I. Safety

I

Safety

Ia

Critical Appraisal of Safety Criteria and Their Basic Concepts

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Since the first Meeting in Vienna (1928) the problem of structural safety, in one form or another, has been on the agenda of all Congresses of the International Association for Bridge and Structural Engineering. The only difference at this Congress is that the purpose of the Introductory Report on this subtheme is the presentation of a survey of the present status rather than of a summary of submitted individual contributions.

1. General Considerations

There are three aspects of structural analysis:
(i) the determination of the operating (external) forces ("load-analysis");
(ii) the determination of the internal forces and stresses ("stress-analysis");
(iii) the determination of the necessary dimensions on the basis of relevant failure mechanisms of the structure and material parameters ("strength and safety analysis").

The principal emphasis in structural research and development has always been on stress-analysis. In fact, for the large majority of structural engineers the other two aspects do not seem really significant, and are usually not considered as research subjects but rather as matters of specification writing and materials testing. However, mainly under the influence of developments in the field of aircraft- and space-structures, there is a growing realization that load analysis and safety analysis are both integral parts of structural analysis, of an importance at least equal to that of stress analysis, because, on the one hand, no matter how elaborate this analysis, its results are only as good as the load analysis underlying it while, on the other, it seems absurd to strive for more and more refinement of methods of stress-analysis if, in order to determine the dimensions of the structural elements, its results are subsequently compared with so-called "working stresses", derived in a rather crude manner by dividing the values of somewhat dubious material parameters obtained in conventional materials tests by still more dubious empirical numbers called safety factors.

For a number of years structural engineers in different countries have attempted to come to grips with the basic problem of structural safety [1–12]; progress has, however, been relatively slow because the large majority of practicing civil and structural engineers is convinced that "engineering intuition" and conventional specifications are adequate for the design of safe and economical structures. Where organized attempts have been made to develop modern concepts of safety analysis and introduce them into engineering practice as, for instance, by a Committee of the Institution of Structural Engineers in London headed by SIR ALFRED PUGSLEY [13], whose recent book [4] provides an excellent introduction to and survey of the field of structural safety, by a Committee of the International (European) Council for Building Research headed by the late PROF. TORROJA [14], and by a Committee of the American Society of Civil Engineers headed by OLIVER G. JULIAN [15] and the author [16], these attempts have ended in a compromise between the conviction of a minority of the committee members that only a radically new approach to structural safety based on probabilistic concepts could provide a rational foundation of safety analysis, and the refusal of the majority to accept a probabilistic interpretation of the safety concept and its implications. The proposed modifications of existing safety standards contain therefore only half-hearted references to the necessity of developing a probabilistic approach and avoid any reference to the concept of an "acceptable risk of failure", which is the key to a rational approach to structural safety.

The principal reason for the rather wide-spread lack of research interest in problems of load-analysis and safety analysis among civil and structural engineers is the fact that, with few exceptions, civil engineering structures do not operate at the limit of the current "state of the art" but stay comfortably within it. Thus failures resulting from inadequate over-all design are extremely rare (arising mainly under unexpected condition of dynamic instability), such failures being usually traceable to mistakes in the design of details, particularly connections, while the economic requirements are not very stringent, since over-design of such structures does not adversely affect their operation and is therefore not of major consequence. It is only when a structure must be designed to operate at the limit of its capacity and every unwarranted increase of its resistance, by increasing its structural weight, adversely affects not only its cost but interferes seriously with its effective operation, that the conventional approach to load- and safety analysis fails because of the existing precarious balance between safety, operational capacity and/or economy.

It is the result of the rapid development of manned flight that the advanced types of aircraft structures, at the time of their design, are usually close to the limiting condition of their operational capacity, so that only extreme care in the selection of the expected operating loads, coupled with a specified finite risk of failure, considered as "acceptable" and demonstrated by full-scale tests, produces structures that satisfy the operational requirements. Similar, though still more severe conditions are characteristic of the design of space structures, with the result that load and reliability analysis of aircraft and space structures have, within recent years, become areas of research of vital interest to the aircraft and space industries; theoretically and experimentally this research is dominated by probability concept and statistical methodology. The literature in this field is growing so rapidly [17] that a special Abstracting Service has been found necessary to keep the profession informed of advances in research and development [18].

One consequence of this mushrooming concern with reliability in the aircraft and space industries has been the recent wide-spread introduction of reliability courses in the engineering curriculum at Universities throughout the United States. It has also brought about a modest increase of interest in load- and safety analysis among civil and structural engineers. The principal trend in the current development is the gradual, although rather reluctant acceptance, by an increasing group in the profession, of the probabilistic interpretation of the safety factor, as well as of the resulting relation to a numerical value of the risk of functional or structural failure by which this factor acquires a rational meaning. This is demonstrated by the recent increase in the number of published papers in which the essential ideas of the probabilistic interpretation of structural safety are restated and applied to specific problems [19–27].

According to this interpretation the concept of structural safety can be put on a rational basis commensurate with the development of modern methods of stress analysis only through the consideration of the statistical dispersion of the operating loads as well as of the structural resistance. It does neither imply nor specifically advocate a reduction of conventional safety factors, but only attempts to remove the concept of structural safety from the realm of metaphysics to that of physical reality, in which the closest approach to a constant physical parameter is a unimodal frequency distribution.

It must be admitted, however, that the reluctance to accept this approach does not appear to be quite unjustified since the replacement, in actual design, of the well-tried conventional concept of "permissible" or "working" stresses, with their implication of absolute safety, by "safety factors" derived on the basis of probabilistic concepts and associated with a definite risk of failure, raises a number of theoretical and practical problems.

The main theoretical problems are:

(a) the existence of non-random phenomena affecting structural safety which cannot be included in a probabilistic approach, and

(b) the impossibility of observing the relevant random phenomena within the ranges that are significant for safety analysis, and the resulting necessity of extrapolation far beyond the range of actual observation.

The main practical problems are:

(a) the assessment and justification of a numerical value for the "acceptable risk" of failure and

(b) the codification of the results of the rather complex probabilistic safety analysis in a simple enough form to be usable in actual design.

While these are, in fact, serious problems, it is necessary to realize that conventional design procedures do not assure "absolute safety", nor can they produce structures of uniform safety in all its parts. It is quite easily demonstrated by considering the statistical dispersion of the operational loads [28] and of the relevant material resistance [29] that structures designed to current codes have, in fact, a non-zero probability of failure which, more-over, is different in different parts of the structure; for steel structures, such as highway bridges or transmission towers, it is of the order of 10^{-4} to 10^{-6}, for concrete structures of the order of 10^{-3} to 10^{-5} for a single application of the design load [30]. The implication of "absolute safety" is thus not more than a convenient fiction. Acceptance of this fiction makes it impossible, however, to arrive at a design of uniform safety, since it is the acceptable risk of failure rather than the value of the safety factor which provides a rational measure of the safety, and on which a design procedure for uniform safety must be based. This risk can be expressed by different criteria [31] and the choice of the criterion will depend on whether the risk can be assumed to remain practically constant during the operational life of the structure or whether it is a function of the age of the structure. It is only in the first case that the "probability of encountering failure" or the "mean waiting time" between failures can be used as alternative criteria. In the second case, in which the carrying capacity of the structure must be assumed to decrease with time or with the number of load applications (creep, corrosion, fatigue) the risk criterion must reflect the accumulation of damage implied in the failure mechanism.

2. Probabilistic Concept of Structural Safety

The probabilistic interpretation of structural safety is based on the representation of the loads and other forces acting on the structure by a statistical population of forces of known distribution, while its carrying capacity is represented by that of a statistical population of (nominally identical) structures. The probability of failure p_F under a single applied load or load pattern refers to this population of structures of statistically variable carrying capacity R, every one of which is subject to a single load or load pattern out of the population of statistically varying loads S. Hence p_F expresses the proportion of structures expected to fail in this random "matching" of load and structural resistance and, therefore, the probability that any one of the structures will fail under a single load application. This probability is not a direct measure of the safety of a structure subject to a random sequence of loads taken from the load population. Such a measure is provided by the "reliability function" $L_N(n)$ which is defined as the probability that the life of the structure measured in terms of the number N of load applications to failure exceeds n, the number of applied loads, or

$$L_N(n) = Pr\{N > n\} \tag{2.1}$$

so that the probability of failure before or at the n-th load application is

$$F_N(n) = 1 - L_N(n) = Pr\{N \leq n\} \tag{2.2}$$

The probability that a structure will fail at the n-th load application is obviously

$$f_N(n) = Pr\{N = n\} = F_N(n) - F_N(n-1) \tag{2.3}$$

so that the probability that a structure that has survived $(n - 1)$ load applications will fail at the n-th application is

$$h_N(n) = f_N(n)/L_N(n-1)\,. \tag{2.4}$$

The function $h_N(n)$ represents the "risk of failure" or failure rate.

If, in first approximation, n is treated as a continuous variable, Eq. (2.3) can be expressed in the form

$$f_N(n) \cong \frac{d}{dn} F_N(n) \tag{2.5}$$

and therefore

$$h_N(n) = -\frac{d}{dn} \ln L_N(n) \tag{2.6}$$

or

$$L_N(n) = exp\,[-\textstyle\int_0^n h_N(\xi)d\xi] \tag{2.7}$$

which establishes the relation between the reliability and risk functions.

Under the simplifying assumptions that the probability of failure p_F is independent of n, the probability of surviving n load application can be expressed by

$$L_N(n) = (1 - p_F)^n \tag{2.8}$$

and therefore from Eq. (2.6)

$$h_N(n) \cong p_F = T_F^{-1} \tag{2.9}$$

where T_F denotes the "return period" of failures or expected number of load applications ("waiting time") between failures.

From Eq. (2.7) the reliability function

$$L_N(n) = exp\,(-np_F) \sim (1 - np_F) \quad \text{and} \quad F_N(n) \sim np_F \tag{2.10}$$

when $np_F << 1$; Eq. (2.10) defines the reliability function for chance failures and the relation between $F_N(n)$ and p_F.

The relation between the safety factor and the probability p_F follows simply from the definition of the safety factor ν as a statistical variable of probability density $p_\nu(\nu)$ and associated function $P_\nu(\nu) = \int_0^\nu p_\nu(t)dt$ formed by the ratio

$$\nu = R/S \tag{2.11}$$

where $R > 0$ denotes the structural resistance or carrying capacity and $S > 0$ the applied load, both considered as statistical variables with probability densities $p_R(R)$ and $p_S(S)$ and associated probability functions $P_R(R) = \int_0^R p_R(t)dt$ and $P_S(S) = \int_0^S p_S(t)dt$. The probability of failure p_F is therefore

$$p_F = Pr\{\nu < 1\} = P_\nu(1) \tag{2.12}$$

where the probability function of the quotient ν is obtained in terms of the functions $P_R(R)$ and $p_S(S)$ in the form [32]

$$P_\nu(\nu) = \int_0^\infty P_R(\nu t)p_S(t)dt\,. \tag{2.13}$$

Hence

$$p_F = P_\nu(1) = \int_0^\infty P_R(t)p_S(t)dt = \int_0^\infty Pr\{R < t\} \cdot Pr\{S = t\}dt \tag{2.14}$$

or alternatively,

$$p_F = \int_0^\infty Pr\{S > t\} \cdot Pr\{R = t\}dt = \int_0^\infty [1 - P_S(t)] \cdot p_R(t)dt\,. \tag{2.15}$$

The tacit assumption underlying Eqs. (2.11) to (2.15) is statistical independence of the variables S and R; this assumption is nearly enough valid for most engineering structures that can be designed without dynamic (aerolastic, seismic) analysis.

That Eqs. (2.14) or (2.15) provide a relation between p_F and a "safety factor" can be easily demonstrated in the simple case of exponential distributions of R and S for $R > 0$ and $S > 0$. Assuming $P_R(R) = 1 - exp(-\alpha R)$ and $1 - P_S(S) = exp(-\beta S)$ and therefore $p_R(R) = \alpha\, exp(-\alpha R)$ and $p_S(S) = \beta\, exp(-\beta S)$ it follows from Eq. (2.14) that

$$p_F = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t})\beta e^{-\beta t} dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + \bar{R}/\bar{S}} = \frac{1}{1 + \nu_0} \qquad (2.16)$$

since the expectations (mean values) of R and S are $E[R] = \bar{R} = \alpha^{-1}$ and $E[S] = \bar{S} = \beta^{-1}$ and $\nu_0 = \beta/\alpha = \bar{R}/\bar{S}$ defines the ratio between the mean values of R and S, which represents a measure of the central tendency of the distribution of the (statistically variable) safety factor ν defined by Eq. (2.13): $P(\nu) = (1 + \nu_0/\nu)^{-1}$; this measure will be referred to as the "central" safety factor.

The oversimplification in the assumption of an exponential distribution of R and S precludes the actual use of Eq. (2.16). Nevertheless, this equation illustrates the most significant aspect of all relations between p_F and ν_0: when a "central" safety factor is used in design, its value must be extremely high in order to ensure a small enough probability of failure. Conventional design is, however, not based on a "central" safety factor, since the specification values of load and carrying capacity are usually determined under the tacit assumption that the applied (design) load is a "maximum", while the (design) carrying capacity is based on a "minimum" of the relevant material parameter. However, unless the forces acting on the structure have a functionally defined relevant upper limit (maximum storage capacity, maximum crowd density, maximum locomotive weight), a "maximum" load S_{max} and a "minimum" carrying capacity R_{min} can be rationally defined only in probabilistic terms as the load intensity $S_{max} = S_q$ that is exceeded with arbitrarily small probability $q = Pr\{S > S_q\}$ and the resistance $R_{min} = R_p$ that is not attained with arbitrarily small probability $p = Pr\{R < R_p\}$. Introducing the parameters ξ_p and η_q such that $R = \xi_p \bar{R}$ and $S_q = \eta_q \bar{S}$ and defining a "conventional" safety factor

$$\bar{\nu} = R_{min}/S_{max} = R_p/S_q = (\xi_p/\eta_q)\nu_0 \qquad (2.17)$$

the relation between $\bar{\nu}$ and ν_0 can be easily determined. Since $\xi_p < 1$ while $\eta_q > 1$, the factor $\nu_0 >> \bar{\nu}$, which explains the general discrepancy between the values of safety factors used in conventional analysis and the "central" safety factors derived in probabilistic safety analysis based on mean, median or modal values of loads and material parameters.

