

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Rubrik:** Vb: Experience from tests of structures beyond elastic limits

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Vb1

## Essais de poutres en béton armé en phase plastique

*Versuche an Stahlbetonbalken im plastischen Bereich*

*Tests of Reinforced Concrete Beams in the Plastic Range*

J. C. MALDAGUE

Paris

Les essais dont il est partiellement rendu compte dans cet exposé font partie d'un programme établi par le Comité Européen du Béton, dans le but de définir les rotations dont sont capables les articulations plastiques des poutres en béton armé. Ils ont été réalisés à l'Institut de Recherches Appliquées du Béton Armé à Paris, sous la direction de M. Y. Guyon.

### 1. Programme et exécution des essais

Les caractéristiques des 23 poutres essayées, ainsi que les caractères mécaniques des matériaux utilisés font l'objet du Tableau I.

Les rotations des sections ont été mesurées à l'aide de clinomètres à cordes vibrantes, jusqu'à la rupture, ou presque; les flèches, par des comparateurs; les raccourcissements du béton et les allongements de l'acier par des extensomètres à cordes vibrantes. La fig. 1 montre la disposition des appareils sur les poutres sollicitées par une seule charge concentrée.

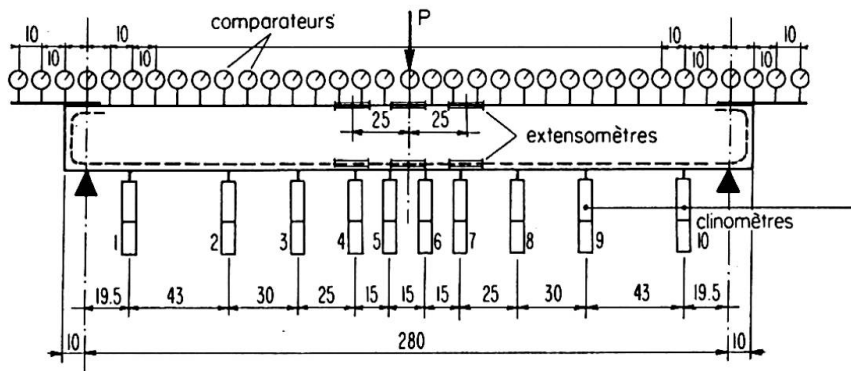


Fig. 1.

### 2. Résultats des mesures

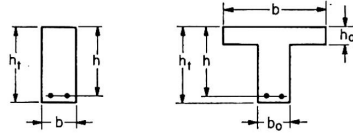
Les résultats des mesures, rassemblés dans le Tableau II ne concernent que la phase plastique. Dans ce Tableau figurent:

a) La valeur du *moment de plastification* expérimental. C'est le moment de flexion qui marque la fin de la phase de fissuration et le début de la phase

Tableau I

Poutre n°	Section					Armature principale		Caractères mécaniques de l'acier tendu			Résistance à la compression du béton $\sigma_{cyl}$ kg/cm <sup>2</sup>	Cadres	Mode de chargement Portée m
	b cm	h <sub>t</sub> cm	h cm	b <sub>0</sub> cm	h <sub>0</sub> cm	Trac-tion	Com-pression	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	%			
A 2	25,1	27,9	25,3	—	—	2 $\phi$ 14	2 $\phi$ 14	27,7	41,0	35,7	318		
A 5	15,1	28,0	24,5	—	—	6 $\phi$ 14	2 $\phi$ 6	27,8	41,1	36,6	338		
A 8	15,1	28,0	26,0	—	—	4 $\phi$ 10		26,2	38,0	37,7	338		
A 11	29,9	27,9	25,8	15,0	9,9	4 $\phi$ 10		25,7	37,7	38,6	326		
B 2	25,3	28,0	25,2	—	—	2 $\phi$ 14	2 $\phi$ 14	27,1	40,4	39,1	333		
B 5	15,2	28,0	24,4	—	—	6 $\phi$ 14	2 $\phi$ 6	26,6	40,4	37,0	310		
B 8	15,2	28,1	25,7	—	—	4 $\phi$ 10		26,8	38,2	39,3	310		
B 11	29,0	28,1	25,5	15,0	10,0	4 $\phi$ 10		26,3	38,3	37,9	310		
E 6	15,0	28,0	24,4	—	—	6 T 12	2 $\phi$ 6	53,0	65,0	15,1	258		
E 9	15,0	28,0	25,6	—	—	4 T 8		52,7	60,0	15,1	253		
F 6	15,0	28,0	24,4	—	—	6 T 12		51,9	64,9	17,1	415		
F 9	15,0	28,0	25,3	—	—	4 T 8		49,9	60,1	16,2	450		
H 2	25,0	28,0	25,7	—	—	2 T 14	2 T 14	50,6	61,8	16,3	308		
H 5	15,0	28,0	24,6	—	—	6 T 14	2 $\phi$ 6	49,6	61,5	17,6	287		
H 8	15,0	28,0	25,3	—	—	4 T 10		47,5	58,1	18,9	295		
H 11	30,0	27,9	25,4	15,0	10,0	4 T 10		47,1	58,2	19,1	290		
N 2	30,0	14,0	11,4	—	—	2 T 14	2 T 14	50,0	62,0	17,3	288		
N 5	30,0	14,0	10,3	—	—	6 T 14	2 $\phi$ 6	50,4	61,5	16,9	265		
N 8	30,0	14,0	11,3	—	—	4 T 10		47,6	58,4	19,4	305		
N 9	30,0	14,0	11,3	—	—	4 T 8		50,2	59,3	16,2	320		
R 4	15,0	28,0	23,7	—	—	6 T 16	4 T 10	47,5	57,7	16,4	292		
R 5	15,0	28,0	24,5	—	—	6 T 14	3 T 10	50,6	61,9	17,2	317		
R 6	15,0	28,0	24,6	—	—	6 T 12	1 T 10 + 2 T 8	52,6	65,2	17,0	387		

$\phi$  = acier doux  
 T = acier TOR  
 t = espacement des cadres



plastique. Au cours de l'essai, il ne se manifeste par aucune modification apparente des matériaux qui constituent la poutre, mais il peut être défini à partir d'un certain nombre d'*indices de plastification*, tous concordants, mis en lumière par l'examen des mesures effectuées. Il s'agit, en particulier:

- Du changement de pente des courbes qui représentent les déformations (flèches, rotations des sections, etc.) pour une même valeur du moment de flexion, précisément appelé moment de plastification.
- Du fait que le nombre des fissures de flexion cesse de croître lorsque la poutre équilibre ce moment de plastification, alors que les ouvertures des fissures situées dans la ou les régions qui se plastifient, augmentent dans des proportions importantes.

C'est ce que montrent, à titre d'exemple, les figures 2 à 6 relatives à la poutre A 8 et qui donnent, en fonction du rapport  $\frac{P}{P_r}$ , de la charge appliquée à la charge de rupture, les courbes de la flèche maximale (fig. 2), des rotations totales, définies ci-dessous (fig. 3), des déformations du béton et de l'acier dans l'axe de la poutre (fig. 4), des ouvertures des fissures (fig. 5).

Le changement de pente des quatre courbes, de même que le début d'accroissement d'ouverture des fissures se produit pour  $P = 0,94 P_r$ , qui correspond

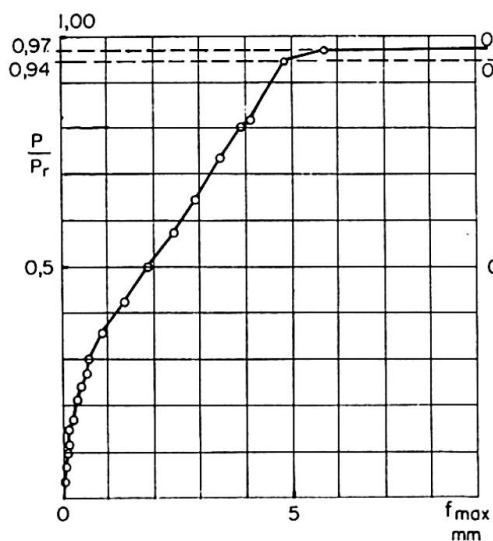


Fig. 2.

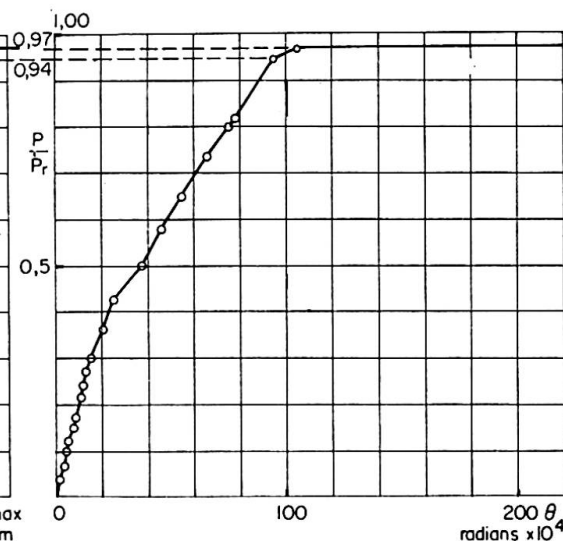


Fig. 3.

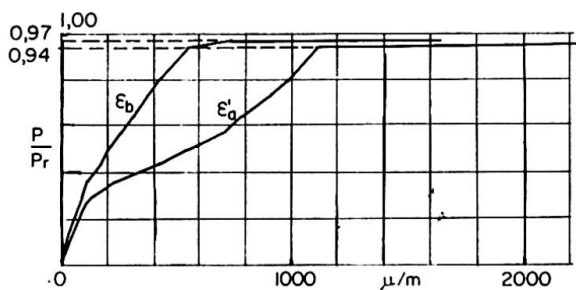


Fig. 4.

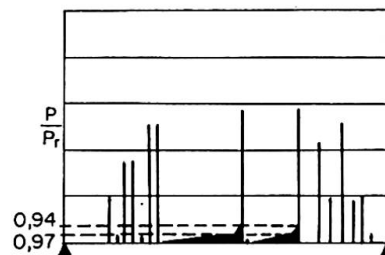


Fig. 5.



Tableau II

Poutre n°	Pourcentage d'acier tendu %	$M_p$ kgm	$M_e$ kgm	$M_r$ kgm	$\theta_p$	$\theta_e$	$\theta_r$	$\theta_e - \theta_p$	$\theta_r - \theta_p$
					Radians $\times 10^4$				
A 2	0,487	2294	2532	2707	140,2	340,8	875,1	200,6	734,9
A 5	2,500	5728	5938	6127	155,5	193,9	357,2	38,4	201,7
A 8	0,790	2417	2493	2558	94,3	337,3	863,7	243,0	769,4
A 11	0,415	2500	2510	2619	88,4	280,4	812,4	192,0	724,0
B 2	0,480	2090	(1)	2372	86,4	(1)	836,3	(1)	749,9
B 5	2,540	5318	5831	5925	195,3	447,3	712,4	252,0 (2)	517,1 (2)
B 8	0,820	2265	(1)	2331	132,1	(1)	618,0	(1)	485,9
B 11	0,410	2329	2462	2486	101,2	510,1	624,7	408,9	523,5
E 6	1,840	8318	8675	8815	254,1	369,7	(3)	115,6	(3)
E 9	0,523	2599	(1)	3054	136,0	(1)	493,0	(1)	357
F 6	1,840	7828	8962	9354	147,2	246,3	(3)	99,1	(3)
F 9	0,525	2606	3033	3089	121,2	404,9	(3)	283,7	(3)
H 2	0,481	4212	4454	5136	180,0	264,6	> 558 (6)	84,6	> 378 (6)
H 5	2,500	8598 (4)	9144	9704	264,0	312,7	398,3	48,7	134,3
H 8	0,795	3656	4230	4503	172,0	342,7	> 706,7 (6)	170,7	> 534,7 (6)
H 11	0,410	3683	4491	4701	128,2	371,0	(3)	242,8	(3)
N 2	0,900	1570	1927	1952	345,5	571,7	1001,2	226,2	655,7
N 5	2,950	3009	(1)	3707	434,3	(1)	662,6	(1)	228,3
N 8	0,910	1710	1836	2029	402,7	661,8	(3)	259,1	(3)
N 9	0,580	1164	(1)	1324	343,7	(1)	642,5	(1)	298,8
R 4	3,290	11020 (4)(5)	12049	13008	267,3	313,7	398,9	46,4	131,6
R 5	2,510	9172 (4)(5)	10768	11356	255,6	337,1	493,1	81,5	237,4
R 6	1,840	7856 (5)	8479	8913	246,1	292,0	559,3	45,9	313,2

- (1) L'épaulement n'a été observé que pour la charge de rupture.  
(2) Ces valeurs qui paraissent exceptionnelles ne sont pas portées sur la fig. 9.  
(3) Mesure impossible.  
(4) Très grandes ouvertures des fissures d'effort tranchant.  
(5) Indices de plastification difficiles à déceler.  
(6) Mesure précédent immédiatement la rupture.

environ à  $M = 0,94 M_r$ . Ce point appartient encore à la phase de fissuration dont il marque la fin. Pour  $P = 0,97 P_r$ , la poutre commence à fonctionner en régime plastique. Le changement de phase se produit pour un très faible accroissement de charge (3%). Entre ces deux charges, c'est à dire presque instantanément, l'acier manifeste un allongement très important alors que le raccourcissement du béton varie très peu (voir fig. 4).

La fig. 6 représente les rotations mesurées le long de la poutre, portées en ordonnées, pour chaque valeur du rapport  $\frac{P}{P_r}$ . A partir de  $0,97 P_r$ , les courbes se déplacent parallèlement à elles-mêmes dans les régions non plastifiées, ce qui prouve que les déformations de ces régions, qui fonctionnent en régime fissuré élastique, deviennent négligeables devant l'importance des déformations plastiques concentrées dans l'articulation.

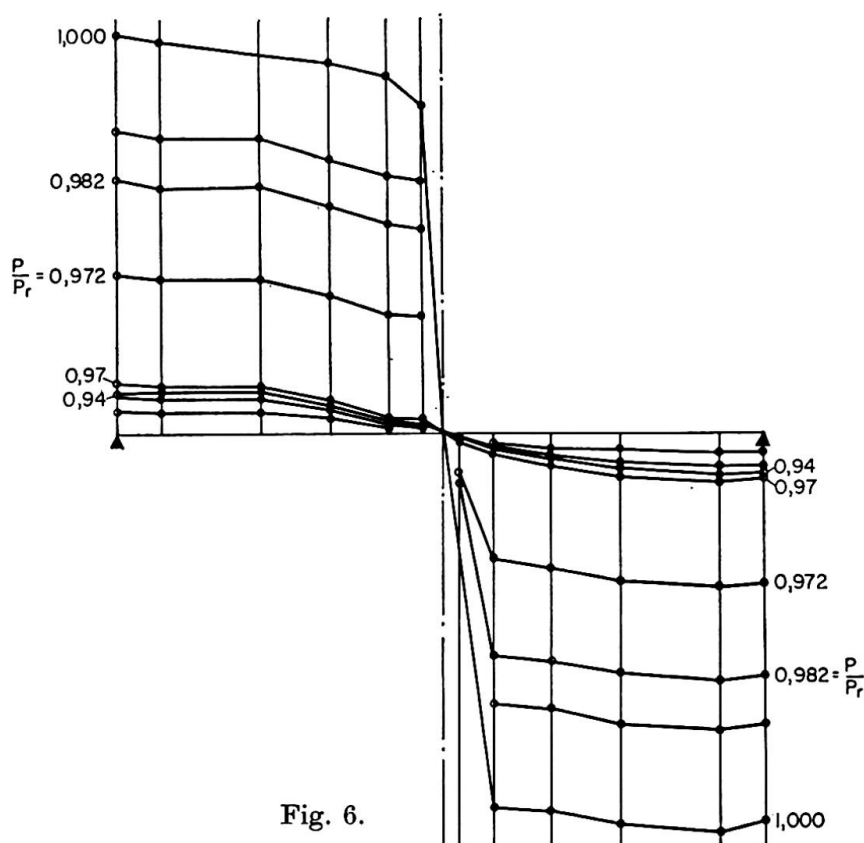


Fig. 6.

La poutre A 8, armée à 0,8% d'acier doux a été choisie à dessein pour illustrer l'existence de ces indices de plastification. Dans les poutres armées d'acier écroui à froid, sans palier d'écoulement, les changements de pente des graphiques sont moins brusques mais nettement repérables. Lorsque le pourcentage d'acier va croissant, ces indices demeurent visibles mais la précision avec laquelle ils permettent de définir le moment de plastification va en diminuant jusqu'à prêter à discussion dans le cas de pourcentages excessifs.

Enfin, les fig. 7 et 8 donnent, pour l'ensemble des poutres, les points repré-

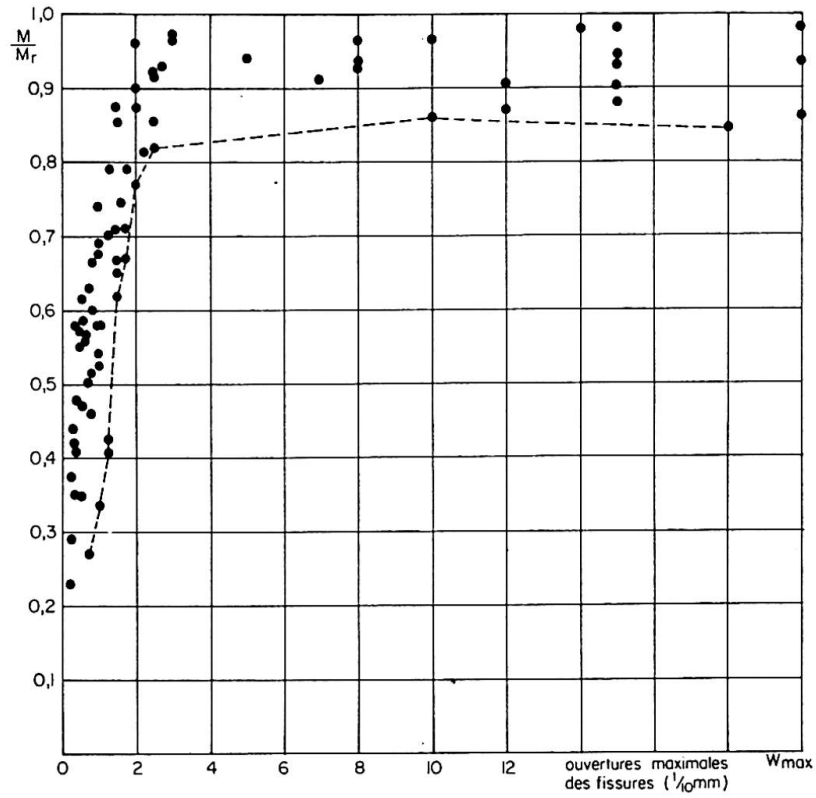


Fig. 7. (Poutres armées d'acier doux).

