

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 7 (1964)

Artikel: Pont courbe considéré comme une poutre à axe brisé

Autor: Wierzbicki, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7873>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 21.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

IIIa4

Pont courbe considéré comme une poutre à axe brisé

Gekrümmte Brücke als Balken mit geknickter Achse betrachtet

Curved Bridge Considered as a Beam with Broken Axis

W. WIERZBICKI

Prof. Dr., Dr. h. c., Membre de l'Académie Polonaise des Sciences, Varsovie

La construction d'un pont courbe se compose d'un certain nombre de poutres dont chacune doit être curviligne et plane.

On peut souvent considérer les ponts courbes métalliques à plusieurs travées et de grande longueur comme des constructions qui, dans leur section transversale, sont composées de deux ou plusieurs poutres brisées dans le plan et dont les nœuds sont appuyés sur les piliers du pont. Les jonctions transversales des poutres particulières de la construction justifient d'habitude — comme c'est le cas pour les ponts droits — le calcul des dites poutres comme des éléments indépendants se trouvant soumis à la charge transmise par le tablier du pont. Ceci admis, nous pouvons calculer la poutre continue polygonale inscrite dans l'axe courbe de la voie (fig. 1).

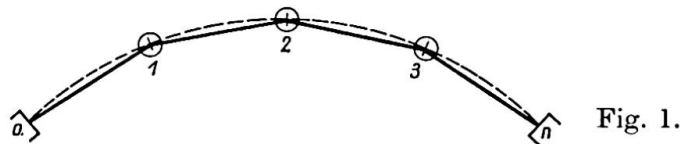


Fig. 1.

La section transversale aux appuis de la poutre continue, brisée dans le plan, ne peut être perpendiculaire qu'à l'axe d'une des deux travées consécutives (à leur joint de jonction). Par conséquent, les sections particulières des poutres au droit des appuis, subissent non seulement une inclinaison par rapport au plan horizontal mais aussi une rotation par rapport aux axes des travées particulières. Il nous faut donc recourir à la représentation vectorielle des moments et des déformations [1], [3].

La poutre présentée sur la fig. 2 repose aux points $1, 2, 3, \dots, x, x+1, n-1$ sur les appuis mobiles dans le plan parallèle au plan horizontal de l'axe de la poutre, ses extrémités étant encastrées rigidement aux points 0 et n . Par conséquent, la poutre présentée est $n+2$ fois hyperstatique.

Soient M_x et M'_x les moments de flexion et \mathfrak{M}_x^0 les moments de torsion dans les travées, tandis que β_x est l'angle de deux travées consécutives. Les plans aux traces $0s'$ et $0's'$ — correspondant aux vecteurs M_x et M'_x — découpent dans la poutre continue des coins (nœuds) $s'0s$ $0's'$ (fig. 3). Etant donné que les dimensions des nœuds par rapport à la longueur des travées

sont petites, nous pouvons admettre que les vecteurs de tous les moments agissant sur un nœud donné traversent son centre x .

Pour assurer l'équilibre des nœuds particuliers d'une poutre continue il faut que la somme vectorielle des moments agissant sur un nœud donné, à savoir la somme des moments M'_x , \mathfrak{M}_x^0 , $-M_{x+1}$ et $-\mathfrak{M}_{x+1}^0$, soit égale à zéro.

$$M'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \sin \beta_x + M_{x+1} \cos \beta_x, \quad (1)$$

$$\mathfrak{M}_x^0 = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \cos \beta_x - M_{x+1} \sin \beta_x. \quad (2)$$

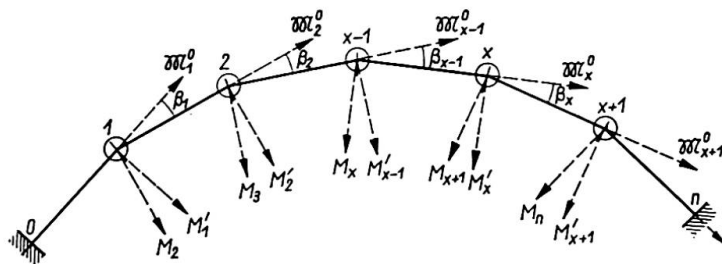


Fig. 2.

