

**Zeitschrift:** IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht

**Band:** 7 (1964)

**Artikel:** Zur Einspannwirkung der Lagerung bei schiefen Brücken

**Autor:** Resinger, Fritz

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7870>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### III a 1

## Zur Einspannwirkung der Lagerung bei schiefen Brücken

*The Fixed-end Restraint Due to Skew Bridge Supports*

*Sur l'encastrement dû aux appuis de ponts biais*

FRITZ RESINGER

Dipl.-Ing., Dr. techn., Hochschuldozent, Technische Hochschule Graz

#### 1. Einleitung und Festlegung der Voraussetzungen für die systematische Untersuchung

Durch die schiefe Lagerung von Brücken entstehen infolge der lotrechten Belastung neben den Durchbiegungen auch Verdrehungen des Tragwerks um dessen Längsachse. Diese geometrisch bedingte Koppelung von Biegung und Torsion ergibt eine elastische Einspannung der Brückenden und damit eine Abminderung der Feldbiegemomente, allerdings bei gleichzeitigem Auftreten von Torsionsmomenten. Der Grad dieser Einspannung wird für eine gegebene Belastung abhängen: Vom Winkel zwischen der Auflagerlinie und der Brückenlängsachse, vom Verhältnis der Biege- zur Torsionssteifigkeit des Tragwerkes sowie vom Verhältnis der in Brückenlängsrichtung gemessenen Auflager Spannweite  $a$  zwischen spitzem und stumpfem Winkel zur Feldspannweite  $l$  zwischen den Auflagern in den stumpfen Winkeln. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß dieser Faktoren am schiefen Einfeld- sowie am Zweifeldbalken für charakteristische Lastfälle systematisch untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die vorhandenen Längen- und Breitenverhältnisse der Brücke noch die statische Auffassung des Systems als schiefgelagerten Stab erlauben [1], [2], [3]; der Querschnitt im Feldteil  $l$  (vgl. Fig. 1) konstant und symmetrisch, in den spitzen Endteilen  $a$  nach einem einfachen Gesetz verläuft; die Auflagerlinien der beiden Widerlager bzw. des Pfeilers parallel sind; Einleitungsprobleme vernachlässigt werden dürfen und die Torsionsbetrachtung ohne Berücksichtigung von Wölbeinflüssen erfolgen kann.

#### 2. Ermittlung der statisch unbestimmten Einspannmomente

Der für den einfach statisch unbestimmten schiefen Einfeldbalken gewählte Gleichgewichtszustand  $X_1 = 1$  mit den zugehörigen Biegemomenten  $M'_B$  und Torsionsmomenten  $M'_T$  wurde in Fig. 1 dargestellt. Der Gleichgewichtszustand für «gleichmäßig verteilte Vollast» und «Einzellast in Brückenmitte» wurde nach Fig. 2 so gewählt, daß am Grundsystem die Ein-

spannbiemomente an der Übergangsstelle zwischen Feldteil und spitzem Endteil verschwinden. Analog sind für den schiefen Zweifeldbalken unter «gleichmäßig verteilter Volllast» der aus Symmetriegründen nur zweifach statisch unbestimmt wird, die Gleichgewichtszustände  $X_1 = 1$  und  $X_2 = 1$

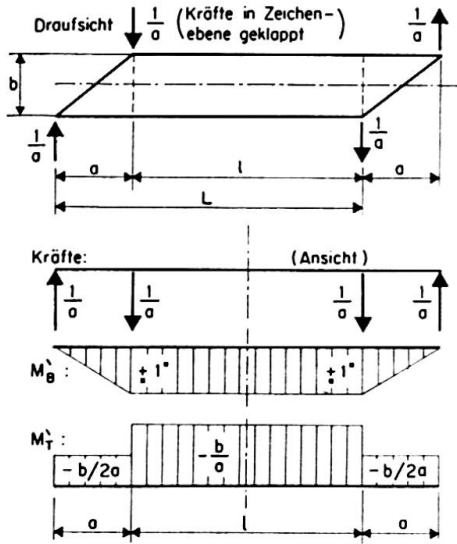


Fig. 1. Zustand  $X_1 = 1$  am schiefen Einfeldbalken.