Existing observations of the dispersion of relevant material parameters [33] suggest that under conditions in which a reasonably high level of quality control exists a logarithmic-normal distribution describes this dispersion fairly well. On the other hand the selection of most (design) load-spectra is such that

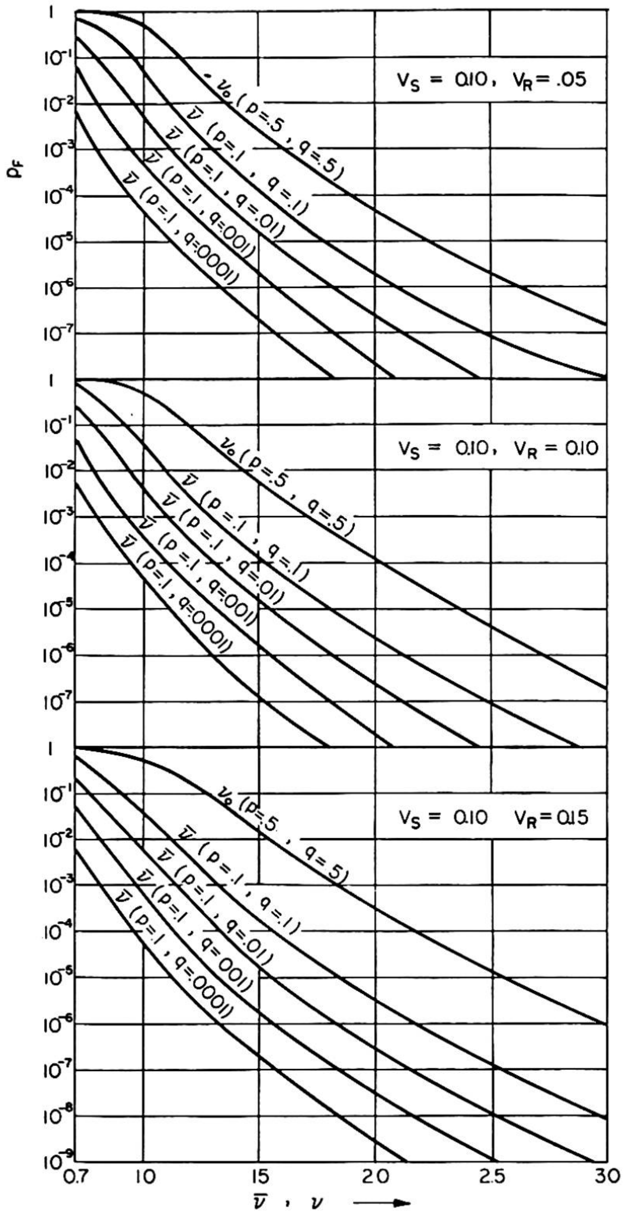

Fig. 1a

only the higher range of the load intensities is considered, which should therefore approximate a distribution of extreme (largest) values. The exclusive consideration of this range of load intensities obviously reduces the number of load applications to be considered in the reliability analysis so that if $F_N(n)$ is specified a higher value of p_F is admissible (see Eq. 2.10) than if application of the complete spectrum of intensities were considered. The relations $p_F(\nu_0)$ and $p_F(\bar{\nu})$ have been evaluated for the above assumptions and the results summarized in Fig. 1. In Fig. 2 the relation $p_F(\bar{\nu})$ for $p = 0.1$ and $q = 0.01$ and a characteristic set of coefficients of variation of S and R is compared with those obtained for logarithmic-normal and extremal distributions of both S and R [34]. The comparison illustrates the effect of the assumed form of the dispersion of S and R on the relation $p_F(\bar{\nu})$.

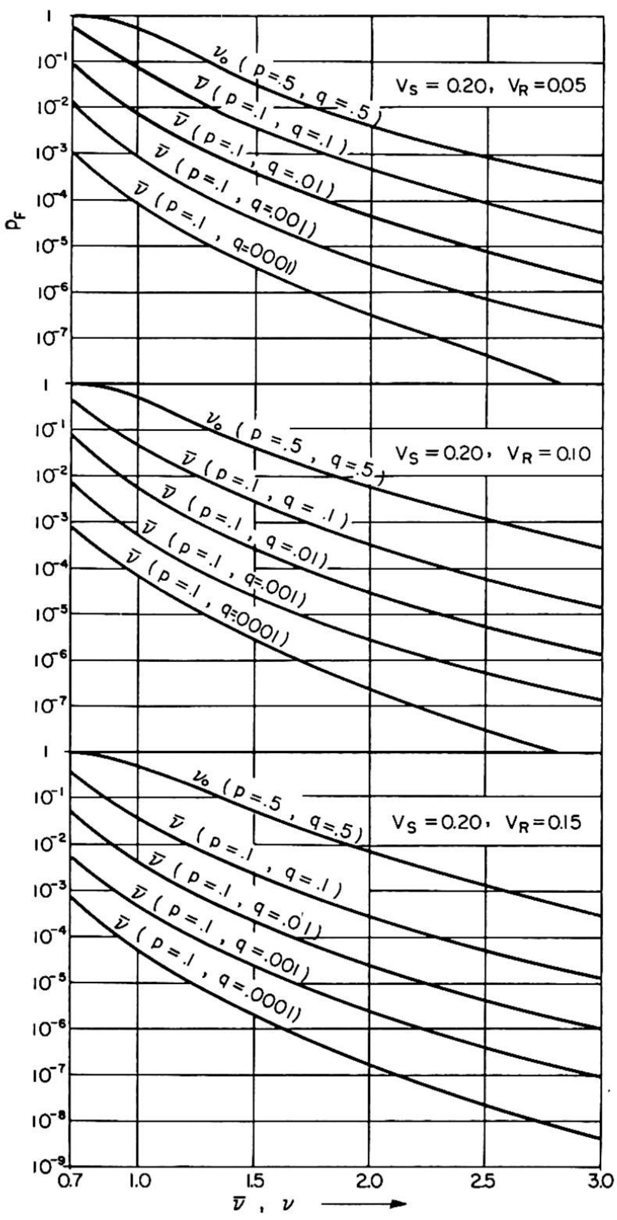

Fig. 1b

The outlined safety analysis implies the existence of a single "failure mechanism" which, once developed, produces failure of the structure. This "failure mechanism" may be related to a maximum (admissible) value of reversible (or irreversible) deformation, exceedance of which might be considered as "functional failure" and thus as a condition of "unserviceability". Or the failure mechanism may be related to fracture of a critical section or, more frequently, to a condition of instability of the structure (kinematic collapse, buckling).

In recent reliability analysis a differentiation is frequently made between structures failing in one of the above modes and considered as "single member" or "weakest link" structures, and multiple-member or "redundant" structures, which are assumed to fail by consecutive failure of the redundants with inter-

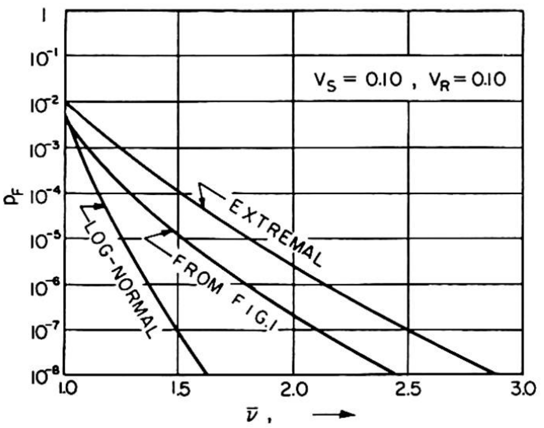

Fig. 2a

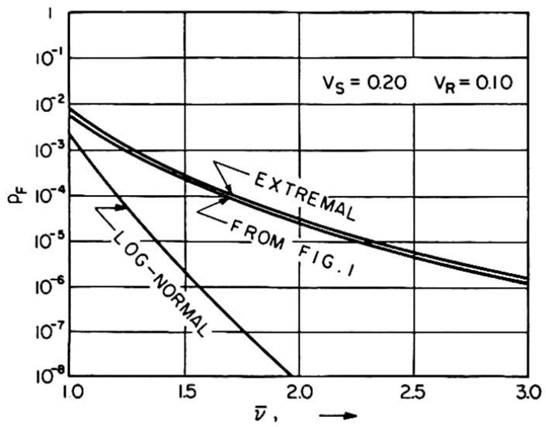

Fig. 2b

mediate load redistribution [35]. However, the consideration of this "chain-reaction" type of structural failure is usually of no practical significance because the failure, whether by fracture or by yielding, of one redundant member immediately increases the probability of failure of the remaining members so that the probability of survival of the structure is not significantly affected, unless the number of redundant members is exceptionally large.

The "redundancy" referred to above implies that the applied load is simultaneously carried by all members of the structure, as in the case of a bundle of parallel threads, as distinct from a non-redundant structure that can be represented by a chain in which every member carries the full load. Neither of the two models reflect the character of bridge- and other structures, members of which are not all stressed to the same intensity by the same load or load pattern. The maximum load intensity in different members is produced by different load patterns which are independent of each other. In a statically determinate structure the probability of failure of each member must be determined separately in order to locate the "critical" member or element which is that with the highest value $F_N(n) \sim np_F$. The "failure mechanism" of a statically determinate structure is that involving failure of the critical member or, in the case of several members with the same value $F_N(n)$, failure of any one of the critical members.

The evaluation of the probability of failure of a m-times statically indeterminate structure requires the consideration of the m consecutive states of decreasing indeterminacy through which the structure passes in the transition to its final failure mechanism in which the m redundant members or elements have been eliminated and the critical member of the resulting determinate structure fails. The difficulty arises from the fact that the process of transition from the indeterminate structure to the final failure mechanism is not unique, nor is this failure mechanism itself unique, since there is usually more than one particular group of $(m + 1)$ members the failure of which can be identified with failure of the structure.

If, under a specified load pattern, the final failure mechanism is attained by simultaneous failure of $(m + 1)$ members or elements, the probability of failure of each of which can be evaluated and is equal to p_F, the probability of failure of the structure in this mechanism is $kp_F{}^{(m+1)}$ if k alternative independent groups of $(m + 1)$ members leading to the same failure mechanism can be identified. Thus the probability of survival under n independent applications of the load pattern according to Eq. (2.8).

$$L_N(n) = [1 - kp_F{}^{(m+1)}]^n \tag{2.18}$$

or, for $kp_F{}^{(m+1)} << 1$,

$$L_N(n) \sim 1 - nkp_F{}^{(m+1)} \tag{2.19}$$

and

$$F_N(n) \sim nkp_F{}^{(m+1)} < np_F \tag{2.20}$$

unless k is unusually large and m very small.

The probability of failure p_F of any of the k groups of $(m + 1)$ members or elements of a statically indeterminate structure can therefore be larger for a specified value $F_N(n)$, than that of a critical member of the determinate structure.

The above equations represent, however, only a first rough approximation to the problem of structural reliability of statically indeterminate structures, and their actual evaluation presupposes a detailed study of the possible failure mechanisms of the structure considering not only failure under a population of independent loads but also failure due to consecutive loads each of which produces "partial" failure in fewer than $(m + 1)$ members or elements. Very little research work has been done on this problem [36].

References

[1] M. MAYER: Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkräften. J. Springer Berlin (1926).

[2] W. WIERZBICKI: Czasopismo Techniczne. (Lwow) Vol. 16 (1937); Przeglad Techniczne (Warsaw) (1936) 690, (1939) No. 12–13, (1945) No. 7–8; Ann. Acad. Polonaise Sc. Tech. Vol. 7 (1939–1945).

[3] M. PROT: Ann. Ponts et Chaussees, Vol. 2. (1936) No. 7, Vol. 119 (1949) 716; Preliminary Publ. 3rd Congress IABSE, Liège (1948) 571; Revue Générale des Chemins de Fer (1951), June.

[4] A. G. PUGSLEY (SIR ALFRED): Rep. and Mem. British Aeron. Res. Comm. (1942), No. 1906; J. Inst. Civil Eng. Vol. 36 (1951) 5; J. Roy Aeron. Soc., Vol. 59 (1955) 534. – The Safety of Structures, E. Arnold (Publ.), London 1966.

[5] N. S. STRELETSKY: Basis for the Statistical Evaluation of the Margin of Safety of Structures, Structural Press, Moscow (1947).

[6] R. LÉVI: Preliminary Publ. 3rd Congress IASBE, Liège (1948) 587; Ann. Ponts et Chaussées (1949) No. 26; Revue Générale des Chemins de Fer (1951), June; Travaux (Paris) (1950) 183, (1952) 215, (1956) 262.

[7] A. M. FREUDENTHAL: Proc. Am. Soc. Civil Eng. Vol. 71 (1945) 1157; Trans Am. Soc. Civil Eng. Vol. 112 (1947) 125, Vol. 113 (1948) 269; Vol. 121 (1956) 1337.