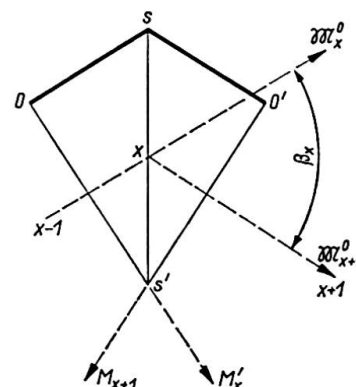


Fig. 3.

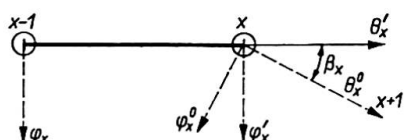


Fig. 4.

Les composantes de la déformation de la travée quelconque $x-1, x$ sont présentées sous forme vectorielle sur la fig. 4. Ci-dessous nous donnons les notations employées:

φ_x et φ'_x désignent les angles d'inclinaison de la section transversale de la travée $x-1, x$ au point $x-1$ et x , respectivement, par rapport au plan vertical.

φ_x^0 l'angle d'inclinaison, par rapport au plan vertical, de la section oblique de la travée $x-1, x$ au point x , perpendiculaire à l'axe de la travée $x, x+1$.

θ_x l'angle de torsion de la travée $x-1, x$.

θ_x^0 l'angle de rotation de la section transversale de la travée $x, x+1$ au point x , perpendiculaire à l'axe de la travée $x, x+1$, par rapport à cet axe.

θ'_x l'angle de rotation, par rapport à l'axe $x-1, x$, de la section oblique de la travée $x-1, x$ au point x , perpendiculaire à l'axe de la travée $x, x+1$.

Nous considérons les angles φ_x , φ_x^0 et φ'_x comme positifs si, en observant le pont de son côté concave, les sections correspondantes tournent à droite. Les angles θ'_x et θ_x^0 seront positifs si — considérées de gauche à droite — les sections correspondantes de la poutre tournent à droite par rapport aux axes des travées particulières.

En projetant les vecteurs φ'_x et θ'_x sur les directions φ_x^0 et θ_x^0 on obtient

$$\varphi_x^0 = \varphi'_x \cos \beta_x - \theta'_x \sin \beta_x, \tag{3}$$

$$\theta_x^0 = \varphi'_x \sin \beta_x + \theta'_x \cos \beta_x, \tag{4}$$

compte tenu que:

$$\theta'_x = \theta_{x-1}^0 + \theta_x. \tag{5}$$

Les déformations φ_x et φ'_x de la travée $x - 1, x$ considérée appuyée librement aux deux extrémités peuvent être présentées comme suit

$$\varphi_x = \frac{M_x l_x}{3 E J} - \frac{M'_x l_x}{6 E J} + \frac{\mathfrak{T}_{x-1}}{E J}, \tag{6}$$

$$\varphi'_x = \frac{M'_x l_x}{3 E J} - \frac{M_x l_x}{6 E J} + \frac{\mathfrak{T}_x}{E J}, \tag{7}$$

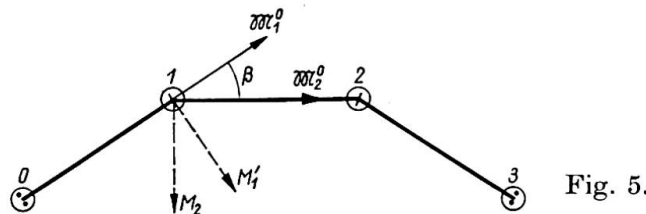
où l_x désigne la longueur de la travée $x - 1, x$, \mathfrak{T}_{x-1} et \mathfrak{T}_x — les forces transversales dues à la charge secondaire sur la travée $x - 1, x$ aux extrémités $x - 1$ et x . L'angle de torsion de la travée $x - 1, x$ dû au moment \mathfrak{M}_x^0 est donné par la formule