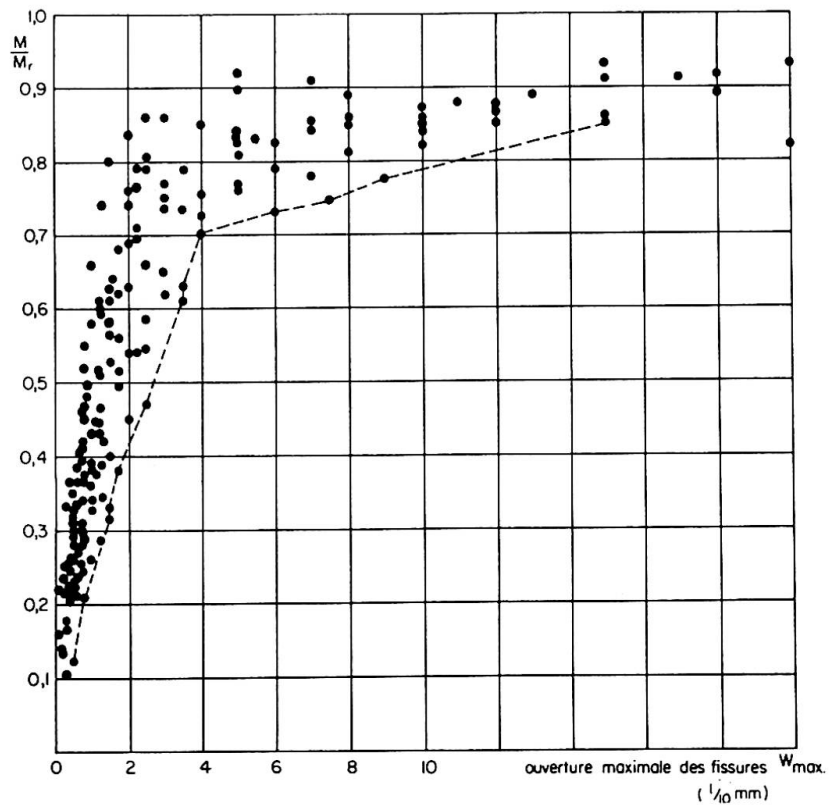


Fig. 8. (Poutres armées d'acier TOR).

sentant les ouvertures maximales des fissures en fonction du rapport entre le moment de flexion calculé au droit de la fissure, pour la charge sous laquelle l'ouverture est mesurée et le moment de rupture de cette même section. Ces graphiques donnent une idée de l'importance des ouvertures des fissures lorsque la poutre est sollicitée par le moment de plastification.

b) La valeur du *moment d'épaufrage* qui marque le début de la désorganisation visible du béton comprimé: petites fissures horizontales, sur les faces latérales, et léger soulèvement d'une écaille de béton sur la face supérieure de la poutre.

Les premiers signes de la destruction ont échappé quelquefois à l'observation la plus attentive. Dans d'autres cas, l'épaufrage a été observé en même temps que la rupture. Il est probable que la vitesse d'application des charges joue un certain rôle dans la marge qui sépare les premiers signes de rupture de la rupture complète.

c) La valeur du *moment de rupture*, défini comme étant le moment maximal atteint au cours de l'essai et correspondant à la désorganisation complète du béton comprimé. C'est le moment qui peut être calculé par les méthodes de calcul à rupture des sections.

d) La valeur des *rotations totales* mesurées lorsque la poutre est soumise au moment de plastification ( $\theta_p$ ), au moment d'épaufrage ( $\theta_e$ ) et au moment de rupture ( $\theta_r$ ) précédemment définis. Elles représentent la somme des rotations mesurées par les clinomètres n° 1 et 10 (voir fig. 1) c'est-à-dire, pratiquement, la somme des rotations des sections d'appui.

e) Les valeurs des différences ( $\theta_e - \theta_p$ ) et ( $\theta_r - \theta_p$ ) qui représentent la *capacité de rotation* de l'articulation plastique entre le début de la plastification et le début de la désorganisation (épaufrage) ou la rupture. Toutes ces rotations sont exprimées en radians  $\times 10^4$ .

La fig. 9 qui donne les capacités de rotation précédentes en fonction du pourcentage d'acier montre que celles-ci diminuent lorsque le pourcentage augmente.

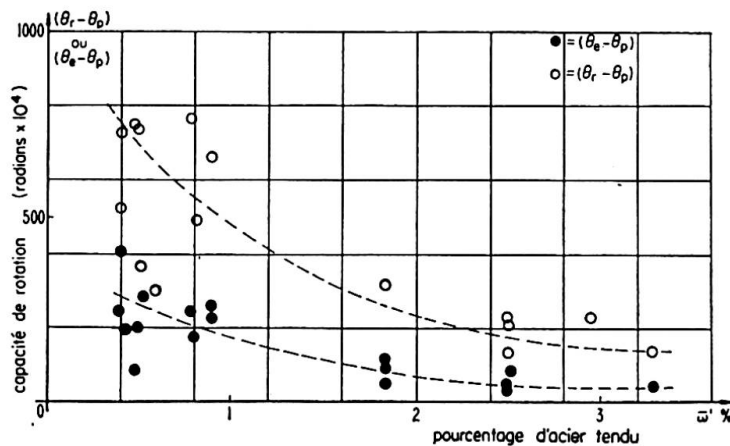


Fig. 9.

### 3. Calcul du moment de plastification

La connaissance du moment de plastification d'une poutre est nécessaire à la définition des lois de déformation en phase plastique dont ce moment marque le début. Elle est par ailleurs indispensable à certaines méthodes de calcul des systèmes hyperstatiques auxquelles il sert de références [1].

Lorsque le pourcentage d'armature tendue n'est pas excessif, c'est l'acier qui se plastifie le premier. Il pourrait sembler normal de définir le moment de plastification comme le moment de flexion pour lequel *apparaît* la plastification des aciers. Mais cette définition n'est pas en accord avec l'expérience. Ainsi, le moment qui correspond au début du palier d'écoulement, dans la poutre A 8 est égal à  $0,74 M_r$ , alors que le moment de plastification est égal à  $0,94 M_r$ . Cette constatation faite systématiquement, conduit à émettre l'hypothèse suivante:

*Le moment de plastification d'une poutre en béton armé est obtenu lorsque le raccourcissement du béton comprimé atteint une certaine valeur  $\epsilon_0$  (que l'on peut appeler raccourcissement de plastification), cette hypothèse étant valable quel que soit le pourcentage d'acier, à partir du minimum pour lequel le moment résistant de la section homogène de béton seul est égal au moment résistant de la section fissurée armée, jusqu'au pourcentage critique supérieur.*

Cette hypothèse implique, dans le cas des poutres armées selon les pourcentages de la pratique, que l'acier, ayant atteint sa phase plastique, se soit allongé d'une quantité suffisante pour que le béton se plastifie à son tour. En d'autres termes, le changement de comportement de la poutre, qui se traduit par de nouvelles lois de déformation, dépend finalement du béton comprimé.

La méthode de calcul utilisée pour déterminer l'expression théorique du moment de plastification a été développée par plusieurs auteurs [2]. Elle suppose que le diagramme contraintes-déformations du béton comprimé puisse être assimilé à une parabole du second degré dont le sommet se trouve hors de la poutre dans le cas de faibles charges. Nous supposons que ce sommet se situe au niveau de la fibre la plus comprimée lorsque le béton atteint son raccourcissement de plastification  $\epsilon_0$  (fig. 10) et que la contrainte maximale de compression qui sollicite la poutre est égale à la résistance du béton en compression  $\sigma_0$  mesurée sur cylindres. Dans ce cas:

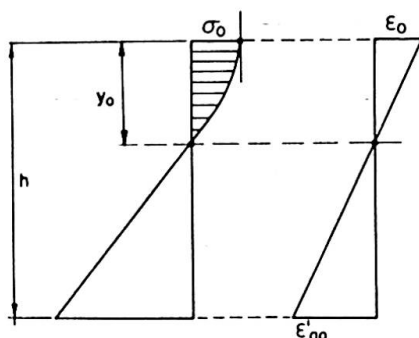


Fig. 10.

$$M_p = \frac{2}{3} \sigma_0 b y_0 \left( h - \frac{3}{8} y_0 \right), \quad (1)$$

$$y_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon'_{a0}} h. \quad (2)$$

L'allongement  $\epsilon'_{a0}$  de l'acier, correspondant au raccourcissement  $\epsilon_0$  du béton a été défini graphiquement par l'intersection du diagramme réel de traction de l'acier et de l'hyperbole:

$$\sigma'_a = \frac{2 \sigma_0 \epsilon_0}{3 \bar{\omega}' (\epsilon_0 + \epsilon'_a)} \quad (3)$$

définie par les conditions d'équilibre des forces internes et dans laquelle  $\bar{\omega}'$  est le pourcentage d'acier,  $\sigma'_a$  et  $\epsilon'_a$  respectivement la contrainte et l'allongement de l'acier.

La valeur du raccourcissement  $\epsilon_0$  a fait l'objet de plusieurs propositions. Nous avons utilisé celle du Dr Y. SAILLARD (2):

$$\epsilon_0 = 0,12 \times 10^{-3} \sqrt{\sigma_0}, \quad (4)$$

Tableau III

Poutre n°	Pourcentage d'acier %	$\epsilon_0 \times 10^3$	$\epsilon'_{a0} \times 10^3$	Moment de plastification		$\frac{M_p \text{ exp.}}{M_p \text{ th.}}$
				expérimental kgm	théorique kgm	
A 2	0,487	2,14	31,5	2294	2130	1,08
A 5	2,500	2,20	5,00	5728	5500	1,04
A 8	0,790	2,20	21,00	2417	2150	1,12
A 11	0,415	2,17	39,5	2500	2255	1,11
B 2	0,480	2,20	34,0	2090	2150	0,97
B 5	2,540	2,11	4,0	5318	5500	0,97
B 8	0,820	2,11	17,5	2265	2100	1,08
B 11	0,410	2,11	34,5	2329	2300	1,01
E 6	1,840	1,93	2,25	8318	5940	1,40
E 9	0,523	1,91	9,00	2599	2730	0,95
F 6	1,840	2,45	4,45	7828	7700	1,02
F 9	0,525	2,55	23,00	2606	2825	0,92
H 2	0,481	2,10	13,8	4212	4250	0,99
H 5	2,500	2,04	1,92	8598	7250	1,19
H 8	0,795	2,06	8,25	3656	3350	1,09
H 11	0,410	2,05	17,2	3683	3850	0,96
N 2	0,900	2,05	7,17	1570	1520	1,03
N 5	2,950	1,96	1,80	3009	2450	1,23
N 8	0,910	2,10	7,50	1710	1620	1,06
N 9	0,580	2,15	12,80	1164	1150	1,01
R 4	3,290	2,05	1,60	11020	7800	1,41
R 5	2,510	2,13	2,10	9172	7800	1,18
R 6	1,840	2,35	3,92	7856	7520	1,04

Elle conduit, pour les bétons réalisés dans cette série d'essais à des valeurs un peu supérieures à  $2,0 \times 10^{-3}$ . (Valeur proposée par M. Y. Guyon.)

Le Tableau III donne, en particulier, le rapport entre le moment de plastification expérimental et le même moment calculé. On constate, pour 18 poutres sur 23, une concordance qui semble justifier l'hypothèse faite sur le rôle déterminant du béton en ce qui concerne le seuil de plastification d'une poutre en béton armé. L'écart ne dépasse pas 12%.

Pour cinq poutres (E 6, H 5, N 5, R 4 et R 5), l'écart est important. Il convient de remarquer que les pourcentages d'armature de ces poutres sont parmi les plus élevés et que l'acier, selon les diagrammes de traction dont nous disposons, travaille encore en régime élastique.

Par ailleurs, il n'a pas été tenu compte des aciers comprimés dans les calculs. Il est probable qu'ils ont une influence sur le moment de plastification (cas de R 4 et R 5 par exemple), mais les résultats dont nous disposons ne sont pas suffisamment nombreux pour qu'il soit possible d'en tirer des conclusions. Selon ces premiers résultats, l'hypothèse ne semble applicable ni aux poutres dont le pourcentage d'acier tendu est voisin du pourcentage critique supérieur, ni aux poutres armées d'une quantité suffisante d'aciers comprimés.

### Notations

- $P$  = charge concentrée.  
 $P_r$  = charge de rupture.  
 $M$  = moment de flexion.  
 $M_p$  = moment de plastification.  
 $M_e$  = moment d'épaufrage (début de la désorganisation du béton comprimé).  
 $M_r$  = moment de rupture.  
 $h_t$  = hauteur totale de la poutre.  
 $h$  = hauteur utile.  
 $b$  = largeur poutre (section rect.).  
     = largeur table (poutre en té).  
 $b_0$  = largeur nervure (poutre en té).  
 $h_0$  = épaisseur table de compression.  
 $L$  = portée de la poutre.  
 $\phi$  = désigne un acier doux. Ex.: 2  $\phi$  14.  
 $T$  = désigne un acier Tor: 2 T 14.  
 $t$  = espacement des armatures transversales.  
 $y_0$  = position de l'axe neutre dans une section sollicitée par le moment de plastification.  
 $\theta_p$  = rotation due au moment de plastification.  
 $\theta_e$  = rotation due au moment d'épaufrage.

- $\theta_r$  = rotation due au moment de rupture.  
 $\bar{\omega}'$  = pourcentage d'acier tendu.  
 $\sigma_0$  = contrainte de compression dans le béton lorsque le moment de plastification est appliqué.  
 $\sigma_{cyl.}$  = résistance du béton à la compression, mesurée sur cylindre.  
 $\sigma'_a$  = contrainte de l'acier tendu.  
 $\epsilon'_a$  = allongement de l'acier.  
 $\epsilon_0$  = raccourcissement de plastification du béton.  
 $\epsilon'_{a0}$  = allongement de l'acier correspondant au raccourcissement  $\epsilon_0$  du béton.

### Bibliographie

1. M. Z. COHN and V. A. PETCU: "Influence of steel percentage on the plastic adaptability of redundant reinforced concrete beams." Bull. Acad. Pol. Sci., Serie Sci. Techn. n° 10—11, 1961.
2. Y. SAILLARD: «L'épuisement du béton armé en flexion simple.» CEB 1955.

### Résumé

Le but des ces essais, dont le programme a été établi par le CEB, est de mesurer les rotations des articulations plastiques. Ces mesures sont données dans le texte. Une hypothèse est ensuite faite, permettant le calcul du moment de plastification d'une poutre en béton armé.

### Zusammenfassung

Auf Grund von Versuchen, deren Programm vom CEB aufgestellt worden war, sind die Verdrehungen in den plastischen Gelenken gemessen worden. Die Ergebnisse sind in der Arbeit dargelegt. Es wird eine Hypothese aufgestellt, die die Berechnung der plastischen Momente in Stahlbetonbalken ermöglicht.

### Summary

The purpose of these tests, the program of which was set-up by the European Concrete Committee (C.E.B.), is to measure the rotations of the plastic hinges. The results of the measurements are given in the text. An hypothesis is then made, which permits the calculation of the plastic moment of a reinforced concrete beam.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Vb 2

### Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken

*Behaviour of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Beams*

*Le comportement des rotules plastiques dans les poutres en béton armé*

M. YAMADA

Prof. Dr.-Ing., Univ. Kobe, Japan

#### 1. Einleitung

Um die Bruchvorgänge in Stahlbetonkonstruktionen abzuklären, müssen vorerst als Grundlage der Theorie die Formänderungseigenschaften der über die Elastizitätsgrenze beanspruchten Bauteile, d. h. das Verhalten der plastischen Gelenke in diesen Bauteilen untersucht werden. Damit wird erst die Bruchanalyse des ganzen Bauwerkes nach dem modernen Traglastverfahren [1] ermöglicht. Der Verfasser [2] hat schon früher über das Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken unter statischem Biegemoment berichtet. In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken bei bestimmten, wechselseitigen Verdrehungen auf Grund von Versuchsergebnissen erörtert.

#### 2. Plastische Gelenke in Stahlbetonbalken

Die Entstehung eines ideal plastischen Gelenkes in einem Stahlbetonbalken unter einfachem Biegemoment in Balkenmitte oder unter Biegemoment und Querkraft am Balkenende wurde vom Verfasser experimentell bewiesen. Die Drehfähigkeit des Gelenkes (plastischer Drehwinkel  $\varphi_p$ ) ist von der Bewehrungsstärke  $(\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')$  abhängig, d. h. je größer die Bewehrungsstärke ist, desto kleiner wird — wie die folgenden Formeln zeigen — seine plastische Zähigkeit.

Das Streckmoment  $M_s$  des Querschnittes mit beidseitiger Bewehrung ist

$$M_s = \left[ \sigma_p (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu') \left\{ 1 - \frac{(\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')}{2} \right\} + k_c \sigma'_s \mu' (1 - \eta) \right] b h^2. \quad (1)$$

Die Drehungsgrenze eines plastischen Gelenkes ergibt sich zu

$$\max \varphi_p = \frac{2 \{1 - (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')\} \{2 - (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')\} + (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')^2}{(\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu') \left\{ \left( 1 - \frac{\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu'}{2} \right) - \frac{k_c \beta'_s \mu'}{\beta_s \mu} \left( \eta - \frac{\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu'}{2} \right) \right\}} \left( \frac{0,056}{\sqrt{\sigma_p}} - 0,00014 \sqrt{\sigma_p} \right), \quad (2)$$

$$\cong \left[ \frac{4 \{1 - (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')\}}{(\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')} + \frac{2 (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')}{\{2 - (\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu')\}} \right] \left( \frac{0,056}{\sqrt{\sigma_p}} - 0,00014 \sqrt{\sigma_p} \right), \quad (3)$$

wobei

- $\sigma_p$ : Prismenfestigkeit des Betons,
- $\sigma_s$ : Streckspannung der Zugbewehrung,
- $\sigma'_s$ : Streckspannung der Druckbewehrung,
- $\mu$ : Zugbewehrungsanteil,
- $\mu'$ : Druckbewehrungsanteil,
- $\beta_s \mu = \frac{\sigma_s}{\sigma_p} \mu$ : Zugbewehrungsstärke,
- $\beta'_s \mu' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_p} \mu'$ : Druckbewehrungsstärke,
- $k_c$ : Verhältnis der vorhandenen Spannung zur Streckspannung der Druckbewehrung,
- $\eta$ : Ort der Druckbewehrung.