[8] E. TORROJA: Final Report 3rd Congress IASBE, Liège (1948) 729; E. TORROJA and A. PAEZ: La Determinación del Coefficiente de Seguridad en las Distintas Obras de la Construcción y del Cemento, Madrid (1949); Preliminary Publ. 4th Congress IABSE, Cambridge (1952) 165.
[9] F. V. COSTA: Final Report 3rd Congress IABSE, Liège (1948) 641.
[10] A. R. RZHANITSYN: Statistical Basis for the Evaluation of Coefficients, Structural Press, Moscow (1949); Building Industry, Vol. 6 (1952).
[11] A. I. JOHNSON: Bull. Div. Struct. Eng. Royal Inst. Tech. Stockholm (1953) No. 12.
[12] J. F. BORGES: O Dimensionamento de Estruturas, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbõa (1954).
[13] Report on Structural Safety, Struct. Engineer, Vol. 34 (1955) 141. Discussion on the Report, Struct. Engineer, Vol. 34 (1956) 307.
[14] Report on Superimposed Loads and Safety Factors, Int. Council f. Building Research Studies, Paris (Abstract published Proc. Am. Concrete Inst. Vol. 55 [1958] 567). Discussion by A. M. Freudenthal, Proc. Am. Concrete Inst. Vol. 56 (1960) 886.
[15] O. G. JULIAN: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng. Vol. 83 (1957), No. ST4, Proc. Paper 1316.
[16] A. M. FREUDENTHAL, J. M. GARRELTS and M. SHINOZUKA: Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng. Vol. 92 (1966), No. ST1, Proc. Paper 4682.
[17] Proceedings of Reliability and Maintainability Conferences, Vol. 1 (1962), Vol. 2 (1963), Am. Inst. Aeron. Astron. New York; Vol. 3 (1964), Soc. Automotive Eng., New York; Vol. 4 (1965), Spartan Books, Washington, D.C.; Vol. 5 (1966), Am. Inst. Aeron Astron., New York.
[18] Reliability Abstracts and Technical Reviews, Statistics Research Division, Research Triangle Institute, Durham, North Carolina.
[19] S. O. ASPLUND: Struct. Engineer, Vol. 36 (1958) 268.
[20] L. W. WOOD: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 84 (1958) Proc. Paper 1838.
[21] H. L. SU: Proc. Inst. Civil Eng. Vol. 13 (1959) 7.
[22] C. B. BROWN: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng. Vol. 86 (1960) 12.
[23] E. BASLER: Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik, Vol. 27 (1961).
[24] W. WIERZBICKI: Arch. Mech. Stos. Vol. 9 (1957) 6. – Objektywne metody oceny bezpieczenstwa konstrukcji budowanlych, Warsaw (1961).
[25] M. TICHY and M. VORLICEK: Acta Techn. Czechosl. Acad. Sci., Vol. 2 (1961).
[26] R. BAUS: Publ. IABSE, Vol. 22 (1962) 1.
[27] A. M. FREUDENTHAL: Prel. Publ. 6th Congress IASBE Stockholm (1960) 655.
[28] A. M. FREUDENTHAL: Trans. Am. Soc. Civil Eng. Vol. 113 (1948) 269. S. O. ASPLUND: Proc. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 81, No. 585 (1955). H. K. STEPHENSON: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 83, No. St4 (1957). H. C. S. THOM: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 80, No. 539 (1954), Vol. 86, No. ST4 (1960) Proc. Paper 2433, 11.
[29] R. LÉVI: Travaux (Paris), November (1957). – M. HERBIET, M. L. DOR and M. F. HEBRANT: Comm. pour l'Etude de la Construction Métallique, Conférence du 18 décembre (1953) p. 93 à 141.
[30] See Refs. 3, 6, 7, 12, 16.
[31] L. E. BORGMAN: J. Waterways and Harbors Div., Am. Soc. Civil Eng., Vol. 89, No. WW3 (1963) Proc. Paper 3607.
[32] A. M. FREUDENTHAL: J. Struct. Div. Am. Soc. Civil Eng., Vol. 87, No. ST3 (1961) Proc. Paper 2764.
[33] See Ref. 15.
[34] A. M. FREUDENTHAL: Acta Technica, Acad. Sci. Hungaricae, Vol. 46, (1964) 417.
[35] A. M. FREUDENTHAL: Safety, Safety Factors, etc., Proc. First Symp. on Eng. Appl. of Random Function Theory and Probability, (Bogdanoff, Kozin, Eds.) J. Wiley and Sons, New York (1963) M. SHINOZUKA: Proc. Fifth Int. Symp. on Space Technology and Science, Tokyo (1963).
[36] I. KONISHI and M. SHINOZUKA: Proc. 5th Japan National Congress Appl. Mech. (1955) 83; Proc. 6th Japan National Congress Appl. Mech. (1956) 193.

I

Sécurité

Ia

Etude critique des critères de sécurité et de leurs fondements conceptuels

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Dès la première réunion, tenue à Vienne en 1928, le problème de la sécurité des constructions a toujours été, sous une forme ou sous une autre, à l'ordre du jour de chacun des congrès de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes. En ce qui concerne le présent Congrès, la seule différence tient à l'objet de l'Exposé Introductif à ce thème qui, plutôt qu'à donner un résumé des contributions individuelles vise à présenter un bref aperçu de la situation actuelle.

1. Considérations générales

Le calcul des ouvrages se présente sous trois aspects:
1. la détermination des forces extérieures («étude des charges»);
2. la détermination des efforts internes et des contraintes («étude des contraintes»);
3. le dimensionnement, en partant du mécanisme de ruine propre à l'ouvrage et des caractéristiques des matériaux («étude de la résistance et de la sécurité»).

Dans les recherches appliquées en matière de construction, l'accent a toujours porté principalement sur l'étude des contraintes. En effet, pour la grande majorité des ingénieurs civils, les deux autres aspects n'apparaissent pas comme réellement importants et sont généralement considérés, non pas comme des sujets de recherches, mais plutôt comme relevant de la rédaction des Règles et des essais de matériaux. Cependant, par suite surtout des progrès de la construction aéronautique et spatiale, on prend de plus en plus nettement conscience du fait que l'étude des charges et celle de la sécurité font toutes deux partie intégrante du calcul des ouvrages et revêtent une importance au moins égale à celle du calcul des contraintes, et ce, d'une part, parce que si approfondie que puisse être l'analyse des contraintes, ses résultats ont juste la valeur que permet celle du calcul des charges qui la conditionne et que, d'autre part, il semble absurde de peiner à améliorer sans cesse les méthodes de calcul des contraintes si ensuite, pour dimensionner les éléments d'ouvrages, on doit comparer ces résultats aux contraintes dites «admissibles», définies d'une manière plutôt grossière en divisant les valeurs douteuses des caractéristiques des matériaux, déterminées au moyen d'essais conventionnels, par des nombres empiriques encore plus douteux qu'on appelle les coefficients de sécurité.

Il y a plusieurs années que des ingénieurs de différents pays s'attaquent au problème fondamental de la sécurité des constructions [1–12]; les progrès ont toutefois été relativement lents, car la grande majorité des ingénieurs civils sont convaincus que «l'intuition technique» et les normes conventionnelles fournissent des éléments suffisants pour le calcul d'ouvrages sains et économiques. Des efforts concertés ont certes été entrepris en vue de définir les concepts modernes de l'étude de la sécurité et de les introduire dans la pratique, et l'on peut citer par exemple ceux d'une Commission de l'Institution of Structural Engineers de Londres présidée par SIR ALFRED PUGSLEY [13], dont le livre récent [4] représente à la fois une excellente introduction à la sécurité des constructions et une revue des recherches y relatives, ceux également d'une Commission du Conseil International (Européen) du Bâtiment (CIB) dirigée par le Prof. EDUARDO TORROJA [14], et ceux d'une Commission de l'American Society of Civil Engineers dirigée par OLIVER G. JULIAN [15] et l'auteur [16]. Ces efforts ont toutefois abouti à un compromis faisant la part de la conviction partagée par une minorité des membres de la Commission, pour qui seule une attitude résolument nouvelle basée sur une conception probabiliste serait de nature à permettre de fonder rationnellement l'étude de la sécurité, et la part du refus de la majorité d'accepter une interprétation probabiliste de la notion de sécurité avec ses implications. C'est pourquoi les propositions tendant à modifier les Règles de sécurité actuelles ne font que timidement état de la nécessité d'établir une méthode probabiliste et évitent toute référence à la notion de «risque de ruine admissible», clé de voûte de l'étude rationnelle de la sécurité des constructions.

La raison essentielle du manque d'intérêt assez général des ingénieurs civils pour les problèmes concernant l'étude des charges et celle de la sécurité réside en ce que, à de rares exceptions près, les ouvrages qu'ils construisent ne se trouvent pas dans des conditions limites, à l'avant-garde des possibilités techniques, mais confortablement en-deçà. C'est ainsi qu'il est extrêmement rare que surviennent des ruptures dues à une mauvaise étude générale (elles se produisent principalement en présence de conditions d'instabilité dynamique non prévues), et ces ruptures sont généralement imputables à des erreurs dans le calcul des détails, notamment des assemblages. Les exigences d'ordre économique ne sont en effet pas très rigoureuses, étant donné que le sur-dimensionnement de ces ouvrages n'est pas nuisible en service et n'a donc pas de conséquences importantes. Il en va autrement s'il s'agit d'une construction destinée à se trouver dans des conditions de service à la limite de sa capacité et telle que toute augmentation injustifiée de sa résistance, du fait du poids accru qui en résulte, non seulement affecte son coût mais encore perturbe sérieusement son bon fonctionnement, car dans ce cas les méthodes conventionnelles de l'analyse des charges et de la sécurité se révèlent insuffisantes en raison de l'équilibre précaire qui existe entre la sécurité, le comportement en service et/ou l'économie.

C'est le développement rapide de la technique des vols avec équipage qui est responsable du fait que les modèles avancés de cellules d'avions, à l'époque de leur conception, se trouvent généralement tout près de la limite de leurs possibilités en service, de sorte que, pour obtenir des structures satisfaisant aux conditions d'exploitation, le seul moyen est de fixer avec un soin extrême les charges de service attendues en rapport avec un risque de rupture fini bien déterminé qu'on considère comme «admissible» à la lumière d'essais exécutés à l'échelle grandeur. Ce sont des conditions similaires, bien que plus sévères encore, qui régissent la conception des cellules spatiales, le résultat étant que le calcul des charges et l'analyse de la fiabilité en matière de cellules aéronautiques et spatiales sont devenus, au cours des dernières années, des domaines de recherches d'un intérêt vital pour les industries aéronautiques et spatiales; tant sur le plan théorique qu'expérimental, ces recherches sont régies par des conceptions de probabilité et de méthodologie statistique. La bibliographie intéressant ce domaine devient si abondante [17] que l'on a estimé nécessaire de créer un Service d'Extraction spécial de façon à tenir les membres de la profession au courant des progrès réalisés en matière de recherche fondamentale et appliquée [18].

Cette préoccupation grandissante de la fiabilité de la part des industries aéronautiques et spatiales a eu comme conséquence, entre autres, celle de faire figurer des cours de fiabilité au programme des Facultés des Sciences de nombre d'Universités américaines. Elle a aussi suscité un mouvement d'intérêt légèrement accru pour l'étude des charges et de la sécurité parmi les ingénieurs civils. La tendance principale qui se dessine dans le mouvement actuel est une acceptation progressive, encore qu'un peu hésitante, par une plus grande partie de la profession, de la conception probabiliste du coefficient de sécurité ainsi que de la quantification du risque de mauvais fonctionnement ou de ruine dont la valeur numérique confère à ce coefficient une signification rationnelle. Ceci ressort de l'augmentation récente du nombre des publications dans lesquelles les idées essentielles de l'interprétation probabiliste de la sécurité des constructions sont reformulées et appliquées à des problèmes spécifiques [19–27].

Selon cette conception, pour placer la notion de sécurité des constructions sur une base rationnelle, en accord avec l'évolution des méthodes modernes de l'analyse des contraintes, il faut faire intervenir la dispersion statistique des charges de service ainsi que de la résistance de la construction. Cette démarche n'implique pas et ne réclame pas non plus spécifiquement une réduction des coefficients de sécurité usuels, elle essaie simplement d'enlever la conception de la sécurité au domaine de la métaphysique pour la placer dans celui de la réalité physique où c'est une distribution de fréquences unimodale qui fournit la meilleure approximation d'un paramètre physique constant.

Il faut toutefois reconnaître que les hésitations qui se manifestent à l'endroit de cette conception semblent ne pas être totalement injustifiées, car plusieurs problèmes tant théoriques que pratiques se trouvent posés si, dans le calcul réel, on remplace la conception usuelle et éprouvée des «contraintes de service» ou «admissibles», avec leur implication de sécurité absolue, par des «coefficients de sécurité» déterminés à partir d'une interprétation probabiliste et associés à une valeur bien définie du risque de rupture.

Les principaux problèmes théoriques sont les suivants:

a) Existence de phénomènes non aléatoires affectant la sécurité des constructions et ne pouvant entrer dans un contexte probabiliste.
b) Impossibilité d'effectuer l'observation des phénomènes aléatoires intéressés dans un domaine d'une étendue suffisante pour que l'analyse de la sécurité soit significative, d'où la nécessité d'extrapoler largement pour compléter l'étendue des données réellement observées.

Les principaux problèmes pratiques sont les suivants:

a) Fixation et justification d'une valeur numérique pour le «risque admissible» de ruine.
b) Codification des résultats de l'analyse probabiliste, assez complexe, de la sécurité sous une forme suffisamment simple pour permettre leur utilisation dans le calcul pratique.

Bien que ce soient là, réellement, de sérieux problèmes, il faut aussi bien comprendre que les méthodes conventionnelles de calcul n'assurent pas une «sécurité absolue» ni ne permettent de réaliser des constructions présentant partout une sécurité uniforme. On se convainc aisément, en considérant la dispersion statistique des charges [28] de service et de la résistance [29] des matériaux intéressés, que les ouvrages calculés conformément aux Règles actuellement en vigueur ont, en fait, une probabilité de ruine non nulle qui, de plus, est différente dans les diverses parties de l'ouvrage. Dans le cas d'ouvrages métalliques, tels que ponts-routes ou pylônes électriques, elle est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5}; pour les constructions en béton, elle est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5}, et ce pour une application unique de la charge de calcul [30]. La «sécurité absolue» qu'on invoque n'est donc rien de plus qu'une fiction commode. Mais le fait d'admettre cette fiction rend impossible la réalisation d'une sécurité uniforme puisque c'est le risque de ruine admissible, plutôt que la valeur du coefficient de sécurité, qui fournit une mesure rationnelle de la sécurité et qui doit constituer la base des méthodes de calcul d'une sécurité uniforme. On peut adopter différents critères [31] pour exprimer ce risque, et pour en choisir un, on examine s'il est légitime de supposer que le risque reste constant pendant toute la durée de service ou s'il est fonction de l'âge de l'ouvrage. Ce n'est que dans le premier cas que l'on peut utiliser l'un ou l'autre des critères que sont la «probabilité d'occurrence de la ruine» et le «temps d'attente moyen» entre ruptures. Dans le second cas, où l'on doit considérer que la capacité portante de l'ouvrage diminue avec le temps ou à mesure qu'augmente le nombre d'applications des charges (fluage, corrosion, fatigue), il faut que le critère de risque prenne en compte l'accumulation des dommages qui interviennent dans le jeu du mécanisme de rupture.

2. La conception probabiliste de la sécurité des ouvrages

L'interprétation probabiliste de la sécurité des constructions procède de la représentation des charges et des autres forces s'exerçant sur l'ouvrage par une population statistique de forces dont on connaît la distribution, la capacité portante étant, quant à elle, représentée par la distribution d'une population statistique d'ouvrages (nominalement identiques). La probabilité de ruine p_F correspondant à une application unique ou à un système de charges est rapportée à cette population d'ouvrages dont la capacité portante R est une variable statistique et dont chacun est soumis à une charge unique ou à un système de charges pris parmi la population de variables statistiques S représentant les charges. Il en découle que p_F exprime la proportion d'ouvrages dont la ruine est attendue lors de cet «appariement» aléatoire entre état de chargement et résistance de l'ouvrage, et exprime par conséquent la probabilité associée à la ruine de l'un quelconque de ces ouvrages soumis à une application de charge unique. Cette probabilité ne constitue pas une mesure directe de la sécurité d'une construction soumise à une suite aléatoire de chargements pris parmi la population des charges. C'est la «fonction de fiabilité» $L_N(n)$ qui fournit cette mesure; cette fonction se définit comme représentant la probabilité de voir la durée de service de l'ouvrage, mesurée par le nombre N des applications de charges jusqu'à la ruine, excéder la valeur de n, qui est le nombre des chargements effectifs, soit:

$$L_N(n) = Pr\{N > n\} \tag{2.1}$$

de sorte que la probabilité correspondant à l'occurrence d'une ruine avant ou à la $n^{\text{ième}}$ application est

$$F_N(n) = 1 - L_N(n) = Pr\{N \leq n\} \tag{2.2}$$

Il s'ensuit que la probabilité associée à la ruine d'une construction à la $n^{\text{ième}}$ application est

$$f_N(n) = Pr\{N = n\} = F_N(n) - F_N(n-1) \tag{2.3}$$

de sorte qu'à la ruine, lors de la $n^{\text{ième}}$ application, d'un ouvrage qui a survécu à $(n - 1)$ applications, s'attache la probabilité

$$h_N(n) = f_N(n)/L_N(n - 1)\,. \tag{2.4}$$

Cette fonction $h_N(n)$ représente le «risque de ruine» ou taux de ruine.

