastung insbesondere auf die Rißbildung zu studieren. Nach knapp 2 Jahren waren die Kriechverformungen und Rißerweiterungen abgeklungen, wonach die Dauerlasten entfernt und die Balken in Kurzzeitversuchen bis zum Bruch neu belastet wurden.

### 2. Versuchsbalken und deren Belastung

Tabelle 1 enthält die Hauptangaben für die Versuchsbalken. Die Balkenpaare I, III und IV stimmen in Abmessungen und Bewehrung überein, desgleichen die mit Torstahl 60 bewehrten Balkenpaare II, V und VI.

Die Balkenpaare I und II wurden in Kurzzeitversuchen zu Bruch gebracht. Bei den Balkenpaaren III und V wurden, nachdem eine starke Rißbildung eingetreten war, die zugehörigen hohen Lasten als Dauerlasten unveränderlich beibehalten. Die Balkenpaare IV und VI hingegen wurden mit Vorsicht nur so hoch belastet, daß sich die ersten Risse durch Strukturänderungen im Beton zwar ankündigten, aber noch nicht sichtbar wurden. Unter dieser Dauerlast traten die ersten sichtbaren Risse bei den Balken mit Rundstahl nach 2 $\frac{1}{2}$  Monaten, bei den Balken mit Torstahl nach 3 Monaten spontan auf.

Die Balkenquerschnitte und der Aufbau des Versuchsstandes sind aus Fig. 1 zu ersehen. Die Größe der Dauerlast wurde wöchentlich kontrolliert und gegebenenfalls reguliert.

Während der Dauerbelastung wurden Luftfeuchte und Temperatur in engen Grenzen gehalten. Messungen an Schwindprismen, Kriechprismen, Druckwürfeln und Biegezugbalken in bestimmten Zeitabständen ergänzten die Balken-

Tabelle 1

Bezeichnung der Balken	Hauptbewehrung	Dauermoment kpm	Rißmoment kpm	Bruchmoment kpm
I/1	R 9 $\varnothing$ 16	—	2200	9740
I/2	R 9 $\varnothing$ 16	—	3300	9900
II/1	T 5 $\varnothing$ 14	—	1300	11100
II/2	T 5 $\varnothing$ 14	—	1300	10400
III/1	R 9 $\varnothing$ 16	9350	2090	11820
III/2	R 9 $\varnothing$ 16	9350	2090	12100
IV/1	R 9 $\varnothing$ 16	2200	2200	11000
IV/2	R 9 $\varnothing$ 16	2200	2200	11500
V/1	T 5 $\varnothing$ 14	6500	2730	—
V/2	T 5 $\varnothing$ 14	6500	2730	13000
VI/1	T 5 $\varnothing$ 14	1300	1300	11480
VI/2	T 5 $\varnothing$ 14	1300	1300	11700

R = Rundstahl St I ( $\sigma_S = 2540 \dots 3220 \text{ kp/cm}^2$ ,  $\sigma_{Bruch} = 3490 \dots 4560 \text{ kp/cm}^2$ ),  
 T = Torstahl 60 ( $\sigma_{0,2} = 6460 \dots 6500 \text{ kp/cm}^2$ ,  $\sigma_{Bruch} = 7480 \text{ kp/cm}^2$ ),  
 Betondruckfestigkeit  $W_{30} = 312 \text{ kp/cm}^2$ .

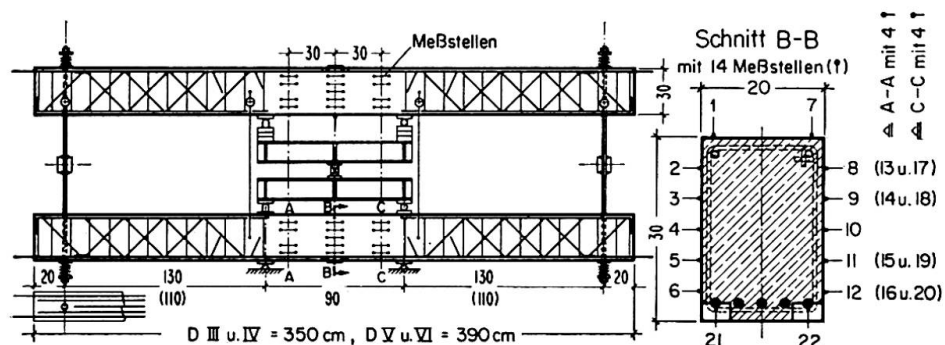


Fig. 1. Dauerversuchsstand und Balkenquerschnitt (Torstahl 60).

versuche. Der Einfluß der Änderungen von Temperatur und Luftfeuchte wurde an etwa 1 Jahr alten, abgelagerten Betonprismen beobachtet.

Für die Dehnungsmessungen am Beton und Stahl wurde ein Albrechtscher Setzdehnungsmesser benutzt (Meßlängen 100 mm, Ablesegenauigkeit  $1/1000 \text{ mm}$ ).

### 3. Versuchsergebnisse

Infolge der starken Balkenbewehrung wanderte die Nulllinie bei steigender Belastung gegen den Zugrand. Wie erwartet, vergrößerte sich aber die Betondruckzone vor allem infolge des Kriechens des Betons unter Dauerlast. Das

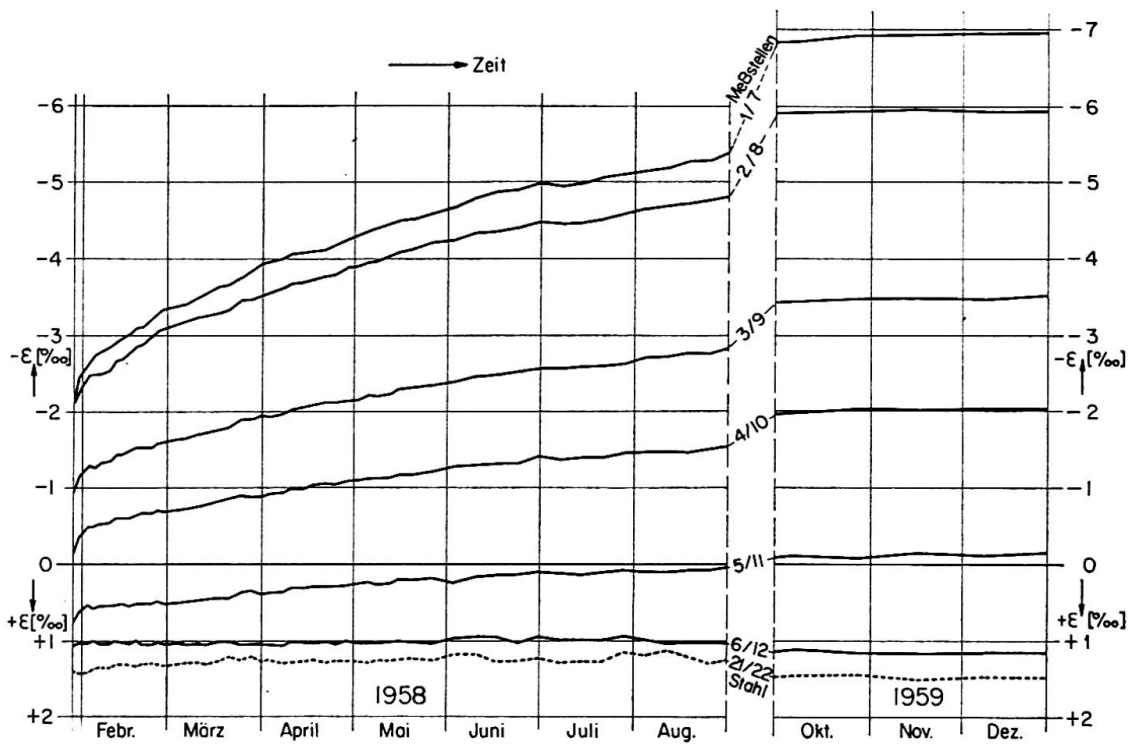


Fig. 2. Dehnungen des Betons und Stahles (Balken III/1).

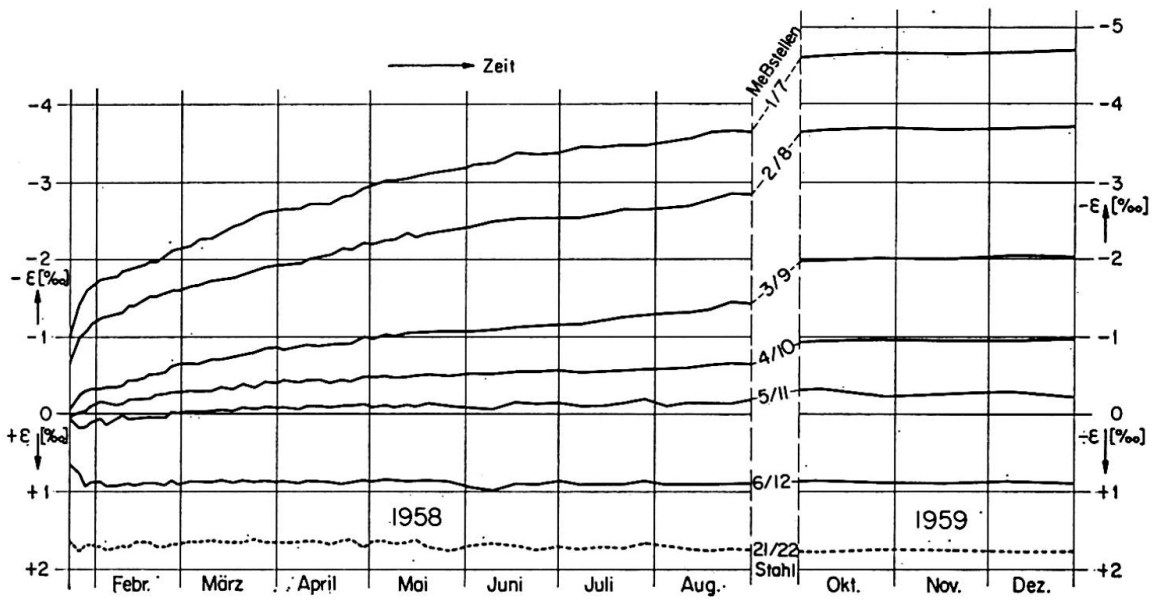


Fig. 3. Dehnungen des Betons und Stahles (Balken V/1).



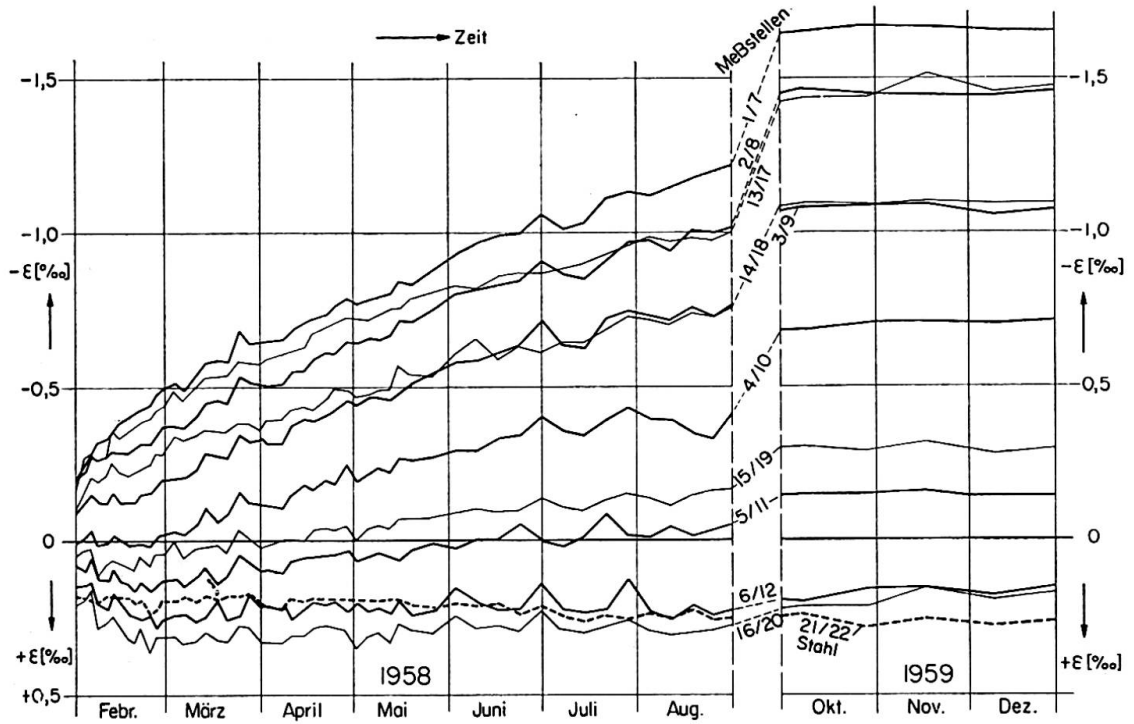


Fig. 4. Dehnungen des Betons und Stahles (Balken IV/1).