In Beton- oder Stahlbetonquerschnitten mit Profilstahlverstärkungen entsteht ein ähnliches ideal plastisches Gelenk, und die Gleichungen (1), (2) und (3) sind ebenfalls gültig, wenn die Werte der Profilstahlverstärkung in die Bewehrungswerte umgerechnet werden.

Es stellt sich nun die Frage, welchen Widerstand und welche Zähigkeit plastische Gelenke bei der Umkehrung des Biegemomentes aufweisen oder was für ein mechanisches Verhalten die Gelenke bei Wechselbiegebelastungen im plastischen Bereich zeigen. Hierüber lagen bisher noch keine Versuchsergebnisse vor. Die Kenntnis der mechanischen Eigenschaften plastischer Gelenke bei Wechselbiegebelastung mit bestimmter Formänderung ist aber für die Bruchberechnung eines Bauwerkes nach dem modernen Traglastverfahren unentbehrlich. Für die elasto-plastische Berechnung eines Tragwerkes unter Erdbebeneinwirkung muß man z. B. die Zähigkeitseigenschaften der Bauteile genau erfassen. Dabei stellt der Zähigkeitsfaktor [3] (Ductility factor) — Verhältnis der gesamten Formänderung zur elastischen Formänderung — ein Maß für die Bruchsicherheit dar oder er wird andererseits auch als Richtwert für die Schwingungsberechnung benutzt. Davon ausgehend wird die zweckmäßigste Methode zur statischen oder dynamischen Bemessung des Bauwerkes mit vorgegebener Bruchsicherheit festgelegt.

### 3. Versuche

Die Versuchsbalken (Reihen DF-6/4, DF-4/4 und DF-3/4 in Tabelle 1) sind, wie Fig. 1 zeigt, beidseitig gleich stark bewehrt und mit zwei symmetrischen Lasten belastet worden. Die Durchbiegung wurde in Balkenmitte gemessen. Dieser Versuch erstreckt sich gemäß Tabelle 1 über drei Reihen zur Untersuchung der Einflüsse zufolge Änderung des Bewehrungsanteils. Jede Reihe besteht andererseits aus einigen Versuchsbalken zur Untersuchung der Einflüsse, die sich aus einer Änderung der Formänderungsamplitude ergeben.

Tabelle 1. Angaben über die Versuchsbalken

Balken	Beton		Stahl			Bewehrungsstärke
	Prismenfestigkeit	Zugfestigkeit	Bewehrung	Bewehrungsanteil	Streckgrenze des Stahles	
	$\sigma_p$ kg/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{bz}$ kg/cm <sup>2</sup>		$\mu$ %	$\sigma_s$ kg/cm <sup>2</sup>	$\beta_s \mu - k_c \beta'_s \mu'$
RC BM 6/4 DF-1	198	22,0	2 - $\varnothing$ 13	1,51	3070	0,170
RC BM 6/4 DF-2	179	21,6	2 - $\varnothing$ 13	1,51	3070	0,177
RC BM 4/4 DF-1	206	20,1	3 - $\varnothing$ 9	1,09	3200	0,150
RC BM 4/4 DF-2	254	26,4	3 - $\varnothing$ 9	1,09	3200	0,137
RC BM 4/4 DF-3	181	20,4	3 - $\varnothing$ 9	1,09	3200	0,153
RC BM 4/4 DF-4	220	22,5	3 - $\varnothing$ 9	1,09	3200	0,144
RC BM 3/4 DF-1	216	25,4	2 - $\varnothing$ 9	0,72	3200	0,107
RC BM 3/4 DF-2	272	28,3	2 - $\varnothing$ 9	0,72	3200	0,084
RC BM 3/4 DF-3	239	23,6	2 - $\varnothing$ 9	0,72	3200	0,097
RC BM 3/4 DF-4	238	23,6	2 - $\varnothing$ 9	0,72	3200	0,097

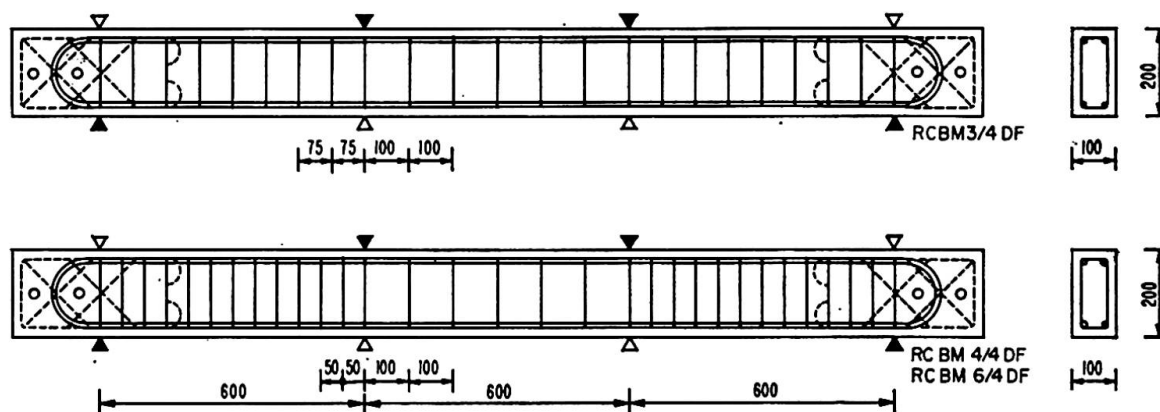


Fig. 1. Versuchsbalken.

Verwendete Baustoffe (s. auch Tabelle 1):

Beton: Mischungsverhältnis (nach Gewicht) 1 : 2,55 : 3,34 mit Wasserzementfaktor 0,6;

Stahl: Rundeisen.

#### 4. Versuchsergebnisse

Die Versuchsergebnisse sind in Fig. 7 (1—10) dargestellt. Daraus ist folgendes ersichtlich:

Durch Umkehrung des Biegemomentes nach der größten plastischen Drehung entsteht wieder ein plastisches Gelenk in umgekehrter Richtung (DF-1)

mit einer Drehungsgrenze, die dem doppelten Amplitudenwert entspricht. Dabei ergibt sich aber ein etwas niedrigeres Streckmoment  $M_s$ ; die Biegesteifigkeit verringert sich gegenüber der erstmaligen Belastung (Bauschinger-effekt). Bei der Wiederholung der Wechselbiegebelastung wird die Neigung der Hysteresisschleife allmählich kleiner, während die federnde Formänderung allmählich vergrößert wird. Die federnde Formänderung bei der größten Grenzdrehung (DF-1) wird jedoch von derjenigen bei kleineren Amplituden (DF-2, DF-3, DF-4) nie überschritten.

Bei großen Amplituden ist die Zahl der Lastwechsel bis zum Bruch ziemlich klein; sie nimmt bei kleineren Amplituden beträchtlich zu. Die Hysteresisschleife ist visko-elastisch (Fig. 2) und wird unmittelbar vor dem Bruch gleit-elastisch (Fig. 3).

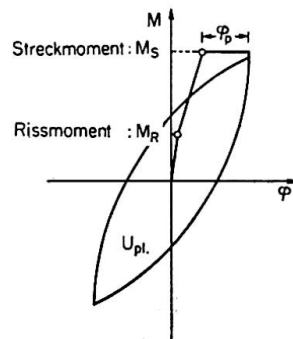


Fig. 2. Hysteresisschleife (visko-elastisch).

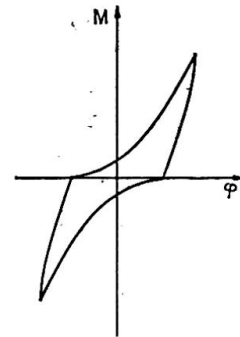


Fig. 3. Hysteresisschleife (gleit-elastisch).

Abschließend soll noch die Beziehung zwischen der Formänderungsamplitude  $\varphi_p$  und der Lastwechselzahl  $N$  untersucht werden. In Fig. 4 ist die gesamte aufgewendete Energie der Hysteresisschleife  $\frac{\sum U_{pl}}{U_{el}}$  in Funktion der Lastwechselzahl  $N$  aufgetragen. Würde der Bruch durch die gesamte aufgewendete Energie der Hysteresisschleife verursacht, müßte der Bruch bei gleichen Querschnitten auf einer Parallelen zur Abszisse liegen. Wie Fig. 4 zeigt, ist diese Hypothese falsch.

Eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchen ergibt sich, unter der Voraussetzung, daß der Bruch eine Funktion der gesamten aufgewendeten Beschädigungsenergie (schraffierte Fläche in Fig. 5) ist. Die Bruchbedingung lautet dann

$$2 \left\{ \frac{1}{2} (\kappa 2 \varphi_p) (2 \varphi_p) \right\} N = k, \quad (4)$$

und es folgt hieraus 
$$N \varphi_p^2 = K \text{ (konstant)}. \quad (5)$$

Fig. 6 stellt die Beziehung zwischen  $\log \varphi_p$  und  $\log N$  dar. Die Neigung jeder Versuchsreihe beträgt ca.  $-\frac{1}{2}$ . Diese Bruchhypothese trifft für plastische Zug-, Bruch-, Wechselbelastung von Stahl gut zu und ergibt auch bei Stahlbeton — trotz der Sprödigkeit des Materials — noch eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten.

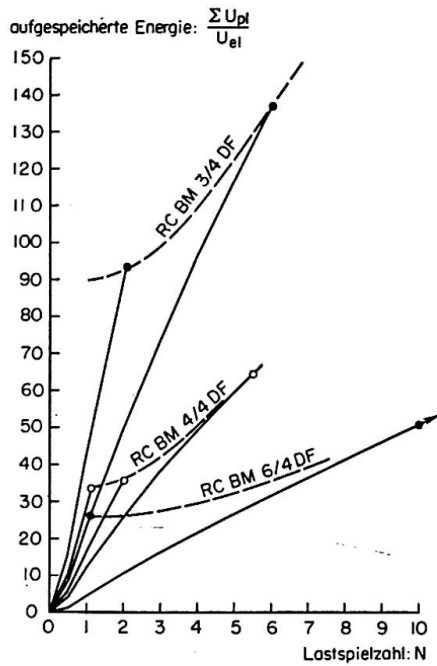


Fig. 4. Aufgespeicherte Energie durch die Hysteresisschleife.

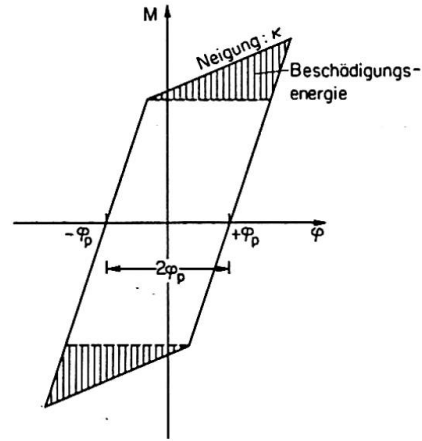


Fig. 5. Beschädigungsenergie.

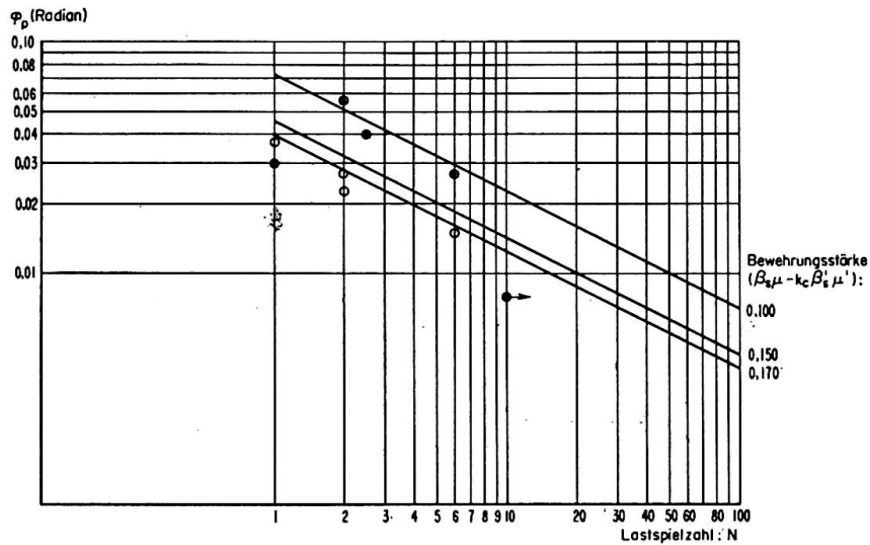


Fig. 6. Plastische Drehamplitude  $\phi_p$  — Lastspielzahl  $N$ .

Die Konstante  $k$  beim Stahlbetonquerschnitt ergibt sich aus Gleichung (2), (3) und (5) zu

$$K = 1 \max \varphi_p^2 = \max \varphi_p^2. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$N = \frac{\max \varphi_p^2}{\varphi_p^2}, \tag{7}$$

wobei  $\max \varphi_p$  aus Gleichung (2) oder (3) entnommen wird.

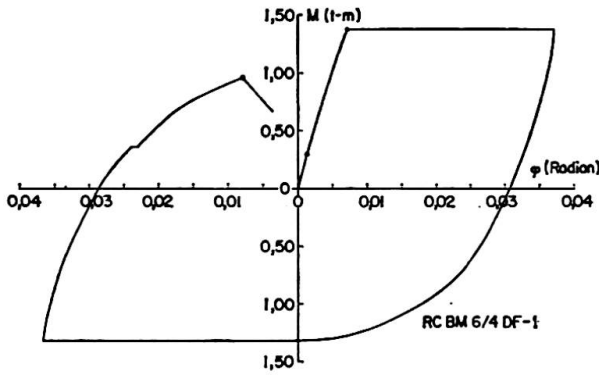


Fig. 7-1.

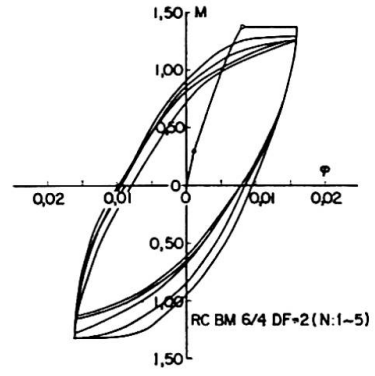


Fig. 7-2 a.

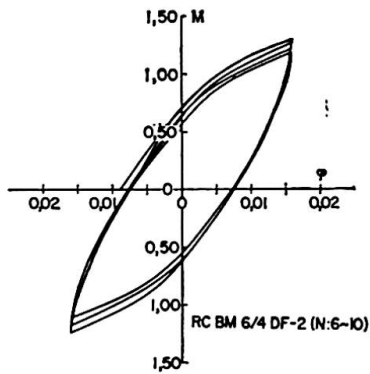


Fig. 7-2 b.

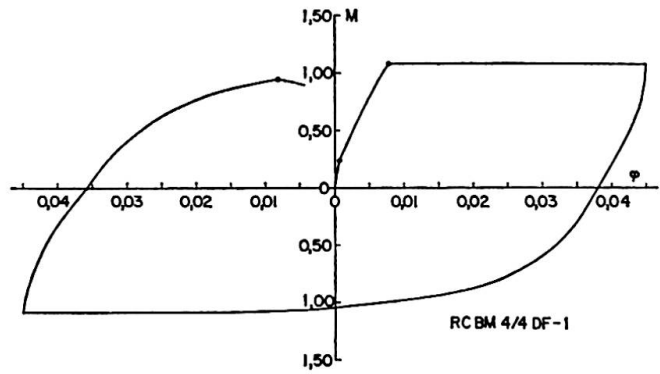


Fig. 7-3.

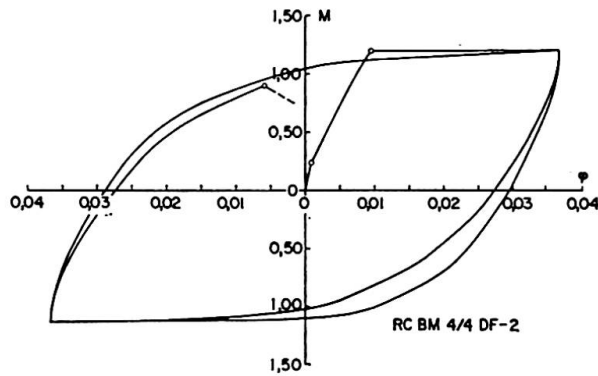


Fig. 7-4.

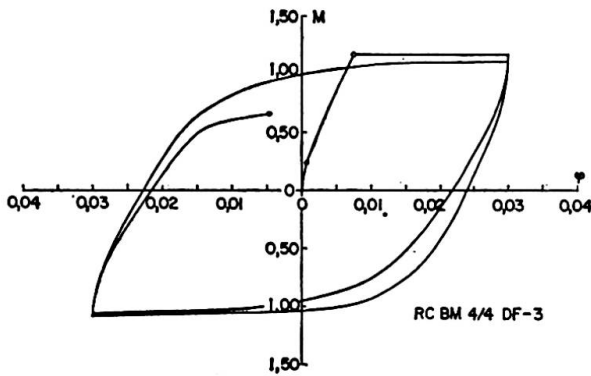


Fig. 7-5.

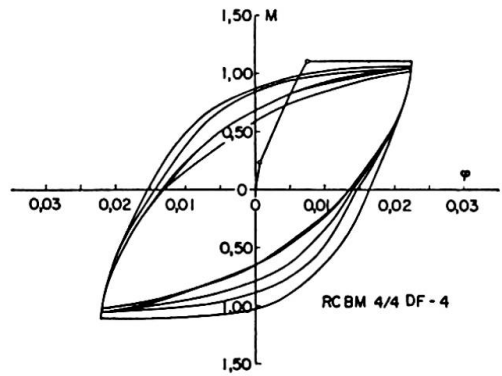


Fig. 7-6.