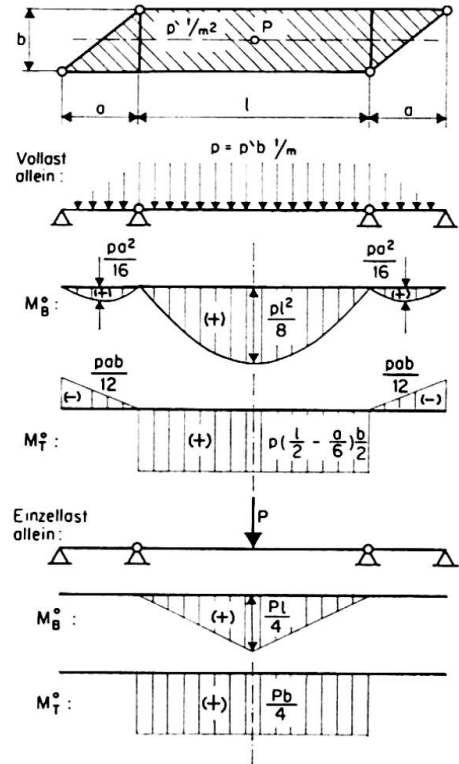


Fig. 2. Zustände infolge Volllast und infolge Einzellast in Brückenmitte am Grundsystem.

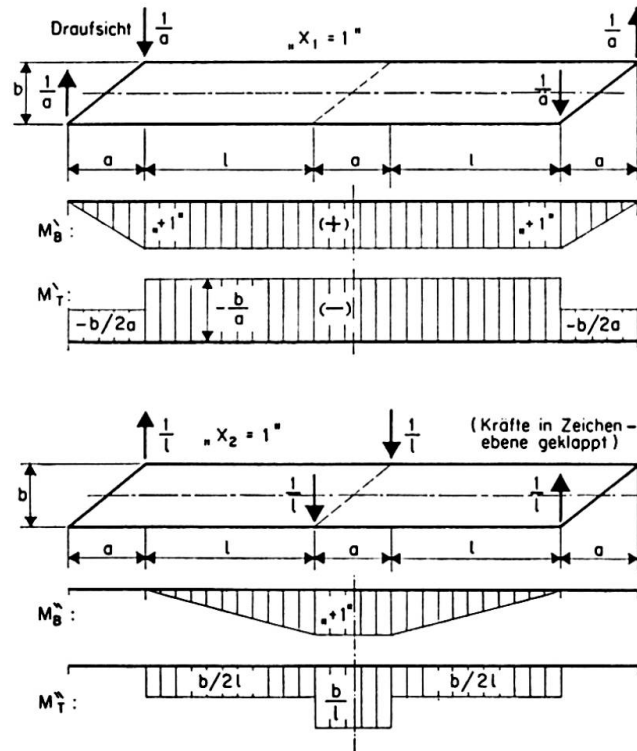


Fig. 3. Zustände  $X_1 = 1$  und  $X_2 = 1$  am schiefen Zweifeldbalken.

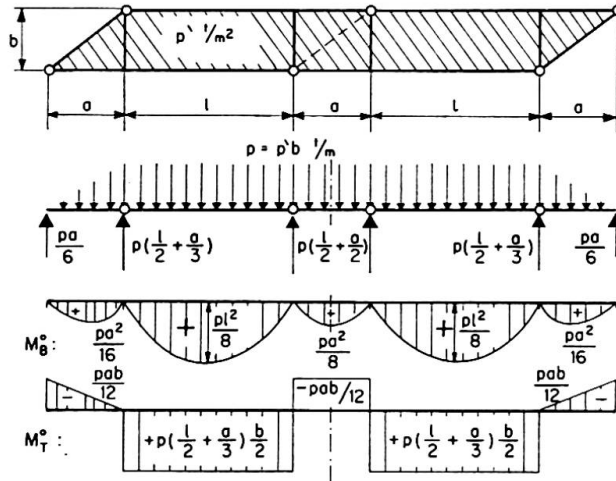


Fig. 4. Vollastzustand am Grundsystem des Zweifeldbalkens.

nach Fig. 3 und der Belastungszustand am Grundsystem nach Fig. 4 angenommen. Mit den aus der bekannten Überlagerung der entsprechenden Momentenlinien ermittelten Formänderungswerten

$$\delta_{ik} = \sum \int M_{Bi} M_{Bk} \frac{ds}{EI_B} + \sum \int M_{Ti} M_{Tk} \frac{ds}{GI_T}$$

ergeben sich die Bedingungsgleichungen für die unbekanntene  $X$ -Werte:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + \delta_{10} &= 0 && \text{für den Einfeldbalken und} \\ X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} &= 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für den Zweifeldbalken.}$$