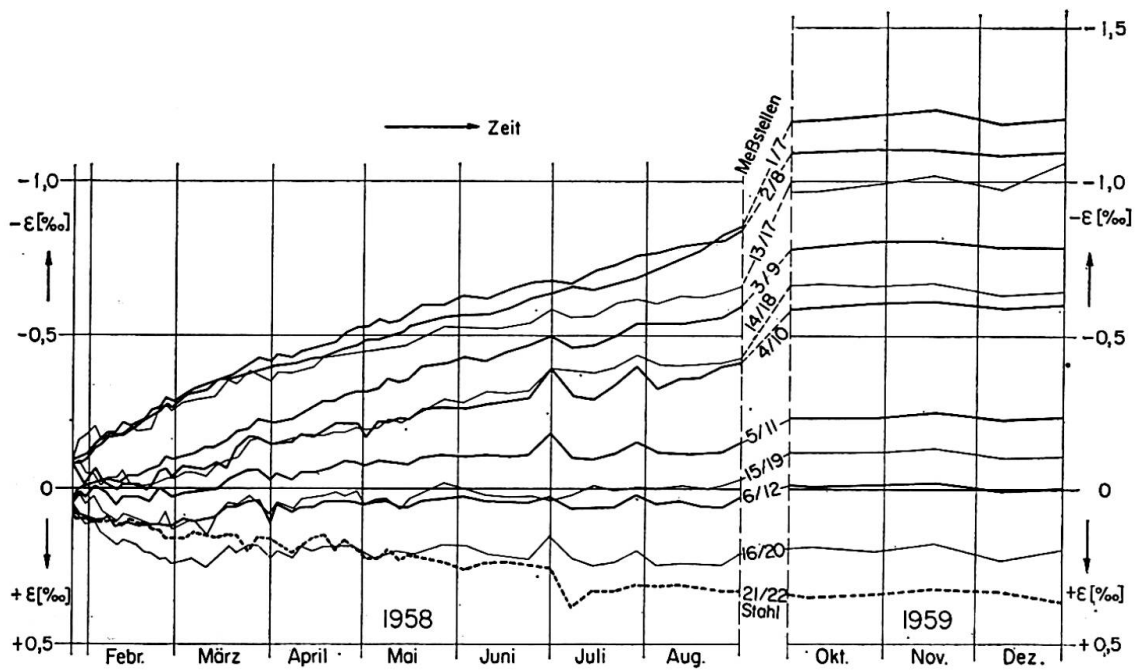


Fig. 5. Dehnungen des Betons und Stahles (Balken VI/1).

dadurch verursachte Anwachsen der Stahldehnungen geht aus Fig. 2 bis 5 hervor.

Mit Rücksicht auf das Wandern der Nulllinie wurden von allen Kriechwerten in der Betondruckzone nur diejenigen am oberen bzw. unteren Druckrand vergleichsweise herangezogen.

Mit  $\varphi$  = Kriechzahl am zentrisch gedrückten Betonprisma

$$\varphi' = \frac{\text{Kriechverkürzung}}{\text{sofortige Verkürzung}} \text{ am Druckrand}$$

$$\varphi'' = \frac{\text{Kriechdurchbiegung}}{\text{sofortige Durchbiegung}}$$

ergaben die Versuche folgende Verhältniswerte  $\varphi : \varphi' : \varphi''$

$$\text{III } 5,8 : 2,0 : 0,4 = 1 : 0,35 : 0,07 = 2,90 : 1 : 0,20$$

$$\text{IV } 5,8 : 4,4 : 1,2 = 1 : 0,76 : 0,21 = 1,32 : 1 : 0,27$$

$$\text{V } 5,8 : 2,7 : 0,7 = 1 : 0,47 : 0,12 = 2,15 : 1 : 0,26$$

$$\text{VI } 5,8 : 4,1 : 1,2 = 1 : 0,71 : 0,21 = 1,41 : 1 : 0,29$$

Hierbei sind die an den Betonprismen gemessenen Längenänderungen infolge Schwinden und Temperaturschwankungen berücksichtigt. Die für die Berechnung der Balkendurchbiegung aus den Randverformungen maßgebenden Kriechzahlen  $\varphi'$  sind kleiner als die für die entsprechenden zentrisch gedrückten Prismen gefundenen Kriechzahlen anzusetzen. Besonders auffällig ist die Abhängigkeit von der Größe des Dauermomentes, wobei der Unterschied bei Balken mit Torstahl weniger groß war als bei den stärker bewehrten Balken mit Rundstahl. Die Werte  $\varphi''$  sind kleiner als die Werte  $\varphi'$ , weil die biegungerzeugenden Kriechverformungen nur in der Druckzone vor sich gehen. Die Abhängigkeit des Verhältniswertes  $\varphi'' : \varphi' = 0,20 \dots 0,27$  bzw.  $0,26 \dots 0,29$  von der Höhe der Dauerlast dürfte auf die erst später einsetzende Rißbildung der gering belasteten Balken zurückzuführen sein.

Während der Dauerbelastung wurden die Rißbilder beobachtet und die Veränderungen von Anzahl, Weite und Länge der Risse festgehalten (siehe Fig. 6 bis 9). Die Rißweiten verringerten sich am Schluß der Dauerstandversuche geringfügig, was auf Temperaturschwankungen zurückzuführen sein dürfte.

Sowohl bei den Balken mit niedriger Dauerlast als auch bei Balken mit sehr hoher Dauerlast haben sich die anfänglichen maximalen Rißweiten etwa verdoppelt.

Die Summe der Rißweiten vergrößerte sich bei den zunächst rißfreien Balken zwischen dem 2. und 23. Monat der Belastung auf das etwa 3fache, wobei die Anzahl der Risse um etwa 10% zunahm. Auch bei den sehr hoch belasteten Balken mit Rundstahlbewehrung stieg die Summe der Rißweiten auf das 3fache der Summe unmittelbar nach Aufbringen der Dauerlast, während es

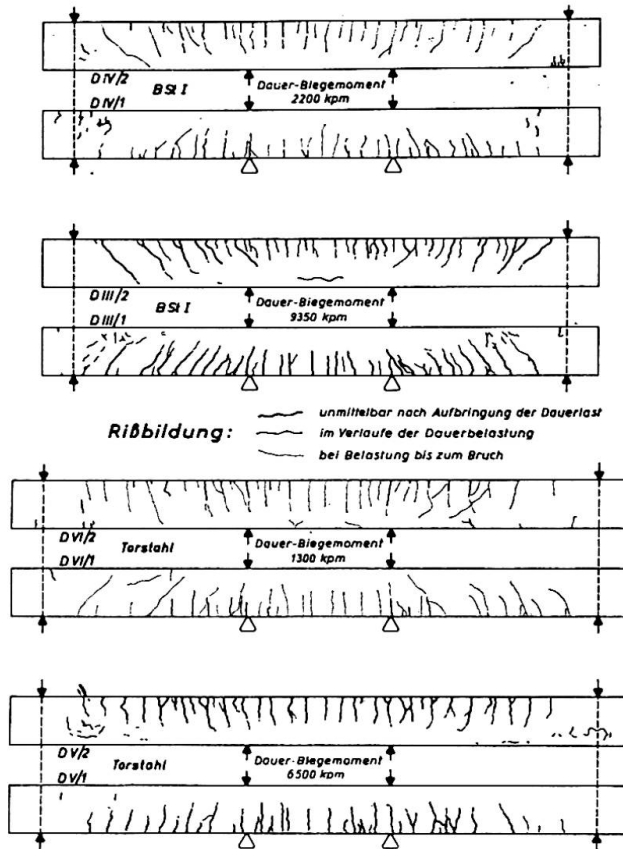


Fig. 6. Rißbildung.

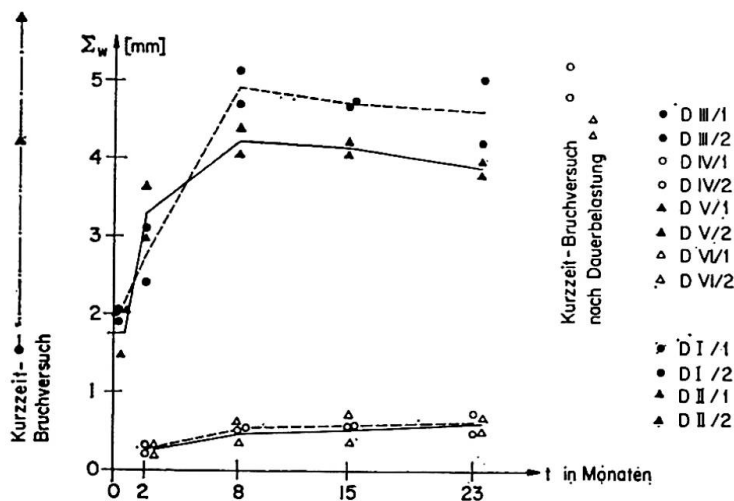


Fig. 7. Summe der Rißweiten (--- Rundstahl, — Torstahl 60).

bei den Balken mit Torstahlbewehrung nur das 2fache war. Die Steigerung der Anzahl der Risse betrug dabei ebenfalls etwa 10%.

Die Anzahl der Risse und die maximale Rißbreite waren, besonders bei den Balken mit Rundstahlbewehrung, im Bruchzustand nach vorangegangener Dauerlast größer als bei Bruchbelastung im Kurzzeitversuch. Hinsichtlich der Summe der Rißweiten konnte dies nur bei den Balken mit Rundstahl I festgestellt werden.

Der Bruch trat bei allen 12 Balken durch Zerstörung der Betondruckzone ein. Die Bruchlasten der vorher dauerbelasteten Balken waren durchweg 10

Fig. 8. Anzahl der Risse.

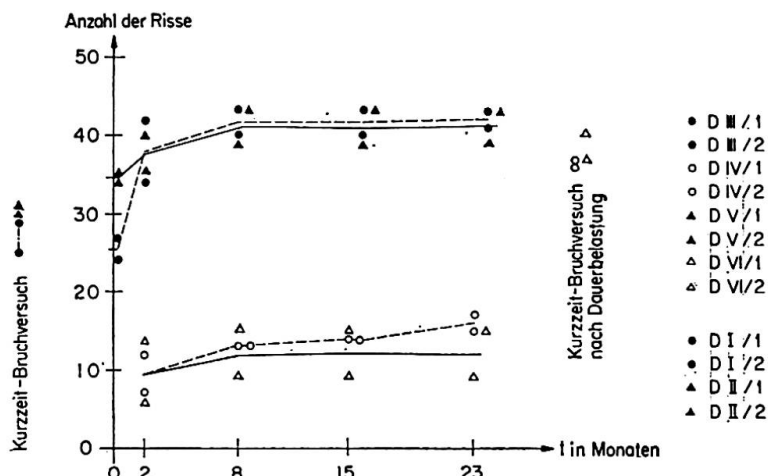
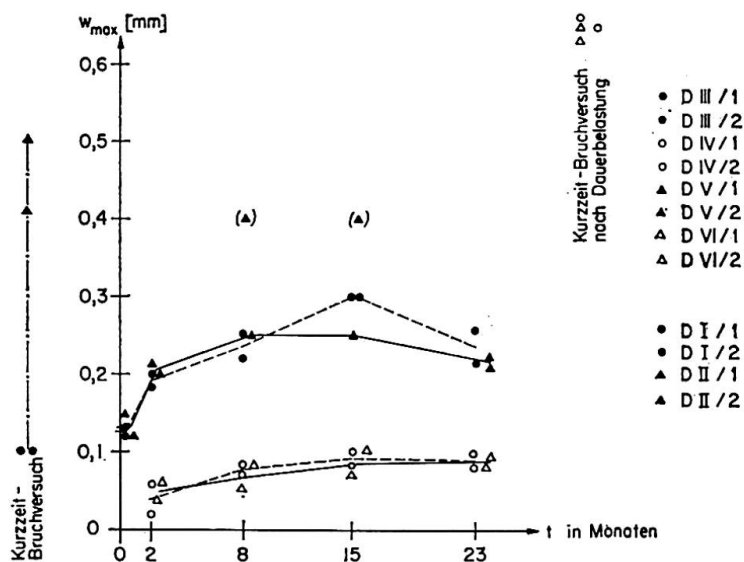


Fig. 9. Maximale Riweite.



bis 15% größer als die entsprechenden Kurzzeit-Bruchlasten, was auf die Festigkeitszunahme im Laufe der Zeit zurückzuführen ist. Die Betonstauchungen am Rand der Druckzone betragen kurz vor Erreichen des Bruches bei den Kurzzeitversuchen 2,6 bis 2,8‰, bei den Balken mit niedriger Dauerlast nach Wegnahme derselben und anschließender Neubelastung bis zum Bruch nur 1,8 bis 1,9‰ und im Falle der sehr hohen Dauerlast wegen des großen Anteiles der bleibenden Verformungen an den Gesamtverformungen noch weniger.