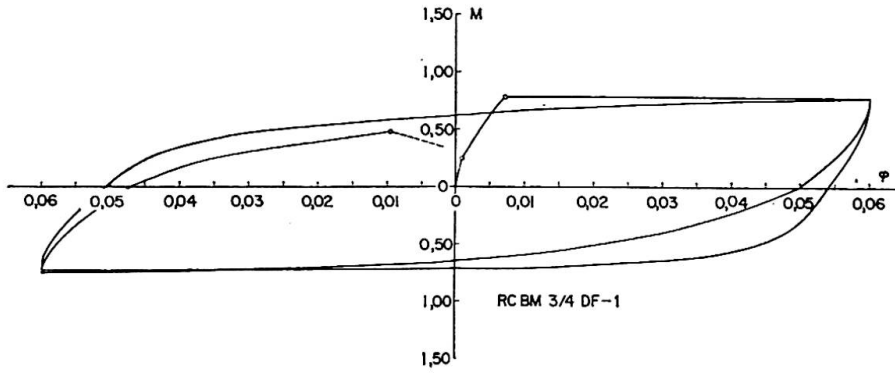


Fig. 7-7.

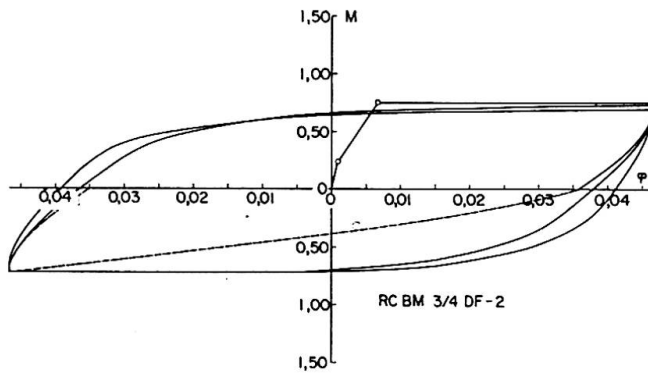


Fig. 7-8.

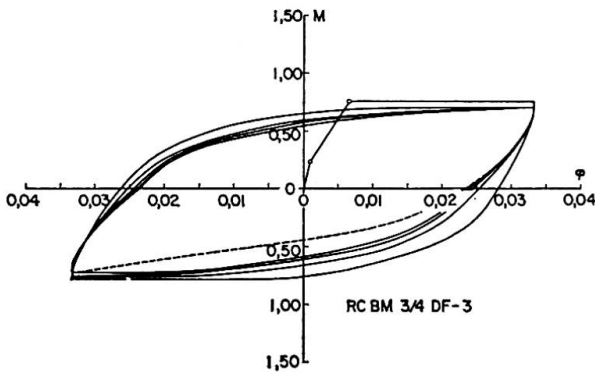


Fig. 7-9.

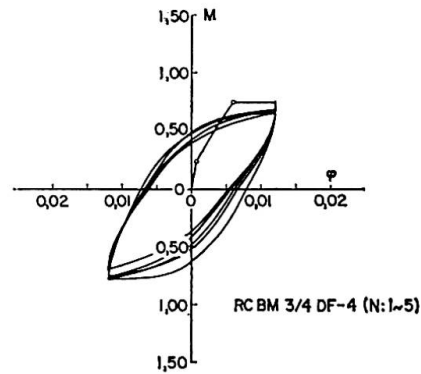


Fig. 7-10.

Fig. 7. Versuchsergebnisse.

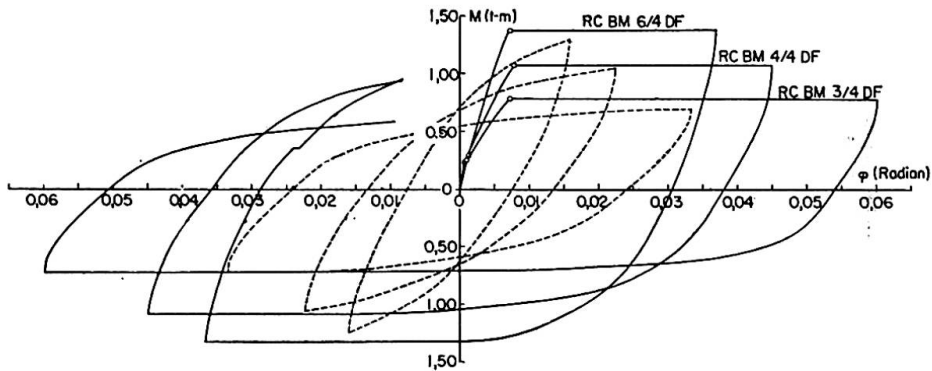


Fig. 8. Vergleich der Versuchsergebnisse.



### Literatur

1. W. PRAGER and P. G. HODGE: "Theorie of Perfectly Plastic Solids." John Wiley, New York, 1951.
2. M. YAMADA: «Drehfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken», Beton- und Stahlbetonbau, 53. Jahrg., H. 4, April 1958, S. 85—91.
3. VELETSOS and NEWMARK: "Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motion". Proc. 2nd WCEE, 1960, Vol. 2, S. 895—912.

### Zusammenfassung

Auf Grund von Versuchsergebnissen wird das Verhalten plastischer Gelenke in Stahlbetonbalken unter konstanten wechselseitigen Verdrehungen untersucht. Die Hysteresisschleife ist dabei visko-elastisch. Die Beziehung zwischen Formänderungsamplitude  $\varphi_p$  und Lastwechselzahl  $N$  stimmt mit der gesamten aufgewendeten Beschädigungsenergie Gleichung (5) und (7) ziemlich gut überein (Fig. 6).

### Summary

The behaviour of plastic hinges in reinforced concrete beams under constant reversal of moments was studied on the basis of experimental results. Under these conditions the hysteresis loop is visco-elastic. The relationship between the deformation amplitude  $\varphi_p$  and the number of stress reversals  $N$  is in fairly good agreement (fig. 6) with the total stored damage energy Eqs. (5) and (7) employed.

### Résumé

A la lumière de résultats d'essais, l'auteur étudie le comportement des rotules plastiques dans les poutres en béton armé soumises à des flexions alternées constantes. Le cycle d'hystérésis est visco-élastique. Le rapport entre l'amplitude des déformations  $\varphi_p$  et le nombre d'alternances  $N$  concorde de façon assez satisfaisante avec l'expression qui en est donnée dans les équations (5) et (7) de l'énergie totale d'altération en jeu (fig. 6).

## Vb3

### **Bruchversuche und Messungen mit vorfabrizierten Spannbetonbalken von 15,70 m Spannweite**

*Fracture Tests and Measurements with Prefabricated Prestressed Concrete Beam*

*Essais de rupture et mesures sur des poutres préfabriquées en béton précontraint*

HERBERT TRÄGER

Dipl.-Ing., Budapest

#### **Kurze Beschreibung der Brücke**

Beim Bau einer Flutgebietbrücke in Ungarn mußten 15 gleiche, 15,30 m lange Öffnungen überbrückt werden. Die Pfeiler wurden für eine Brückenkonstruktion aus monolytischen Stahlbetonplatten im Gerber-System gebaut. Später wurden die Pläne geändert, da die 15 gleichen Öffnungen eine besonders gute Möglichkeit für die Verwendung der Fertigteilbauweise boten.

Die verwirklichte Konstruktion besteht in jeder Öffnung aus 8 einfachen, vorfabrizierten Spannbetonbalken. Die Balken von 15,70 m Spannweite sind an ihren Enden und an 3 Zwischenpunkten in der Querrichtung zusammenge-spannt und arbeiten dadurch als Trägerrost. Die Berechnung des Trägerrostes wurde nach Guyon-Massonnet-System durchgeführt, unter Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit.

Die Balken sind grundsätzlich ausgeführt; nur die Querträgeranschlüsse der Randträger sind etwas verschieden.

Auf die Hauptträger wurde — entsprechend dem zweiseitigen Gefälle der Fahrbahn — eine Ausgleichsschicht mit Drahtnetzeinlage betoniert. Darauf wurde die Isolierung, der Schutzbeton und die 5 cm dicke Gußasphaltdecke gelegt. Die Gehwege sind an Ort betonierte Stahlbetonkonsolen. Der Einfluß dieser Schichten auf die Formänderung und Kraftverteilung der Konstruktion wurde bei der Berechnung nicht berücksichtigt.

Die einzelnen Balken wurden aus fünf vorfabrizierten Teilen durch nachträgliches Spannen zusammengesetzt. Die Fertigteile wurden auf der zur Brücke anschließenden Böschung hergestellt; die Betongüte war B 400. Auf dem Montageplatz wurden die Fertigteile in einer Distanz von 3,5 cm zusammengestellt, und die Fugen wurden mit einem Mörtel von entsprechender Kornstruktur ausgefüllt. Zwei Tage später wurde mit dem Spannen (Freyssinet-Spannpresen) begonnen. Die Spannkabel bestehen aus Drähten  $\varnothing$  5 mm (Bruchfestigkeit 150 kg/mm<sup>2</sup>). Der Querschnitt der Träger und die Linien-

führung der Kabel ist in Fig. 1 bzw. 2 dargestellt. Die Zusammenwirkung in der Querrichtung ist bei jedem Querträger mit 4 Kabeln gesichert.

Zum Montieren der vorgefertigten Balken diente eine dreistützige Montagebank (Fig. 3).

Diese Konstruktion wurde von einer Öffnung in die andere konsolartig hinüberschoben, indem die Unterstützung am vorderen Ende provisorisch aufgehoben wurde.

Der Bauherr, das ungarische Verkehrs- und Postministerium, hat schon beim Entschluß der Verwirklichung dieser Baukonstruktion die Herstellung von zwei zusätzlichen Balken und deren Probelastung bis zum Bruch verlangt. Außerdem wurde eine Probelastung für weitere drei Balken, die später in die Brücke eingebaut wurden, vorgesehen.

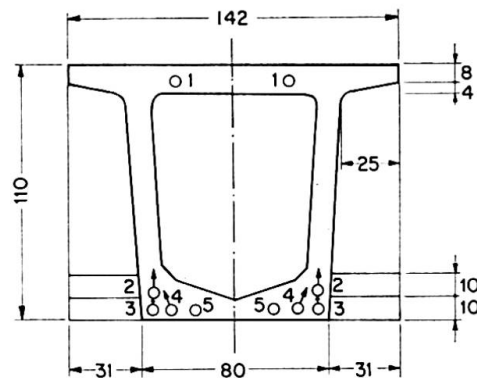


Fig. 1.

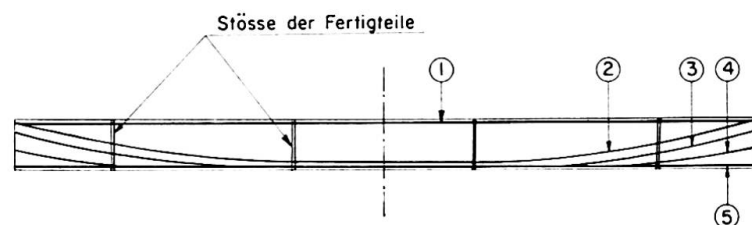


Fig. 2.

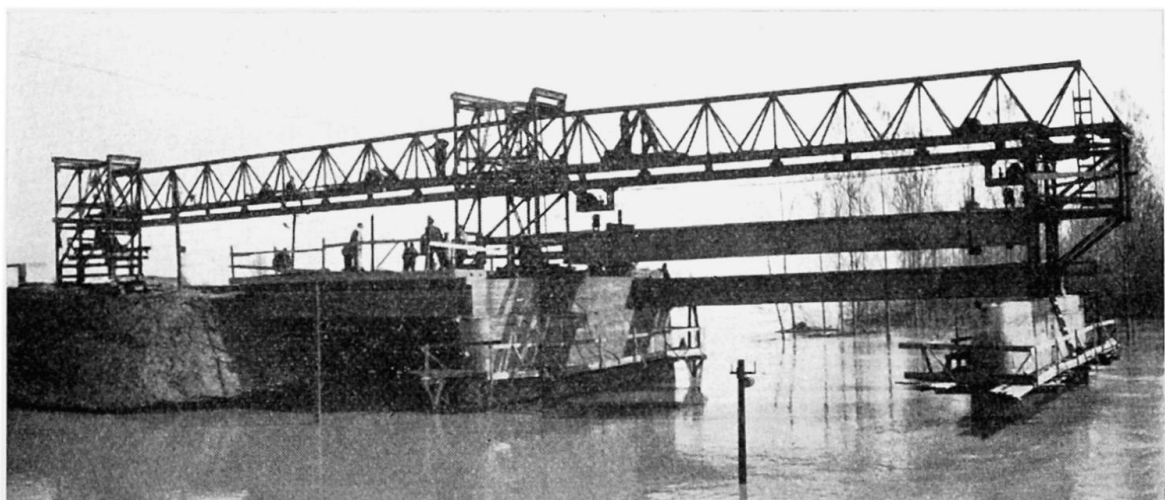


Fig. 3.

### Bruchversuche mit zwei Balken

Der Bruchversuch der 26 t wiegenden Balken an der Baustelle erforderte entsprechende Vorbereitungen. Das nach Mörsch berechnete Bruchmoment ist 420 tm, dazu trägt das Eigengewicht 45 tm bei. Zur Erreichung des übrigbleibenden Momentes von ca. 375 tm mußten nach der Anordnung laut Fig. 4 und 5 in jedem belasteten Querschnitt Kräfte von ca. 80 t wirken. Da so große

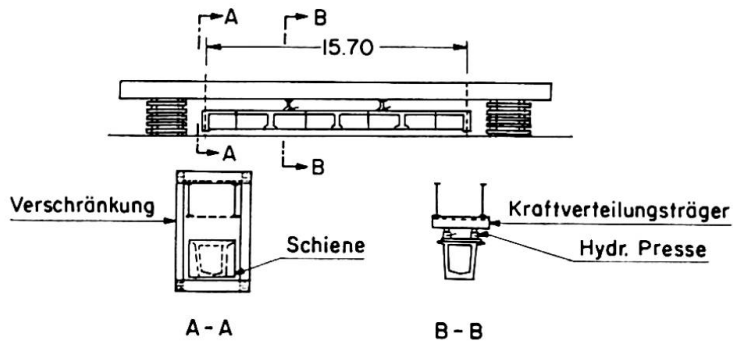


Fig. 4.

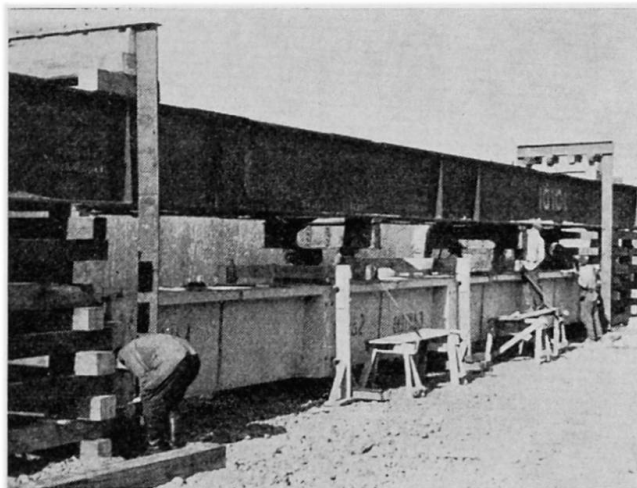


Fig. 5.

Gewichte nicht aufgebracht werden konnten, mußte eine der folgenden Möglichkeiten gewählt werden:

- a) Erstellen von Ramm- oder Bohrpfählen und Aufbringen der Last durch Zugbeanspruchung der Pfähle.
- b) Übereinanderlegen von zwei Balken, Verbinden der Balkenenden und Einbau von hydraulischen Pressen in den Belastungspunkten.

Nach Prüfung obiger Möglichkeiten wählten wir die letztere, da hiebei der Angriffspunkt der Kräfte veränderlich ist und der Straßenbelag nicht gestört wird. Ein aus zwei IP 100 bestehender Kastenträger, dessen Tragfähigkeit 426 tm war, wurde über den Spannbetonbalken gestellt. Die Verschränkungen wurden so dimensioniert, daß in dem untersuchten Träger außer der Wirkung des Eigengewichtes 400 tm Biegemoment hergestellt werden konnte.

Die Belastungskräfte wurden in beiden belasteten Querschnitten mit zwei, insgesamt mit vier hydraulischen Pressen hergestellt. Die Kraft wurde mit Ericsson-Meßdosen gemessen. Die Pressen wurden über die Stege des Spannbetonträgers gestellt; die Entfernung der Pressen betrug 80 cm. Die Stegbleche des oberen Trägers waren 142 cm weit voneinander entfernt; es mußten deshalb auf die Pressen lastverteilende Querträger gelegt werden.

Während des Versuches wurden die senkrechten und waagrechten Bewegungen des Mittelpunktes und des Viertelpunktes sowie des Trägerendes mit Meßuhren gemessen. Letztere Messung war notwendig, weil bei dieser Anordnung des Versuches die Enden des Spannbetonträgers sich infolge der Belastung senkrecht bewegten. Außerdem wurde die Verdrehung der Endquerschnitte des Trägers mit oben und unten waagrecht angeordneten Meßuhren gemessen. Die Anordnung der Meßuhren ist in Fig. 6 angegeben.

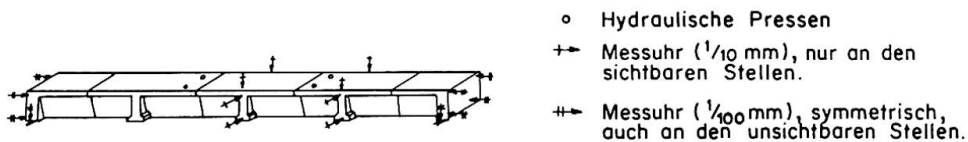


Fig. 6.

An beiden Trägern haben wir zuerst mit Belastungen, die keine Risse verursachten, bei verschiedenen Lastanordnungen mehrere Messungen durchgeführt. Nach diesen folgten größere Belastungen und endlich der Bruchversuch.

Während der anfänglichen Belastungen wurde im Träger wiederholt 245 tm Biegemoment erzielt (Wirkung des Eigengewichtes  $\div$  200 tm). Die Verwendung von zwei Pressen in den belasteten Querschnitten ermöglichte auch die Herstellung von Torsionsbeanspruchung. Zu diesem Zwecke wirkten die Belastungskräfte nicht symmetrisch, sondern asymmetrisch und diagonal (Fig. 7). Bei diesen Belastungen waren keine Risse zu beobachten, wie ja laut Berechnung im Träger bei dem maßgebenden Moment von 210 tm keine Zugspannung entsteht und bei 245 tm die Zugspannung die Zugfestigkeit des Betons nicht erreicht. Die gemessenen Durchbiegungen stimmten bei diesen Messungen gut

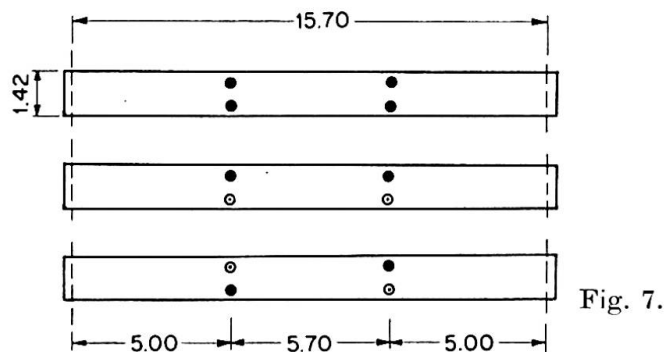


Fig. 7.

mit den berechneten Werten überein. Vor den weiteren Belastungen wurden die empfindlichen Meßinstrumente entfernt.