Si, dans une première approximation, n est considérée comme étant une variable continue, l'équation (2.3) peut prendre la forme suivante:

$$f_N(n) \cong \frac{d}{dn}\, F_N(n) \tag{2.5}$$

et, par conséquent

$$h_N(n) = -\frac{d}{dn} \ln L_N(n) \tag{2.6}$$

ou

$$L_N(n) = exp\,[-\textstyle\int_0^n h_N(\xi)d\xi] \tag{2.7}$$

qui exprime la relation existant entre la fonction de fiabilité et la fonction de risque.

En faisant l'hypothèse simplificatrice de l'indépendance de la probabilité de ruine p_F à l'égard de n, la probabilité de survie à n applications de charge peut s'exprimer sous la forme:

$$L_N(n) = (1 - p_F)^n \tag{2.8}$$

et par conséquent, à partir de la relation (2.6):

$$h_N(n) \cong p_F = T_F^{-1} \tag{2.9}$$

où T_F représente le «délai de retour» des ruptures ou le nombre attendu d'applications de charge («temps d'attente») entre deux ruptures consécutives.

A partir de la relation (2.7), la fonction de fiabilité devient:

$$L_N(n) = exp\,(-\,np_F) \sim (1 - np_F) \quad \text{et} \quad F_N(n) \sim np_F \tag{2.10}$$

lorsque $np_F << 1$; la relation (2.10) définit la fonction de fiabilité associée aux ruptures fortuites et lie $F_N(n)$ à p_F.

La relation existant entre le coefficient de sécurité et la probabilité p_F découle simplement de la définition du coefficient de sécurité ν en tant que variable statistique de densité de probabilité $p_\nu(\nu)$ suivant la loi $P_\nu(\nu) = \int_0^\nu p_\nu(t)dt$ formée par le rapport

$$\nu = R/S \tag{2.11}$$

où $R > 0$ représente la résistance ou la capacité portante de l'ouvrage et $S > 0$ la charge appliquée, ces deux quantités étant considérées comme des variables statistiques de densités de probabilité $p_R(R)$ et $p_S(S)$ suivant les lois $P_R(R) = \int_0^R p_R(t)dt$ et $P_S(S) = \int_0^S p_S(t)dt$. La probabilité de ruine p_F est donc:

$$p_F = Pr\{\nu < 1\} = P_\nu(1) \tag{2.12}$$

où la loi de probabilité du quotient ν s'exprime en fonction de $P_R(R)$ et $p_S(S)$ sous la forme [32]

$$P_\nu(\nu) = \int_0^\infty P_R(\nu t)p_S(t)dt \,. \tag{2.13}$$

D'où:

$$p_F = P_\nu(1) = \int_0^\infty P_R(t)p_S(t)dt = \int_0^\infty Pr\{R < t\} \cdot Pr\{S = t\}dt \tag{2.14}$$

ou encore

$$p_F = \int_0^\infty Pr\{S > t\} \cdot Pr\{R = t\}dt = \int_0^\infty [1 - P_S(t)] \cdot p_R(t)dt \,. \tag{2.15}$$

De l'équation (2.11) à l'équation (2.15), il est implicitement admis que les variables S et R sont statistiquement indépendantes; cette hypothèse est vérifiée de façon approximative mais suffisante pour la plupart des constructions ressortissant au génie civil qui peuvent être calculées sans recourir à l'analyse dynamique (aéro-élastique, sismique).

Quant à savoir si les équations (2.14) ou (2.15) fournissent bien une relation entre p_F et un «coefficient de sécurité», cela peut facilement être mis en évidence en prenant le cas, simple, où R et S suivent une distribution exponentielle, pour $R > 0$ et $S > 0$. Si l'on pose $P_R(R) = 1 - exp\,(-\alpha R)$ et $1 - P_S(S) = exp\,(-\beta S)$, avec par conséquent $p_R(R) = \alpha\, exp\,(-\alpha R)$ et $p_S(S) = \beta\, exp\,(-\beta S)$, il résulte de l'équation (2.14) que:

$$p_F = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t})\beta e^{-\beta t}dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + \bar{R}/\bar{S}} = \frac{1}{1 + \nu_0} \tag{2.16}$$

puisque les espérances mathématiques (les moyennes) de R et de S sont respectivement $E[R] = \bar{R} = \alpha^{-1}$ et $E[S] = \bar{S} = \beta^{-1}$ et que $\nu_0 = \beta/\alpha = \bar{R}/\bar{S}$ est le rapport des moyennes de R et de S qui représente une mesure de la tendance centrale de la distribution de la variable statistique qu'est le coefficient de sécurité ν définie par l'équation (2.13): $P(\nu) = (1 + \nu_0/\nu)^{-1}$; on désignera cette mesure sous le nom de coefficient de sécurité «central».

La simplification excessive que représente l'hypothèse d'une distribution exponentielle suivie par R et par S s'oppose à l'application effective de l'équation (2.16). Mais cette équation fait bien ressortir l'aspect le plus important de toutes les relations existant entre p_F et ν_0, à savoir que lorsqu'on fait intervenir un coefficient de sécurité «central» dans un calcul, sa valeur doit être très élevée afin d'avoir une probabilité de ruine suffisamment faible. Mais les méthodes classiques de calcul ne procèdent pas d'un coefficient de sécurité «central» puisque, dans la spécification des charges et de la capacité portante, on admet implicitement que la charge appliquée (charge de calcul) représente un «maximum» tandis que la capacité portante (spécifiée pour le calcul) est fixée par rapport à une valeur «minima» de la caractéristique du matériau intéressé. Sauf si les forces s'exerçant sur l'ouvrage ont une limite supérieure fonctionnellement définie (capacité maxima de stockage, densité d'occupation maxima, locomotive de poids maximum), il n'en reste pas moins qu'on ne pourra définir de façon rationnelle une charge «maxima» S_{max} et une capacité portante «minima» R_{min} qu'en termes de probabilité en considérant, d'une part, la charge d'intensité $S_{max} = S_q$ au dépassement de laquelle correspond la probabilité, aussi faible que l'on veut, $q = Pr\{S > S_q\}$, et, d'autre part, la résistance $R_{min} = R_p$ avec, pour l'ensemble des valeurs inférieures à ce seuil, une probabilité d'occurrence aussi faible que l'on veut $p = Pr\{R < R_p\}$. En introduisant les paramètres ξ_p et η_q tels que $R = \xi_p \bar{R}$ et $S_q = \eta_q \bar{S}$ et en définissant un coefficient de sécurité «classique»

$$\bar{\nu} = R_{min}/S_{max} = R_p/S_q = (\xi_p/\eta_q)\nu_0 \tag{2.17}$$

on établit facilement la relation entre $\bar{\nu}$ et ν_0. Du fait que $\xi_p < 1$ alors que $\eta_q > 1$, le coefficient ν_0 est très largement supérieur à $\bar{\nu}$, ce qui explique le caractère général de divergence qui existe entre les valeurs des coefficients de sécurité qu'on introduit dans les calculs classiques et celles des coefficients de sécurité «centraux» qui sont déterminés dans les calculs probabilistes de la sécurité basés sur la moyenne, la médiane ou le mode des charges et des caractéristiques des matériaux.

Des observations faites sur la dispersion des caractéristiques [33] des matériaux qui entrent en ligne de compte, il ressort que, dans les conditions où un contrôle de qualité raisonnablement sévère est effectué, on peut de façon satisfaisante ajuster cette dispersion à l'aide d'une distribution logarithmico-normale. D'un autre côté, dans les spectres de charges retenus pour le calcul, on ne considère la plupart du temps que la queue (partie supérieure) de la distribution des intensités de chargement, d'où approximativement une distribution de valeurs extrêmes (les plus grandes). L'exclusion des autres intensités (plus faibles) réduit évidemment le nombre d'applications de charge à prendre en considération dans le calcul de la fiabilité, de sorte que, si l'on fixe la valeur de $F_N(n)$, on peut accepter pour p_F (cf. équation 2.10) une valeur supérieure à celle qu'on aurait en faisant intervenir la totalité du spectre des intensités. On a calculé les relations $p_F(\nu_0)$ et $p_F(\bar{\nu})$ dans le cadre des hypothèses ci-dessus et les résultats obtenus sont présentés de façon résumée à la Fig. 1. A la Fig. 2 on a tracé les courbes $p_F(\bar{\nu})$ correspondant à $p = 0{,}1$ et $q = 0{,}01$ pour des couples type de valeurs des coefficients de variation de S et de R, aux fins de les comparer avec celles relatives aux distributions logarithmico-normales et extrêmales tant de S que de R [34]. Cette comparaison met en évidence l'influence qu'exerce sur $p_F(\bar{\nu})$ la forme de la dispersion de S et de R sur laquelle on se base.

Le calcul de la sécurité qu'on vient d'esquisser implique l'existence d'un «mécanisme de rupture» unique qui, une fois à son terme, entraîne la ruine de l'ouvrage. Ce «mécanisme de rupture» peut être rapporté à une valeur maxima (admissible) des déformations réversibles (ou irréversibles) dont on pourrait considérer le dépassement comme une «ruine fonctionnelle» et, partant, comme un critère d'«inaptitude au service». Ou l'on peut encore rapporter le mécanisme de ruine à la rupture d'une pièce critique ou bien, plus couramment, à un état instable de l'ouvrage (ruine cinématique, flambement).

Dans le calcul de la fiabilité tel qu'on le pratique maintenant, on distingue souvent deux sortes d'ouvrages: ceux dont la ruine se produit selon l'un des mécanismes exposés ci-dessus et qu'on considère comme étant du type «à pièces uniques» ou «à maillon le moins solide», et ceux à pièces multiples ou «surabondants» pour lesquels on admet que la ruine intervient par suite des ruptures successives des éléments surabondants avec redistribution des efforts pendant chacune des périodes intermédiaires [35]. Mais aucune importance pratique ne s'attache généralement à ce mode de ruine du type «réaction en chaîne» étant donné que la ruine d'un élément surabondant, qu'elle se produise par rupture ou par fléchissement, a pour effet immédiat d'augmenter la probabilité de ruine des autres éléments, et que par conséquent la probabilité de survie de l'ouvrage ne se trouve pas modifiée de façon significative, à moins que les éléments surabondants soient exceptionnellement nombreux.

La «surabondance» à laquelle il est fait allusion ci-dessus sous-entend que la charge appliquée est supportée simultanément par la totalité des éléments de la structure, comme dans le cas d'un paquet de fils parallèles, contrairement à ce qui se passe dans un ouvrage non surabondant que l'on peut représenter sous la forme d'une chaîne où chacun des éléments supporte la charge totale. Aucun de ces deux modèles ne correspond aux caractéristiques des ponts ou d'autres ouvrages dont les pièces ne sont pas toutes sollicitées avec la même intensité par la même charge ou le même système de charges. La charge d'intensité maxima propre à chacune des diverses pièces est engendrée par différents systèmes de charge qui sont indépendants les uns des autres. Dans un ouvrage isostatique, c'est séparément qu'il faut déterminer la probabilité de rupture de chacune des pièces, afin de situer la pièce ou l'élément «critique», c'est-à-dire celui assorti de la valeur $F_N(n) \sim np_F$ la plus élevée. Le «mécanisme de ruine» des ouvrages isostatiques est celui dans lequel intervient la rupture de la pièce critique ou bien, s'il existe plusieurs pièces assorties de la même valeur $F_N(n)$, la rupture de l'une quelconque des pièces critiques.

L'évaluation de la probabilité de ruine d'un ouvrage hyperstatique de degré d'hyperstaticité m exige que l'on considère les m états consécutifs, d'indétermination décroissante, par lesquels l'ouvrage passe pour arriver à son mécanisme de ruine final dans lequel les m éléments hyperstatiques se trouvent avoir été éliminés et où intervient la ruine de l'élément critique de l'ouvrage alors isostatique. La difficulté tient à ce que le processus transitoire conduisant l'ouvrage initialement hyperstatique à son mécanisme de ruine final n'est pas unique, et ce mécanisme de ruine n'est pas unique lui-même non plus, étant donné qu'il existe généralement plus d'une seule combinaison de $(m + 1)$ éléments dont la rupture peut être identifiée à la ruine de l'ouvrage.

Si, sous l'action d'un système de charges donné, le mécanisme final de ruine se réalise par la rupture simultanée de $(m + 1)$ pièces ou éléments, chacune étant assortie d'une probabilité qu'on peut calculer et qui est égale à p_F, la probabilité de ruine de l'ouvrage selon ce mode est alors $kp_F{}^{(m+1)}$ si l'on constate l'existence de k groupes indépendants, s'excluant mutuellement, de $(m + 1)$ éléments menant au même mécanisme de rupture. Ainsi, conformément à l'équation (2.8), la probabilité de survie à n applications indépendantes du système de charges est:

$$L_N(n) = [1 - kp_F{}^{(m+1)}]^n \tag{2.18}$$

ou bien, pour $kp_F{}^{(m+1)} << 1$:

$$L_N(n) \sim 1 - nkp_F{}^{(m+1)} \tag{2.19}$$

et

$$F_N(n) \sim nkp_F{}^{(m+1)} < np_F \tag{2.20}$$

à moins que k soit inhabituellement grand et m très petit.

La probabilité de ruine p_F de l'un quelconque des k groupes de $(m + 1)$ pièces ou éléments d'un ouvrage hyperstatique peut par conséquent, pour une valeur donnée de $F_N(n)$, être supérieure à celle d'un élément critique de l'ouvrage isostatique.

Les équations données ci-dessus ne représentent toutefois qu'une première approximation grossière en matière de sécurité des ouvrages hyperstatiques; pour porter un jugement réel, il est au préalable nécessaire de procéder à une étude détaillée des différents mécanismes de ruine de l'ouvrage en considérant non seulement les ruptures survenant du fait d'une population de charges indépendantes mais aussi celles dues à des charges successives dont chacune engendre une ruine «partielle» affectant moins de $(m + 1)$ pièces ou éléments. Très peu de travaux de recherche ont été consacrés à ce problème [36].