### Zusammenfassung

An 8 Stahlbetonbalken wurden Riverhalten und Verformungen unter Dauerlast während zweier Jahre beobachtet. Die anfänglichen maximalen Rißweiten haben sich unabhängig von der Größe der Dauerlast sowohl bei den Balken mit Rundstahl als auch bei den Balken mit Torstahl 60 etwa verdop-

pelt, die Summen der Rißweiten etwa verdreifacht. Dies muß bei den Nachweisen für die Einhaltung der zulässigen Rißweite von Stahlbetonbalken beachtet werden. Die Kriechzahl für zentrisch belastete Betonprismen wirkt sich nur zum Teil in der Betondruckzone und in Abhängigkeit von der Größe der Dauerlast aus. Die im Bruchzustand gegenüber Kurzzeitversuchen besonders bei den Balken mit gewöhnlichem Rundstahl ungünstigeren Rißerscheinungen führten infolge der mit der Zeit zunehmenden Druckfestigkeit des Betons zu keiner Abminderung der Kurzzeit-Bruchlast.

### Summary

Cracking and deformation have been observed on 8 reinforced concrete beams under long-term loads over a period of two years. The width of the largest crack increased to double its size independently of the magnitude of the imposed load; the sum of the widths of all the cracks increased threefold during the same period of time. This must be taken into consideration in the prediction of the width of the largest crack which must not be exceeded. The relations between the deformations due to creep and the elastic strains observed for concrete prisms under a centred compressive load are not applicable to the compression zone of a beam. For the latter, smaller creep strains were found, which depended upon the size of the long-term load. The additional cracking as a result of the long-term load did not reduce the short-term ultimate load, because the compressive strength of the concrete was increased.

### Résumé

On a observé, sur une période de 2 ans, la fissuration et les déformations de 8 poutres en béton armé soumises à des charges permanentes. La largeur des fissures qui, initialement, étaient les plus grandes, a doublé indépendamment de l'intensité de la charge permanente, et cela aussi bien dans le cas d'aciers habituels que dans le cas de poutres armées d'aciers Tor 60; la somme des largeurs de toutes les fissures d'une poutre a triplé dans le même temps. Ceci doit être pris en considération si l'on veut que la largeur des fissures reste en deçà des tolérances. Les relations entre les déformations élastiques et de fluage, observées dans les prismes chargés à la compression pure, ne sont pas applicables à la zone comprimée des poutres; on y trouvera des déformations de fluage plus petites et liées à la grandeur de la charge permanente. Grâce à l'augmentation de la résistance du béton à la compression, la fissuration additionnelle, due aux charges permanentes, n'a pas diminué la charge de rupture dans les essais rapides à la ruine.

## Va 5

# Behaviour of Four Prestressed Concrete Platform Roofs Between 1955 and 1963

*Comportement de quatre marquises en béton précontraint entre 1955 et 1963*

*Verhalten von vier Spannbetonbahnsteigdächern zwischen 1955 und 1963*

P. W. ABELES

London

Two pairs of two platform roofs were built at Potters Bar near London in 1954/55. As seen in Fig. 1, each of the four roofs is 130 ft. long and approximately 36 ft. wide supported by four columns. Each roof consists of a cantilever slab of a thickness of 3—4 in., supported by two main beams, the slab being prestressed by means of post-tensioned four-wire cables placed in grooves 12 in. apart. Each of the two main beams of 130 ft. length, cast and prestressed in situ, is supported by two columns 65 ft. apart. Thus in both cases for the slab as well as for the beams there are only negative bending moments with tension at the upper sides under uniformly distributed load which allowed the provision of straight posttensioned tendons.

The weather conditions were most unfavourable during the entire building operations, particularly in the second part of 1954, with almost constant rain. This delayed the work and also made it very difficult for the contractor to obtain uniform concrete strength. The concrete in the slabs was well compacted by means of internal vibrators placed horizontally within the concrete, whereas that of the main beams was less well compacted by means of so-called Kango

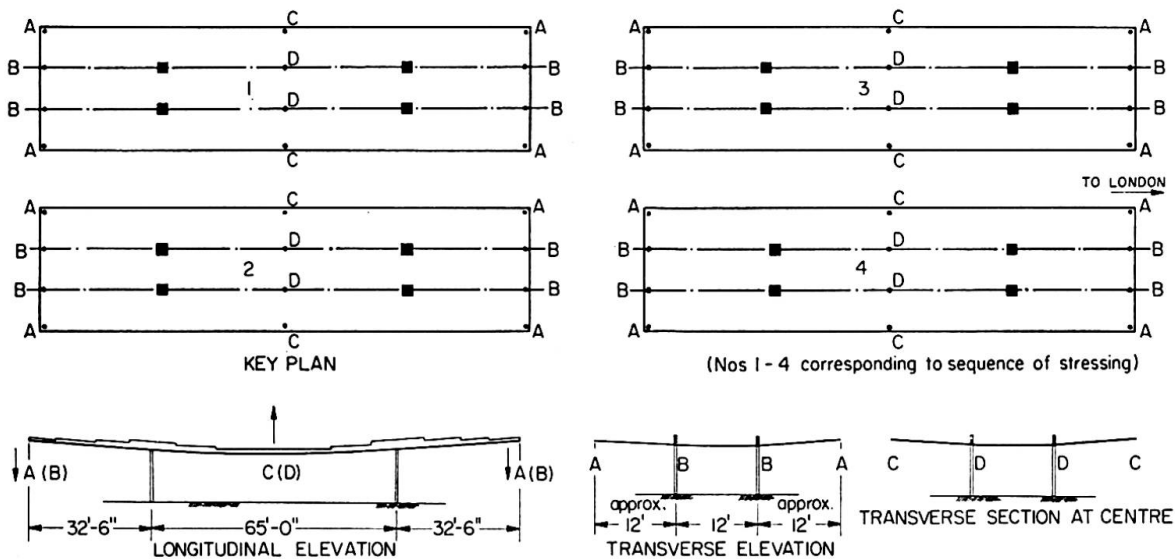


Fig. 1.

hammers. The provision of a rather light shuttering prevented the use of more efficient, heavier external vibrators. The concrete was further affected by the vibrations of passing traffic. Although there were speed restrictions for the trains on the main line London-Edinburgh, they might not have always been fully observed during the night and in the early morning, which was concluded from the fact that occasionally haircracks had developed overnight.

Prestressing was applied when the concrete test specimens showed sufficient strength. However, the strength in the roof beams must have been much less than that of the well compacted test specimens made on the ground in which the water content was not increased by rain. In consequence of the reduced strength, difficulties occurred during prestressing, particulars of which are described by the author elsewhere<sup>1)</sup>, which required some repair work at the anchorages. When the prestress was applied, excessive deformations took place.

This was almost twice the amount of the values expected, based on an assumed instantaneous  $E$ -value of  $5.25 \times 10^6$  psi corresponding to the specified cube strength of 6500 psi. Thus, the actual strength at transfer in the beams must have been appreciably less. The instantaneous deformation at transfer increased further due to creep, but this was again much more than originally expected for the specified strength. The photo Fig. 2 shows the deformations of the roofs in Summer 1955.

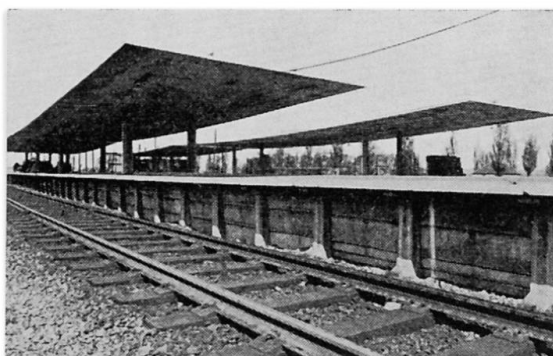


Fig. 2.

The four platform roofs had been built in the sequence 1 to 4, as indicated in Fig. 1, and the temperature conditions varied to a very great extent during this time, with the consequence that quite different deformations of the roofs occurred owing to different shrinkage and creep. This was particularly conspicuous along the two pairs of edges of adjacent roofs where different deformations occurred and the two adjacent levels did not meet. This difference in age and shrinkage and creep history between the individual roofs has remained quite apparent all the time, although the degree of discrepancy was slightly reduced by the end of 1955.

The conditions were further aggravated by the fact that owing to the

---

<sup>1)</sup> See Chapters 23 and 25 of the author's book "An Introduction to Prestressed Concrete", to be published by *Concrete Publications Ltd.*, London, 1964.



excessive deformation and by the infiltration of water into a lightweight concrete topping (which was afterwards provided at the centre portion to improve the drainage), the deadload was appreciably increased and exceeded there the working load with the consequence that cracks developed at the underside i. e. where compressive stresses were expected, as described in more detail elsewhere<sup>1</sup>). Consequently, modifications were made by removal of the "lightweight" concrete topping and roofing cover over the centre portion of the roof and ensuring satisfactory drainage, thereby keeping the dead load within the design value, when all cracks at the underside closed. Figs. 3 and 4 show the

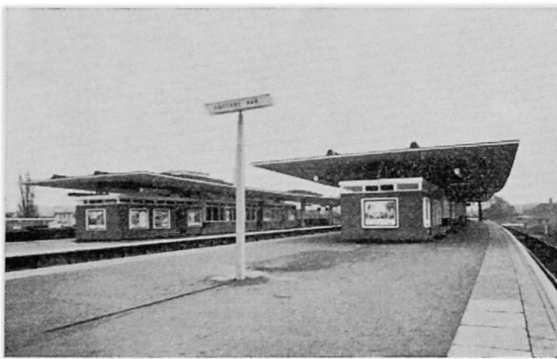


Fig. 3.

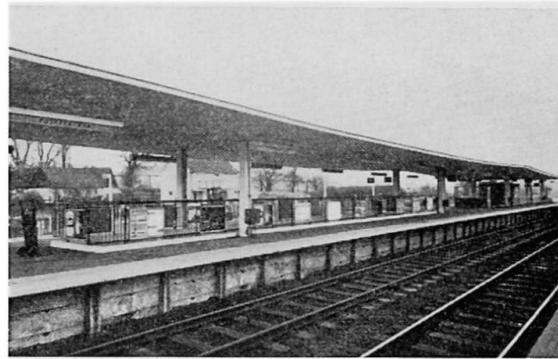


Fig. 4.

roof after this modification, when the deformations were greatly reduced and the recoveries were in good agreement with the anticipation based on the calculation with an  $E$ -value more appropriate to the actual strength.

Although the deformations of the roofs were greatly reduced, they were still much more than they should have been if the concrete had its specified strength. In order to investigate the further changes in deformation, measurements were made since November 1955 when the new platforms had been in use; special bench marks were made and all following measurements were related to the actual deformations in November 1955 which became the zero points.

Measurements of the levels of the four corners  $A$ , of the four cantilever ends  $B$  and of the two points  $C$  and  $D$  at the centre of the roofs have been made for all four roofs at certain intervals. In Fig. 5 the maximum and minimum levels of each roof have been plotted for the time between November 1955 and November 1960. The abscissa representing the time is divided into 10 divisions, each of which indicates half a year, and the date is given underneath. The maximum and minimum of deflections of all four roofs are shown by solid lines when at least two readings were available and by dotted lines where only a single reading applied. Fig. 5 relates to the measurements of 16 points each at the corners  $A$  and the cantilever ends  $B$ , and covers the points  $C$  and  $D$  at the centres where eight readings each were taken.