Die ersten Risse waren bei ca. 290 tm zu beobachten, aber auch die bei einem Moment von 390 tm entstandenen Risse haben sich bei Entfernung der Belastung gut geschlossen, so daß wir nur durch kleine Scharten auf die Stellen der Risse folgern konnten. Ebenso verhielten sich die Risse bei den Stößen der Fertigteile, welche sich bei der erwähnten Belastung bis 3—4 mm geöffnet hatten. Die Gestaltung der Risse bei  $4 \times 20$  t,  $4 \times 25$  t und  $4 \times 30$  t Belastung ist in Fig. 8 dargestellt.

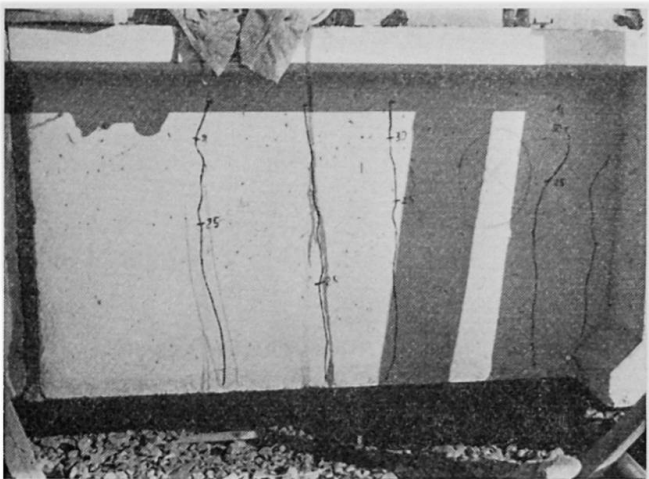


Fig. 8a.

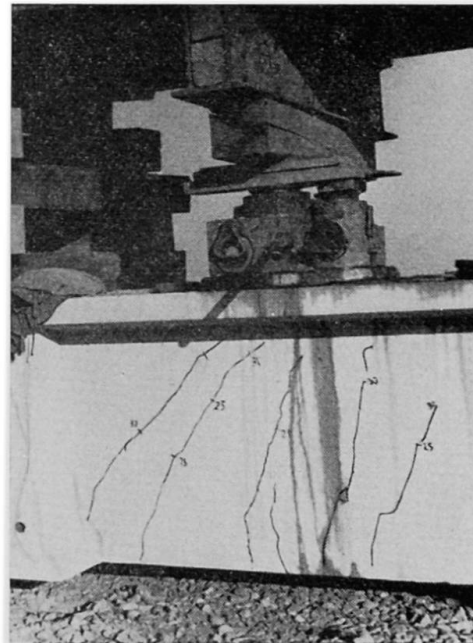


Fig. 8b.

In dieser Belastungsperiode waren die gemessenen Durchbiegungen fünfmal größer als die unter Berücksichtigung des homogenen Betonquerschnittes berechneten Werte. Wir berechneten das Trägheitsmoment auch unter der Voraussetzung, daß die Risse sich bis zum oberen Ende des Steges ausdehnen. Der so erhaltene Wert war ungefähr ein Sechstel des Trägheitsmomentes des homogenen Querschnittes. Diese Angaben stimmen mit der Tatsache überein, daß die Risse das obere Ende des Steges nicht ganz erreichten.

Der Bruch trat bei einem Biegemoment von ca. 440 bzw. 400 tm ein. Zuerst wuchs die Durchbiegung ohne Zunahme der Belastung und endlich prallte der obere Teil des oberen Betongurtes bei einem Stoß der Fertigteile explosionsartig ab (Fig. 9). Das geschah beim Träger Nr. 2 in einem Zeitpunkt, als die Tätigkeit der Pressen pausierte. An der Bruchstelle knickten die Drähte der oberen Kabel aus.



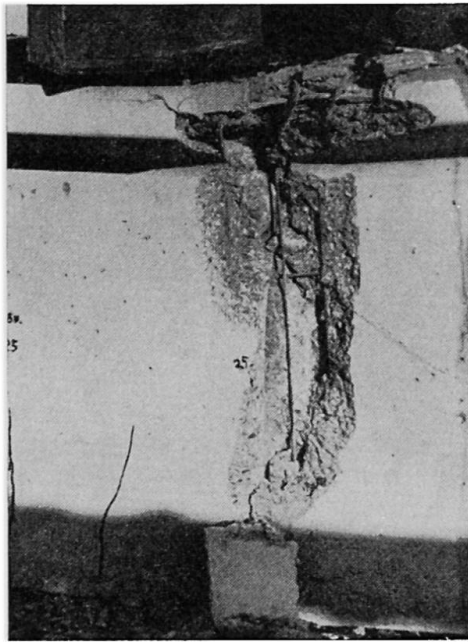


Fig. 9a.

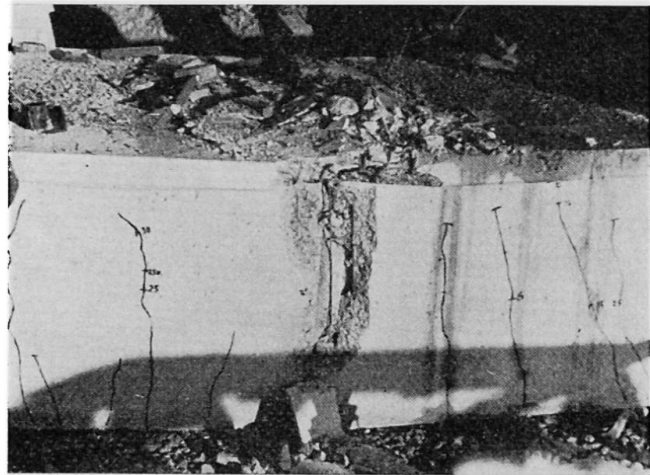


Fig. 9b.



Fig. 9c.

Der zweite Balken zeigte sich auch bezüglich der gemessenen Durchbiegungen schwächer als der erste, aber die gewonnenen Durchbiegungswerte entsprechen auch hier den Vorschriften.

Die Ergebnisse der Messungen während der Probebelastung der Balken Nr. 1 und 2 innerhalb der Elastizitätsgrenze sind in Tabelle I angegeben. Ausgangspunkt war der nur mit Eigengewicht belastete Balken.

In der Tabelle sind wegen der Endpunktverschiebungen korrigierte Werte zusammengestellt. Die gemessenen Werte entstanden als Durchschnitt mehrerer Messungen bzw. sich gleich verhaltender Meßstellen.

Die waagrechten Verschiebungen waren bei symmetrischer und diagonaler Belastung sehr klein und wurden daher nicht ausgewertet. Bei asymmetrischer Belastung zeigte sowohl die obere als auch die untere Meßuhr eine Verschiebung in die Richtung der belasteten Seite. Bei einer Belastung von  $2 \times 20$  t

Tabelle I

Belastung	Biege- moment (tm)	Durchbiegung (mm)				Verdrehung des Endquer- schnittes ( $10^{-2}$ )	
		Mitte		Viertel		gem.	ber.
		gemes- sen	berech- net	gemes- sen	berech- net		
<b>Balken Nr. 1</b>							
4 × 20 t	200	19,7	19,6	13,7	14,0	0,378	0,394
2 × 20 t asymm. belastete Seite	100	8,9		6,3			
unbelastete Seite		7,4		4,8			
2 × 20 t diagonal	100	8,35	9,8	5,9	7,0	0,153	
2 × 40 t asymm. belastete Seite	200	21,8		15,3			
unbelastete Seite		19,7		13,7			
<b>Balken Nr. 2</b>							
4 × 20 t	200	22,4	19,6	16,0	14,0	0,472	0,394
2 × 20 t asymm. belastete Seite	100	10,7		8,2			
unbelastete Seite		7,7		5,0			
2 × 40 t diagonal	200	24,4		17,1		0,500	
2 × 40 t asymm. belastete Seite	200	25,5		17,3			
unbelastete Seite		21,2		14,4			

war die Verschiebung oben ca. 1 mm größer als unten. Vergleicht man diese mit den senkrechten Durchbiegungen derselben symmetrischen Belastung, dann stellt man fest, daß sich der Trägerquerschnitt beim Querträger infolge der Torsion nicht verzerrte, sondern ein rechtwinkliges Viereck blieb. Die gemessene Verdrehung war größer als die berechnete, wahrscheinlich weil die Belastungskräfte nicht bei den Querträgern wirkten.

### Prüfung von drei eingebauten Trägern von der Spannung bis zur Probelastung

Drei Träger am Rande einer Öffnung wurden ausgewählt, um ihr Verhalten von der Herstellung über die Montage bis zur Probelastung und weiter über längere Zeit zu beobachten.

Als Vorbereitungen der Messungen studierte der Lehrstuhl für Brückenbau Nr. II an der Technischen Universität für Bauindustrie und Verkehr, Budapest, und das Forschungsinstitut für Straßenwesen, Budapest, eingehend die



Qualität des für die Träger verwendeten Betons und Spanndrahtes, mit besonderer Berücksichtigung von Kriechen und Schwinden.

Die Messungen auf der Baustelle begannen beim Spannen der Balken. Es wurde die Zugspannung der Drähte, der Reibungsverlust, die Längeveränderung des Betons und die Durchbiegung des Trägers geprüft.

Die Probelastung der drei Träger bis zur maßgebenden Beanspruchung wurde unmittelbar vor der Montage durchgeführt. Zu dieser Belastung war der früher besprochene große Stahlträger nicht mehr notwendig, da der Oberbau des Montagegerätes benützt werden konnte. Die Anordnung der Probelastung war beinahe gleich wie früher, nur die Verschränkungen an den Trägerenden waren nicht senkrecht, sondern etwas schief, weil die Spannweite des Spannbetonträgers 15,70 m betrug, während die Knotenpunktentfernung des Montagegerätes nur 15,00 m war. Wegen dieser Schrägheit wirkte eine kleine Druckkraft auf den Spannbetonträger, welche aber die Messung nicht störte. Zur Herstellung der Belastungskraft von 40 t in einem Querschnitt waren nur zwei Pressen notwendig; um die asymmetrische und diagonale Belastung herzustellen, wurden die Pressen in Querrichtung verlegt.

Während des Spannens wurde die Zugkraft in den Kabeln mit einem im Forschungsinstitut für Straßenwesen konstruierten Meßzylinder gemessen, welcher zwischen die Spannpresse und den Betonkörper eingelegt war. Auf dem Meßzylinder sind Dehnungsmeßstreifen aufgeklebt und die Längeveränderung des Meßzylinders infolge des Spannens kann durch elektrische Dehnungsmessung festgestellt werden. Mit zwei an beiden Enden des Kabels angeordneten Meßzylindern konnte auch der Reibungsverlust festgestellt werden: wenn nur die Presse an einem Ende in Betrieb war, zeigte der Meßzylinder an der anderen Seite die mit dem Reibungsverlust verminderte Spannkraft. (Das endgültige Spannen wurde immer von beiden Seiten durchgeführt.)

Die Längeänderung des Trägers während des Spannens wurde mit Huggenberger-Deformeter gemessen (Basislänge 254 mm). Die Verkürzung des Mörtels bei den Stößen war immer größer als die des Betons der Fertigteile.

Die senkrechte Durchbiegung des Trägers während des Spannens stimmte gut mit den berechneten Werten (in der Mitte ca. 1 cm) überein.

*Tabelle II*

Belastung	Biegemoment (tm)	Durchbiegung (mm)		%
		berechnet	gemessen	
4 × 10 t	107	5,7	5,9	103,5
4 × 15 t	160	8,5	9,0	105,5
4 × 20 t	214	11,4	12,1	106

Die bei den einzelnen Probelastungen der Träger gemessenen und die berechneten Durchbiegungen sind in Tabelle II zusammengestellt. (Durchschnittliche Werte in mm.)

Im Zeitpunkt der Probelastung waren die Kabel eines Trägers noch nicht injiziert; dieser Einfluß war aber bei der Durchbiegungsmessung nicht zu bemerken.

Gleichzeitig mit der Durchbiegungsmessung wurde die Verdrehung der Endquerschnitte mit Klinometern gemessen. Die gemessenen und berechneten Werte stimmten gut miteinander überein (zwischen 86—106 %).

### **Probelastung der fertigen Brücke**

Bei der Probelastung der fertigen Brücke wurden die Durchbiegungen in der Mitte einer Öffnung bei drei nebeneinander liegenden Laststellungen gemessen. Der Vergleich der gerechneten und gemessenen Durchbiegungen ergab, daß die gemessenen Werte 42—48% der berechneten betragen. Die geringen Durchbiegungen sind auf die Mitwirkung des Ausgleichbetons, Schutzbetons, Gehwegbetons und in gewissem Ausmaß der Asphaltdecke mit den Fertigteilbalken zurückzuführen. Wir berechneten das Trägheitsmoment des ganzen Brückenquerschnittes (ohne Asphalt), dessen Wert 1,84fach größer ist als die Summe der Trägheitsmomente der 8 Träger. Die gemessenen Durchbiegungen betragen 77—88% der so korrigierten berechneten Werte. Die Messung zeigt, daß die Querverteilung der Konstruktion gut mit der nach Guyon-Massonnet berechneten übereinstimmt.

Zur Erleichterung der Probelastung der fertigen Brücke und der Langzeit-Messungen wurde in der Öffnung der drei erwähnten Balken ein leichtes Gerüst aufgehängt, das in Brückenachse verschoben werden kann.

### **Langzeit-Messungen**

Die geplanten Langzeit-Messungen umfassen:

1. Weitere Prüfung der Verfestigung des Betons, ohne Zerstörung.
2. Prüfung des Schwindens mit auf dem Pfeilerkopf bzw. im Bureau der Baustelle gelagerten Probekörpern.
3. Prüfung des Schwindens und Kriechens an den Meßpunkten der fertigen Brücke und an Probekörpern, die im Laboratorium des Lehrstuhles für Brückenbau gelagert sind.

Die Messungen an Ort und Stelle sollen jährlich zweimal, womöglich bei gleichem Wetter (im Mai bzw. Oktober) durchgeführt werden.

### Zusammenfassung

Es handelt sich um Bruchversuche und andere Messungen an Spannbetonbalken von 15,70 m Spannweite.

Nach kurzer Beschreibung der aus den erwähnten Balken bestehenden Brückenkonstruktion beschreibt der Verfasser die Belastung von zwei Balken bis zum Bruch und von drei Balken bis zur maßgebenden Beanspruchung, die Probelastung der fertigen Brücke und die durchgeführten Messungen.

### Summary

This paper describes tests to failure and other tests on prestressed concrete beams of 15.70 m span.

After a brief description of the bridge construction in which the beams were used, the author describes the loading of two beams to failure and of three beams to determine the degree of prestress, the test loading of the finished bridge and the measurements recorded.

### Résumé

L'auteur présente des essais de rupture et d'autres mesures effectuées sur des poutres précontraintes de 15,70 m de portée.

Après avoir décrit brièvement le pont réalisé avec ces éléments, l'auteur présente les essais poussés jusqu'à la ruine sur deux poutres et jusqu'aux contraintes déterminantes sur trois autres, l'épreuve du pont terminé et les mesures effectuées.

## V b 4

# Inelastic Behaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Beams under Combined Bending and Torsion

*Comportement non élastique des poutres en béton armé et en béton précontraint  
sollicitées à la fois à la flexion et à la torsion*

*Unelastisches Verhalten armierter und vorgespannter Betonbalken bei gleichzeitiger  
Wirkung von Biegung und Torsion*

R. N. SWAMY

University of Leicester, Great Britain

### Introduction

Pure torsion is generally avoided in concrete construction. Torsional stresses of varying magnitude nevertheless, occur in many structures, invariably as a secondary effect of bending — due to asymmetrical loading and the monolithic nature of concrete construction, whether it be reinforced, prestressed or composite. Although torsional stresses are seldom primary, they influence considerably the strength of a beam since the effects of bending and twisting occur simultaneously and are closely linked together, and because of the sudden and destructive character of torsion failures.

With the increased use of precast and in-situ structural concrete, hollow beams are also being extensively used for building, piling and bridging work. The trends of modern design for ultimate strength with reduced load factors make the problem of combined bending and torsion of great practical significance in many fields of structural analysis, and particularly in long span bridges with box-girders.

The existing test data [2] show that the failure of concrete under combined stresses is very complex indeed and not well-defined. Although the primary cause of such failures is either the tensile or compressive strength of concrete, depending upon the ratio of bending to twisting moment, the essential conditions producing such failures are not yet fully understood.

### Test Results

The behaviour and strength of reinforced and prestressed concrete beams in pure bending and in pure torsion are well-established. Failure in bending is initiated either through yielding of the reinforcing bars or through primary compression failure due to the limited elongation of steel. In either case failure

occurs by the crushing of concrete on the compression face. The ultimate strength of such beams can be very much greater than the initial cracking load.

Torsion failures, on the other hand, are violent, destructive and occur without warning if not adequately reinforced for diagonal tension. Such cleavage fractures result when the principal tensile stress due to torsional shear exceeds the tensile strength of concrete. When prestressed, the precompression must be eliminated before the concrete can be stressed in tension; prestressing consequently secures large increases in the torsional resistance of a beam.

Under combined bending and torsion, therefore, two different modes of failure are possible [1, 2].

### Bending Failures

In construction practice bending effects usually predominate. In beams therefore subjected to large ratios of bending to twisting moments, failure results by the crushing of concrete on the compression face with or without steel yielding. The diagonal compression due to torsional shear increases the direct compression due to bending so that the effect of the addition of a small amount of torsion is to reduce the bending strength, although slightly. The crushing failure is always accompanied by the formation of debris and considerable disintegration due to energy release and is generally caused by the diagonal shear due to compression.