$$\theta_x = \frac{\mathfrak{M}_x^0 l_x}{G J_0}. \tag{8}$$

Etant donné que la somme des angles d'inclinaison, par rapport au plan vertical, de la section oblique de la travée $x - 1, x$ au point x (cette section étant perpendiculaire à l'axe de la travée $x, x + 1$) et de la section transversale de la travée $x, x + 1$ au point x , doit être égale à zéro, nous obtenons à chaque nœud, la condition:

$$\varphi_x^0 + \varphi_{x+1} = 0. \tag{9}$$

A partir des relations (1)—(8) nous arrivons — en tenant compte de la relation (9) — à un système d'équations linéaires entre les moments de flexion et de torsion aux appuis du pont.



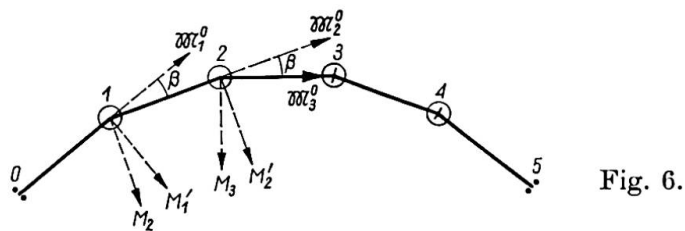
Les considérations présentées ci-dessus nous permettent de formuler certaines conclusions concernant le travail d'une poutre du pont brisée dans le plan. Considérons, à titre d'exemple, une poutre continue brisée dans le plan reposant sur quatre appuis (fig. 5) soumise à une charge uniformément répartie (charge unitaire q kg/m). Aux points 1 et 2 nous avons des appuis mobiles; les appuis aux points 0 et 3 sont, il est vrai, à articulations glissantes, cependant la rotation des sections 0 et 3 par rapport aux axes 01 et 23 demeure impos-

sible. Vu la symétrie de la charge, la poutre est une fois hyperstatique. Nous déterminons le moment $M_x = M_2$ et nous donnons ci-dessous les moments M_2 pour différents angles β et différentes valeurs de $\epsilon = EJ/GJ_0$:

β	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 2$	$\epsilon = 10$
45°	$-0,0600 ql^2$	$-0,0422 ql^2$	$-0,0124 ql^2$
30°	$-0,0777 ql^2$	$-0,0618 ql^2$	$-0,0239 ql^2$
10°	$-0,0964 ql^2$	$-0,0930 ql^2$	$-0,0732 ql^2$
0°	$-0,1000 ql^2$	$-0,1000 ql^2$	$-0,1000 ql^2$

On voit que l'influence de ϵ sur les moments de flexion décroît à mesure que l'angle β diminue.

Afin d'évaluer l'influence exercée par la position de la travée du pont sur les moments de torsion qui s'y développent, nous allons prendre l'exemple d'une poutre à cinq travées (voir fig. 6). La poutre est soumise à une charge



uniformément répartie, symétrique par rapport au milieu du pont. Nous prenons $\beta = 30^\circ$ et la longueur de la travée $l_x = l$; la poutre est, en principe, cinq fois hyperstatique, mais le nombre des inconnues hyperstatiques se réduit dans ce cas à deux. Le nombre total de moments inconnus aux appuis est égal à six, à savoir M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M'_1 , M'_2 , M'_3 et M'_4 . Etant donné les conditions de symétrie, le moment $M_3 = 0$.

Pour déterminer ces moments, nous nous servons de quatre équations du type (1) et (2) et de deux équations du type (9). Ainsi nous arrivons à:

$$\begin{aligned} M_3 &= -0,0335 ql^2, & M'_2 &= -0,0295 ql^2, \\ M_2 &= -0,0900 ql^2, & M'_3 &= -0,0168 ql^2, \\ M_1 &= -0,0688 ql^2, & M'_4 &= -0,0595 ql^2. \end{aligned}$$

On voit que, dans la partie centrale du pont, les moments de torsion décroissent et que la sollicitation des travées particulières s'approche de celle d'une poutre droite. Le calcul d'une poutre pour différents angles β nous mène à la conclusion que, pour de petites valeurs de β (ne dépassant pas 10°), les poutres en question peuvent être calculées comme si elles étaient des poutres droites continues.