The temperatures are given for the individual dates in degrees of Fahren-



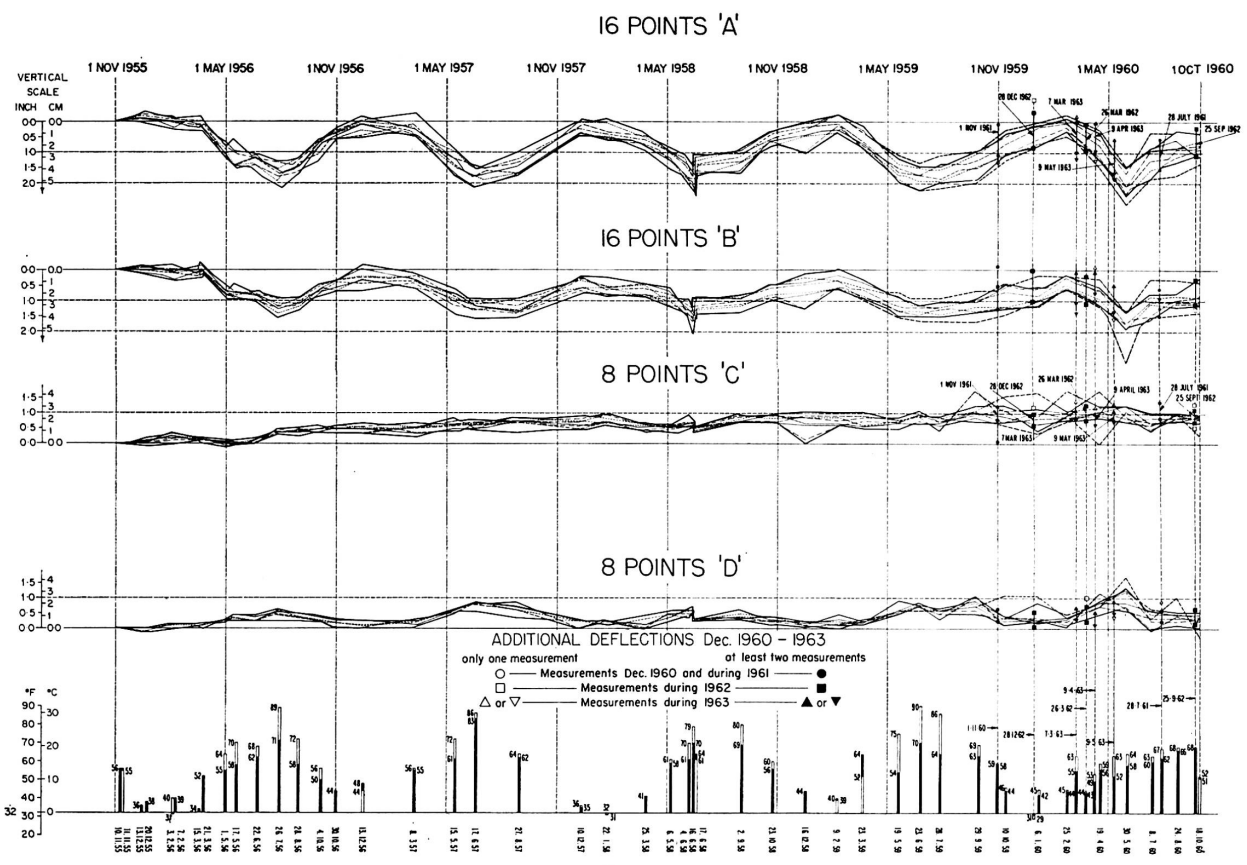


Fig. 5.

heit, plotted from 32 deg. F. (zero C). Two different temperatures are given in each case, one measured below the roof and the other above. The temperature below the roof is indicated by blacking-in the rectangle drawn, whereas the upper level is shown without the blacking-in. Normally the temperature was higher above the roof and thus in the diagrams 5 the positions shown in black usually terminate below those given for the top. In a few instances these two temperatures were equal, in which case the entire rectangles are blackened. In a few other instances the temperature was higher below than above the roof, in which case the lower portions of the rectangles are left white, whereas the upper portions are shown black.

It is seen that the deflections varied to a great extent during each year and were mainly dependent on the temperature. Obviously, also, sunshine and relative humidity are of some influence. However, it was impossible, as originally intended, to make some distinction between the effect of temperature, sunshine and relative humidity. The latter was ascertained since Autumn 1959 and varied between 36 and 88 per cent relative humidity. The weather in England, as is well known, is very changeable and thus appreciable differences in temperature and humidity occurred often between the levelling of the first and last roof. This accounts for great variations between the minimum at individual measurements.

The exactness of the level readings may be taken as  $\frac{1}{100}$  ft. corresponding to  $\frac{1}{8}$  in. or about 3 mm. As the diagrams were not always plotted immediately after the levels had been taken (except for the first two years) a few discrepancies occurred. In one or two cases, when it was obvious that there must have been a mistake, the reading was excluded, but in all other instances even doubtful values as those in April 1960 (for *C*) and in May 1960 (for *A* and *B*) were included.

It must be realised that in November 1955 which is the basis of the comparison, the ages of the four roofs varied to a great extent. Roofs (1) and (2) were well over a year old, whereas roofs (3) and (4) were of ages slightly above or below  $\frac{3}{4}$  year respectively. Obviously the difference in age and thus in creep history had a great influence upon the subsequent behaviour. Unfortunately, it was impossible to base the deformations on the original levels, which applied before transfer of the prestress, since the scaffolding which was required for concreting was in the way.

It was considered as possible that the excessive deformations (comprising upward deflections at the cantilevers and downward deflections at the centres of the roofs) might even increase in the course of time in consequence of further creep and shrinkage of the concrete and relaxation of the steel. However, the measurements, as shown in Fig. 5, indicate that there has, in principle, not been an excessive increase in the deformations. In general, it can be seen that with increasing temperature a relief in deformation takes place, the cantilever ends lowering and the centres of the beams rising, as indicated in Fig. 1.

Sudden changes in temperature caused immediate deviation in deflections as can be seen for the measurements on 4, 16 and 17 June 1958. The sudden increase in temperature on the 16th June and the subsequent reduction brought about immediate changes in the deflections.

Greater variations between maximum and minimum deflections occurred in 1963 after a prolonged sustained loading due to snow in January and February 1963. Already at the loading on 28th December 1962 snow was on the roof, but the deformations differ relatively little from those obtained at investigations without live load. However, greater deviations occurred at the measurements in March 1963. For this reason further investigations were carried out in April and May 1963.

The results are summarised in the Table 1 for the points *A* and *B*, where the individual deflections in May 1956 were compared with those in 1963, and also a number of intermediate readings are shown for December 1962 with the snow load and those in March and April 1963, the latter made in the morning and afternoon at different temperatures. Similar results were obtained for the points *C* and *D*. However, they are not shown as in these cases only two levels instead of four were available, and consequently the results are not so conspicuous; but also in these cases a similar behaviour was noticed.

A comparison of the results in May 1956 with those in May 1960 at similar temperatures shows that the downward movement of the cantilevers increased during these seven years which corresponds to a reduction in the rather excessive original deformations of the roofs. For example, the greatest reduction (average of four roofs) in the levels of the corners *A* was 1.05 in. in 1956 and 1.50 in. in 1963. This is not very excessive when the entire variations are taken into account which amounted at the cantilever ends to approximately 2 in., whereas those at the centre are about 1 in. However, the corresponding differences between maximum and minimum levels in the four roofs changed to a much greater extent; they were, for example, on the average 0.34 in 1956 and 0.84 in 1963. This appreciable increase may have been caused by the snow loading in the Winter 1962/63, which was certainly not uniformly distributed over the roofs. At the beginning of the snow loading in December 1962 the average differences between maximum and minimum deflections of the four roofs were less pronounced and amounted for point *A* to 0.48 in., as can be seen from Table 1, while they became immediately larger in the subsequent investigations in March, April and May. Another point may be mentioned, i. e. a difference in the sequence of taking the levels for the individual roofs. In the first years the levels of each roof were taken separately and thus the difference in temperature during this operation was relatively small. Later the levels were taken by other assistants carrying along each platform covering two roofs before levelling the other side along the other platform, with the consequence that a longer time was required for taking the levels of each roof (although the overall time was reduced). Hence subsequently in many cases

Table 1. Maximum and Minimum Deflections of Points A and B in the 4 Roofs at Different Time (in inches)

points		A					B				
roof		1	2	3	4	all	1	2	3	4	all
1st May 1956	max.	1.02	0.78	1.14	1.08	1.14	0.84	0.78	1.02	0.90	1.02
	min.	0.66	0.78	0.60	0.60	0.60	0.48	0.48	0.48	0.66	0.48
	diff.	0.36	0	0.54	0.48	0.54	0.36	0.30	0.54	0.24	0.54
Dec. 1962	max.	0.54	0.42	0.54	0.78	0.78	0.84	0.42	0.72	0.66	0.84
	min.	0.18	0	0	0.18	0	0.12	-0.24*	0.48	0.36	-0.24*
March 1963	max.	1.14	0.84	0.90	0.66	1.14	1.02	1.02	0.96	0.96	1.02
	min.	0	0.12	0.12	0.30	0	0.18	0.06	0.30	0.60	0.06
	diff.	1.14	0.72	0.78	0.36	1.14	0.84	0.96	0.66	0.36	0.96
April 1963 morning	max.	0.54	0.42	0.54	0.30	0.54	0.96	0.54	0.66	0.66	0.96
	min.	-0.12	-0.12*	0	0.06	-0.12	0.12	-0.06	0.12	0.36	-0.06
	diff.	0.66	0.54	0.54	0.24	0.66	0.84	0.60	0.54	0.30	1.02
April 1963 afternoon	max.	1.20	0.78	0.54	0.72	1.20	1.20	0.90	0.96	0.72	1.20
	min.	0.24	0.06	0.06	0.12	0.06	0.30	0.30	0.54	0.48	0.30
	diff.	0.96	0.72	0.48	0.60	1.14	0.90	0.60	0.42	0.24	0.90
9th May 1963	max.	1.80	1.50	1.50	1.20	1.80	1.56	1.26	1.20	1.20	1.56
	min.	0.84	0.60	0.54	0.66	0.54	0.84	0.72	0.78	0.60	0.60
	diff.	0.96	0.90	0.96	0.54	1.26	0.72	0.54	0.54	0.60	0.96

\* The deflections are shown negative in Fig. 5 (downwards), but in this Table as positive, while the upward deflections, which are positive in Fig. 5 are in this Table indicated negative and, where the difference between maximum and minimum deflections are computed, added to the maximum.

In the columns, headed "all" the maximum and minimum deflections of all 4 roofs are given.

The temperatures at the individual investigations are seen in Fig. 5, except for April 1963, when different values for morning (47/50 deg. F.) and for afternoon (51/56 deg. F.) apply.

a greater change in temperature may have occurred for each roof than previously. Bearing all this in mind the behaviour of the roofs seem to be quite satisfactory, but unfortunately it is impossible because of the complexity of the conditions to draw definite conclusions regarding the effect of the stress history, delayed shrinkage and creep.

The author would like to thank the Chief Civil Engineer of British Railways, Eastern Region, for permission to publish this investigation and would like to acknowledge the work of the New Works Department in carrying out the measurements.

### Summary

Due to unfavourable weather conditions, the concrete strength of 4 prestressed cantilever platform roofs (each 130 ft. by 36 ft., supported by  $2 \times 2$  columns), built in 1954/55, was relatively low, with the consequence that relatively large deformations occurred at and after prestressing. At certain intervals between Nov. 1955 and Nov. 1960 the levels were measured at 4 points each at both ends and at the centre of each roof, and the variations were plotted in relation to the zero points of November 1955. These measurements were augmented by further levels, taken between December 1960 and May 1963. From the deflection diagrams and the Table, shown in the paper, it is seen that considerable variation in deformation occurred during each year, mainly dependent on the temperature, but that otherwise the behaviour of the roofs seems to be satisfactory in spite of the difficulties which occurred at construction.

### Résumé

Par suite de conditions météorologiques défavorables, la résistance du béton précontraint dans 4 marquises construites en 1954/55 (mesurant chacune  $40 \times 11$  m et supportée par  $2 \times 2$  colonnes) était relativement faible. En conséquence, il se produisit des déformations relativement importantes pendant et après la précontrainte. A certains intervalles, entre novembre 1955 et novembre 1960, les niveaux de quatre points étaient mesurés aux deux extrémités et au centre de chaque marquise, et les variations étaient tracées par rapport aux points zéro de novembre 1955. On a fait des mesures complémentaires entre décembre 1960 et mai 1963. A partir des diagrammes de flèches et de la table, reproduits dans ce travail, on peut se rendre compte que des variations appréciables des déformations se produisirent chaque année, surtout à cause des variations de température. Toutefois, de tous les autres points de vue, le comportement des marquises semble être satisfaisant malgré les difficultés rencontrées pendant la construction.

### Zusammenfassung

Infolge ungünstigen Wetters war die Betonfestigkeit von 4 in den Jahren 1954/55 erbauten vorgespannten Bahnsteigkragdächern (jedes  $40 \times 11$  m mit  $2 \times 2$  Stützen) ziemlich niedrig und daher ergaben sich sehr große Verformungen bei und nach der Vorspannung. Zwischen November 1955 und November 1960 wurden in gewissen Abständen Niveaumessungen an je 4 Punkten an beiden Enden und in der Mitte an jedem der 4 Dächer vorgenommen und von den Nullpunkten entsprechend der Verformung im November 1955 aufgetragen.

Weitere Messungen wurden vom Dezember 1960 bis Mai 1963 vorgenommen. Die Durchbiegungsdiagramme und die Tafel, die im Artikel enthalten sind, zeigen, daß beträchtliche Verformungen innerhalb jedes Jahres entstanden, die in erster Linie von der Temperatur abhängen; aber andererseits scheint das Verhalten der Dächer trotz der Schwierigkeiten, die sich bei der Ausführung ergaben, zufriedenstellend zu sein.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide



## Langzeitmessungen von Kriechen und Schwinden

*Long-Term Creep and Shrinkage Measurements*

*Mesure du fluage et du retrait sur une longue période*

JOSEF AICHHORN

Wirkl. Hofrat, Dipl.-Ing., Linz/Donau, Österreich

Aus der Beobachtung des Schwindens und Kriechens bei früher gebauten Brücken hat sich gezeigt, daß das Schwind- und Kriechmaß sehr erheblich abhängig ist von der Jahreszeit, in der betoniert wurde. Um einen genaueren Einblick in diese Verhältnisse zu bekommen, wurden bei mehreren Brücken, bzw. mehreren Abschnitten der gleichen Brücke, Vorrichtungen zum Messen von Schwinden und Kriechen eingebaut und mehrere Jahre hindurch beobachtet. Da der Beton bei allen drei Bauwerken ziemlich gleich war und die drei Brücken nicht weit voneinander in einer Gegend mit gleicher Witterung liegen, konnten, wohl ohne mit großen Fehlern rechnen zu müssen, die Beobachtungsergebnisse zueinander in Beziehung gebracht werden.