The presence of small amounts of torsion does not, however, deprive such beams of their reserve load carrying capacity after the beam has cracked in the tensile zone. The failure load can thus be much higher than the initial

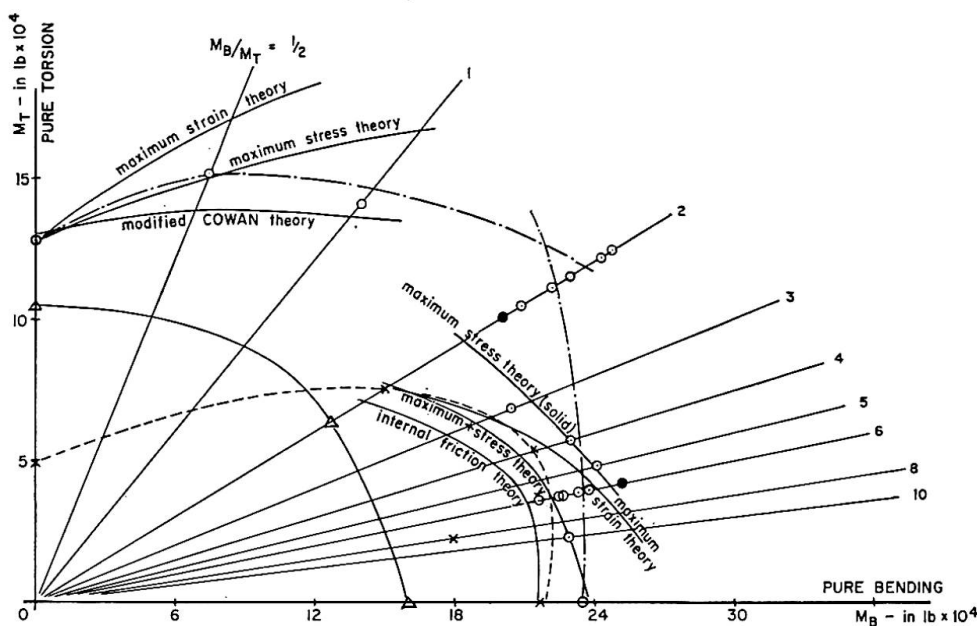


Fig. 1. Variation in the strength of prestressed solid and hollow beams at the formation of the first crack.

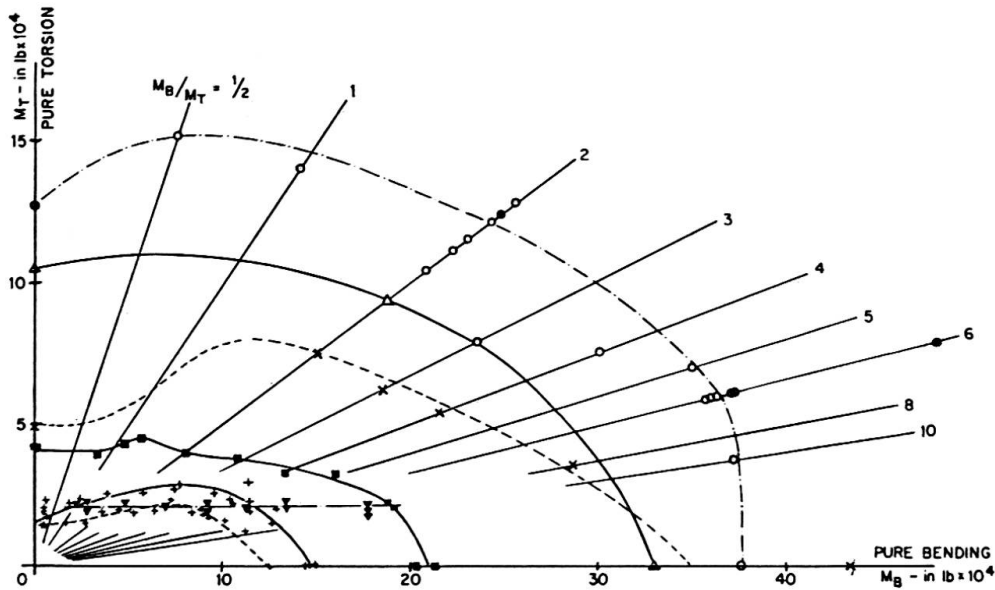


Fig. 2. Failure envelopes of prestressed solid and hollow beams.

- $M_0$  = fully plastic yield moment for pure bending.
- $T_0$  = fully plastic yield torque for pure torsion.
- $M$  = actual applied moment producing yield.
- $T$  = actual applied torque producing yield.
- = 9 × 9 in hollow uniformly prestressed.
- ⊗ = 9 × 9 in hollow uniformly prestressed: web reinforcement.
- ⊠ = 9 × 9 in hollow uniformly prestressed: circular hollow.
- = 9 × 9 in hollow uniformly prestressed — transition failure.
- = 9 × 9 in solid uniformly prestressed.
- △ = 6 × 9 in solid uniformly prestressed (Cowan).
- × = 6 × 8 in solid eccentrically prestressed (Jones).
- = 5 × 8 in solid eccentrically prestressed (Rowe).
- ▼ = 5 × 8 in I eccentrically prestressed (Gardner).
- + = 6–10 × 8 in T eccentrically prestressed (Reeves).
- ▲ = 6 × 9 in solid reinforced concrete (Cowan).

cracking moment. This is, however, in marked contrast to the strength of beams subjected to ratios of bending moment to twisting moment ( $M_B/M_T$ ) less than six. Below this limit even a small increase in torsion reduces the ultimate strength substantially with consequent loss of load-capacity after cracking (Figs. 1 and 2).

In hollow beams even small amounts of torsion are undesirable as they lead to serious rupture producing large and wide cracks at failure which often penetrate into the thickness of the webs and flanges (Fig. 3). Diagonal strains may in such cases be critical at more than one face. The provision of torsional reinforcement then becomes important and essential for such beams and even nominal steel helps to minimise the disruptive action of torsional stresses and hold the beam together.

Tests in reinforced concrete [3] show that there is actually an increase in

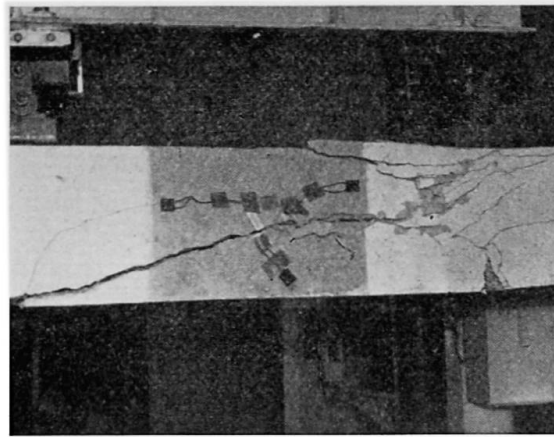


Fig. 3. Bending failure of a prestressed concrete hollow beam subjected to a twisting moment =  $1/6$  of bending moment.

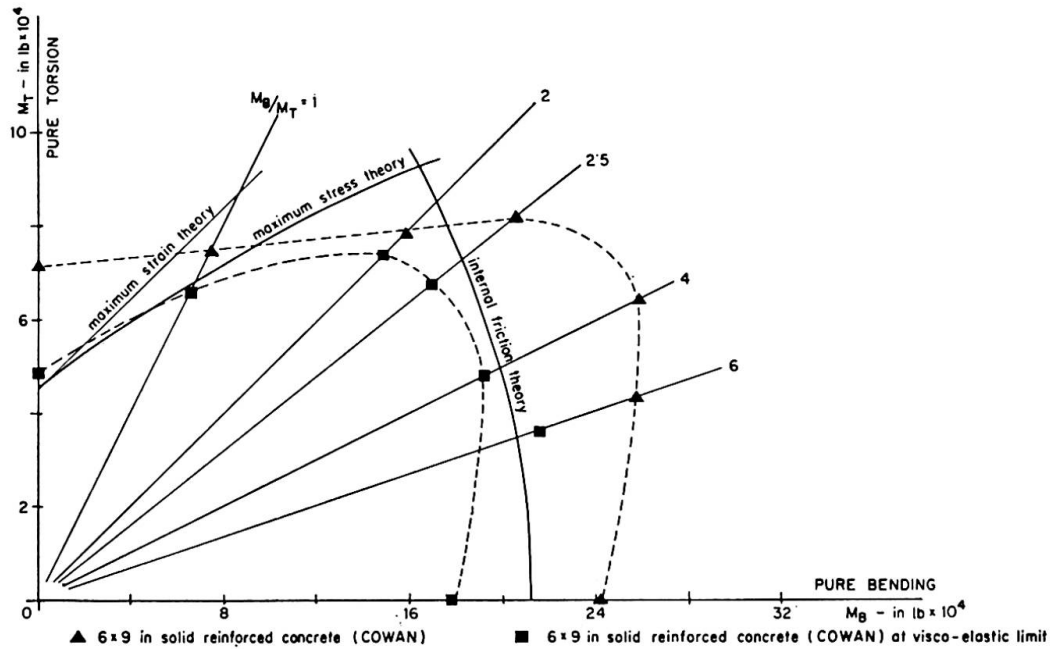


Fig. 4.

bending strength upto a ratio of  $M_B/M_T = 4$ , below which an increase in torsion reduces the bending strength (Fig. 4). Small torsional stresses thus enhance the factor of safety against bending failure. Where cracks traverse the torsional steel, yield strains can be developed. Failure may also occur in bond between concrete and steel.

### Torsional Failures

Very small ratios of  $M_B/M_T$ , with the consequent predominance of the twisting effect are not generally common in concrete construction. They contribute, however, to a better understanding of the failure of concrete under combined stresses. Failure under such loadings is generally due to diagonal



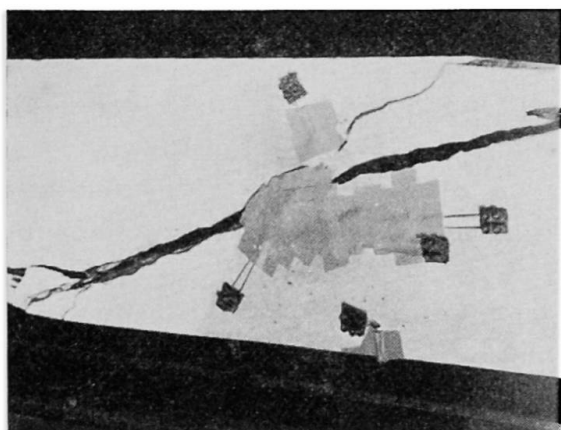


Fig. 5. Cleavage fracture of a prestressed concrete hollow beam subjected to equal bending and twisting moments.

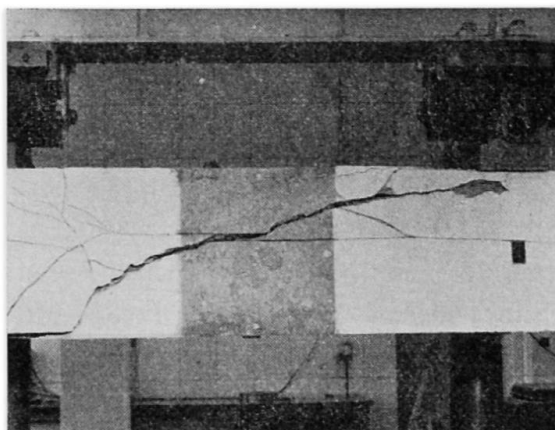


Fig. 6. Torsion fracture of hollow beam subjected to a twisting moment =  $\frac{1}{2}$  of bending moment.

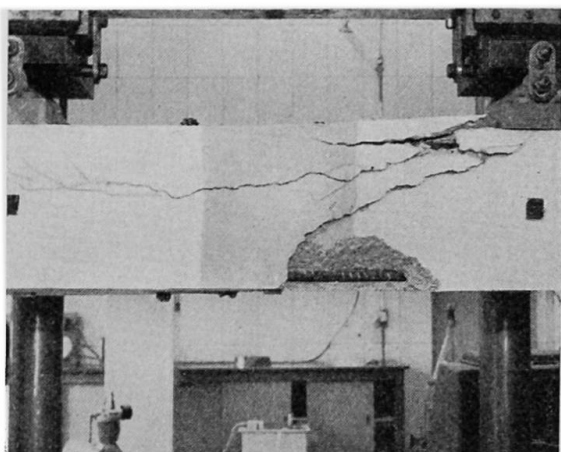


Fig. 7. Torsion failure of solid beam subjected to a twisting moment =  $\frac{1}{2}$  of bending moment.

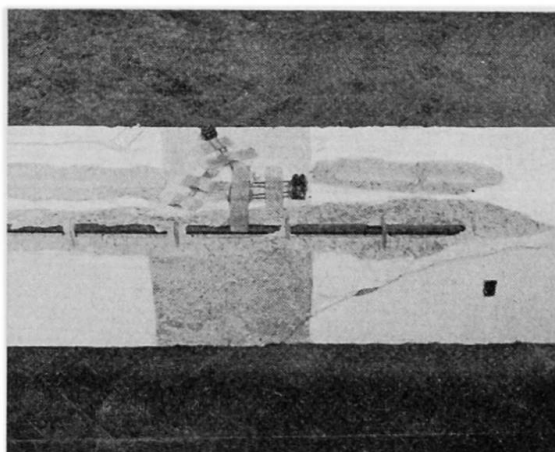


Fig. 8. Torsion failure with vertical stirrups. Twisting moment =  $\frac{1}{2}$  of bending moment.

tension due to shear and sudden and destructive, with debris “exploding” out of the section. Cracks formed are then clean and well-defined and free from any signs of crushing (Fig. 5); they, however, form a continuous chain right round the surface with a diagonal compression crack on the opposite face. These beams failed when the principal tensile stress on the compression face of the beam exceeded the tensile strength of concrete. Failure does not take place at the bottom face due to a redistribution of internal stresses.

The effect of the compressive stress due to bending is to reduce the principal tension due to torsional shear, and these beams were thus generally able to sustain a higher twisting moment than beams in pure torsion. Tests show that hollow [4] and T-beams [9] may be loaded upto 65% and 80% respectively of the ultimate bending moment before their strengths fall below the pure torsional strength (Figs. 6 and 7).



In normal reinforced concrete beams bending augments resistance to torsional deformation over a wide range of  $M_B/M_T$  ratios upto  $2\frac{1}{2}$  to 3, beyond which any increase in bending actually reduces the torsional strength (Fig. 4). The gain in torsional load of prestressed solid beams is within narrower limits. In hollow beams the maximum increase in torsional resistance is obtained with a ratio of  $M_B/M_T = \frac{1}{2}$  (Fig. 2). Any increase in applied bending moment beyond this limit reduces the torsional strength at a fast rate. Test data [4, 5] show that the addition of bending does not produce phenomenal increases in torsional strength. The presence of large compressive stresses has a dual action: while retarding the development of critical tensile stresses in some regions, it also affects adversely the tensile strain capacity in others.

In pure torsion the greatest increase in strength is obtained by uniform prestressing. It is, however, more economical in construction practice to provide an optimum stress gradient under dead load and the prestressing force. Under combined loading, greater increases in torsional strength can then be obtained. In such beams, initial failure occurs on the top face, and small amounts of bending cause negligible increase in the torsional strength. When the bending is sufficiently large so as to produce a uniform stress distribution, the ultimate strength is increased considerably. Tests on rectangular beams [6, 7] show that depending on the stress gradient, this increase in torsional strength occurs for loads from one half to the full working load and as the applied bending moment increases the critical section changes from top to the bottom face via the middle of the sides.

In hollow beams subjected to low ratios of  $M_B/M_T$  and without torsional reinforcement, the cracks formed and extended rapidly and caused a sudden and immediate fracture. The initial cracking moments were also then the ultimate failure moments. Solid beams were able to sustain loads higher than the initial cracking loads. The presence of torsional steel lessens the violence of fracture and changes its character into a gradual and mild one preceded by cracking and deformation (Fig. 8).

### Transition Failures

Between the crushing failure of concrete due to compression and the cleavage fracture due to torsion there is a transition stage. This occurs when the torsional shear stress becomes large enough to produce the critical principal tensile strain for the cleavage fracture of concrete. Failure in this intermediate stage is complex and the result is a dual failure — an initial cracking due to bending but an ultimate torsion failure. The initial vertical cracks inclined with increase in load, and failure occurred along these diagonal tensile cracks, often masking the bending cracks (Fig. 9).

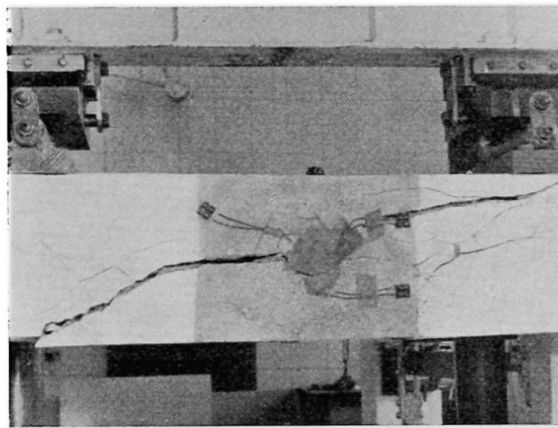


Fig. 9. Transition (initial bending, final torsion) failure: twisting moment =  $1/5$  of bending moment.

In prestressed beams  $M_B/M_T$  ratios of 3 to 5 represent this change from torsion to bending failure. As the applied bending moment increased, the process of failure became gradual, with greater warning of impending fracture and increased load carrying capacity beyond initial cracking. The failure was quite sudden when it occurred. The ratio 5 represents the dividing line between ultimate torsion and ultimate bending failures: above this ratio a crushing failure occurs: at and below this, beams fail in ultimate torsion.

Tests on hollow beams show that they are more efficient and economical to resist torsional loads. There is a particular size of the hollow for which the maximum increase in strength may be obtained.

### Tests on I and T-beams

These beams were initially loaded with upto 80% of the ultimate bending moment producing extensive cracks and then twisted to failure. Tests on eccentrically prestressed I beams [8] show that there is virtually no interaction between bending and torsion. This result is not altogether surprising. The I-section is basically weak in torsion, and the addition of bending moment is unable to overcome this inherent weakness of the section. The torsional strength of T-beams, on the other hand, is greatly influenced by the magnitude of the applied bending moment and the shape of the compression flange [9]. Compared with other cross-sections the greatest increase in torsional strength — as much as 1.6 times the pure torsional strength — is obtained with T-beams. The large compression area enables a more efficient redistribution of the very high shear stresses present thus increasing the load-capacity of the beams. Grouting also assists in this redistribution since it produces a better configuration of bending cracks.