I

Sicherheit

Ia

Kritische Betrachtung der Sicherheitskriterien und ihrer grundsätzlichen Auffassungen

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Das Problem der Sicherheit der Tragwerke ist seit der ersten Tagung in Wien (1928) auf der Traktandenliste eines jeden Kongresses der IVBH in irgendeiner Form erschienen. Der einzige Unterschied besteht diesmal darin, daß der Zweck des Einführungsberichtes zu diesem Thema mehr ein Überblick über die heutige Situation sein soll als die Zusammenfassung verschiedener persönlicher Beiträge.

1. Allgemeine Betrachtungen

Es gibt drei Aspekte bei der Berechnung von Tragwerken:

1. Die Bestimmung der äußeren Kräfte («load-analysis»);
2. Die Bestimmung der Beanspruchung und der Spannungen («stress analysis»);
3. Die Bemessung (Dimensionierung) auf der Grundlage des maßgebenden Bruchmechanismus und der Materialeigenschaften («strength and safety analysis»).

Die größte Beachtung schenkte man in Forschung und Entwicklung stets der Berechnung der Spannungen. In der Tat betrachten die weitaus meisten Ingenieure die beiden anderen Aspekte nicht als bedeutsam, so daß diese meist nicht Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen, sondern höchstens von Materialprüfung und Normzusammenstellungen bilden. Trotzdem dringt in wachsendem Maße – vor allem unter dem Einfluß der Entwicklungen beim Flugzeug- und Raumschiffbau – die Erkenntnis durch, daß die Bestimmung der Belastungen und der Sicherheit (load and safety analysis) wenigstens ebenso wichtige Bestandteile der Berechnung von Tragwerken sind wie die eigentlichen statischen Berechnungen (stress analysis). Dies vor allem, weil unabhängig davon, wie genau die statische Berechnung selbst durchgeführt wird, ihr Resultat nur so zuverlässig sein kann wie die Bestimmung der Belastungen, die man ihr zugrundelegt. Ebenso scheint es absurd, die Berechnungsmethoden immer mehr verfeinern zu wollen, wenn andererseits bei der Bemessung die Resultate der statischen Berechnungen mit sogenannten «Gebrauchsspannungen» (working stresses = zulässige Spannungen), verglichen werden, die auf recht grobe Weise bestimmt worden sind, indem man die sehr zweifelhaften Festigkeitswerte, gewonnen aus konventionellen Materialprüfungen, durch noch viel zweifelhaftere sogenannte Sicherheitsfaktoren dividiert.

Seit einigen Jahren haben nun Ingenieure in verschiedenen Ländern versucht, sich mit dem Grundproblem der Sicherheit der Tragwerke auseinanderzusetzen [1–12]. Es ist dabei allerdings nur ein recht langsamer Fortschritt zu verzeichnen, weil eine große Mehrheit von Ingenieuren immer noch davon überzeugt ist, daß die «Intuition des Ingenieurs» und daneben die konventionellen Normen für die Projektierung sicherer und auch wirtschaftlicher Bauwerke genügen. Wo organisierte Versuche gemacht wurden zur Entwicklung einer modernen Konzeption der Bestimmung der Sicherheit und zur Einführung derselben in die Praxis, wie zum Beispiel durch ein Komitee der Institution of Structural Engineers in London unter Leitung von SIR ALFRED PUGSLEY [13], dessen letztes Buch [4] eine ausgezeichnete Einleitung und einen guten Überblick über die Sicherheit der Tragwerke gibt, sowie durch ein Komitee des International (European) Council for Building Research unter der Leitung von Professor EDUARDO TORROJA [14] und durch ein Komitee des ASCE unter der Leitung von OLIVER G. JULIAN und des Schreibenden [16], überall haben diese Versuche zu einem Kompromiss geführt zwischen der Überzeugung einer Minderheit von Komiteemitgliedern, daß nur eine radikale Erneuerung des Sicherheitsbegriffs auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage zu einer wissenschaftlichen Begründung der Sicherheit führen könne, und dem Widerstand der Mehrheit gegen eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation des Sicherheitsbegriffs. Die vorgeschlagenen Änderungen der bisherigen Sicherheitsbestimmungen enthalten daher nur Halbheiten, wo sie sich auf die notwendige Entwicklung eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Sicherheitsbegriffs beziehen, und vermeiden jede Erwähnung der Auffassung der «annehmbaren Bruchwahrscheinlichkeit», die ja der Schlüssel zu einer wissenschaftlichen Konzeption des Sicherheitsbegriffes ist.

Der eigentliche Grund für die sehr weitverbreitete Interesselosigkeit bei den Bauingenieuren gegenüber den Problemen der Bestimmung von Belastung und Sicherheit ist sicherlich, daß die meisten Bauwerke, mit wenigen Ausnahmen, längst nicht bis an die Grenzen des «Standes der Technik» ausgenützt sind, sondern die Beanspruchungen erheblich darunter bleiben. Deshalb sind Einstürze wegen unzulänglicher Bemessung sehr selten (meist entstehen sie aus unvorhergesehener dynamischer Unstabilität) und lassen sich normalerweise bis zu («groben» d. Ü.) Fehlern bei der Ausarbeitung der Details, vor allem der Verbindungen, zurück verfolgen; die Ansprüche an die Wirtschaftlichkeit werden nicht sehr hoch gestellt, so daß eine Überbemessung des Tragwerks keine ernsten wirtschaftlichen Folgen haben kann und deshalb ohne große Bedeutung ist. Nur wenn ein Tragwerk auf die Grenze seiner Tragfähigkeit bemessen werden soll und jede ungerechtfertigte Verstärkung wegen der Erhöhung des Eigengewichtes nicht nur die Kosten erhöht sondern auch sein Tragvermögen beeinträchtigt, dann versagt die konventionelle Art der Bestimmung der Lasten und des Sicherheitsnachweises, da in diesem Fall die Beziehungen zwischen Sicherheit, Tragfähigkeit und/oder Wirtschaftlichkeit eine kritische Form annehmen.

Es ist das Resultat der schnellen Entwicklung auf dem Gebiete der bemannten Flugzeuge, daß die modernen Flugzeugtypen bei ihrer Bemessung normalerweise bis nahe an die Grenze ihrer Tragfähigkeit ausgenützt sind, so daß nur äußerste Sorgfalt beim Einsetzen der vorkommenden Beanspruchungen und die genaue Bestimmung eines als tragbar betrachteten Bruchrisikos (= Wahrscheinlichkeit des Versagens, d. Ü.), das durch erschöpfende Versuche nachgewiesen wird, zu Konstruktionen führt, die den Anforderungen genügen.

Ähnliche, wenn nicht noch strengere Bedingungen gelten für die Bemessung der Konstruktionen für die Raumfahrt. Dies hat zur Folge, daß die Bestimmung von Zuverlässigkeit und Tragvermögen auf dem Gebiete der Flugzeuge und der Raumschiffe zu Forschungsgebieten von dringlicher Wichtigkeit für die entsprechenden Industriezweige geworden sind. Theoretisch und experimentell wird diese Forschung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die statistische Methodik beherrscht. Die Literatur zu diesem Gebiet ist derart schnell gewachsen [17], daß ein spezieller Dokumentationsdienst eingerichtet werden mußte, um die Ingenieure und Forscher über neue Erkenntnisse und Entwicklungen [18] auf dem laufenden zu halten.

Daß man in letzter Zeit an allen Ingenieurschulen der USA umfangreiche Kurse über das Thema der wahrscheinlichkeitstheoretischen Sicherheit (reliability) eingerichtet hat, ist nur eine Auswirkung des wie ein Pilz in die Höhe geschossenen Interesses der Flugzeug- und Raumschiffindustrie an diesem Forschungszweig. Daneben befassen sich auch – allerdings in bescheidenem Maße – mehr und mehr die Bauingenieure mit der Untersuchung von Sicherheit und Beanspruchung. Das Merkmal der gegenwärtigen Entwicklung ist, daß – wenn auch nur schrittweise und sehr zögernd – eine immer größere Zahl von Bauingenieuren die wahrscheinlichkeitstheoretische Auffassung des Sicherheitsfaktors nebst dessen Beziehung zu einer zahlenmäßigen Darstellung des Risikos eines funktionellen oder totalen Versagens akzeptiert, durch die der Sicherheitsfaktor erst seinen Sinn bekommt. Das zeigt sich in jüngster Zeit in den häufigen Publikationen, in denen die grundsätzliche Idee der wahrscheinlichkeitstheoretischen Deutung des Sicherheitsbegriffs wiederholt und auf spezielle Probleme angewandt wird [19–27].

Entsprechend dieser Deutung kann das Sicherheitsproblem der Tragwerke im gleichen Maße wie die Entwicklung moderner Methoden der statischen Berechnung nur auf eine wissenschaftliche Grundlage gestellt werden, wenn dabei die statische Verteilung von Belastung und Tragfähigkeit beachtet wird. Dies bedeutet weder, daß damit eine Reduktion der bisherigen Sicherheitsfaktoren einhergehen müsse noch daß sie gar gefordert werden soll, sondern nur, daß die Grundlage der Tragwerkssicherheit aus dem Reich der Metaphysik in die physikalische Wirklichkeit gebracht wird, wo die beste Annäherung eines konstanten physikalischen Parameters die Häufigkeitsverteilung ist.

Es muß allerdings zugegeben werden, daß der Widerstand gegen diese Anschauung nicht ganz ungerechtfertigt ist, wirft doch die Einführung eines Sicherheitsfaktors, der auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie basiert und mit einem bestimmten Bruchrisiko gekoppelt ist, anstelle der erprobten zulässigen oder «Gebrauchsspannungen» in der Bemessungspraxis zahlreiche Probleme theoretischer und praktischer Natur auf.

Die hauptsächlichsten theoretischen Probleme sind:

a) Die Existenz nichtzufälliger Einflüsse auf die Sicherheit der Tragwerke, die nicht in statistische Approximationen einbezogen werden können, und
b) die Unmöglichkeit, zufällige Ereignisse in jenem Bereich zu beobachten, der für das Sicherheitsproblem erst bestimmend ist. Dies bedingt eine Extrapolation weit über die Grenzen des Beobachtens hinaus.

Die wichtigsten praktischen Probleme sind:

a) die Festsetzung und Rechtfertigung eines zahlenmäßigen Wertes für das «tragbare» Bruchrisiko, und
b) die Darstellung der Resultate der ziemlich komplizierten Bestimmung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Sicherheit in einer Form, die für die praktische Bemessung genügend einfach ist.

Dies sind in der Tat sehr wichtige Probleme. Wir müssen aber beachten, daß auch die konventionelle Methode der Bemessung keine absolute Sicherheit erzeugen kann, noch ergeben sich daraus Tragwerke, die in allen Teilen die gleiche Sicherheit aufweisen. Man kann leicht durch das Einführen einer statistischen Verteilung der vorkommenden Belastungen [28] sowie der entscheidenden Materialeigenschaften [29] zeigen, daß Tragwerke, die nach den heutigen Normen dimensioniert wurden, eine Bruchwahrscheinlichkeit besitzen, die nicht verschwindet und die sogar an verschiedenen Orten verschieden groß ist. Für Stahlkonstruktionen wie Straßenbrücken oder Masten liegt sie in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-5}, bei Eisenbetonkonstruktionen bei 10^{-3} bis 10^{-5} für einen Belastungszyklus [30]. Wenn also von einer absoluten Sicherheit gesprochen wird, so ist dies nur eine angenehme Selbsttäuschung. Wird aber diese Fiktion aufrechterhalten, so ist es allerdings unmöglich, zu einer Bemessung auf gleichmäßige Sicherheit zu kommen, weil diese viel mehr auf die «tragbare Bruchwahrscheinlichkeit» basiert werden muß, die ein wirklichkeitstreues Maß der Sicherheit gibt, als auf den Zahlenwert des Sicherheitsfaktors. Dieses Maß des Bruchrisikos kann auf verschiedene Arten [31] bestimmt werden, und die Wahl des Kriteriums hängt auch davon ab, ob das Bruchrisiko während der Lebensdauer als unveränderlich angenommen werden darf oder ob es sich mit dem Alter des Tragwerks ändert. Nur im ersten Fall können die «Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Einsturz ereignet» und der «mittlere Zeitraum zwischen zwei Unfällen» als alternative Kriterien eingesetzt werden. Im zweiten Fall, wenn man annehmen muß, daß die Tragfähigkeit mit der Zeit oder mit der Anzahl Lastwechsel (Kriechen, Korrosion, Ermüdung) abnimmt, muß das Risikokriterium die Schadenanhäufung im Bruchmechanismus berücksichtigen.

2. Der wahrscheinlichkeitstheoretische Sicherheitsbegriff

Die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung der Sicherheit der Tragwerke gründet sich darauf, daß die Lasten und anderen Kräfte, die am Tragwerk angreifen, als statistische Bevölkerung mit bekannter Verteilung eingeführt werden, während die Tragfähigkeit ebenfalls durch eine Bevölkerung von (nominell identischen) Tragwerken repräsentiert wird. Die Bruchwahrscheinlichkeit p_F bezieht sich dann unter einer bestimmten Belastung oder Lastanordnung auf diese Bevölkerung von Tragwerken mit statistisch variabler Tragfähigkeit, R, von denen jedes einer Belastung oder einer Lastgruppe aus der Bevölkerung S statisch variabler Belastungen unterworfen ist. Dann bedeutet p_F den Erwartungswert der relativen Anzahl von Tragwerken, die in diesem «Spiel» zwischen Beanspruchung und Tragfähigkeit versagen. Deshalb ist p_F auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgendeines der Tragwerke unter einem Belastungszyklus zusammenbricht. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber nicht ein direktes Maß der Sicherheit des Tragwerkes, das einer zufälligen Sequenz von Lastzyklen aus der Bevölkerung der Belastungen unterworfen ist. Ein solches Maß wird erst durch die «Zuverlässigkeitsfunktion» $L_N(n)$ beschrieben, die als Wahrscheinlichkeit dafür definiert ist, daß die Lebensdauer des Tragwerkes gemessen durch die Zahl N der Lastzyklen bis zum Versagen n, nämlich die Anzahl der (aufzubringenden) Lastzyklen übersteigt, oder

$$L_N(n) = Pr\{N > n\} \tag{2.1}$$

so daß die Wahrscheinlichkeit des Bruches vor dem oder gerade beim n-ten Lastzyklus

$$F_N(n) = 1 - L_N(n) = Pr\{N \leq n\} \tag{2.2}$$

beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Bruch des Tragwerkes gerade beim n-ten Lastzyklus erfolgt, beträgt dann offenbar

$$f_N(n) = Pr\{N = n\} = F_N(n) - F_N(n-1) \qquad (2.3)$$

so daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Tragwerk $n-1$ Lastzyklen überlebt hat und bei der n-ten Belastung versagen wird,

$$h_N(n) = f_N(n)/L_N(n-1)\,. \qquad (2.4)$$

ist. Die Funktion $h_N(n)$ bezeichnet dann das «Bruchrisiko» oder den Bruchanteil (failure rate).