Die Meßvorrichtung besteht in einem ohne Verbund mit dem Beton eingebauten, am einen Ende im Beton befestigten Stahlmeßstab von 30 m Länge, von dem die Verschiebung des anderen, freien Endes gegenüber einer Meßmarke im Beton gemessen wird. Zur Ermittlung der Längenänderungen dienten Meßuhren. Die Messungen wurden zunächst täglich, später wöchentlich und in den letzten Jahren monatlich durchgeführt. Da das Schwinden und Kriechen außer von der Luftfeuchtigkeit und der Temperatur von vielen anderen Umständen beeinflusst wird, unter anderem auch von der Zusammensetzung des Betons und dessen Verarbeitung, von der chemischen Zusammensetzung des Zementes und so weiter, können Meßergebnisse des Schwindens und Kriechens von Betonen, die in verschiedenen Jahreszeiten hergestellt wurden, nur ungefähr verglichen werden. Aber diese Unterschiede sind so erheblich und eindeutig, daß man sie bei der statischen Berechnung, bzw. bei der Ermittlung der Verformungen, berücksichtigen sollte (s. hierzu 8.3 in [1]). In Fig. 1 werden fünf Kriech- und Schwindkurven dargestellt, wie sie sich nach den jahrelang durchgeführten Messungen ergaben. Die zu erwartende Endverkürzung (in der Darstellung mit 100% angegeben) wurde nach DIN 4227 ermittelt mit einem Endkriechmaß von  $\varphi = 1,625$  und einer Schwindverkürzung nach der 1. Spannstufe (Vorspannung 80%) von  $0,6 \times K \times \epsilon_s = 0,6 \times 1 \times 10 \times 10^{-5} = 0,06 \text{ ‰}$ . Zum Vergleich wurde in die Kriech- und Schwindkurven der zeitliche Verlauf des Kriechens nach Roš aus [2] bei konstantem Klima eingetragen.

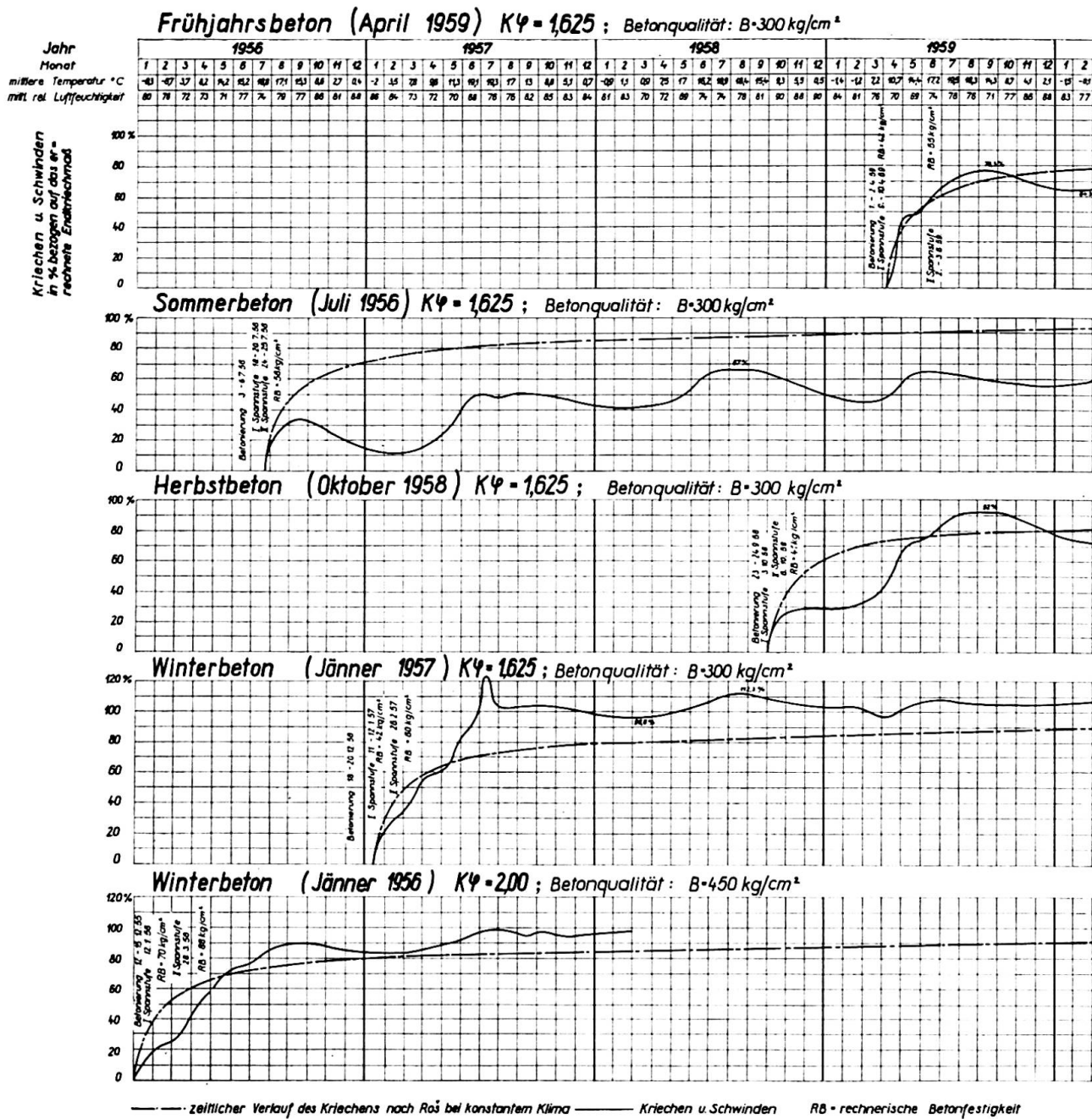


Fig. 1.

Die Betrachtung der einzelnen Kurven in Fig. 1 ergibt folgendes:

*Frühjahrsbeton (April)*

Die Kurve verläuft ziemlich genau nach der Roß-Kurve; sie steigt im Sommer an und fällt im Winter ab. Die jahreszeitlichen Schwankungen sind ziemlich gering. Maximum 78,3%, Minimum 64,3%.

*Sommerbeton (Juli)*

Infolge der trockenen Witterung im Juli ist der Beton bis zum Vorspannen bereits so weit ausgetrocknet, daß er nur noch langsam kriecht. Im folgenden

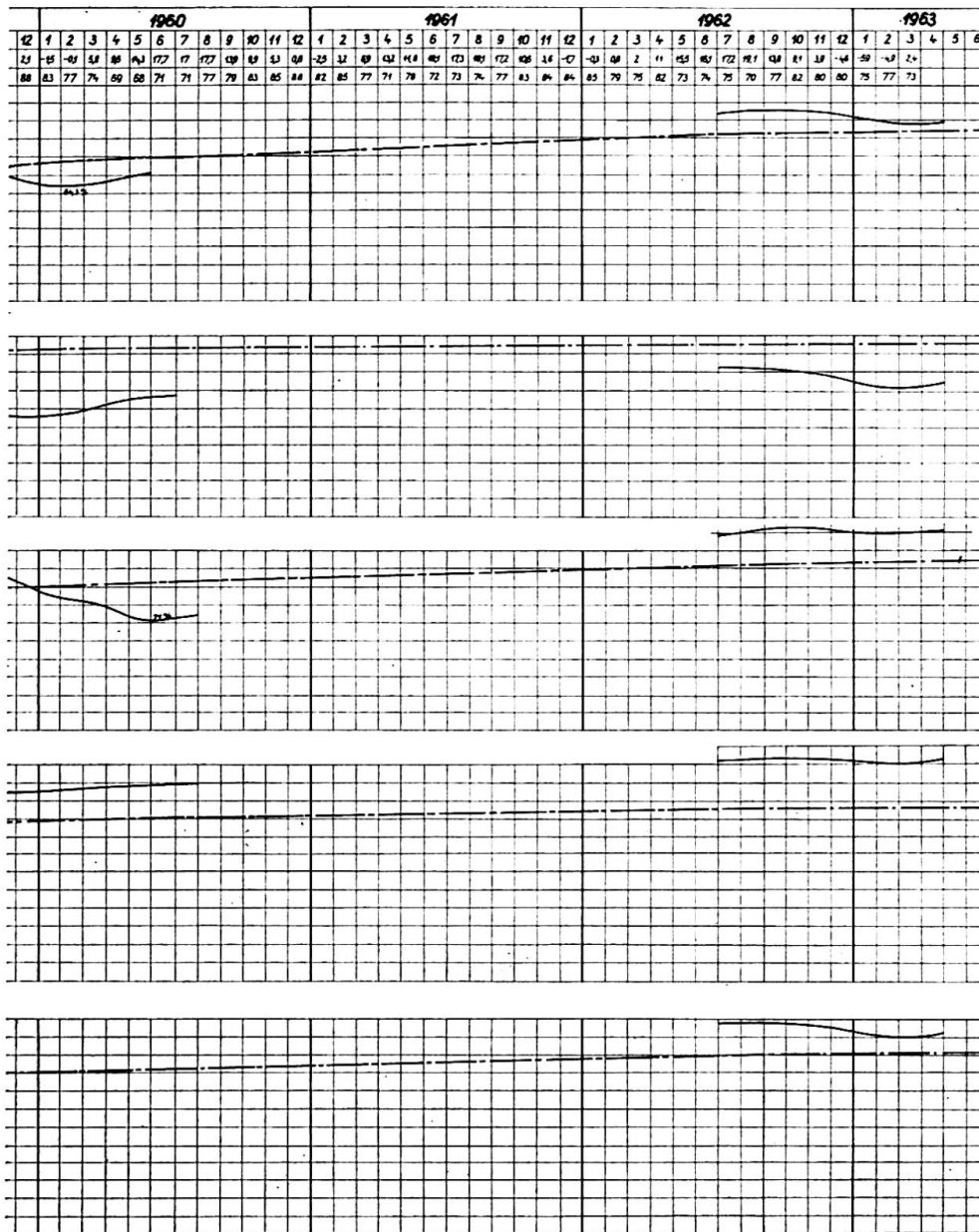


Fig. 1.

Monat hemmt außerdem die feuchte Witterung das Schwinden, so daß Kriechen und Schwinden zusammen Mitte September erst ein verhältnismäßig kleines Ausmaß erreicht haben. Mit Einsetzen der feuchten Herbstwitterung beginnt der Beton durch die Wasseraufnahme der Kapillaren zu quellen, so daß die Kriechverkürzung fast zur Gänze wieder aufgehoben wird. Im darauffolgenden Frühjahr setzt mit Eintritt der warmen und trockenen Witterung eine auffallende Belebung des Kriechens ein. Im 3. und 4. Jahr stellen sich ziemlich konstante jahreszeitliche Schwankungen zwischen 40% und 67% der errechneten Größe ein. Die Verluste an Vorspannung bleiben somit merklich geringer als erwartet.

*Herbstbeton (Oktober)*

Der Verlauf ist zunächst ähnlich wie im Sommer. Die zunehmende Feuchtigkeit der Herbstmonate verlangsamt das Kriechen sehr bald und hält es ziemlich konstant, weit unter der gerechneten Roš-Kurve. Im folgenden Frühjahr tritt wieder eine starke Belegung des Kriechens ein und steigt die Kurve über die Roš-Kurve hinaus an: Maximum 92,0%, Minimum 71,0%.

*Winterbeton (Januar 1957)*

Große Luftfeuchtigkeit in der Zeit zwischen Herstellung und Anspannung des Betons läßt ihn nicht trocknen. Das Schwinden bleibt gering und Quellung tritt nicht ein. Somit wird das Kriechen aus Vorspannung hier stärker wirksam. Aus dem Verlauf der Kurve ersieht man neben der Auswirkung der 2. Spannstufe auch den Einfluß der sehr trockenen Monate März und Mai sowie der Hitzewelle im Juli, die zu steilen Kurvenanstiegen führten. Bei der Hitzewelle trat der später nie wieder erreichte Höchstwert von 122% ein, der die Roš-Kurve weit überschritt. In den folgenden Jahren stellten sich ebenfalls ziemlich konstante Schwankungen ein, die jedoch wesentlich kleiner waren als beim Sommerbeton (Maximum 112,3%, Minimum 96,6%, somit Unterschiede vom Mittelwert von  $\pm 7,5\%$  gegenüber  $\pm 25\%$  beim Sommerbeton im gleichen Zeitraum).