Zur Vereinfachung der Darstellung der  $\delta_{ik}$ -Werte ermitteln wir (mit dem beliebigen Festwert  $I_{BC}$ )

$$\delta_{ik} = \delta_{ik} \frac{EI_{BC}}{l}$$

und führen als Abkürzungen die charakteristischen dimensionslosen Systemkennwerte

$$\alpha = \frac{a}{l} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{EI_B b^2}{GI_T a^2}$$

ein, wobei  $\alpha$  das Verhältnis der Auflager- zur Feldspannweite und  $\beta$  das mit dem Auflagerwinkel gekoppelte Verhältnis der Biege- zur Torsionssteifigkeit ausdrücken. Berücksichtigt man noch den Verlauf des Querschnitts in den spitzen Endteilen beim Biegeanteil annähernd durch den Mittelwert  $I_{BC}/I_B = 1,5$  und beim Torsionsanteil mit  $I_{TC}/I_T = 2,0$ , wobei der Zeiger  $C$  sich auf den Wert des konstanten Mittelteiles bezieht, so erhalten wir aus der Überlagerung der Momentenbilder 1 und 2

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{11} &= (1 + \alpha)(1 + \beta), \\ \bar{\delta}_{10} &= \frac{pl^2}{12} [(1 + \alpha^3) - \alpha\beta(1 + \alpha)(3 - \alpha)] \quad \text{für Vollast,} \\ \bar{\delta}'_{10} &= \frac{Pl}{8} [1 - 2\alpha\beta] \quad \text{für Einzellast}\end{aligned}$$

und damit die Einspannmomente am Einfeldbalken:

für Vollast

$$M_1 = X_1 = -\frac{\bar{\delta}_{10}}{\bar{\delta}_{11}} = \frac{pl^2}{12} f_1(\alpha, \beta),$$

für Einzellast in Brückenmitte

$$M_1 = X_1 = -\frac{\bar{\delta}'_{10}}{\bar{\delta}_{11}} = \frac{Pl}{8} f_2(\alpha, \beta).$$

Analog ergeben sich aus der Überlagerung der Momentenverteilungen nach den Fig. 3 und 4 die Formänderungswerte für den Zweifeldbalken:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_{11} &= 2(1 + \alpha)(1 + \beta), \\ \bar{\delta}_{12} &= \bar{\delta}_{21} = (1 + \alpha)(1 - \alpha\beta), \\ \bar{\delta}_{22} &= \frac{2}{3} + \alpha + \alpha^2\beta\left(\frac{1}{2} + \alpha\right), \\ \bar{\delta}_{10} &= \frac{pl^2}{12} 2[1 + \alpha^3 - \alpha\beta(1 + \alpha)(3 - \alpha)], \\ \bar{\delta}_{20} &= \frac{pl^2}{12} [1 + \alpha^3 + \alpha^2\beta(1 + \alpha)(3 - \alpha)]\end{aligned}$$

und damit die interessierenden Einspannmomente  $M_1$  am stumpfen Eck des Widerlagers und  $M_2$  an den Pfeilerlagern:

$$\begin{aligned}M_1 &= X_1 = \frac{pl^2}{12} f_3(\alpha, \beta), \\ M_2 &= X_1 + X_2 = \frac{pl^2}{12} f_4(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

An diesen Ergebnissen fällt zunächst auf, daß die gesuchten Einspannmomente außer den Absolutwerten der Belastung und der Feldspannweite nur mehr von den beiden dimensionslosen Systemkennwerten  $\alpha$  und  $\beta$  abhängen. Daher können die Ergebnisse in ebenen Diagrammen dargestellt werden, wie dies in den Fig. 5, 6 und 7 geschehen ist.

Zur Wahl der Bereichsweite der beiden Kennwerte in den Diagrammen sei kurz folgendes bemerkt:

Die untere Grenze von  $\alpha = 0$  wurde nur für Interpolationszwecke dargestellt, da für  $\alpha = 0$  der Wert  $\beta$  unendlich wird und damit nur ein Punkt dieser