Wenn man n in erster Annäherung als stetige Variable behandelt, kann Gleichung (2.3) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$f_N(n) \cong \frac{d}{dn} F_N(n) \qquad (2.5)$$

und somit:

$$h_N(n) = -\frac{d}{dn} \ln L_N(n) \qquad (2.6)$$

oder

$$L_N(n) = exp\left[-\int_0^n h_N(\xi)\,d\xi\right] \qquad (2.7)$$

womit die Beziehung zwischen Vertrauens- und Risikofunktion gegeben ist.

Mit der vereinfachenden Annahme, daß die Bruchwahrscheinlichkeit p_F unabhängig ist von n, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der n-te Lastzyklus überstanden wird,

$$L_N(n) = (1 - p_F)^n \qquad (2.8)$$

und damit bei Berücksichtigung von (2.6):

$$h_N(n) \cong p_F = T_F^{-1} \qquad (2.9)$$

wobei T_F den Erwartungswert für die Periode der Wiederkehr des Bruchereignisses oder der Anzahl Lastzyklen zwischen zwei Bruchereignissen bezeichnet («waiting time»).

Aus Gleichung (2.7) können wir, wenn $np_F << 1$ ist, annähern:

$$L_N(n) = exp\,(-np_F) \sim (1 - np_F) \quad \text{und} \quad F_N(n) \sim np_F \qquad (2.10)$$

Gleichung (2.10) definiert dann die Vertrauensfunktion für die «Möglichkeit» des Bruchereignisses und die Beziehung zwischen $F_N(n)$ und p_F.

Die Beziehung zwischen den Sicherheitsfaktoren und der Bruchwahrscheinlichkeit p_F folgt einfach aus der Definition des Sicherheitsfaktors ν als statistische Variable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p_\nu(\nu)$ und der zugeordneten (Summen-)funktion: $P_\nu(\nu) = \int_0^\nu p_\nu(t)\,dt$, die durch das Verhältnis

$$\nu = R/S \tag{2.11}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $R > 0$ die Tragfähigkeit oder den «Widerstand» des Tragwerks und $S > 0$ die aufgebrachte Belastung, wo beide Größen als statistische Variable mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $p_R(R)$ und $p_S(S)$ und den zugeordneten Funktionen $P_R(R) = \int_0^R p_R(t)dt$ und $P_S(S) = \int_0^S p_S(t)dt$ zu denken sind. Die Bruchwahrscheinlichkeit p_F ist somit

$$p_F = Pr\{\nu < 1\} = P_\nu(1) \tag{2.12}$$

wobei man die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Quotienten ν bei Verwendung der Funktionen $p_R(R)$ und $p_S(S)$ in der Form [32]

$$P_\nu(\nu) = \int_0^\infty P_R(\nu t) p_S(t) dt \tag{2.13}$$

erhält. Dann gilt

$$p_F = P_\nu(1) = \int_0^\infty P_R(t) p_S(t) dt = \int_0^\infty Pr\{R < t\} \cdot Pr\{S = t\} dt \tag{2.14}$$

oder auch

$$p_F = \int_0^\infty Pr\{S > t\} \cdot Pr\{R = t\} dt = \int_0^\infty [1 - P_S(t)] \cdot p_R(t) dt\,. \tag{2.15}$$

Wir haben bei (2.11) bis (2.15) stillschweigend angenommen, daß die Variablen R und S statistisch unabhängig sind. Diese Annahme ist genügend genau für die meisten Tragwerke, die ohne dynamische Einflüsse dimensioniert werden können.

Daß Gleichungen (2.14) und (2.15) eine Beziehung zwischen p_F und einem Sicherheitsfaktor bestimmen, kann leicht für den Fall exponentieller Verteilungen von R und S für $R > 0$ und $S > 0$ gezeigt werden. Es seien: $P_R(R) = 1 - exp(-\alpha R)$ und $1 - P_S(S) = exp(-\beta S)$ und somit $p_R(R) = \alpha\, exp(-\alpha R)$ und $p_S(S) = \beta\, exp(-\beta S)$. Dann folgt aus Gleichung (2.14):

$$p_F = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t}) \beta e^{-\beta t} dt = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{1 + \bar{R}/\bar{S}} = \frac{1}{1 + \nu_0} \tag{2.16}$$

wobei die Erwartungswerte von R und S: $E[R] = \bar{R} = \alpha^{-1}$ und $E[S] = \bar{S} = \beta^{-1}$ und somit $\nu_0 = \beta/\alpha = \bar{R}/\bar{S}$ die zentrale Tendenz der Verteilung des (statisch variablen) Sicherheitsfaktors ν angibt, der in Gleichung (2.13) definiert wurde: $P(\nu) = (1 + \nu_0/\nu)^{-1}$. Dieses Maß soll im folgenden als «zentraler» Sicherheitsfaktor bezeichnet werden.

Da die Vereinfachung, die durch die Wahl von Exponentialverteilungen für R und S getroffen wurde, zu weit geht, schließt sich in Wirklichkeit die Anwendung von Gleichung (2.16) aus. Nichtsdestoweniger illustriert diese Gleichung das wichtigste Ergebnis aller Beziehungen p_F und ν_0: Wenn ein «zentraler» Sicherheitsfaktor in der Bemessung gebraucht wird, so muß sein Wert von sehr großer Ordnung sein, damit eine genügend kleine Bruchwahrscheinlichkeit garantiert werden kann. Die konventionelle Bemessung ist allerdings nicht auf einen «zentralen» Sicherheitsfaktor begründet, weil ja die Normenwerte für Last- und Tragfähigkeit unter der stillschweigenden Annahme bestimmt wurden, daß die Bemessungslast ein «Maximalwert» sein müsse, wogegen die Tragfähigkeit auf einem «Minimalwert» der entscheidenden Materialwerte basiert ist. Eine «maximale» Belastung S_{max} und eine «minimale» Tragfähigkeit R_{min} können jedoch (mit einigen Ausnahmen, nämlich wo eine obere Grenze der Lasten aus funktionalen Gründen gegeben ist, wie durch den maximal verfügbaren Stapelraum, die dichteste Volksmenge, das größte Lokomotivengewicht) nur in statistischen Termen wissenschaftlich definiert werden, nämlich als Lastintensität $S_{max} = S_q$, die mit einer genügend kleinen Wahrscheinlichkeit $q = Pr\{S > S_q\}$ überschritten, und als Tragfähigkeit R_{min}, die mit der genügend kleinen Wahrscheinlichkeit $p = Pr\{R < R_p\}$ unterschritten wird. Führen wir die Parameter ξ_p und η_q ein, so daß $R = \xi_p \bar{R}$ und $S_q = \eta_q \bar{S}$ und definieren wir einen «konventionellen» Sicherheitsfaktor

$$\bar{\nu} = R_{min}/S_{max} = R_p/S_q = (\xi_p/\eta_q)\nu_0 \tag{2.17}$$

so kann die Beziehung zwischen $\bar{\nu}$ und ν_0 leicht bestimmt werden. Mit $\xi_p < 1$ und $\eta_q > 1$, wird $\nu_0 >> \bar{\nu}$; daraus erklärt sich die Diskrepanz zwischen den Werten des Sicherheitsfaktors der konventionellen Bemessungen und den «zentralen» Sicherheitsfaktoren, die aus der wahrscheinlichkeitstheoretischen Sicherheitsbestimmung, begründet auf Mittel, Median oder Modus von Belastungs- und Tragfähigkeitsmaßen, hervorgehen.

Vorhandene Beobachtungen über die Verteilungen der wichtigsten Materialeigenschaften deuten darauf hin, daß unter der Bedingung einer sehr guten Qualitätskontrolle eine logarithmisch-normale Verteilungsfunktion eine recht gute Beschreibung davon liefert. Andererseits zeigt die Auswahl der meisten Lastspektren (für die Bemessung), wobei nur das Gebiet der höheren Belastungen behandelt wird, daß eine Verteilung der (oberen) Extremwerte (= Extremwertverteilung) eine gute Annäherung ist. Da dabei nur dieser (obere) Ast der Lastverteilungen einbezogen wird, reduziert sich offenbar die Auswahl der Lastzyklen, die in der Sicherheitsbestimmung betrachtet werden sollen, so daß $F_N(n)$ durch einen höheren zulässigen Wert p_F (Gleichung 2.10) spezifiziert werden kann, als wenn das gesamte Belastungsspektrum betrachtet würde. Die Beziehungen für $p_F(\nu_0)$ und $p_F(\bar{\nu})$ sind für die oben bezeichneten Ausnahmen berechnet und in Fig. 1 zusammengestellt worden. Fig. 2 zeigt die Funktion $p_F(\bar{\nu})$ für $p = 0{,}1$ und $q = 0{,}01$ und eine Anzahl charakteristischer Variationskoeffizienten von S und R, verglichen mit denen, die man aus einer logarithmisch-normalen Verteilung für S und einer Extremalverteilung für R

erhält [34]. Der Vergleich zeigt den Einfluß der verschiedenen für S und R eingesetzten Verteilungen.

Bei der hier behandelten Sicherheitsbestimmung wurde impliziert, daß ein einziger Bruchmechanismus, der sich einmal entwickelt hat, auch den Zusammenbruch des Tragwerkes zur Folge hat. Dieser Bruchmechanismus kann auf eine maximal zulässige reversible (oder irreversible) Verformung bezogen werden, deren Überschreiten als funktionelles Versagen und somit als Bedingung für die «Unbrauchbarkeit» (unserviceability) betrachtet werden kann. Der Bruchmechanismus kann Versagen einer kritischen Stelle im Tragwerk oder auch, häufiger, als Instabilität des Tragwerkes (kinematischer Zusammenbruch, Knicken) verstanden werden.

In der heutigen Forschung wird unterschieden zwischen Tragwerken, die in einer oder der anderen oben angewandten Weise versagen, nämlich einerseits durch einen «Einzelteil» oder eben das «schwächste» Glied, oder andererseits durch eine Folge des Nachgebens verschiedener Glieder oder Teile bei jeweiliger Kräfteumlagerung [35]. Allerdings ist die Betrachtung dieses «Kettenreaktions»-Typs meist nicht von praktischer Bedeutung, weil das Versagen eines der überzähligen Glieder durch Bruch oder Fließen die Bruchwahrscheinlichkeit der übrigen Glieder plötzlich sehr stark erhöht, so daß die Wahrscheinlichkeit des «Überlebens» des Tragwerks wesentlich beeinträchtigt ist, außer es handle sich um einen Fall mit außerordentlich vielen überzähligen Gliedern.

Die oben angeführte «Überzähligkeit» (stat. Unbestimmtheit, d. Ü.) ist so zu verstehen, daß die aufgebrachte Belastung gleichzeitig von allen Gliedern des Tragwerks getragen wird, wie im Fall eines Bündels paralleler Fäden, im Unterschied zum «nicht überzähligen» (statisch bestimmten) Tragwerk, das durch eine Kette dargestellt wird, bei der alle Glieder die volle Last tragen. Keiner der beiden Modellfälle aber zeigt den Charakter etwa einer Brücke oder anderer Tragwerke, bei denen nicht alle Glieder durch die gleiche Last oder Lastgruppe gleich stark beansprucht sind. Die höchste Beanspruchung wird in verschiedenen Gliedern durch verschiedene Lastfälle bewirkt, die voneinander unabhängig sind. In einem bestimmten Tragwerk muß die Bruchwahrscheinlichkeit jedes Gliedes gesondert bestimmt werden, damit das «kritische» Glied gefunden werden kann, nämlich jenes Element, das den höchsten Wert von $F_N(n) \sim np_F$ besitzt. Der Bruchmechanismus eines statisch bestimmten Systems ist jener, der das Versagen des «kritischen» Gliedes enthält oder, im Fall daß mehrere Glieder mit dem gleichen Wert $F_N(n)$ vorkommen, das Versagen irgendeines von diesen.

Die Berechnung der Bruchwahrscheinlichkeit eines m-fach statisch unbestimmten Systems erfordert die Betrachtung der m aufeinanderfolgenden Zustände abnehmender statischer Unbestimmtheit, die das Tragwerk bis zum Eintritt in den endlichen Bruchmechanismus durchläuft, bei dem die m überzähligen Glieder sowie das «kritische» des zuletzt sich ergebenden statisch bestimmten Tragwerks versagt haben. Die Schwierigkeit rührt daher, daß weder

der Weg vom statisch unbestimmten Tragwerk bis zum Bruchmechanismus noch der Bruchmechanismus selbst einzig sind, weil es in der Regel mehr als eine Gruppe von $(m+1)$ Gliedern gibt, denen Versagen mit dem Zusammenbruch des Tragwerkes gleichgesetzt werden kann.

Tritt der Zusammenbruch durch das gleichzeitige Versagen aller $m + 1$ notwendigen Glieder bei einem festgelegten Lastfall ein, so kann die Bruchwahrscheinlichkeit jedes einzelnen Gliedes zu p_F berechnet werden. Die Bruchwahrscheinlichkeit des gesamten Tragwerks ist dann $kp_F{}^{(m+1)}$ wo k die Anzahl der möglichen und unabhängigen Folgen von $(m+1)$ Gliedern bezeichnet, deren Versagen zum gleichen Bruchmechanismus führt. Sonst beträgt die «Überlebenswahrscheinlichkeit» unter $(m+1)$ unabhängigen Lastwechseln des Lastmusters nach Gleichung (2.8):

$$L_N(n) = [1 - kp_F{}^{(m+1)}]^n \tag{2.18}$$

oder wo $kp_F{}^{(m+1)} << 1$,

$$L_N(n) \sim 1 - nkp_F{}^{(m+1)} \tag{2.19}$$

und

$$F_N(n) \sim nkp_F{}^{(m+1)} < np_F \tag{2.20}$$

außer k sei außerordentlich groß und n sehr klein. Die Bruchwahrscheinlichkeit p_F einer der k-Gruppen von $(m+1)$ Gliedern eines statisch unbestimmten Tragwerks kann somit für einen bestimmten Wert $F_N(n)$ größer sein als für das kritische Glied eines statisch bestimmten Tragwerks.

Die obigen Gleichungen stellen allerdings erst eine erste Annäherung an das Sicherheitsproblem statisch unbestimmter Tragwerke dar, dessen wirkliche Lösung ein detailliertes Studium der möglichen Bruchmechanismen eines Tragwerks voraussetzt, wobei nicht nur das Versagen unter einer Bevölkerung unabhängiger Lasten, sondern auch unter aufeinanderfolgenden Lastwechseln gehört, von denen jeder ein partielles Versagen von weniger als $(m+1)$ Gliedern zur Folge haben kann. Darüber ist noch sehr wenig gearbeitet worden [36].