Dans le cas d'un pont courbe à un nombre élevé de travées, il nous faut établir une équation de liaison, entre les moments aux appuis successifs de la poutre, analogue à l'équation des trois moments de la poutre droite continue. La poutre continue brisée dans le plan a sur chaque appui quatre moments différents, à savoir M'_x , \mathfrak{M}_x^0 , M_{x+1} et \mathfrak{M}_{x+1}^0 . Par conséquent, pour établir une analogie avec l'équation des trois moments, nous considérons seulement les moments \mathfrak{M}_x^0 qui — la poutre étant chargée verticalement — ne varient pas le long de ses travées particulières. Nous obtenons alors une équation de cinq moments successifs de torsion de la forme suivante [2]:

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x+1}^0 - 6 \mathfrak{M}_x^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x-1}^0 + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = Q_x \tag{10}$$

où le symbole \mathfrak{M}_x^0 désigne les moments de torsion de la poutre aux appuis, β : l'angle entre les travées particulières de la poutre et Q_x : un terme indépendant de \mathfrak{M}_x^0 .

Nous résumons maintenant le raisonnement qui nous amène à l'équation (10) et nous montrons comment s'en servir pour déterminer toutes les grandeurs hyperstatiques dans une poutre continue brisée dans le plan, en nous basant sur les équations (1)–(9).

L'équation (9), considérée avec l'équation (3), donne, pour $\beta_x = \text{const.}$

$$\varphi_x^0 \cos \beta - \theta'_x \sin \beta = -\varphi_x; \tag{11}$$

étant donné qu'on obtient, d'après les équations (4) et (5)

$$\theta_{x-1}^0 \sin \beta = \varphi'_{x-1} + \varphi_x \cos \beta \tag{12}$$

l'équation (11) devient:

$$\varphi'_x \cos \beta - \varphi'_{x-1} - \varphi_x \cos \beta - \theta_x \sin \beta = -\varphi_{x+1}. \tag{13}$$

Nous résolvons maintenant le système d'équations (1)–(2) par rapport à M'_x et M_x . Il vient

$$M'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{1}{\sin \beta} - \mathfrak{M}_x^0 \text{ctg} \beta, \tag{14}$$

$$M_x = \mathfrak{M}_x^0 \text{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{1}{\sin \beta}. \tag{15}$$

Ces formules permettent de calculer les moments de flexion aux appuis pour chaque travée du pont, après avoir résolu l'équation des cinq moments de torsion par rapport à \mathfrak{M}_x^0 . De plus, elles peuvent servir à établir l'équation (10). Grâce à ces équations nous pouvons notamment écrire les formules (6) et (7) sous la forme:

$$\varphi_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{f}{\sin \beta} + \mathfrak{M}_x^0 f \text{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{2f}{\sin \beta} + \psi_x, \tag{16}$$

$$\varphi'_x = \mathfrak{M}_{x+1}^0 \frac{2f}{\sin \beta} - \mathfrak{M}_x^0 f \text{ctg} \beta - \mathfrak{M}_{x-1}^0 \frac{f}{\sin \beta} + \psi'_x, \tag{17}$$

$$\text{où } f = \frac{l}{6 EJ} = \frac{l}{2GJ_0}, \quad \psi_x = \frac{\mathfrak{I}_{x-1}}{EJ}, \quad \psi'_x = \frac{\mathfrak{I}_x}{EJ}.$$

En introduisant ces notations dans l'équation (13), nous arrivons à l'équation (10). L'expression de Q_x sera alors :

$$Q_x = \frac{\sin \beta}{f} (-\psi'_x \cos \beta + \psi'_{x-1} + \psi_x \cos \beta - \psi_{x+1}). \quad (18)$$