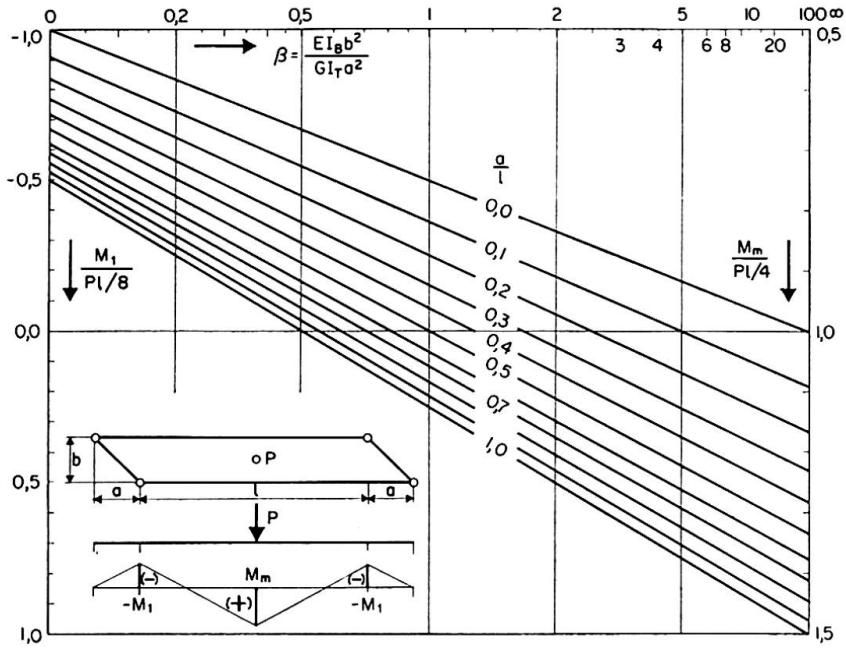


Fig. 5. Einspan- und Feldmomente infolge Einzellast in Brückenmitte am schiefen Einfeldbalken.

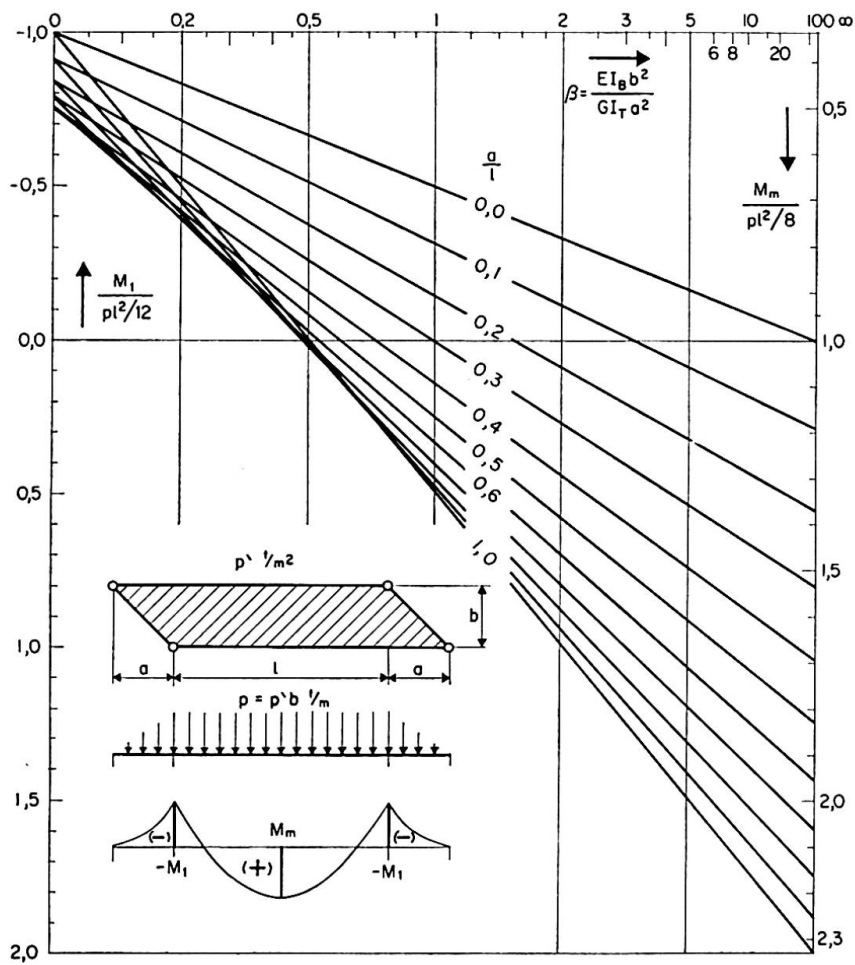


Fig. 6. Einspan- und Feldmomente infolge Vollast am Einfeldbalken.