Ib

Combination of the Theories of Elasticity, Plasticity and Viscosity in Studying the Safety of Structures

A. M. FREUDENTHAL

Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

The assumption of the "failure mechanism" underlying the safety analysis of a structure must reflect the failure criterion in conjunction with the deformational response of the structure, which is determined by its geometry and by the mechanical response of the structural material.

1. Failure Criteria

Criteria of *functional* failure or "unserviceability" of a structure are derived either from the condition of conservation, during every load application beyond a few initial "proof loadings", of a stable structural form satisfying the functional requirements, or from the specification of the maximum change of this form at the end of the anticipated operational life still compatible with those requirements, and expressed in terms of an acceptable rate of change of the structural geometry. Criteria of *structural* failure have the character of instability criteria: deformation grows or separation surfaces propagate at rapidly increasing rates, but under constant or decreasing load intensities. As a result of the difference in character of the criteria of functional and structural failure the associated failure mechanisms are necessarily related to different regions of deformational response of the structure; neither criterion excludes irrecoverable deformations.

Selection of relevant design conditions presupposes the performance of two independent analyses, one for unserviceability, the other for structural failure. In both analyses the inelastic response of the structural material must be considered: in the former by limiting its magnitude either explicitly, as in the case of analysis for creep deformation of concrete structures under sustained high compressive stresses (long-span arches, prestressed girders) or of metal structures at elevated temperatures, or implicitly, as in the case of analysis for elastically constrained plastic deformation under a single load application (plastic relief of elastic stress concentrations), or for the formation of a system of stabilizing residual stresses under cyclic loading ("shakedown"); in the latter by considering the effect of the inelastic response on the development of deformational instability (elastic-plastic and creep buckling, plastic collapse mechanisms, tension instability) or on the mechanics of fracture (brittle fracture, fatigue-and creep fracture).

Inelastic deformational instability and fracture are alternative structural failure mechanisms. This can be shown under the assumption of quasistatic deformation when the applied strain work W is converted in free (elastic) energy W_F, into bound (dissipated) energy W_D and into the energy of production of new surfaces W_s or [1]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} + \frac{dW_s}{dt} \tag{1.1}$$

The rate of increase of free energy therefore

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \tag{1.2}$$

Formulating the failure condition of the structure by a stationary value of elastic energy $dW_F/dt = 0$

$$\frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \tag{1.3}$$

which indicates that fracture will not propagate in the presence of an effective energy dissipation mechanism absorbing the applied strain work.

Lack of recognition of the dual aspect of structural analysis has been the cause of irrelevant controversy. The proponents of the indiscriminate application of plastic "collapse analysis", comparing the results of their analysis with those of conventional elastic analysis, claim that collapse analysis is more logical and represents reality better than elastic analysis [2]. Within the framework of the well-known limitations of plastic collapse analysis (proportional loading to failure, absence of local instability and of excessive rotation in the plastic hinges) this claim is valid only with respect to structural failure, while it is the elastic analysis which represents the "reality" of functional failure.

Which of the two analyses produces the relevant design conditions therefore depends on the selected "acceptable" values of $F_N(n_s)$ and $F_N(n_F)$, where n_s and n_F denote, respectively, the number of applications of the operational and of the failure load pattern during the anticipated service life of the structure, as well as on the parameters and form of the distributions of the resistance R_s at the limit of serviceability and of R_F at structural failure respectively. The median values $\check{R}_s < \check{R}_F$ and the scatter of R_s, which in most cases depends on elastic properties, is much narrower than that of R_F, while $F_N(n_s) \doteq n_s p_{Fs}$ can always be larger than $F_N(n_F) \doteq n_F p_F$ since the consequences of functional failure are always much less severe than those of structural failure. Under the assumption of a single load spectrum containing both operational and failure loads so that $n_s = n_F$ and therefore $p_{Fs} > p_F$, the schematic representation in Fig. 1 illustrates the relation between safety analysis for functional and for structural failure.

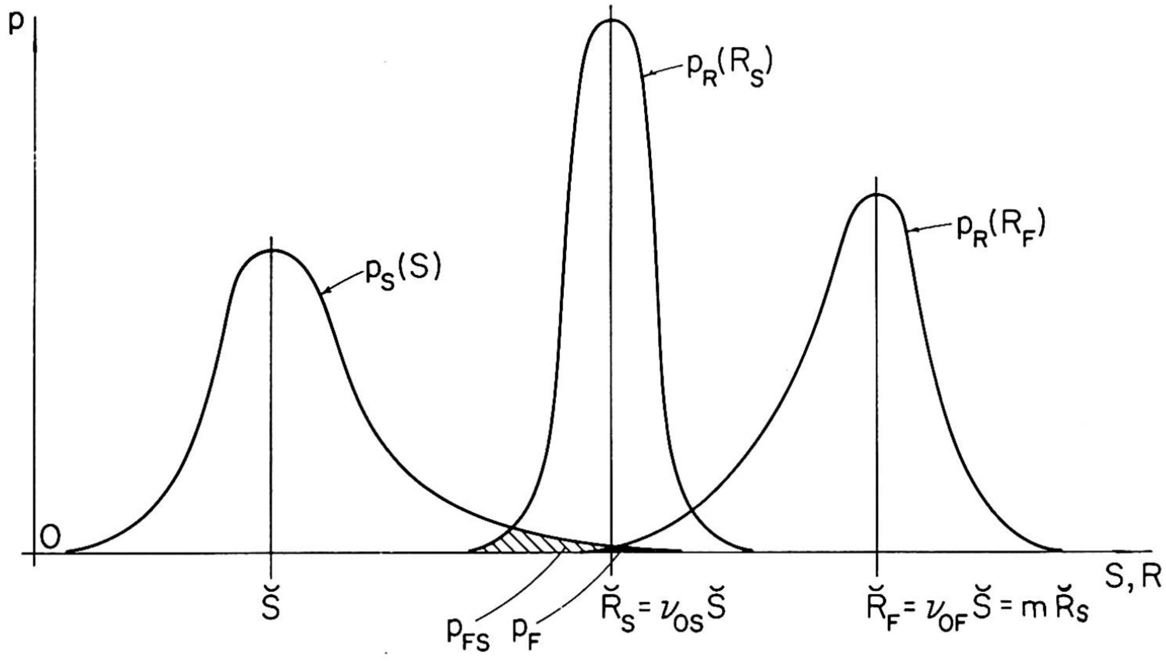

Fig. 1

It also illustrates the difference between the central safety factor for structural failure ν_{0F} and the "overload factor" $m = \check{R}_F/\check{R}_s = \nu_{0F}/\nu_{0s}$, which, in the theory of plasticity, is erroneously considered as a safety factor [3]; ν_{0s} denotes the central safety factor for functional failure. Fig. 1 shows the interrelation between the "overload factor" m of the structure, which is required to ensure the specified probabilities of functional and structural failure p_{Fs} and p_F associated respectively with the central safety factors ν_{0s} and ν_{0F}; it is this factor by which the mechanisms of elastic (functional) and plastic collapse (structural) failure must be related, and which therefore establishes the correlation between probability of failure, safety and plastic collapse analysis.

Effective safety analysis depends on the possibility of a clear separation of independent criteria of functional and of structural failure. This implies that the two criteria are associated with significantly different ranges of material response, as in the case of a functional failure mechanism based on a limited (elastic) strain and a structural failure mechanism associated with plastic or visco-elastic instability. When failure is produced by crack propagation within the range of small deformations, no such separation is possible since the two failure mechanisms are not independent and overlap: progressive damage produced by load intensities within the operational range influences the mechanism of structural failure, as in the case of catastrophic fatigue failure following "shakedown" of the cyclically loaded elastic-plastic structure.

Safety analysis in the fatigue range must be based on the concept of failure, under a single rare load of high intensity, of the structure damaged by fatigue under operational loads. The structural resistance R thus decreases with increasing damage $D(n)$ produced by n repetitions of such loads. Hence, the safety factor $\nu_F = [R(n)/S]$ decreases gradually as the density function $p_R[R(n)]$ moves towards lower values of $R(n)$ thereby increasing the associated probability of failure $p_F = p_F(n)$. This increase can be evaluated by use of the diagrams of Fig. 1 Report Ia for values of ν_0 or $\bar{\nu}$ decreasing with n according to a suitably selected function $R(n)$ [4]. Since $p_F(n)$ is not a constant, the reliability function $L(n)$ is no longer exponential but can be obtained from Eq. (2.7) in Report Ia under the approximate assumption $p_F(n) = h_N(n)$ where $h_N(n)$ is approximated by an increasing function of n of the simple form $h_N(n) = c\alpha n^{\alpha-1}$:

$$L(n) = exp\left[-\left(\frac{n}{v}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.4}$$

with $c = v^{-1}$, where v is considered as a "return period" of fatigue failure denoting the value of n at the quantile e^{-1}. Eq. (1.4) is the well-known Third

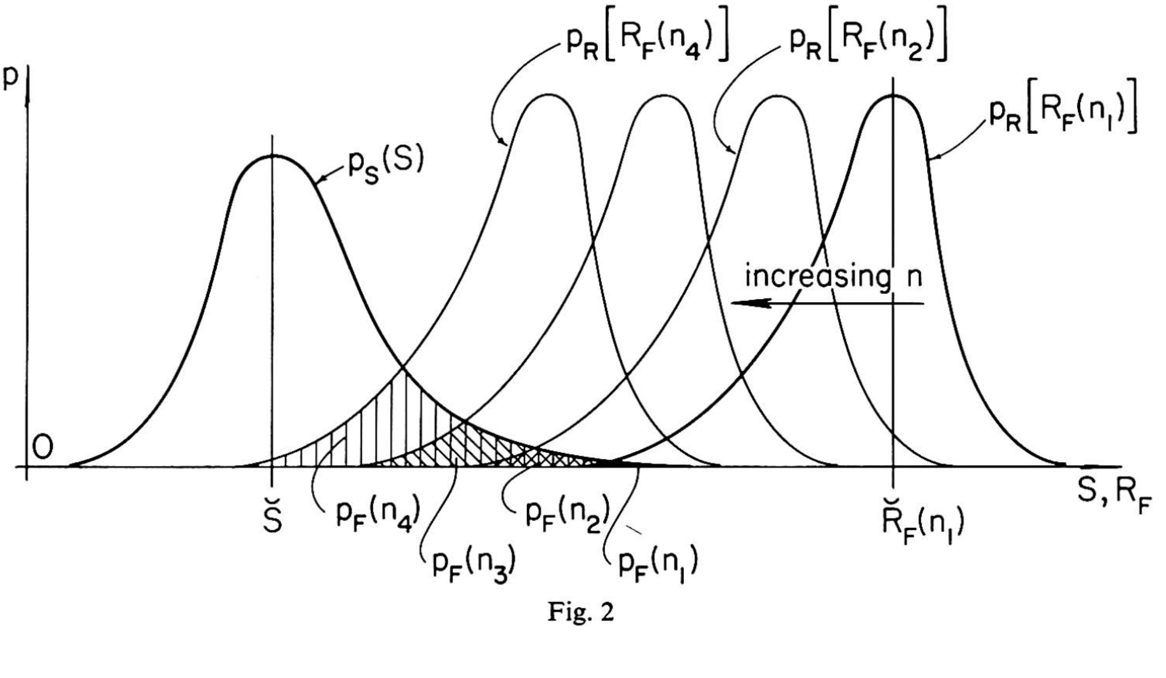

Fig. 2

Asymptotic probability function of extreme (smallest) values [5] which is widely used in the reliability analysis of fatigue sensitive structures [6]; for $\alpha = 1$ and $v = p_F^{-1} = T_F$ Eq. (1.4) degenerates into the exponential reliability function of chance failures.

2. Probability Distribution of Failure Mechanisms

The evaluation of the statistical dispersion of the resistance R, characterizing the critical failure mechanism of a structure, becomes increasingly difficult with increasing complexity of the response of the structural material. In the case of linear material response such evaluation requires the replacement, in the relevant equations of structural mechanics, of the constant physical parameters (moduli of elasticity, coefficients of viscosity) by parameters defined in the form of probability density functions by which the material response acquires the (stochastic) character of a "random medium", and the differential equations of structural mechanics are transformed into equations with stochastic coefficients. The statistical expectation of the solution of such an equation is nearly enough the solution of the associated classical equation with the "expected" values of the parameters, which can therefore be directly introduced as an approximation. In the case of non-linear material response the direct introduction of the dispersion of the classic response equations, such as the moment-curvature relation in bending is more convenient [7] since rigorous analysis, even of linear solid stochastic media, has, so far, only been attempted in very simple cases [8]. In the simplest non-linear case of an elastic-plastic medium a few attempts have been made to introduce a stochastic distribution of the local yield limit in the formulation of a constitutive equation of such a medium and its statistical dispersion [9]. However, none of these attempts have produced results that would be useful on an engineering level.

The distribution of the failure resistance of an elastic-brittle medium based on the simplified assumption of known statistical variation of local strength has been extensively studied [10]. The resulting distribution of the resistance to brittle fracture under uniform tension in the form of the Third Asymptotic distribution of extreme (smallest) values (Weibull distribution [11])

$$P(R) = 1 - e^{-V\left(\frac{R - R_0}{R^*}\right)^{\alpha}} \tag{2.1}$$

where V denotes the volume, R_0 is the minimum strength, R^* a measure of the central tendency known as the "characteristic strength" and $\alpha > 0$ a scale parameter which decreases with increasing dispension, has been found to reproduce the experimentally observed effects of size, geometry and stress distribution in fracture of brittle materials [12], such as glass, ceramics and refractory metals with values of $3 < \alpha < 8$ equivalent to coefficients of variation of 0.35 to 0.15 with respect to the mean. On the basis of this theory and at the same level of the probability of failure the resistance in pure bending R_B is related to the resistance in tension R_T by the expression [13]

$$R_B = \eta R_T \left[2(\alpha + 1) \frac{V_T}{V_B} \right]^{1/\alpha} \tag{2.2}$$

where V_T and V_B are the volumes of the tension specimen and of the beam specimen respectively, and $\eta = S_B/A_T$ is the ratio between the section modulus S_B of the beam section and the area A_T of the section stressed in tension.

Instability in the elastic range is governed by elastic and geometric parameters and the eccentricity of the compressive forces. In the simple illustrative case of a uniform elastic strut of length L with freely rotating ends, an initial eccentricity in the form of a lateral deflection is amplified by the compressive force P roughly in the ratio $(1 - c)^{-1}$, where $c = P/P_c$ is the ratio of P to the critical (buckling) force $P_c = \pi^2 EI/L^2$, the distribution of which depends on the dispersion of E and I alone, if the length can be considered as a non-statistical parameter. Thus a relatively narrow dispersion of P_c converts c and the resulting amplification factor $(1 - c)^{-1}$ into a statistical variable of wider dispersion which, by amplifying an initial dispersion of the eccentricity, produces a still wider dispersion of the failure load of the strut due to eccentric compression. The associated probability density $p_R(P) = p_R(R_F)$ must be strongly skewed towards small values of P since the distribution of the excentricity is limited at zero and the dispersion at this limit is only affected by the dispersion of E and I.