Dans le cas où les travées d'une poutre continue brisée dans le plan ne sont pas de longueur égale, on doit introduire les longueurs de ces travées dans la partie gauche de l'équation des cinq moments de torsion. Si l'on admet une variation de ϵ , ce n'est que le terme médian de l'équation qui subira un changement mais, dans la construction des ponts, ϵ varie peu et cette variation s'exprime par le remplacement, dans l'équation (10), du coefficient 6 par le coefficient suivant :

$$2 \left(\cos^2 \beta + 2 + \frac{f_1}{2f} \sin^2 \beta \right) \quad \text{pour } f_1 = \frac{l}{GJ_0}.$$

Nous pouvons utiliser l'équation des cinq moments de torsion de deux façons. Premièrement comme un système d'équations linéaires et deuxièmement comme une équation aux différences finies du quatrième ordre qu'on intégrera.

La solution de l'équation (10) représente la somme

$$\mathfrak{M}_x^0 = \mu_x^0 + \mu_x \quad (19)$$

où μ_x^0 désigne une solution particulière, tandis que μ_x est la solution générale de l'équation

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x+1}^0 - 6 \mathfrak{M}_x^0 + 2 \cos \beta \mathfrak{M}_{x-1}^0 + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = 0. \quad (20)$$

La solution μ_x est de la forme :

$$\mu_x = C_1 e^{x\alpha_1} + C_2 e^{-x\alpha_1} + C_3 e^{x\alpha_2} + C_4 e^{-x\alpha_2}, \quad (21)$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes, tandis que α peut être déterminé d'après l'équation

$$\cosh \alpha = -\frac{\cos \beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{4} + 2}. \quad (22)$$

La solution μ_x^0 dépend de la forme du terme Q_x , donc de la charge appliquée au pont.

Si toutes les travées d'une poutre continue brisée dans le plan sont chargées uniformément, notamment symétriquement par rapport au centre de chaque travée (fig. 7), on aura

$$\psi'_x = \psi'_{x-1} = \psi_x = \psi_{x+1}, \quad (23)$$

$$Q_x = 0. \quad (24)$$

Si la charge des travées de la poutre est égale et uniforme, sans cependant être symétrique (fig. 8), on a alors:

$$\psi'_x = \psi'_{x-1}, \quad \psi_x = \psi_{x+1}, \quad \psi'_x \neq \psi_x, \tag{25}$$

$$Q_x = \frac{\sin \beta}{f} (\psi'_x - \psi_x) (1 - \cos \beta). \tag{26}$$

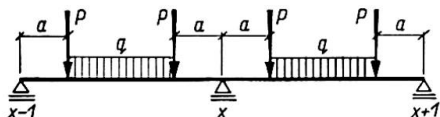


Fig. 7.

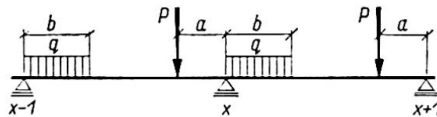


Fig. 8.

On présente souvent le terme Q_x comme suit:

$$Q_x = ax + b. \tag{27}$$

On doit rechercher alors la solution μ_x^0 sous la forme

$$\mu_x^0 = Ax + B \tag{28}$$

où a, b, A et B sont des constantes.

L'équation (10) revêt dans ce cas la forme

$$\mathfrak{M}_{x+2}^0 + 2 \cos \beta (\mathfrak{M}_{x+1}^0) - 6 (\mathfrak{M}_x^0) + 2 \cos \beta (\mathfrak{M}_{x-1}^0) + \mathfrak{M}_{x-2}^0 = ax + b. \tag{29}$$

Après avoir introduit l'expression (28) dans l'équation (29) et identifié les termes de même degré en x des deux côtés de l'équation, nous trouvons les coefficients A et B , ainsi que la solution

$$\mu_x^0 = -\frac{ax + b}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \tag{30}$$

Ainsi, nous arrivons à la solution suivante de l'équation aux différences finies

$$\mathfrak{M}_x^0 = C_1 e^{x\alpha_1} + C_2 e^{-x\alpha_1} + C_3 e^{x\alpha_2} + C_4 e^{-x\alpha_2} - \frac{ax + b}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}}. \tag{31}$$

Les coefficients C_1, C_2, C_3 et C_4 peuvent être déterminés d'après les conditions aux appuis des extrémités d'une poutre continue brisée dans le plan.