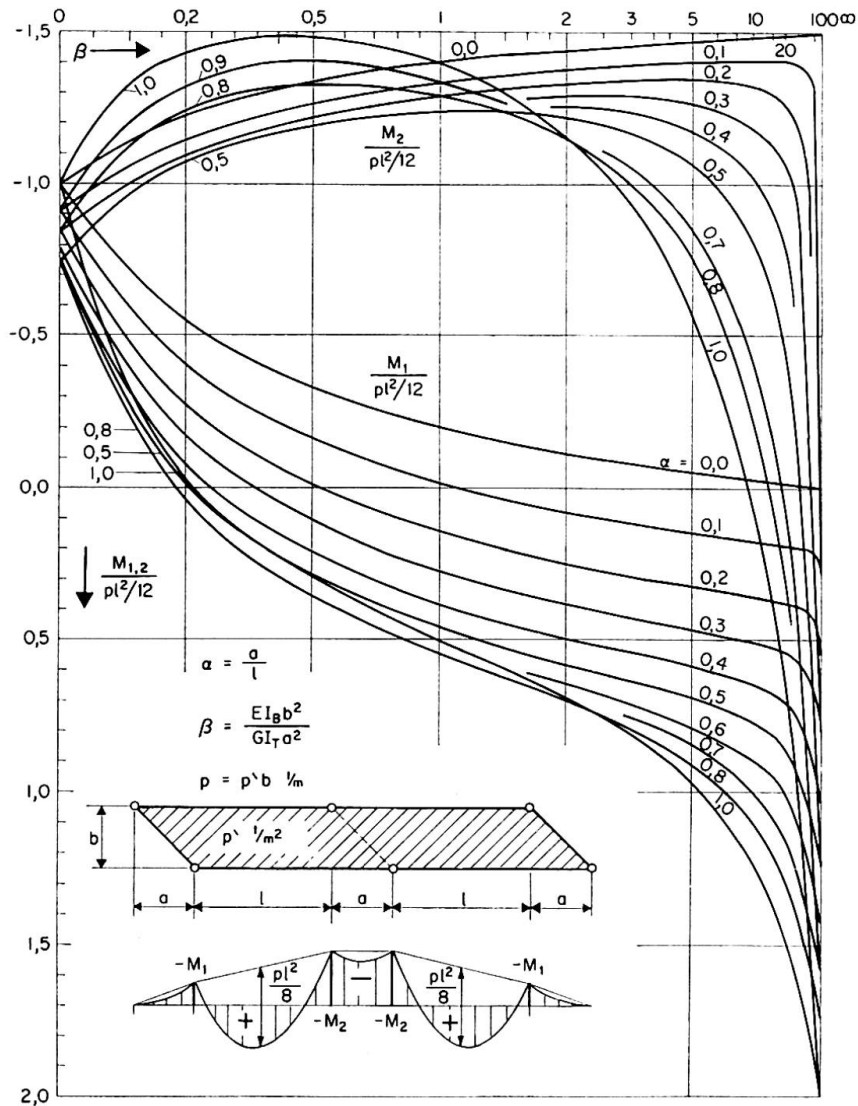


Fig. 7. Stützmomente infolge Vollast am schiefen Zweifeldbalken.

Kurve sinnvoll ist (gerade Brücke). An der oberen Grenze der dargestellten  $\alpha$ -Werte ( $\alpha = 1$ ) ist wegen des Überganges vom Stab zum Flächentragwerk (Stabauffassung des Systems verliert seine Berechtigung) keine allzu große Genauigkeit der Ergebnisse zu erwarten.

Der  $\beta$ -Wert kann wegen der vorkommenden Auflagerwinkel zwischen null und unendlich liegen, obwohl das Verhältnis  $I_B/I_T$  für eine Reihe von ausgeführten Brückenkastenquerschnitten in dem Bereich zwischen 0,5 und 4 ermittelt wurde. Der ganze Bereich war also nur mit einer nichtlinearen Skala darstellbar. Es bot sich an, den Wert  $\frac{\beta}{1+\beta}$  linear aufzutragen, da sich hierfür die Ergebnisse am Einfeldbalken als Gerade darstellen lassen (Fig. 5 und 6). Dieselbe Teilung wurde dann auch für den Zweifeldbalken (Fig. 7) beibehalten, da sich für den hauptsächlich interessierenden Bereich zwischen 0 und 20 noch gute Ablesegenauigkeit ergab.