Man sollte daher bei der Herstellung von Winterbeton die zweite Spannstufe möglichst spät nach Abklingen eines möglichst großen Teils des starken Kriechens aufbringen. Im gegebenen Fall wurde die zweite Spannstufe erst nach 2 Monaten aufgebracht. Zu diesem Zeitpunkt waren bereits 42% des errechneten Endwertes des Kriechens eingetreten, so daß im Endzustand das gerechnete Endhöchstmaß nicht überschritten wurde.

*Winterbeton (Januar 1956)*

Diese Kurve verläuft im wesentlichen sehr ähnlich wie jene des Winterbetons vom Jänner 1957. Lediglich der steile Anstieg des Kriechens und Schwindens zufolge der Hitzewelle im Juli 1957 und nachfolgender Abfall in der anschließenden Regenperiode hat sich bei dem bereits eineinhalb Jahre alten Beton bei dieser Brücke, ähnlich wie bei dem bereits ein Jahr alten Sommerbeton, nicht mehr wesentlich ausgewirkt.

Da der steile Kurvenanstieg, bzw. der anschließende Abfall beim Winterbeton vom Jänner 1957, im Juli 1957 durch mehrere Messungen festgestellt wurde, dürfte eine Fehlmessung nicht anzunehmen sein.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß alle Betone ein deutlich ausgeprägtes Ansteigen des Schwindens und Kriechens in den Sommermonaten und ein Abnehmen während der Wintermonate zeigen. Die Erscheinung dürfte damit erklärt werden können, daß im Sommer durch die Austrocknung eine

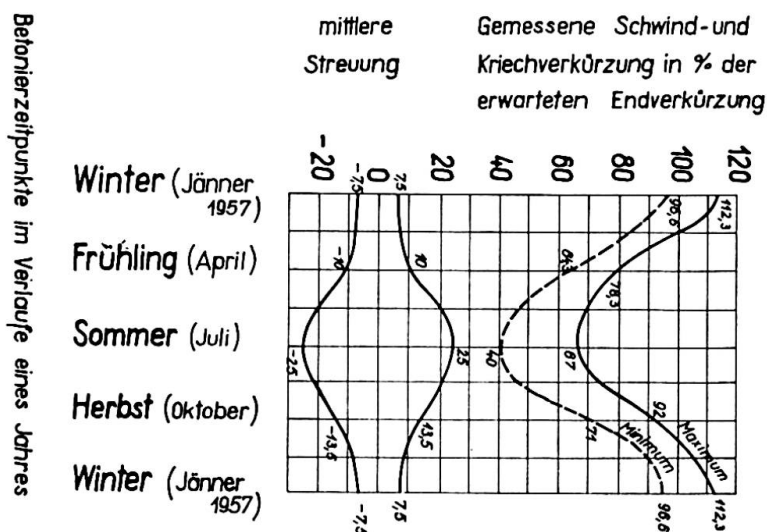
Verkürzung und im Winter durch die Feuchtigkeitsaufnahme und damit Quellung eine Verlängerung der Betonkörper eintritt.

Die im allgemeinen geringe Schwind- und Kriechverkürzung des Sommerbetons dürfte auf die rasche Erhärtung des Betons zurückzuführen sein. Die Wahrscheinlichkeit, daß das tatsächliche Endkriech- und Schwindmaß hinter dem üblicherweise angenommenen zurückbleibt, ist daher bei den Sommerbetonen im allgemeinen gegeben, während sie von Betonen, die bei feuchter und kühler Witterung hergestellt werden, durch Austrocknung in der heißen Jahreszeit und somit vermehrter Schwindung, die gerechneten bzw. angenommenen Größen meistens überschreiten.

Die Messungen im Sommer 1962 zeigen überraschenderweise, daß das Schwinden und Kriechen auch nach einigen Jahren noch verhältnismäßig stark ansteigt und mit Ausnahme vom Sommerbeton die Roß-Kurve teilweise nicht unerheblich übersteigt. Die Messungen zeigen außerdem eindeutig, daß das Schwinden und Kriechen nach längerer Zeit (sechs und mehr Jahre) in Wirklichkeit mehr zunimmt als nach der Roß-Kurve. Damit dürften die in anderen Ländern verschiedentlich gemachten Feststellungen, daß die Durchbiegungen bei Spannbetontragwerken auch nach Jahren mit einer gewissen Regelmäßigkeit noch weitergehen, erklärt werden können.

Leider wurden die Messungen zwischen 1960 und 1962 unterbrochen. Sie werden aber nunmehr wieder regelmäßig weitergeführt, überdies bei neuen Bauwerken in erweitertem Umfange begonnen und mit Messung der Durchbiegungen verbunden werden. Um bei der Verkürzung die Anteile aus Schwinden und Kriechen getrennt feststellen zu können, werden in der neuen Versuchsreihe — unbelastete Betonstäbe, an denen das Schwinden allein gemessen werden kann — mitbetoniert. Die Ergebnisse der neuen Messungen werden zur gegebenen Zeit veröffentlicht werden.

Es erscheint somit zweckmäßig, schon bei der Aufstellung der statischen





Berechnung, bzw. bei der Ermittlung der Verformungen, z. B. bei der Festlegung der Lagerstellung, bei der Ermittlung der Durchbiegungen usw., die Veränderlichkeit des Endhöchstmaßes des Kriechens und Schwindens zu berücksichtigen.

Trägt man die im Verlauf eines Jahres gemessenen Maxima und Minima der Schwind-Kriechkurven der Fig. 1 und ihre Abweichungen vom Mittelwert über den Betonierterminen als Abszissen in einem Diagramm auf, so zeigen sie ebenfalls einen recht gleichmäßigen und somit gesetzmäßigen Verlauf (Fig. 2).

Zuletzt sei noch bemerkt, daß die Meßergebnisse einer kleinen Verbesserung bedürfen, da die Wärmedehnzahlen von Beton um etwa 10% höher sind als diejenigen des Bewehrungsstahles. Dies bedeutet, daß die Maxima größer, die Minima kleiner und die Unterschiede der beiden größer werden. Beim 30 m langen Meßstab ergibt sich ein Fehler von  $\pm 4\%$ , der sich wie folgt errechnet:

Für  $\pm 15$  Grad C und  $\alpha_t = 10^{-5}$  ist

$$\Delta \delta' = 30 \text{ m} \times 10^{-5} \times (\pm 15) \times 10\% = \pm 0,45 \text{ mm.}$$

Bei einem Mittelwert von 11 mm wäre 0,45 mm

$$\frac{0,45 \times 100}{11} = 4\%.$$

Bei der Aufstellung des Meßprogrammes und Auswertung der Meßergebnisse hat Herr Dipl.-Ing. KURT WENZEL, Linz/Donau, sehr wesentlich mitgewirkt.

### Literatur

1. H. RÜSCH: «Spannbeton — Erläuterungen zu DIN 4227.» Berlin 1954, Wilh. Ernst & Sohn.
2. F. LEONHARDT: «Spannbeton für die Praxis.» 2. Auflage, Berlin 1962, Wilh. Ernst & Sohn, S. 57.

### Zusammenfassung

Durch Langzeitmessungen des Kriechens und Schwindens von Beton, die zu verschiedenen Jahreszeiten hergestellt wurden, wurde festgestellt, daß das Kriechen und Schwinden sehr wesentlich von der Jahreszeit der Betonherstellung abhängig ist. Gleichzeitig wurde aber auch festgestellt, daß die Intensität und Dauer des Kriechens und Schwindens im allgemeinen größer bzw. länger ist als bisher allgemein angenommen wurde.

### Summary

Measurements carried out over a long period of time on concrete manufactured in different seasons of the year showed that both creep and shrinkage are to a large degree dependent on the season in which the concrete was made. The tests revealed, in addition, that the intensity of the creep and shrinkage processes is larger, and their duration longer, than hitherto assumed.

### Résumé

Au cours d'une longue période, on a mesuré le fluage et le retrait de bétons fabriqués en différentes saisons; les mesures mettent en évidence que ces phénomènes dépendent essentiellement de la saison de la fabrication. De plus, il apparaît que l'intensité du fluage et du retrait est plus grande, et leur durée plus longue qu'on ne le croit habituellement.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## V a 7

### Das Verhalten der Syratalbrücke in Plauen i.V. seit ihrer Erbauung

*The Behaviour of the Syra Valley Bridge at Plauen in Vogtland  
Since its Construction*

*Le comportement du pont sur la vallée de la Syra, à Plauen/Vogtl., depuis sa  
construction*

HERBERT GÖNER  
Prof. Dr.-Ing., Dresden

#### 1. Aufgabe und Hauptmaße der Brücke

Mit dem Brückenbauwerk, der heutigen Ebertbrücke in Plauen i. Vogtl., wurde eine von beiden Seiten zur Brücke hin fallende Straße mit elektrischer Straßenbahn über die im Syratal liegende Verkehrsstraße mit ihrer Bebauung geführt. Der auf beiden Talseiten anstehende, geschlossene Felsen ließ den Gedanken aufkommen, das Tal mit einem einzigen Bogen von 90 m Spannweite in «Betonmauerwerk», eine Art Concrete-Mauerwerk mit etwa 45% Mörtelanteil je m<sup>3</sup>, zu überbrücken. Dieses für die damalige Zeit sehr kühne Bauwerk stellte die s.Z. größte gewölbte Massivbrücke der Welt dar. Nach einer Bauzeit von etwa 2 Jahren, in den Jahren 1903/04, wurde sie 1905 dem Verkehr übergeben.

Die Hauptabmessungen des Bauwerkes sind:

eingespannter Bogen, theoret. Stützweite	90,00 m
Stützweite des elastischen Bogenteiles	65,00 m
lichte Höhe des Gesamtbauwerkes	18,00 m
Stich des elastischen Bogenteiles	6,50 m
Gewölbbreite	16,00 m
Fahrbahnbreite	10,90 m
Breite der beiderseitigen Fußwege je	2,95 m

Gewölbestärken:

im Scheitel	1,50 m
am Beginn des elastischen Bogenteiles	2,00 m
am Kämpfer	4,00 m

Bogenmauerwerk aus plattenförmigem Theumaer Fruchtschiefer, einem Phyllit-Schiefer mit hoher Druckfestigkeit, mit einem Mörtelanteil von etwa 45%. Über die Zusammensetzung des Betonmörtels ist nur bekannt, daß dafür Portlandzement der Marke «Stern» verwendet wurde, der als Qualitätszement bekannt war.

Die Bemessung des Bogens erfolgte durch die ausführende Firma Liebold & Co., Langebrück b. Dresden, auf Grund graphischer Untersuchungen nach dem Stützlinienverfahren. Eine von Geheimrat Prof. Lucas, Technische Hochschule Dresden, im Zusammenhang mit der Begutachtung des Entwurfes durchgeführte Berechnung nach der Elastizitätstheorie ergab eine hinreichende Übereinstimmung. Da die massigen Widerlager mit ihren Spargewölben die freie Verformbarkeit des Bogens im Kämpferbereich nahezu unmöglich machen, ist bei späteren Untersuchungen in der Hauptsache der mittlere Bogenteil als elastischer Bogen mit etwa 65 m Stützweite betrachtet worden mit der Annahme, daß die Widerlagerscheiben starr sind und sich die Kämpferpunkte am Ende der Auskragungen ausbilden.

## 2. Verhalten der Brücke

Es zeigte sich sehr bald, daß die Verformungen des Bogens, also die Scheitelsenkung, wesentlich größer waren als die bei der Berechnung getroffenen Annahmen. Außerdem kamen diese Bewegungen nicht zum Stillstand, sondern gingen mit einer gewissen Gleichförmigkeit weiter, ohne erkennen zu lassen, daß sie irgendwie einem Ruhepunkt zustrebten. Von Anfang an wurden daher regelmäßige Messungen durchgeführt, zahlreiche Meßbolzen eingesetzt und später weitere Meßbolzen und Meßskalen angebracht sowie Thermometer im Bogen eingebaut. Die vom Vermessungsamt der Stadt Plauen ermittelten monatlichen Meßergebnisse wurden graphisch aufgetragen, ausgewertet und durch Angabe der jeweiligen Außen- und Innentemperaturen sowie der Luftfeuchtigkeit ergänzt. Somit liegen seit 1905 bis heute derartige Angaben vor, was als ein ungewöhnlich glücklicher Umstand anzusehen sein dürfte. Sie machen jedenfalls deutlich, daß die Verformung und dabei vornehmlich die Scheitelsenkung des Bogens mit wechselnder Geschwindigkeit in gewissen Intervallen weitergeht und offenbar noch kein Ruhezustand zu erwarten ist.

Dieses Verhalten der Brücke und die wiederholt aufgetretenen Feuchtigkeitsschäden führten zur Einschaltung mehrerer Gutachter und zur Durchführung durchgreifender Instandsetzungsmaßnahmen in den Jahren 1923 und 1933/34. Gutachten wurden erstattet:

- 1923 von Prof. Dr.-Ing. e. h. MAX FOERSTER, Technische Hochschule Dresden,
- 1933 von Prof. Dr.-Ing. SPANGENBERG, Technische Hochschule München,
- 1938 von Prof. Dipl.-Ing. RÜTH, Technische Hochschule Dresden,
- 1946 von Dipl.-Ing. CARL, Plauen i. V.,
- 1947/49 gutachtliche Stellungnahmen von Prof. Dr.-Ing. BEYER, Technische Hochschule Dresden, im Zusammenhang mit der Beseitigung der Kriegsschäden.