### Failure Criteria

The tests of the author and those of others are compared in Figs. 1, 2 and 4. The experimental data show that the customary elastic theories of failure cannot satisfactorily and adequately explain the essential differences between a bending failure and a torsion fracture. It is possible to use certain criteria such as a constant maximum stress or a constant maximum strain to compute the initial cracking load of a beam under combined stresses but no single criterion gives consistent results for all stress combinations. Nor does there seem to be an acceptable simple mathematical basis to predict the failure load for all stress ratios. A similar situation also exists with respect to the strength under combined stresses of other brittle materials like cast iron and of even mild steel.

These experiments also show that the mechanism of failure of concrete is complex and not clearly defined for many load combinations. They reveal that a cleavage type fracture can sometimes be preceded by substantial amounts of inelastic deformation. Thus torsion failures may be associated with relatively ductile behaviour. This phenomenon of considerable plastic behaviour before fracture under certain conditions of loading is also exhibited by other brittle substances. These tests confirm that under a superimposed bending stress a beam may carry large shear stresses without critical tensile stresses developing — thus concrete in torsion may exhibit significant plasticity under favourable loading conditions.

But torsional failures in any form are extremely undesirable in concrete. A tension crack is like a lever of very high mechanical advantage: once formed, propagation is extremely rapid and very little energy is expended to keep such a fracture going. Even with adequate torsional reinforcement, the reserve strength in torsional failure after initial cracking is considerably less than that in a similar bending failure. Only one major crack is needed for fracture in contrast to many needed for inelastic behaviour.

In any case, plastic deformation of concrete in torsion (and hence in tension) is insufficient to be able to develop full plasticity at failure [10, 11]. The substantial amounts of inelastic deformation found in torsional failures of certain stress combinations must therefore be associated with the compressive strength of concrete.

Although the diagonal tensile stress is undoubtedly the initiator of torsional fractures, the magnitude of these stresses and the character of the fracture is influenced by a number of factors including the distribution of shear stresses and the inelastic deformation preceding failure. An initially clean crack normal to the principal tension may thus develop into an oblique rough crack into the region of high compression and may show signs of crushing. It is not precisely known from these experiments where and how such tensile stresses are developed and more basic information on the deformation characteristics and stress and

rotation capacities of concrete under combined stresses is needed to make the exact nature of these failures clear.

### Strains and Rotations

As the applied bending moment increased these beams displayed a great capacity for torsional rotation from 2 to 4 times the ultimate value in pure torsion. Fig. 10 shows the measured rotation characteristics at or near the ultimate load. While there is no conclusive pattern, certain general trends may be seen to exist. As the mode of failure changed from torsion to bending, the deflection, strains and rotations all showed a gradual transition from the elastic into the inelastic stage.

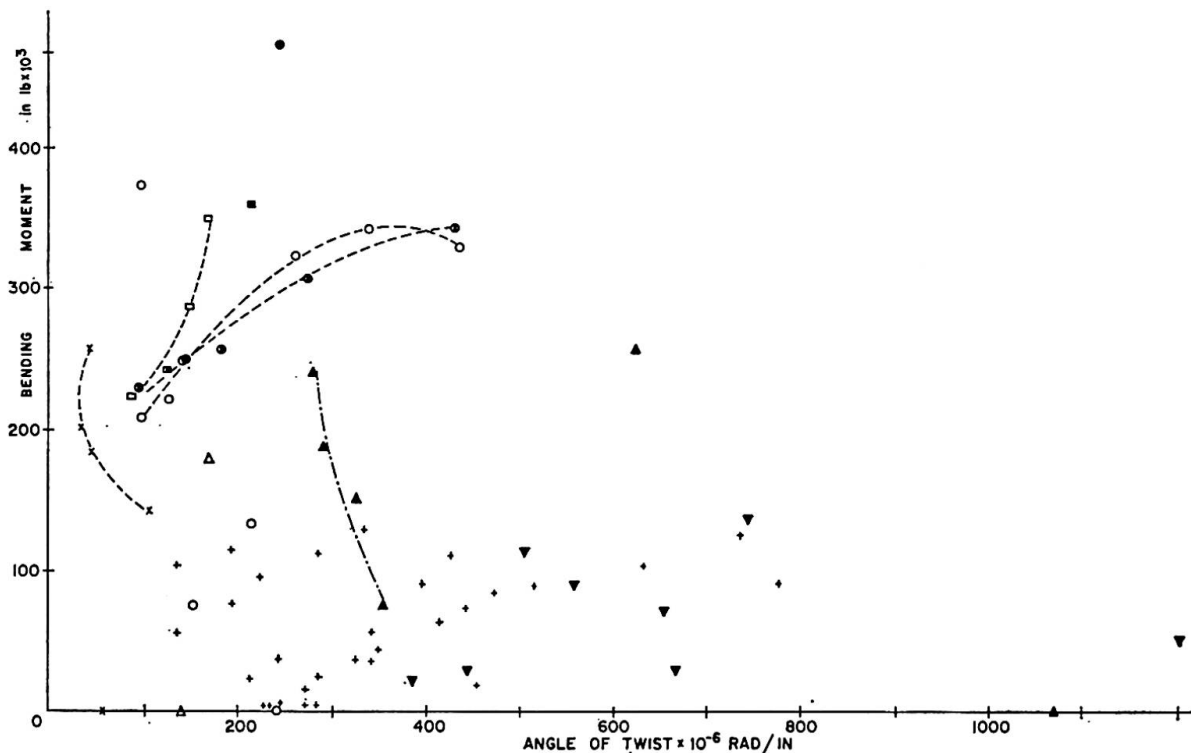


Fig. 10.

In bending failures the principal concrete compressive strains were considerably high. In torsion failures the principal tensile strains were all critical, of the order of  $1.8$  to  $3.4 \times 10^{-4}$  and were much larger in beams with nominal reinforcement. These and other results [9, 12] reveal the enhanced tensile strain capacity of concrete under favourable combined loadings.

With increase in the applied bending moment the beams showed increased ability to sustain very high shear stresses. These stresses were far in excess of the normal failure strength of concrete under shear or diagonal tensile stress.

A considerable redistribution of shear stresses must have therefore taken place for the concrete to be able to withstand such excessive shear stresses. The presence of very large compressive stresses is thought to be responsible for this redistribution, and this accounts for the increased torsional load carrying capacity with increasing bending stresses.

### Interaction Curve

By treating concrete as an ideally plastic-rigid material, it is possible to obtain upper and lower approximations to the interaction curve of the bending and twisting couples at yield for the combined bending and twisting of various sections [13].

The various test results are plotted in Fig. 11 and show good agreement

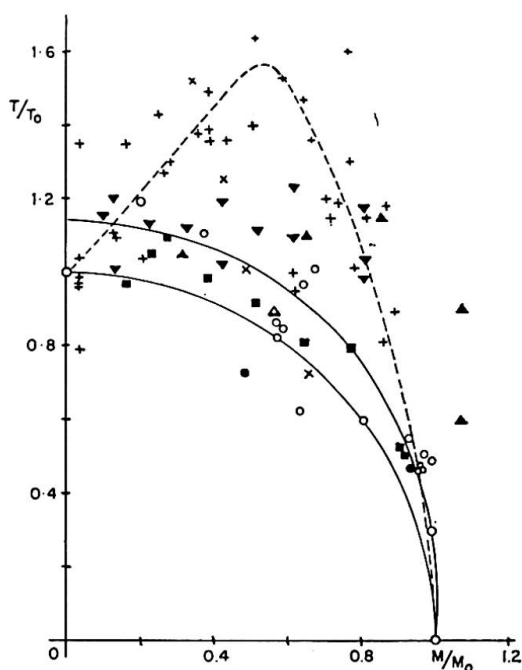


Fig. 11.

for hollow and solid prestressed beams but considerable scatter for reinforced concrete and I-beams. The results for T-beams follow a well-defined pattern

### References

1. H. J. COWAN: "The strength of plain, reinforced and prestressed concrete under the action of combined stresses, with particular reference to the combined bending and torsion of rectangular sections." *Magazine of Concrete Research*, No. 14, December 1953, pp. 75—86.
2. R. N. SWAMY: "The strength of plain, reinforced and prestressed concrete under combined stresses." *Indian Concrete Journal*, Vol. 35, No. 10, October 1961, pp. 368—374.

3. H. J. COWAN and S. ARMSTRONG: "Experiments on the strength of reinforced and prestressed concrete beams and of concrete-encased steel joints in combined bending and torsion." *Magazine of Concrete Research*, Vol. 6, No. 19, March 1955, pp. 3—20.
4. R. N. SWAMY: "The behaviour and ultimate strength of prestressed concrete hollow beams under combined bending and torsion." *Magazine of Concrete Research*, Vol. 14, No. 40, March 1962, pp. 13—24.
5. D. MCHENRY and J. KARNI: "Strength of Concrete under combined tensile and compressive stress." *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 29, No. 10, April 1958, pp. 829—839.
6. P. H. C. JONES: "Eccentrically prestressed concrete beams in combined bending and torsion." Thesis presented for the degree of B.E. (Hons), University of Sheffield, 1953.
7. R. E. ROWE: Discussion, Third Congress of the Fédération Internationale de la Précontrainte, Berlin 1958, pp. 44—47.
8. R. P. M. GARDNER: "The behaviour of prestressed concrete I beams under combined bending and torsion." Technical Report TRA/329, February 1960, Cement and Concrete Association, London.
9. J. S. REEVES: "Prestressed Concrete Tee beams under combined bending and torsion." Technical Report TRA/364, December 1962, Cement and Concrete Association, London.
10. R. H. EVANS: "Extensibility and modulus of rupture of concrete." *The Structural Engineer*, Vol. 24, No. 12, December 1946, pp. 636—658.
11. F. A. BLAKEY and F. D. BERESFORD: "Tensile Strains in Concrete." Parts I and II. Building Research, Australian Division, Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization, Australia, Report C2 2-1, 1953.
12. S. KAJFASZ and R. E. ROWE: "An Investigation of the behaviour of composite concrete beams — I composite rectangular beams." Technical Report TRA/345, January 1961, Cement and Concrete Association, London.
13. F. A. GAYDON and H. NUTTAL: "On the combined bending and twisting of beams of various sections." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 6, No. 1, 1957, pp. 17—26.

### Summary

Tests on reinforced and prestressed concrete beams subjected to combined bending and twisting are reported. Depending on the relative magnitude of the two stresses, beams may fail in diagonal tension or in compression. Between these two types of failure there is a transition from cleavage to crushing failure. The direct stresses due to the applied bending moment greatly augment the tensile strain, rotation and shear stress capacity of the beams which results in an increased torsional resistance.

The tests show no consistent agreement with the existing failure criteria. Failure loads may, however, be related to interaction curves.

### Résumé

L'auteur présente des essais exécutés sur des poutres en béton armé et en béton précontraint sollicitées à la fois à la flexion et à la torsion. Selon la gran-



leur relative des deux efforts, c'est la compression ou l'effort de traction oblique qui provoque la rupture. Entre ces deux types de rupture existe une transition qui est celle de la rupture par fissuration à celle de la rupture par écrasement dû à la compression. Les contraintes directes dues au moment fléchissant qui est appliqué augmentent considérablement la capacité de déformation sous tension des poutres, leur capacité de rotation et leur résistance au cisaillement, ce qui accroît la résistance à la torsion.

On ne constate aucune concordance satisfaisante entre les résultats des essais et les critères de rupture actuellement admis. On peut néanmoins rapporter les charges de rupture aux courbes d'interaction flexion-torsion.

### **Zusammenfassung**

Der Verfasser berichtet über Belastungsversuche an armierten und vorgespannten Betonbalken bei gleichzeitiger Biege- und Torsionsbeanspruchung. Je nach der relativen Größe der Beanspruchungsart brechen die Balken entweder infolge der schiefen Zug- oder Druckspannungen. Zwischen diesen beiden Brucharten kann ein Übergang vom Aufreißen zum Stauchen beobachtet werden. Die direkten Spannungen zufolge des Biegemomentes vergrößern die Dehn- und Verdrehungsfähigkeit der Balken und führen damit zu einer erhöhten Torsionstragfähigkeit.

Die Versuche zeigen keine konsequente Übereinstimmung mit den bekannten Bruchkriterien. Die Bruchlast läßt sich jedoch mit Kurven, die die Wechselwirkung von Biegung und Torsion berücksichtigen, angeben.



## V b 5

### Essais sur dalles obliques en béton armé

*Versuche an schiefen Stahlbetonplatten*

*Tests on Skew Reinforced-Concrete Plates*

ZDENĚK SOBOTKA

Doc. Ing., D. Sc., Praha

#### 1. Programme, dispositif et conduite des essais

L'objet de la présente communication, est de rendre compte des recherches qui ont été effectuées sur le comportement mécanique dans des états différents de déformation, la formation et l'évolution des fissures, les lignes de rupture et la capacité portante de dalles obliques simples en béton armé soumises à une charge uniformément répartie.

L'auteur présente les résultats d'essais exécutés sur des dalles appuyées de la façon suivante: appui articulé ou simple sur le pourtour et appui articulé ou simple le long de trois côtés.

Les dimensions et les armatures des dalles essayées sont représentées dans la fig. 1. L'épaisseur de toutes les dalles essayées est de 6 cm. L'armature est constituée par des fils d'acier doux de diamètre 5 mm. Les principales caractéristiques mécaniques du béton et des armatures sont données dans le tableau 1.

On a appuyé les dalles à 5 cm des bords. Dans le cas de l'appui articulé, tout soulèvement des coins et des parties périphériques se trouvait empêché. Ces parties pouvaient seulement tourner autour de l'axe d'appui. Avec l'appui simple, les parties périphériques pouvaient simultanément tourner et se soulever.

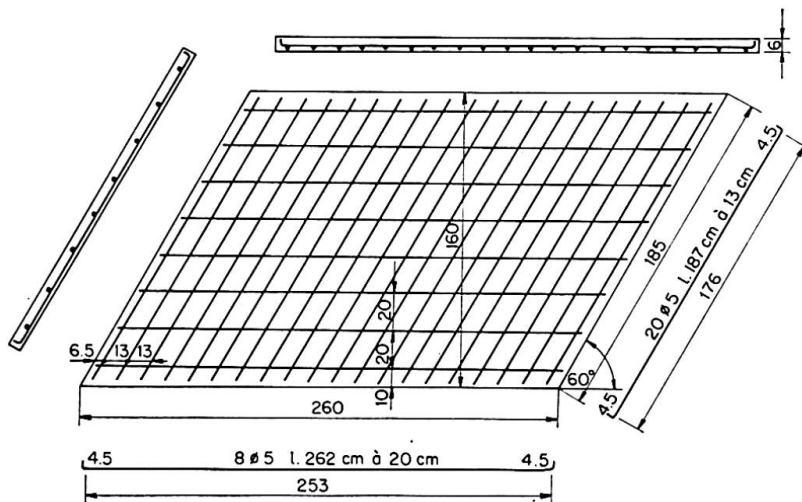


Fig. 1. Plan et coupes des dalles d'essai avec les armatures.

Tableau 1. Récapitulation des données les plus importantes fournies par les essais effectués sur des dalles obliques simples en béton armé

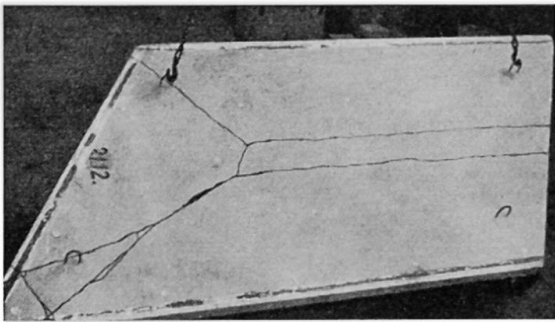
N°	Mode d'appui	Résistance sur cube du béton en kg/cm <sup>2</sup>	Armature		Distance longitudinale des points de bifurcation des lignes de rupture en cm	Charge à la naissance de fissures en kg/m <sup>2</sup>		Charge à la limite d'écoulement en kg/m <sup>2</sup>		Charge à la limite de déformation en kg/m <sup>2</sup>		Charge à la rupture en kg/m <sup>2</sup>	
			Limite d'écoulement en kg/cm <sup>2</sup>	Limite de résistance en kg/cm <sup>2</sup>		Charge d'essai	Charge totale	Charge d'essai	Charge totale	Charge d'essai	Charge totale	Charge d'essai	Charge totale
1	Appui articulé le long de trois côtés	210,3	2670	3740	93	650	800	700	850	850	1000	950	1100
2	Appui articulé le long de trois côtés	239,0	2670	3740	97	500	650	700	850	850	1000	900	1050
3	Appui simple le long de trois côtés	300,0	2670	3740	102	400	550	600	750	700	950	700	950
4	Appui articulé le long du pourtour	403,8	2980	3870	81 72	1250	1400	1350	1500	1600	1750	1850	2000
5	Appui articulé le long du pourtour	357,5	2980	3870	98 104	1150	1300	1250	1400	1400	1550	1750	1900
6	Appui simple le long du pourtour	319,0	2980	3870	92 89	1000	1150	1150	1300	1350	1500	1600	1750

Le chargement uniforme a été réalisé avec des sacs remplis de plomb, une couche de sacs donnant la charge uniforme de  $50 \text{ kg/m}^2$ . L'effet du poids propre peut être compris, pour toutes les dalles, dans la valeur arrondie de la charge uniforme de  $150 \text{ kg/m}^2$ .

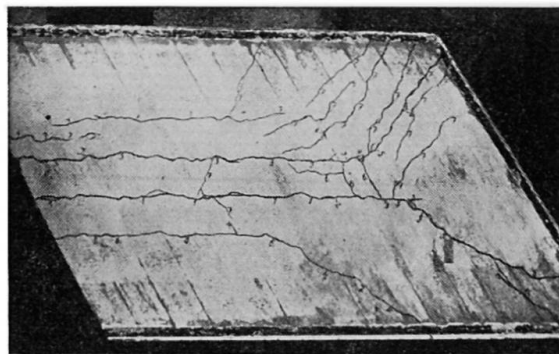
## 2. Fissures et lignes de rupture

La fig. 2 représente la fissuration de la dalle oblique dans les conditions de l'appui articulé le long de trois côtés. Les numéros inscrits le long des fissures, sur la face inférieure (fig. 2b) indiquent la naissance successive de fissures et correspondent aux charges d'essai suivantes sans effet du poids propre:

1	$650 \text{ kg/m}^2$	5	$850 \text{ kg/m}^2$
2	$700 \text{ kg/m}^2$	6	$900 \text{ kg/m}^2$
3	$750 \text{ kg/m}^2$	7	$950 \text{ kg/m}^2$ rupture
4	$800 \text{ kg/m}^2$		



a)



b)

Fig. 2. Fissuration sur la face a) supérieure et b) inférieure de la dalle oblique avec appuis articulés le long de trois côtés. Dalle n° 1.