### 3. Betrachtung und Anwendung der Ergebnisse, Vergleich mit den Biegemomenten des geraden Balkens

Die obere Grenze der Einspannung ist verständlicherweise gegeben durch das Volleinspannmoment ( $-Pl/8$ ,  $-pl^2/12$ ). Mit sinkender Torsionssteifigkeit des Tragwerkes bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen fällt auch das negative Einspannmoment, bis es sogar in den positiven Bereich wechselt. Die verschiedenen Tendenzen bei Änderung der Brückenbreite, des Auflagerwinkels, der Steifigkeitsverhältnisse usw. sind durch die entsprechende Änderung der Kennwerte  $\alpha$  und  $\beta$  aus den Diagrammen eindeutig zu erkennen.

Der Fall des schiefen Zweifeldbalkens unter gleichmäßig verteilter Belastung nur in einem schiefen Feld kann mit Hilfe entsprechender Lastzerlegung (halbe gleichmäßig verteilte Last in beiden Feldern und halbe in den beiden Feldern gegengleich wirkende Last, die aus Antimetrie Gründen dem Einfeldbalken unter Vollast entspricht) aus den ermittelten Ergebnissen am Ein- und Zweifeldbalken (Fig. 6 und 7) superponiert werden.

Für den Vergleich der Ergebnisse der Feldmomente mit denen am geraden Balken haben wir als Stützweite des geraden Tragwerkes  $L = l + a = l(1 + a/l)$  einzusetzen (vgl. Fig. 1). Es ergeben sich infolge einer Einzellast in Brückenmitte also die  $(1 + a/l)$ -fachen Werte von  $Pl/4$  und für die Vollast die  $(1 + a/l)^2$ -fachen Werte von  $pl^2/8$ . Der letztere Faktor ergibt sich auch beim Stützmoment des geraden Zweifeldbalkens unter Vollast. Ein Vergleich mit den Ergebnissen am schiefen Balken (Fig. 5, 6 und 7) zeigt deutlich die Wirksamkeit der schiefen Lagerung, sobald das Tragwerk entsprechende Torsionssteifigkeit besitzt. Es ergeben sich zum Beispiel für ein Brückentragwerk mit einem Auflagerwinkel von  $45^\circ$ ,  $a = 6$  m,  $b = 6$  m,  $l = 30$  m und  $E I_B / G I_T = 2,0$  und daher  $\alpha = 0,2$  und  $\beta = 2,0$  infolge einer Einzellast in Brückenmitte (nach Fig. 5)  $M_m = 0,975 Pl/4$  und infolge Vollast (nach Fig. 6)  $M_m = 1,05 pl^2/8$ , während sich die entsprechenden Werte am geraden Balken der Stützweite  $L = 36$  m zu  $1,2 Pl/4$ , bzw.  $1,44 pl^2/8$ , also 23% bzw. 37% höher ergeben.

#### Schrifttumshinweise

1. F. WANSLEBEN: Beitrag zur Berechnung schiefer drillsteifer Brücken. Stahlbau 24 (1955), H. 10.
2. G. HOELAND: Der Kräfteverlauf in schiefen Hohlkästen. Stahlbau 29 (1960), H. 3.
3. F. RESINGER und H. EGGER: Die Kummerbrücke, ein interessantes Kastenverbundsystem. Bauingenieur 35 (1960), H. 6.

#### Zusammenfassung

Die Einspannwirkung der schiefen Lagerung von torsionssteifen Brücken wird für charakteristische Lastfälle systematisch untersucht und in Dia-



grammen in Abhängigkeit von zwei dimensionslosen Systemkennwerten dargestellt. Diese Systemkennwerte sind bestimmt durch den Auflagerwinkel, das Verhältnis der Biege- zur Torsionssteifigkeit des Tragwerks und das Verhältnis der Auflager- zur Feldspannweite.

### Summary

The fixed-end restraint arising from the skew supports of torsionally rigid bridges is studied systematically for given characteristic imposed loads; the results are presented, in the form of diagrams, in relation to two dimensionless parameters characterising the system. The value of these parameters is determined by the skew angle, the ratio of the flexural and torsional rigidities and the ratio of the distance of the supports to the width of the span.

### Résumé

Pour les ponts rigides à la torsion, l'encastrement dû à des appuis biais est étudié systématiquement pour des surcharges caractéristiques déterminées; les résultats sont présentés sous forme de diagrammes en fonction de 2 paramètres caractérisant le système. La valeur de ces paramètres est déterminée par l'angle du biais, le rapport des rigidités flexionnelle et torsionnelle et celui de la distance des appuis à la portée.