In groben Zügen kann hier nur skizziert werden, daß 1923 die unteren Bogenteile im Widerlagerbereich angebohrt und mit Zementmörtel verpreßt wurden, wobei erhebliche Ansammlungen von Wasser in Hohlräumen des Mauerwerkes festzustellen waren. Das gleiche Ergebnis brachte die Auspressung des mittleren Bogenteiles um 1933/34. Größere Schäden an den Entwässerungen der Widerlager wurden grundlegend beseitigt. Die Feuchtigkeitsdämmung des mittleren Bogenteiles wurde 1934 erneuert. Auf Anraten von Rüth wurden 1933 über den angenommenen Kämpfern des elastischen Bogenmittelteiles (65-m-Bogen) Bewegungsfugen in den Längsmauern der Spargewölbe (Spandrills) bis oben hin nachträglich ausgeführt. Gegenüber den alten Dilatationsfugen des Neubaues liegen diese um 2,90 m zum Scheitel hin versetzt.

Die Frage der Unverschieblichkeit der Widerlager wurde wiederholt geprüft. Es fanden sich jedoch keine Anzeichen dafür, daß ein Verkippen, Verdrehen oder Gleiten eingetreten sei. Auch die Messungen ergaben dafür keine Anhaltspunkte, obgleich erst ab 1933 der Abstand der Meßbolzen in Brückenlängsachse selbst eingemessen wurde. Dabei war zu berücksichtigen, daß bei der Ausführung der Fundamente überraschend alte Bergwerksstollen aus dem 15. oder 16. Jahrhundert angetroffen worden waren, die entsprechend gesichert wurden. Durch die Kriegsschäden sind viele Meßpunkte verloren gegangen, doch können auch heute Widerlagerbewegungen ausgeklammert werden.

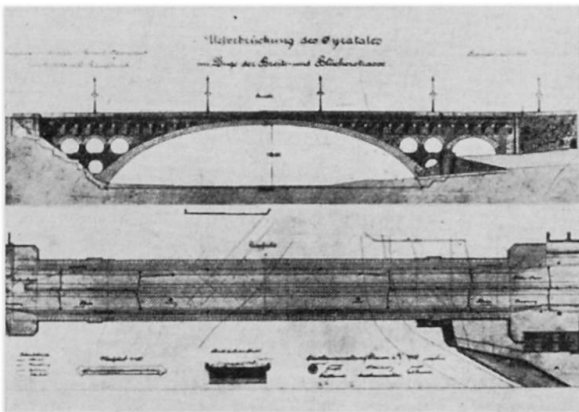


Fig. 1. Syratalbrücke nach einer Zeichnung von 1906 (südl. Widerlager mit Treppenaufgang).

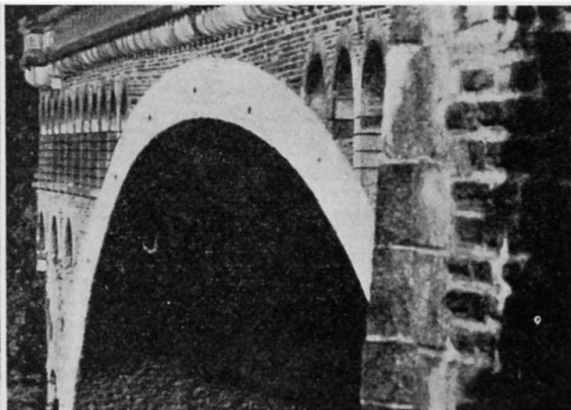


Fig. 2. Verformungen der Brücke (1961) — Westseite.

Bemerkenswert ist, daß der Brückenbogen nach wie vor deutlich auf Temperatur- und Feuchtigkeitsschwankungen mit einem entsprechenden Verzug reagiert, was durch die Messungen belegt wird. Die Meßergebnisse mußten daher ausgemittelt und ausgeglichen werden, um die Einflüsse sehr kalter Winter oder sehr heißer Sommer auf die Scheitelbewegung auszuschalten. Wiederholt sind im Zusammenhang mit den Gutachten neue statische Berechnungen unter Zugrundelegung der verformten Bogenachse aufgestellt worden. Sie ergaben z. T. extrem hohe Randspannungen, die das Mauerwerk unmöglich

aufnehmen konnte. 1942 wurde erstmals von Rüth die Möglichkeit des Kriechens des Bogenbaustoffes in Betracht gezogen und erwähnt, daß dieser Vorgang nach 37 Jahren noch nicht abgeschlossen sein könnte. Der Gedanke wurde jedoch nicht weiter verfolgt.

Zur Charakterisierung des Verformungsvorganges seien hier die wichtigsten Werte der Scheitelsenkung zusammengestellt.

1906	Scheitelsenkung	206 mm
	(statt nach Vorschätzung	150 mm)
1912	Scheitelsenkung	267 mm
1918	Scheitelsenkung	300 mm
ab 1918 bis 1933	Scheitelsenkung etwa gleichmäßig	2,00 mm/Jahr
ab 1933 bis 1940	Scheitelsenkung etwa gleichmäßig	7,5 mm/Jahr
1940	Scheitelsenkung	380 mm
ab 1940 bis 1945	Scheitelsenkung etwa gleichmäßig	4,5 mm/Jahr
	Unterbrechung infolge Bauschäden durch Kriegseinwirkung.	
1950	Scheitelsenkung	470 mm
ab 1950 bis 1956	Scheitelsenkung etwa i. M.	4,0 mm/Jahr
ab 1956 bis 1962	Scheitelsenkung etwa i. M.	2,5 mm/Jahr
1962	Scheitelsenkung	508 mm

Es ist durch Auswertung der Anzeigen der im Gewölbe eingebauten Innenthermometer festgestellt worden, daß eine Temperaturerhöhung des Gewölbes um  $1^{\circ}\text{C}$  eine Scheitelhebung von 2,18 mm verursacht. Daher wurden die Meßergebnisse, um zu vergleichbaren Werten zu kommen, auf eine Mitteltemperatur von  $+10^{\circ}\text{C}$  reduziert.

Die Messungen der Jahre nach 1945 haben deutlich gemacht, daß von der Verformung nahezu ausschließlich der mittlere elastische Bogenteil (65-m-Bogen) betroffen wird und daß der Scheitel der Brücke durchhängt, was auch in Fig. 2 unschwer zu erkennen ist.

Die Aufhöhung der Granitkonsolen, die die Gehwegauskragung tragen, erfolgte mit zwischengelegten Steinplatten im Jahre 1912, als Fahrbahn und Gehwege zur Beseitigung der über dem Scheitel entstandenen Mulde auf 40 m Länge um 16 cm mit Beton angehoben wurden.

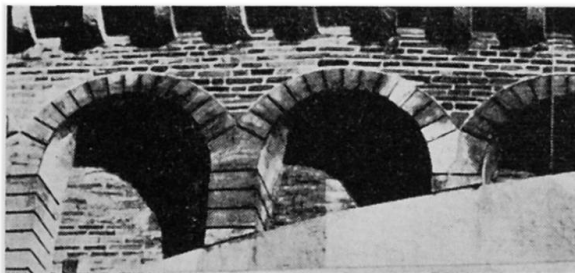


Fig. 3. Aufbau über dem Bogenmittelteil (1961) — Westseite, nördliche Hälfte.

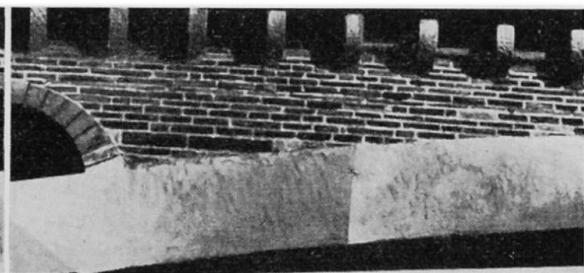


Fig. 4. Aufbau über dem Bogenmittelteil (1961) — Westseite, nördliche Hälfte anschließend an Fig. 3.

Im Bruchsteinmauerwerk des Brückenaufbaues trat bereits frühzeitig ein waagrechter Scherriß auf. Bereits 1910 wird darüber berichtet. Die Fig. 3 und 4 zeigen den heutigen Zustand.

Derartige Risse sind auch in den Längsmauern der Spargewölbe und andere in den Gewölben vorhanden.

### 3. Teilerstörung des Bauwerkes durch Kriegseinwirkungen

Im April 1945 wurde die Brücke von etwa 5 Fliegerbomben getroffen, deren Zerknall am südlichen Widerlager schwere Schäden anrichtete und etwa im Scheitel praktisch die Hälfte des Gewölbes zerstörte. Nach Wiederherstellung der Fahrbahn ging der Verkehr ohne Straßenbahn über die stehengebliebene Bogenhälfte weiter. Die Wiederherstellung erfolgte in Abschnitten in den Jahren 1946 bis 1949. 1948/49 wurde unter der Oberleitung von Prof. Dr.-Ing. Beyer der Bogen durch Einfügen eines etwa 24 m langen Bogenstückes aus Beton B 300 (245) wieder auf die volle Breite gebracht. Diese «Betonplombe» ist mit Pressen ungefähr auf die rechnerisch ermittelte Pressung des Bogenmauerwerkes vorgespannt worden. Man war sich klar darüber, daß diese «Betonplombe» eine wesentliche Inhomogenität des Bogens an dieser Stelle verursachte und daß das Zusammenwirken zwischen dem Beton und dem übrigen Bogenmauerwerk durchaus unklar blieb.

Durch das Seismologische Institut der Universität Jena (Prof. Martin) waren im Jahre 1948 vor und nach der «Plombierung» der Brücke Erschütterungsmessungen (Schwingungsmessungen) durchgeführt worden, die den Schluß zuließen, daß die elastischen Eigenschaften des Bogens durch das Einfügen der «Plombe» eine Verbesserung erfahren haben.

### 4. Ursachen der Gewölbeverformungen

#### 4.1. Bisherige Feststellungen

Aus den bisherigen Untersuchungen können folgende Feststellungen getroffen werden:

4.1.1. Die hinreichende Starrheit der Widerlager ist zu unterstellen und wird durch die Meßergebnisse im wesentlichen bestätigt.

4.1.2. Die Verformungen äußern sich vornehmlich als Scheitelsenkungen des mittleren Bogenteiles (elastischer 65-m-Bogen).

4.1.3. Ein Abklingen dieser Scheitelsenkungen ist bisher nicht festzustellen. Jeder Eingriff in den Gleichgewichtszustand, der sich im Bauwerk herausgebildet hatte, führte zu einer Steigerung der Scheitelsenkungen. Das geschah bei den tiefgreifenden Instandsetzungsarbeiten der Jahre 1923, 1933/34 und 1948/49.



4.1.4. Die derzeitige Senkung des Bogenscheitels wurde mit 508 mm festgestellt. Hiervon ist die planmäßig vorgesehene Senkung mit 150 mm abzusetzen, so daß 358 mm als außergewöhnliche Scheitelsenkung verbleiben.

4.1.5. Nach Augenzeugenberichten sind die plattigen Bruchsteine mit Betonmörtel vergossen worden. Eine regelrechte Vermauerung erfolgte somit nicht und war bei dem hohen Mörtelanteil von 45% wohl auch nicht möglich. Eine ordnungsmäßige Verdichtung des Betonmörtels nach unseren heutigen Erkenntnissen war somit ebenfalls nicht gegeben. Es ist daher sicher, daß zahlreiche Lufthohlräume verblieben und durch Verdunstung des Wassers entstanden sind. Das wurde auch durch die Feststellungen beim Auspressen des Bogens in den Jahren 1923 und 1933/34 bestätigt.

4.1.6. Zur Herabsetzung der Schwindspannungen waren im Gewölbe Fugen vorgesehen, die allerdings den Querschnitt nur verschwächten und erst später geschlossen wurden.

4.1.7. Nach dem Prüfungszeugnis des Materialprüfungsamtes Dresden vom 10. 2. 1949 wurden Feststellungen an 6 herausgesägten Mauerwerksprismen des Bogens mit einem Querschnitt von  $16 \times 16$  cm bei 40 cm Höhe getroffen. Bei der Entnahme der Proben zeigte sich, daß nur eine geringe Haftung zwischen den sich «speckig» anfühlenden Oberflächen des Fruchtschiefers und dem Betonmörtel besteht, so daß ein Auseinanderbrechen in den Lagerflächen trotz besonderer Vorsicht mehrfach erfolgte. Als wichtigste Ergebnisse sind zu nennen:

Elastizitätsmodul  $E = 76\,000$  bis  $156\,000$  kp/cm<sup>2</sup>,

Bruchfestigkeit  $\sigma_M = 214$  und  $294,5$  kp/cm<sup>2</sup>,

Verhältnis bleibende Dehnung/federnde Dehnung, für eine Pressung von  $\sigma = 132,1$  kp/cm<sup>2</sup>.