Considérons le cas, qui peut être d'une importance considérable pour les projets de ponts courbes, à savoir celui d'une poutre continue brisée dans le plan, appuyée librement aux extrémités, les travées particulières de la poutre étant soumises à une charge uniforme. On admet, en outre, que les angles formés par les travées sont les mêmes et que les longueurs des travées sont égales (fig. 9).

D'après les conditions aux extrémités des poutres, il vient

$$\mathfrak{M}_0^0 = \mathfrak{M}_n^0 = M_1 = M'_n = 0, \tag{32}$$

En introduisant les coefficients C comme fonctions du moment inconnu dans l'équation (4) et en posant que la rotation θ'_n de la section finale de la poutre est égale à zéro, nous arrivons à l'équation du type:

$$F(\mathfrak{M}^0) = 0 \quad (37)$$

pour le moment inconnu \mathfrak{M}^0 . En considérant le dit moment comme une charge additionnelle sollicitant la poutre continue, nous pouvons calculer les autres moments \mathfrak{M}_x^0 ; à l'aide des relations (14) et (15), nous calculons les moments de flexion aux appuis.

Ouvrages cités

1. W. WIERZBICKI: «Sur le calcul des poutres à axe brisé.» Mémoires et Comptes Rendus des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France, 1927.
2. W. WIERZBICKI: «De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions.» Association Internationale des Ponts et Charpentes, «Mémoires» 1936.
3. W. WIERZBICKI: «Rozprawy z mechaniki budowli.» Varsovie 1958, p. 137.

Résumé

Le pont courbe peut être considéré, dans nombre de cas, comme une construction continue, composée (dans la section transversale) de deux ou plusieurs poutres continues brisées dans le plan et appuyées aux nœuds sur les piliers du pont. Cette communication présente les relations entre les moments aux appuis ainsi qu'entre les déformations; ces expressions sont analysées et on en tire les conclusions appropriées. On attache une importance toute particulière à l'équation de cinq moments de torsion successifs dans la poutre, ainsi qu'aux conséquences qui en découlent. On présente en outre des formules pour le calcul des moments fléchissants aux appuis à partir des moments de torsion.

Zusammenfassung

Eine gekrümmte Brücke kann in der Regel als eine kontinuierliche Konstruktion betrachtet werden, die aus zwei oder mehreren Hauptträgern mit geknickter Achse besteht. Die Hauptträger ruhen in den Knotenpunkten auf den Brückenpfeilern.

In der vorliegenden Arbeit werden Beziehungen für die Stützmomente und Formänderungen eines durchlaufenden Balkens mit geknickter Achse angegeben und aus den abgeleiteten Formeln die entsprechenden Schlußfolgerungen für die Verwendung als Hauptträger von gekrümmten Brücken gezogen. Eine besondere Bedeutung kommt der Gleichung der fünf aufeinanderfolgenden

den Torsionsmomente und ihrer Deutung zu, wobei Formeln angegeben werden, die einen Übergang von den Torsionsmomenten zu den Biegemomenten ermöglichen.

Summary

The curved bridge may be regarded, in numerous cases, as a continuous structure, made up (in the cross section) of two or more continuous girders, broken in plan and supported at the joints on the pillars of the bridge. This paper explains the relationships between the moments at the supports and also between the deformations; these expressions are analysed and the appropriate conclusions drawn. Particular importance is attached to the equation of five successive torsional moments in the girder, and also to the consequences thereof. Formulae are also provided for the calculation of the bending moments in the supports on the basis of the torsional moments.