La répartition des fissures est influencée par la disposition des armatures. Deux fissures longitudinales principales naissant du côté libre, se développent sous les barres longitudinales placées symétriquement à une distance de  $10 \text{ cm}$  de l'axe longitudinal. D'autres fissures longitudinales (n°s 6 et 7) suivent, de même, partiellement les armatures, représentant un affaiblissement des sections situées dans leur direction.

On remarquera en outre la bifurcation des lignes de rupture devant le coin, formant angle aigu, où le concours de deux côtés articulés agit à la façon d'un encastrement secondaire.

La fig. 3 représente les fissures dans une autre dalle avec les mêmes conditions d'appui. Comme dans le cas précédent, la première fissure a pris sa naissance près du milieu du côté libre sous une barre d'armature longitudinale qui est plus rapprochée du coin formant angle obtus. L'autre fissure longi-

tudinale centrale n'est pas si marquée, et on ne peut l'observer que sur la face inférieure.

Les numéros sur la fig. 3 b correspondent aux charges d'essai suivantes:

1	500 kg/m <sup>2</sup>	7	700 kg/m <sup>2</sup> après 45 min.
2	500 kg/m <sup>2</sup> après 1 heure 10 min.	8	750 kg/m <sup>2</sup>
3	600 kg/m <sup>2</sup>	9	750 kg/m <sup>2</sup> après 16 heures 50 min.
4	600 kg/m <sup>2</sup> après 1 heure	10	800 kg/m <sup>2</sup>
5	650 kg/m <sup>2</sup>	11	850 kg/m <sup>2</sup>
6	700 kg/m <sup>2</sup>	12	900 kg/m <sup>2</sup> rupture

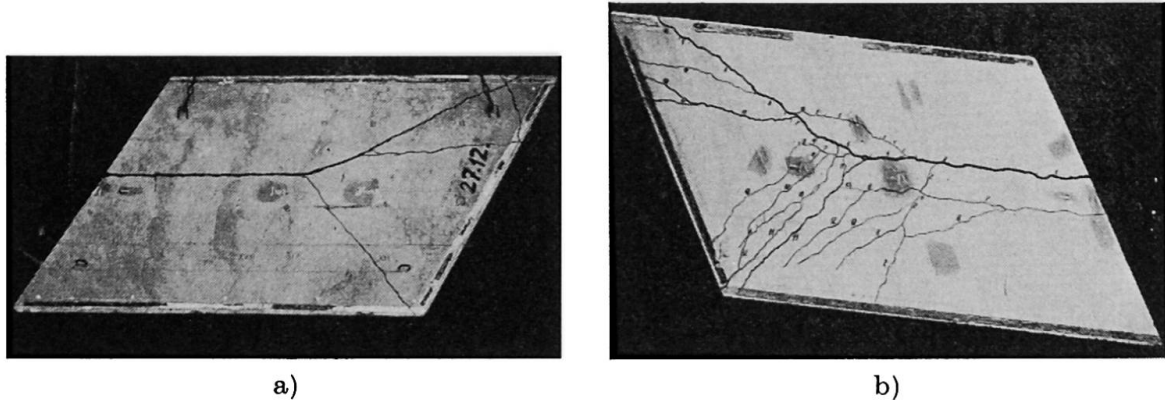


Fig. 3. Fissures sur la face a) supérieure et b) inférieure de la dalle oblique avec appui articulé le long de trois côtés. Dalle n° 2.

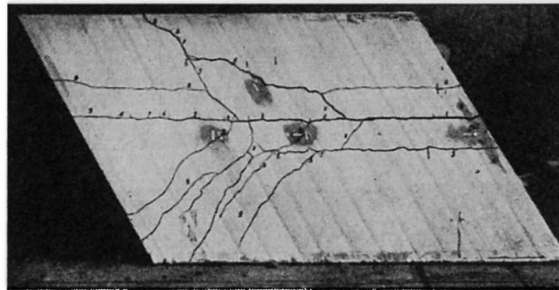


Fig. 4. Fissures sur la face inférieure de la dalle simplement appuyée le long de trois côtés. Dalle n° 3.

La fig. 4 donne les fissures sur la face inférieure de la dalle oblique simplement appuyée le long de trois côtés. Dans ce cas, les coins représentés à gauche se sont considérablement soulevés, et c'est pourquoi les fissures ne passent pas par ces derniers. La capacité portante est moins élevée que dans le cas des dalles avec appuis articulés.

Les numéros le long des fissures correspondent aux charges d'essai suivantes:

1	400 kg/m <sup>2</sup>	6	600 kg/m <sup>2</sup> après 18 heures 40 min.
2	450 kg/m <sup>2</sup>	7	650 kg/m <sup>2</sup>
3	500 kg/m <sup>2</sup>	8	650 kg/m <sup>2</sup> après 2 heures 15 min.
4	550 kg/m <sup>2</sup>	9	700 kg/m <sup>2</sup> rupture
5	600 kg/m <sup>2</sup>		

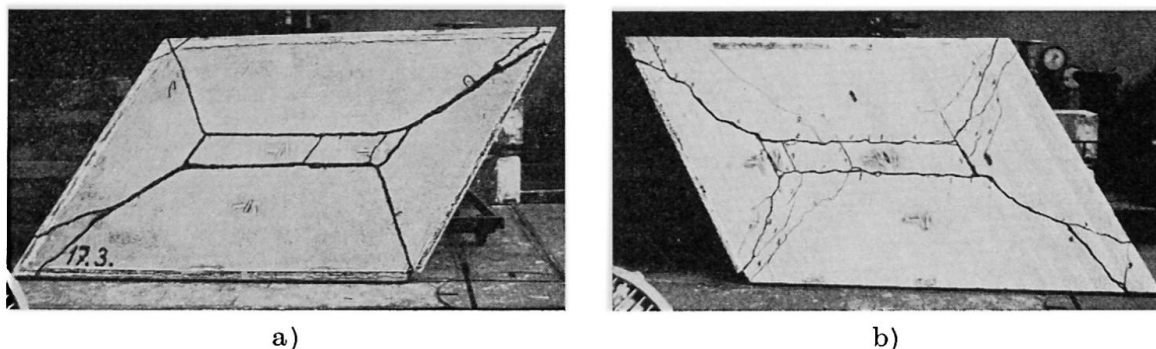


Fig. 5. Fissures sur la face a) supérieure, b) inférieure d'une dalle oblique avec appui articulé le long du pourtour. Dalle n° 4.

La fig. 5 présente la fissuration d'une dalle oblique avec appui articulé le long du pourtour. On peut y voir aussi la place des jauges à fil résistant.

De même que dans les cas précédents, on peut observer l'influence de la disposition des armatures sur la répartition des fissures.

Les numéros le long des fissures correspondent aux charges d'essai suivantes:

1	1250 kg/m <sup>2</sup>	6	1450 kg/m <sup>2</sup>
2	1300 kg/m <sup>2</sup>	7	1500 kg/m <sup>2</sup>
3	1300 kg/m <sup>2</sup> après 23 heures	8	1500 kg/m <sup>2</sup> après 22 heures 30 min.
4	1350 kg/m <sup>2</sup>	9	1550 kg/m <sup>2</sup>
5	1400 kg/m <sup>2</sup>		

La rupture totale a eu lieu sous la charge d'essai de 1850 kg/m<sup>2</sup>.

La fig. 6 représente les fissures sur les deux faces de la dalle simplement appuyée le long du pourtour; tous les quatre coins se soulèvent considérablement au cours du chargement. D'où la bifurcation des fissures.

Les numéros le long des fissures correspondent aux charges d'essai suivantes:

1	1000 kg/m <sup>2</sup>	5	1200 kg/m <sup>2</sup>	8	1300 kg/m <sup>2</sup> après 24 heures
2	1050 kg/m <sup>2</sup>	6	1250 kg/m <sup>2</sup>	9	1350 kg/m <sup>2</sup>
3	1100 kg/m <sup>2</sup>	7	1300 kg/m <sup>2</sup>	10	1400 kg/m <sup>2</sup>
4	1150 kg/m <sup>2</sup>				

La rupture finale est intervenue sous la charge d'essai de 1600 kg/m<sup>2</sup>.

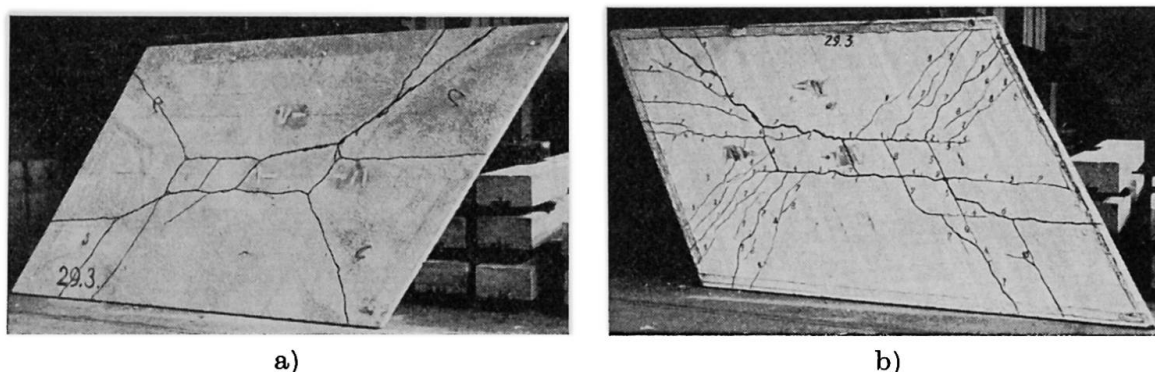


Fig. 6. Fissures sur la face a) supérieure, b) inférieure de la dalle oblique simplement appuyée le long du pourtour. Dalle n° 6.

### 3. Surface fléchie des dalles

Les flèches ont été mesurées au moyen de comparateurs au 0,001 mm. Au total, 48 diagrammes ont été obtenus montrant l'évolution des flèches dans les coupes de la surface déformée des dalles essayées. A titre d'exemple, deux diagrammes typiques seront présentés ici pour illustrer le processus de déformation.

La coupe médiane longitudinale de la surface fléchie de la dalle n° 2 (fig. 7) est construite selon les indications successives de cinq comparateurs. La ligne représentative des flèches est inclinée, même dans la partie gauche, voisine du côté libre, tandis qu'en théorie, on y suppose la ligne de rupture horizontale. L'inclinaison effective est causée par l'écroûissage de la plaque et par l'inter-

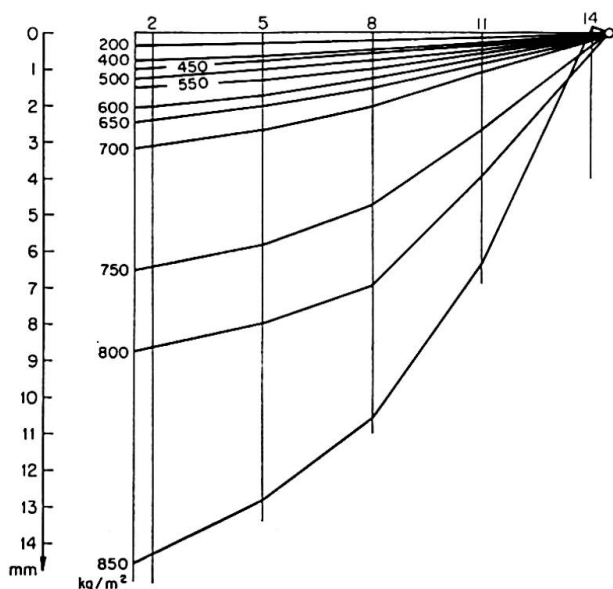


Fig. 7. Coupe médiane longitudinale de la surface déformée de la dalle n° 2 avec appui articulé le long de trois côtés.

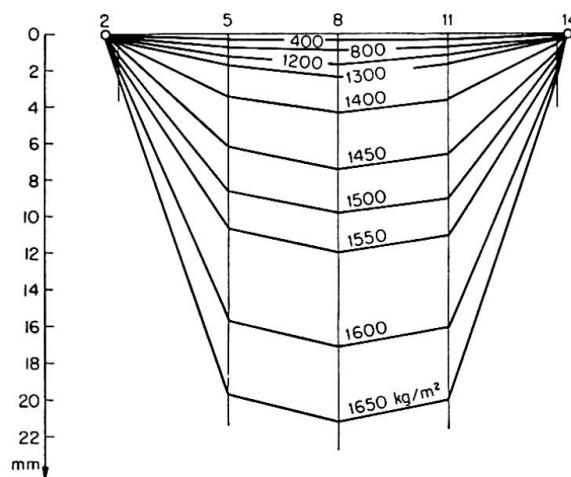


Fig. 8. Evolution des flèches dans la coupe médiane longitudinale de la dalle n° 4.

vention de déformations élastiques, ce qui produit une réserve de capacité portante.

La fig. 8 donne l'évolution des déformations dans la coupe médiane de la dalle n° 4 avec appui articulé le long du pourtour. Les flèches augmentent toujours vers le centre au lieu d'être constantes entre les comparateurs 5 et 11 où on suppose horizontale la ligne de rupture théorique.

### 4. Diagrammes charges-flèches

Les diagrammes charges-flèches ont été déterminés suivant les indications de comparateurs pour quinze points de chaque dalle essayée. A titre d'exemple,

l'auteur présente ici le diagramme relatif au centre du côté libre de la dalle n° 2 avec appui articulé le long de trois côtés (fig. 9) et celui relatif au centre de la dalle n° 4 avec appui articulé le long du pourtour (fig. 10).

Sur ces diagrammes, on peut observer la limite de la variation linéaire qui correspond à peu près à la naissance de la première fissure et la limite d'écoulement de la dalle, qui est caractérisée par une augmentation considérable des déformations. Après l'écoulement, la courbe charges-flèches arrive dans le domaine de l'écroutissage.

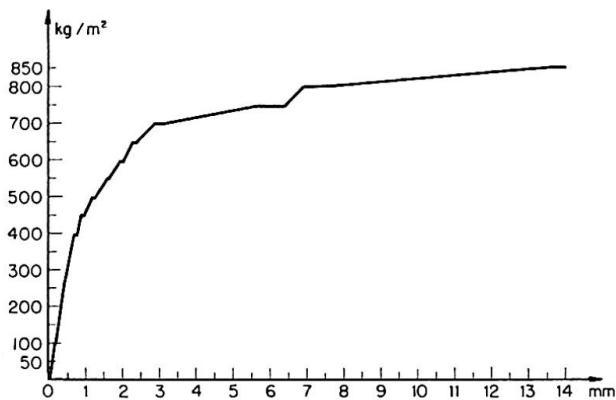


Fig. 9. Diagramme charges-flèches relatif au centre du côté libre de la dalle n° 2.

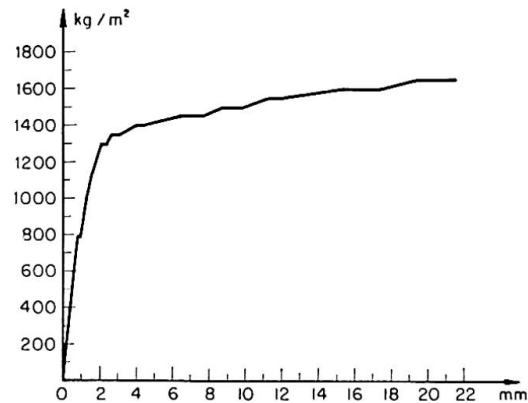


Fig. 10. Diagramme charges-flèches relatif au centre de la dalle n° 4.

### 5. Revue des résultats des essais

Les principaux résultats des essais sur six dalles obliques sont donnés dans le tableau 1. Ce tableau indique également la distance longitudinale à laquelle se trouvent les points de bifurcation des principales lignes de rupture par rapport aux côtés appuyés. Avec l'accroissement de cette distance, la charge limite diminue et réciproquement.

La limite de déformation a été prise pour la charge correspondant à la flèche égale à un centième de la portée perpendiculaire transversale, c'est-à-dire à la flèche de 15 mm.

Des données des essais, il ressort que la capacité portante des dalles avec appuis articulés est plus élevée que celle des dalles simplement appuyées. La charge théorique, à la limite d'écoulement de la dalle n° 1, est 765 kg/m<sup>2</sup>, celle de la dalle n° 3 est 705 kg/m<sup>2</sup>. Pour la dalle n° 4 nous obtenons 1130 kg/m<sup>2</sup> et pour la dalle n° 6: 1040 kg/m<sup>2</sup>.

En comparant les données expérimentales avec les résultats des calculs effectués selon la théorie des lignes de rupture, on voit que les dalles réelles ont des réserves considérables de capacité portante. Ces réserves sont dues à l'écroutissage non-uniforme des dalles, à l'intervention des déformations élastiques, à l'accroissement de la limite d'écoulement des armatures enrobées de



béton, à la solidarité des aciers et du béton, à la dispersion de rupture augmentant le travail de déformation limite et à d'autres effets moins importants.

### Résumé

L'auteur présente les résultats d'essais effectués sur des dalles obliques simples en béton armé soumises à une charge uniformément répartie et avec des conditions d'appui différentes. Une attention particulière est donnée à la formation et à l'évolution des fissures.

En comparant les données expérimentales avec les résultats des calculs effectués selon la théorie des lignes de rupture, on constate que les dalles réelles possèdent des réserves de capacité portante.

### Zusammenfassung

Der Verfasser zeigt die Ergebnisse von Versuchen an schiefen Stahlbetonplatten mit der gleichmäßigen Belastung und mit verschiedenen Auflagerungsbedingungen. Besondere Aufmerksamkeit wird der Risseentwicklung gewidmet.

Aus dem Vergleich von Versuchsergebnissen mit der Berechnung nach dem Bruchlinienverfahren kann man die Tragfähigkeitsreserve der wirklichen Platten sehen.

### Summary

The author presents the results of tests on skew reinforced-concrete plates under various conditions on the supports. Special attention is given to the development of cracks.

From a comparison of the test data with the results of an analysis on the basis of the yield-lines theory, the reserve in the load-carrying capacity of the actual plates becomes evident.