<i>Mörtel</i>	0 Std.	0,45 : 1,
	264 Std.	0,95 : 1.
<i>Stein</i>	0 Std.	0,60 : 1,
	264 Std.	0,78 : 1.
<i>Mauerwerk</i>	0 Std.	0,91 : 1,
	264 Std.	1,34 : 1.

Damit wurden die bereits 1946 getroffenen Feststellungen bestätigt, daß das verwendete Concrete-Mauerwerk erhebliche bleibende Formänderungen aufweist. Dabei wächst die plastische Verformung mit der Dauer der Belastung wesentlich an.

#### 4.2. Neuere Untersuchungen

Aus der Sichtung der Unterlagen, der Prüfung der bisher vorliegenden Untersuchungsergebnisse und wiederholten Besichtigungen der Brücke wurden folgende Schlüsse gezogen:

4.2.1. Die Schäden am Aufbau sind die Folgeerscheinungen aus der Ver-



formung des tragenden Gewölbes. Eine Mitwirkung dieses Aufbaues zur Erhöhung der Tragfähigkeit der Brücke ist wegen dieser Schäden auszuschließen.

4.2.2. Für die Standsicherheit der Brücke ist das Verhalten des mittleren Bogenteiles entscheidend.

4.2.3. Trotz der ständig weitergehenden Scheitelsenkungen sind weder in den Stirnflächen noch auf der unteren Leibung des Gewölbes nennenswerte Risse vorhanden. Offenbar werden durch plastische Verformung Spannungsspitzen, die durch die Änderung der Gewölbeachse im Zusammenhang mit der Scheitelsenkung auftreten, schnell abgebaut.

4.2.4. Auch im Bereich des neu eingefügten, 24 m langen, etwa 8,00 m breiten Bogenstückes aus Beton sind Risse o. ä. nicht erkennbar, so daß auch hier der Spannungsausgleich durch Plastizierung des Mauerwerkes erfolgen wird. Es steht fest, daß beträchtliche Unterschiede im Kriechverhalten des Betons und des Bogenmauerwerkes bestehen.

4.2.5. Als wichtiger Faktor ist zu werten, daß das Tragwerk die schweren Kriegsschäden sowie die damit verbundenen Erschütterungen und Teillastungen ohne wesentliche Schäden an den stehengebliebenen Bauwerksteilen überstanden hat. Dieses darf als ein weiterer Beweis für die Plastizierfähigkeit des Bogenbaustoffes angesehen werden, der offenbar in der Lage ist, sich in recht kurzer Zeit geänderten Spannungsverhältnissen anzupassen.

4.2.6. Weiter ist zu erwähnen, daß die Brücke nach ihrer Wiederherstellung häufig von Schwerlastfahrzeugen befahren worden ist, wenn auch der Straßenbahnverkehr fortfiel.

4.2.7. Proben des Theumaer Fruchtschiefers, der für das Bogenmauerwerk verwendet wurde, weisen eine recht schiefrige, plattige Struktur auf, wobei die Oberfläche sich «speckig» anfühlt. Die Schieferschichten sind durch Kristallkörner, die in Abständen vorhanden sind, gewissermaßen miteinander vernäht. Versuche ergaben, daß bei dem Darren der Proben die Gewichtskonstanz bei 0,5% Wasserabgabe bereits nach 5 Std. Trocknung erreicht war. Nach 24 Std. Wasserlagerung wurden 1% Wasser aufgenommen. Der Frostversuch nach DIN 52104 wurde ohne äußere Anzeichen von Schädigungen bei geringer zusätzlicher Wasseraufnahme bestanden.

4.2.8. Tastversuche über 15 Wochen mit Probekörpern  $4 \times 4 \times 16 \text{ cm}^3$ , die mit gebrochenem Theumaer Fruchtschiefer und mit Ziegelstücken hergestellt wurden, brachten im wesentlichen eine Übereinstimmung mit den unter Ziffer 4.1.7 genannten Versuchsergebnissen des Materialprüfungsamtes Dresden über das Kriechverhalten.

4.2.9. Mit den gleichen Probekörpern nach Ziffer 4.2.8 wurden Schwind- und Quellversuche durchgeführt, die sich auf 49 Tage erstreckten. Während die Probekörper aus reinem Mörtel und aus Mörtel + Ziegel etwa das gleiche Schwindmaß hatten, lag es bei den Probekörpern aus Mörtel + Schiefer um etwa 50% höher. Bei dem Quellversuch ergaben sich nach 35 Tagen ähnliche

Verhältnisse, doch lag das Quellmaß der Proben Mörtel + Schiefer sogar um 150% höher. Hieraus wird die Empfindlichkeit des Bogenbaustoffes gegen Feuchtigkeitseinflüsse deutlich.

### *4.3. Schlußfolgerungen*

Die Ursachen für das bisherige Verhalten der Syratalbrücke dürften in folgenden Einflüssen zu suchen sein:

4.3.1. Durch das Vorhandensein von Hohlräumen im Mörtel des Bogenmauerwerkes, die zeitweise mit Wasser gefüllt waren, ist es zusätzlich noch zu Auswaschungen von Kalk und damit zu einer weiteren Erhöhung der Porosität des Betonmörtels gekommen.

4.3.2. Bei der großen Stärke der Mörtelfugen ist mit einer Behinderung der Querdehnung des Mörtels durch die Reibung an den Steinflächen kaum zu rechnen. Außerdem bleibt diese Reibung bei der glatten, speckigen Oberfläche des Steines ohnehin problematisch. Also wird die Mauerwerksfestigkeit in ungleich höherem Maße als bei Ziegelmauerwerk durch den Betonmörtel bestimmt.

4.3.3. Für das Verhalten des Mauerwerkes ist das hohe Schwindmaß, vor allem das erstaunlich hohe Quellmaß gegenüber Ziegelmauerwerk von Bedeutung. Nach einem Zeitraum von 58 Jahren kann angenommen werden, daß der Schwindvorgang abgeschlossen ist. Das Quellen kann jedoch stets neu einsetzen, und zwar als Folge unmittelbarer Wasseraufnahme aus Undichtigkeiten oder auch durch Aufnahme von Luftfeuchtigkeit. Die Messungen haben den Beweis dafür erbracht, da nach längeren Nässeperioden stets Störungen in den Meßwerten auftraten. Offenbar nimmt der Fruchtschiefer von den Kanten her Wasser auf und wird damit für den Quellvorgang ausschlaggebend.

4.3.4. Aus dem Verlauf der Scheitelsenkungen ist zu ersehen, daß diese im Laufe der Jahre geringer werden, ohne daß der Endpunkt bisher erreicht wurde. Jeder Eingriff in den Gleichgewichtszustand des Bauwerkes bei größeren Instandsetzungen usw. ist mit Spannungsumlagerungen verbunden, die weitere Kriecherscheinungen auslösen. Das kann z. B. auch bei örtlichen Schädigungen der Mauerwerksfestigkeit geschehen. Das Abklingen des verstärkten Kriechens kann dann wieder über Jahre gehen, wie es die vorliegenden Meßergebnisse beweisen. Dafür ist das Verhalten der Brücke nach 1945 recht aufschlußreich.

4.3.5. Aus diesen Überlegungen heraus ergibt sich, daß eine Berechnung des Tragwerkes in dem verformten Zustand nach der Elastizitätstheorie kein brauchbares Ergebnis liefern kann. Bei der fehlenden Kenntnis über die Plastizierung derartigen Concrete-Mauerwerks, das obendrein in der Zusammensetzung recht uneinheitlich sein kann, ist eine Beurteilung des Tragvermögens naturgemäß recht schwierig. Es bleibt nur übrig, aus dem bisherigen Verhalten des Bauwerkes, den Baustoffeigenschaften und einer näherungsweise rech-

nerischen Erfassung des wirklichen Tragsystems auf die Tragfähigkeit zu schließen.

4.3.6. In dem vorliegenden Falle kommt aus dem Durchhängen des Scheitels noch ein Stabilitätsproblem, nämlich das Problem des möglichen Durchschlagens hinzu, das mit verschiedenen Unsicherheiten behaftet ist.

## 5. Beurteilung des Tragvermögens und der Lebensdauer

Das Brückenbauwerk wurde bereits im Jahre 1939, also noch vor dem Eintreten der Kriegsschäden, als gefährdet bezeichnet. Trotzdem hat es sich bis heute als brauchbar erwiesen. Wenn keine ungewöhnlichen Umstände eintreten, ist anzunehmen, daß die Scheitelsenkungen um den Wert 2 mm/Jahr liegen und nach einigen Jahren noch geringer sein werden. Eine Gefahr für das Ausbeulen des Gewölbes nach unten scheint für die nächsten 15 Jahre, in denen die Scheitelsenkung um max. 30 mm zunehmen kann, nicht zu bestehen. Nach dem heutigen Stand kann also das Tragvermögen der Brücke vorerst bis zum Jahre 1978 als hinreichend gelten. Die Fortführung der monatlichen Messungen wird Aufschluß darüber geben müssen, wie sich die «Betonplombe» im Bogen weiter auswirkt und ob sich daraus im Querschnitt einseitige Spannungsverschiebungen, wie es andeutungsweise jetzt schon sein könnte, ergeben. Diese Meßergebnisse werden später die Grundlage für eine erneute Beurteilung des Tragvermögens bilden müssen. Jeder tiefgreifende Eingriff in den jetzigen Bauzustand ist zu unterlassen, wie vorher dargetan wurde. Außerdem ist für eine ordnungsmäßige Unterhaltung der Fahrbahn und aller Entwässerungsanlagen zu sorgen.

Die Lebensdauer des Brückenbauwerkes wird davon abhängen, ob die Verformungen unter den genannten Voraussetzungen allmählich auf einen etwa gleichbleibenden, geringen Mindestwert absinken, der bei dem hohen Plastizierungsvermögen des Bogenmauerwerkes durch geringe Spannungsumlagerungen aus Temperatur- und Feuchtigkeitseinflüssen sowie wechselnde Verkehrslasten bedingt sein kann. Es besteht somit begründete Hoffnung, dieses interessante und kühne Brückenbauwerk nicht nur als technisches Kulturdenkmal, sondern auch als brauchbaren Verkehrsweg für die Zukunft zu erhalten.

Dieses Bauwerk weist erneut auf die Bedeutung des Zeitfaktors für das Verhalten weitgespannter Tragwerke hin. Es genügt jedenfalls nicht mehr, nur den Zustand der Errichtung im Zeitpunkt 0 zu untersuchen, sondern es müssen die zu erwartenden Verformungen aus allen möglichen Einflüssen hinreichend Berücksichtigung finden. Aufschlüsse über die Eigenschaften und das Verhalten der Baustoffe können nicht verlässlich sein, wenn sie nur aus Kurzzeitversuchen gewonnen wurden.

### Literatur

1. KURT MEINEL, Dipl.-Ing.: «Die Ebertbrücke über das Syrtal in Plauen.» Zeitschrift Bauplanung und Bautechnik, Heft 8/1948, S. 223—231.

### Zusammenfassung

Die in den Jahren 1903/04 entstandene Bogenbrücke über das Syrtal in Plauen/Vogtl. weist seit ihrer Erbauung Verformungen auf, die bisher nicht zum Abschluß gekommen sind. Diese machen sich in erster Linie als eine, in wechselndem Zeitmaß wachsende Scheitelsenkung bemerkbar, worin auch erhebliche Kriegsschäden und deren Beseitigung nur eine geringe Störung bewirkt haben. Es wird über die in neuester Zeit durchgeführten Untersuchungen zur Aufdeckung der Ursachen dieser Verformungen berichtet. Diese sollen als Grundlage für die Beurteilung des weiteren Tragvermögens und der Lebensdauer dieses Brückenbauwerkes benutzt werden.

### Summary

The arch bridge which was built over the Syra Valley at Plauen in Vogtland in 1903—1904 has, since the time of its construction, shown deformations that have not yet ceased. These manifest themselves primarily as a settlement of the crown, which increases at a rate varying with the passage of time. Serious damage sustained during the war, and the subsequent repair thereof, had but little effect on these deformations. The latest investigations carried out with the object of ascertaining the causes of these deformations are described. These will provide the basis for assessing the anticipated further load-carrying capacity and service life of this bridge.

### Résumé

Le pont en arc sur la vallée de la Syra, à Plauen/Vogtl., qui a été érigé en 1903/1904, présente, depuis sa construction, des déformations qui ne se sont pas encore stabilisées. Ces déformations se caractérisent principalement par une flèche à la clef croissante avec le temps, sans que les dégâts importants causés par les bombardements, pendant la guerre, et leur réparation interviennent autrement que dans une mesure très limitée. Il est rendu compte des recherches qui ont été récemment effectuées en vue de déterminer les causes de ces déformations. Elles permettront d'estimer les charges que pourra à l'avenir supporter cet ouvrage et sa durée de service.