The dispersion of the failure load of a linear visco-elastic strut is wider because of its considerable dependence on the coefficient of viscosity [14] which shows considerable scatter. Since the effect of the dispersion of the viscosity on the failure load increases with time, the dispersion of the relatively low, long time "creep-buckling" loads is necessarily wider than that of the high, short time loads. The present knowledge of the form of the distributions of the resistance to compressive failure does not yet justify the assumption of any specific probability function in the safety analysis.

The form of the dispersion of the structural resistance associated with a specific plastic collapse mechanism in bending is related to the fact that it can be expressed by a linear combination of the plastic hinge moments producing this mechanism. As a result of the central limit theorem the distribution function of the resistance at plastic collapse will tend towards a normal distribution with increasing degree of indeterminancy of the structure, independently of the form of the distributions of the individual hinge moments which are similar and depend mainly on the distribution of the yield stress. Since numerous observations have shown this distribution to be nearly enough Logarithmic

Normal [15], with a coefficient of variation with respect to the median of 0.05 to 0.15, depending on the level of control of the production process, it can be assumed that the form of the distribution function of the structural resistance at collapse varies between a Logarithmic Normal for low redundancy to a Normal for high redundancy, with coefficients of variation decreasing with increasing redundancy as a result of the central limit theorem.

The effect of material response on the dispersion of tension instability loads can be easily illustrated for the case of extension of a uniform strut of cross section A and length L of incompressible material, of stress-strain relation

$$\sigma = M \varepsilon_L{}^n \tag{2.3}$$

where $\varepsilon_L = \ln (L/L_0)$ and $0 < n < 1$. Since $P = \sigma A$, the instability conditions $dP = \sigma dA + A d\sigma = 0$ in conjunction with the incompressibility condition $dV = d(AL) = A dL + L dA = 0$ produces the expression $(d\sigma/\sigma) = d\varepsilon_L$ or $(d\sigma/d\varepsilon_L) = \sigma$ and therefore, from Eq. (2.3), the "instability strain" $\varepsilon_L = n$. The associated instability force therefore

$$P = A_0 M (n/e)^n \tag{2.4}$$

since $A = A_0 e^{-\varepsilon_L}$. Introducing the "strain-hardening coefficient" n as a statistical variable to reproduce the dispersion of the observed stress-strain relations, the probability function $P_R(R_F)$, where $R_F = P$, can be obtained from Eq. (2.4). Thus, for instance, for the rather wide range of variations of the instability strain $0.25 > \varepsilon_L = n > 0.125$ the range of P is enclosed between $1.83 A_0 M > P > 1.48 A_0 M$. Since the workhardening relations for one and the same material are usually reproducible within a much narrower range of scatter of n, the dispersion of the resistance under conditions of tension instability is so narrow as to be practically non-statistical.

3. Limitations of the Probabilistic Approach to Safety Analysis

The most obvious limitations of the probabilistic approach to safety analysis are the existence of non-random effects in structural reliability such as the existence of non-random loads, and of effects of accuracy of load and stress analysis, quality of workmanship and level of local inspection during construction. Some of these effects are, however, reflected in the selection of the distribution functions and parameters of the probabilistic analysis.

Thus the level of material inspection influences both the width of the dispersion of the critical material parameters as well as the form of their distribution. According to existing observations a coefficient of variation with respect to the median of $v = 0.05$ represents an exceptionally high level of control of both strength and yield stress of structural metals as well as of structural concrete. A coefficient of variation $v = 0.10$ to 0.12 represents an average level, while values $v > 0.15$ are an indication of inadequate quality control. These latter conditions are, moreover, characterized by "extreme value" distributions of the material parameters [16], while adequate control levels are reflected by Logarithmic Normal distributions.

Non-random loads, such as dead load, can be added to the mean or median operational load intensity, thereby reducing the coefficient of variation of the load which determines the central safety factor ν_0 of the structure. Thus a coefficient of variation of the operational load $v = 0.20$ is reduced to $v = 0.10$ for a ratio of 1:1 of dead load to operational load and to $v = 0.05$ for a ratio of 3:1, with resultant reduction of the central safety factor with increasing dead load.

Effects of accuracy of analysis and quality of workmanship require consideration outside of the framework of probabilistic analysis, which therefore must be considered to produce only a minimum value of the safety factor, to be corrected for the nonstatistical effects by a suitable rating procedure [17]. Numerical values proposed for such "rating factors" by which an objective safety factor is to be multiplied have, however, no rational basis and can, therefore, not be related to an objective probability of failure.

The fact that the form of the distribution functions of the relevant parameters cannot be determined from actual observations within a range significant for safety analysis has caused the most serious objections to the use of such analysis. It has also given rise to proposals to introduce non-parametic methods [18] in preference to specific distribution functions. Since these proposals are impractical in view of the impossibility to obtain acceptably low values p_F on the basis of a non-parametric approach, the problem of the selection of the form of the distribution functions of S and of R on the basis of existing or obtainable data appears to be the principal limitations to the general acceptance of the probabilistic interpretation of structural safety.

No rational solution of this problem is possible, however, without the realization that the problem is one of selecting probabilistic models that generate relevant distribution functions and not of selecting functions to fit observations, simply because the number of observations, particularly of the significant material parameters, can never be large enough to reach the probability range significant for structural reliability analysis. On the other hand, within the practical range of observations statistical fitting of data cannot lead to such discrimination between probability functions that would justify extrapolation into the significant probability range.

The simplest and most effective probability models are based on the concepts of "rare" and of "extremal" phenomena generating respectively Poisson and related discrete distributions and Extremal distributions [19]. These distributions are germane to structural safety analysis which is concerned with rare or extreme high load intensities in conjunction with rare or extreme low values of structural resistance. Once a relevant form of the distribution has been selected only a limited number of observations is required for estimation of its parameters, and extrapolation can be justified not on the basis of curve fitting in the central range, but on the much firmer bases of physical relevance. Hence, small numbers of observations of data that can be classified as "rare" or "extremal" are much more useful than a large series of data of indeterminable character. For instance, observations of highest yearly flood levels can be reliably extrapolated on the basis of extremal distributions [20], while the entity of daily water level records would be useless for this purpose.

It is important to note, moreover, that the knowledge of the form of the distribution of both S and of R is required only if the dispersion of both variables is roughly of the same magnitude. It is easily seen from Fig. 2 of Report Ia that a moderately large dispersion of the load intensity reduces the significance of the form of the distribution of the structural resistance: for coefficients of variation $v_S = 0.20$ the relations between p_F and ν for Logarithmic Normal and for Extremal distribution with $v_R = 0.10$ are practically identical, in spite of the fact that a dispersion of resistance characterized by $v_R = 0.10$ is not very narrow. Since a coefficient of variation of the load intensity of $v_S = 0.20$ is not exceptional (coefficients of variation of $v_S = 0.18$ for windloads [21] and of $v_S = 0.177$ for floor loading [22] have been determined) while $v_R = 0.10$ is at the upper limit of dispersion of material parameters for adequate inspection levels, the conclusion seems justified that the form of the distribution of material parameters is significant only when the load intensity is of very narrow dispersion or non-statistical.

The assessment and justification of a quantitative risk of failure designated as "acceptable" has been attempted by either of two methods: (a) by comparison of the risk of structural failure with other risks deemed "acceptable" because they are usually provided for by insurance coverage, or (b) by the introduction of a "decision rule" or course of action by which a certain measure of "effectiveness" of the structure is optimized. Current preoccupation with "decision theory" and "optimization" as important aspects of "systems design" has resulted in attempts to apply similar concepts to the determination of an acceptable risk of structural failure, selecting a suitable measure of "effectiveness" to be optimized, such as the weight of the structure or its cost, introduced as a function of the probability of failure characterizing the design, or introducing simultaneous objectives, such as minimizing the cost while maximizing the safety of the structure.

The application of these methods can, however, not remove the necessity to introduce, at some point in the analysis, a subjective value judgement, for instance the assessment of the relative importance of alternative objectives or, in the case of a single objective, such as minimum cost, the assessment of the ratio of the cost of the structure and the cost of its failure. For the latter case this can be shown by introducing the simplest possible criterion that the total cost of the structure should be minimized. This cost is made up of the first cost $A(p_F)$ and the capitalized cost of failure $C(p_F)$, which is $p_F \cdot C(p_F) \cdot Q$, where Q is the capitalization factor and p_F the probability of failure referred to one year of operation. Hence the condition

$$A(p_F) + p_F C(p_F) \cdot Q \rightarrow min \tag{3.1}$$

or

$$\frac{dA(p_F)}{dp_F} + Qp_F \frac{dC(p_F)}{dp_F} + QC(p_F) = 0 \tag{3.2}$$

will furnish the value of p_F by which the total cost of the structure is optimized provided the dependence of A and C on p_F can be established. If $A(p_F)$ is introduced as a decreasing function of p_F of the simple form [23]

$$\frac{dA}{dp_F} = -\frac{c}{p_F} \quad \text{or} \quad A = -c \ln p_F + B \tag{3.3}$$

and the cost of failure written in the form $C = C' + C''$ is assumed to consist of two parts, the cost of reconstruction $C' \sim A$ and a part C'' that is independent of the reconstruction cost but somehow expresses the general cost of the failure, Eq. (3.2) with $p_F Q << 1$ takes the form

$$p_F{}^* \doteq \frac{c}{QA}\left(1 + \frac{C''}{A}\right)^{-1} \sim \frac{c}{QC''} \tag{3.4}$$

provided $C''/A >> 1$. Hence the analysis contains the ratio between the first cost of the structure and the cost of its failure or the cost of failure itself as a prominent parameter by the selection of which the numerical value of the "acceptable" risk can be changed by several orders of magnitude. Instead of selecting an "acceptable" risk by subjective considerations, such as a comparison with other risks, the cost of failure is thus selected in terms of the first cost of the structure. While this latter procedure may be less arbitrary, it is shown that a subjective decision at some point of the procedure cannot be avoided; only the point at which it is to be made can be varied.

One of the objections to the probabilistic approach to safety that has been raised is that no real meaning can be associated with probabilities of the very small magnitude (10^{-4}–10^{-8}) used in this approach, particularly since the distributions in this range cannot be known from statistical inference. It must be recognized, however, that the distributions are not selected by statistical inference but by arguments of physical relevance, and that the actual values of the probabilities are less important than the fact that their use permits the imposition of a *uniform* reliability measure on all parts of a structure for which no other method is available.

References

[1] A. M. FREUDENTHAL: Prel. Report 3rd Int. Congress IASBE, Liège (1948) 643.
[2] J. HEYMAN: Progress in Plastic Design. E. H. LEE and P. S. SYMONDS (Eds.): Plasticity, Pergamon Press, London (1960) 511.
[3] D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG and W. PRAGER: J. Appl. Mech., Vol. 18 (1951) 371.
[4] A. M. FREUDENTHAL: Proc. 7th Int. Congress IASBE, Rio de Janeiro (1964) 511.
[5] E. J. GUMBEL: Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press (1958).
[6] A. M. FREUDENTHAL and E. J. GUMBEL: Adv. Appl. Mech., Vol. 4, Acad. Press, New York (1956) 117.
[7] F. J. BORGES: Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbõa, Tech. Paper No. 240 (1964).
[8] See Ref. 12 of Report Ia. Z. HASHIN: App. Mech. Surveys, Spartan Books, Washington (1966) 263.
[9] J. MURZEWSKI: Proc. IUTAM Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Warsaw, Pergamon Press, London (1959) 479; Arch. Mech. Stosowanej (Warsaw), Vol. 12 (1960) 204.
[10] G. R. IRWIN: Fracture; S. FLUEGGE (Ed.): Encyclopedia of Physics. Vol. 6 (1962), Springer, Berlin.
[11] W. WEIBULL: A Statistical Theory of Strength of Materials. Ing. Vetenskaps Akad., Stockholm, Proc. No. 151 (1939).
[12] W. WEIBULL: J. Appl. Mech., Vol. 18 (1951) 293; Appl. Mech. Rev. Vol. 5 (1952) 449; Ingenieur-Archiv, Vol. 28 (1959) 360.
[13] W. WEIBULL: The Phenomenon of Rupture in Solids, Ing. Vetenskaps Akad., Stockholm, Proc. No. 153 (1939) 28.
[14] A. M. FREUDENTHAL: Introduction to the Mechanics of Solids. J. Wiley, New York (1966) 479.
[15] See Refs. 15 and 29 of Report Ia.
[16] See Ref. 15 of Report Ia.
[17] See Ref. 13 of Report Ia
[18] See Refs. 16 and 21 of Report Ia.
[19] A. M. FREUDENTHAL: J. Appl. Physics. Vol. 31 (1960) 2196.
[20] E. J. GUMBEL: J. Inst. of Water Engineers, London, Vol. 12 (1958) 157.
[21] H. C. S. THOM: J. Struct. Div., Am. Soc. Civil Eng. Vol. 86, No. ST4, Proc. Paper 2433 (1960) 11.
[22] See Refs. 11 and 14 of Report Ia.
[23] N. N. PLUM: Proc. Inst. Civil Eng., London, Vol. 2 (1953) 324.

Ib

Combinaison des théories de l'élasticité, de la plasticité et de la viscosité dans l'étude de la sécurité des structures

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Le choix d'un «mécanisme de ruine» sous-jacent au calcul de la sécurité d'un ouvrage doit exprimer le critère de ruine en liaison avec la réaction de l'ouvrage, se traduisant par des déformations, que déterminent sa géométrie et la réponse mécanique du matériau dont il est constitué.

1. Critères de ruine

Les critères de dérangement *fonctionnel* ou de «mise hors service» d'un ouvrage découlent soit de la condition de conservation, durant chaque application de charge au-delà de quelques «charges d'essais» initiales, d'une forme stable satisfaisant aux conditions de service, soit de la spécification d'une modification maxima de cette forme au terme de la durée de service prévue, modification qui soit encore compatible avec ces conditions de service et s'exprime en tant que taux de variation admissible de la géométrie de l'ouvrage. Les critères de *ruine* proprement dite ont, quant à eux, le caractère de critères d'instabilité: les déformations s'intensifient ou les surfaces de séparation se propagent à des vitesses rapidement croissantes mais sous des charges d'intensité constante ou décroissante. Du fait de la différence de caractère de ces deux sortes de critères, relatifs d'une part à la limite de serviceabilité et de l'autre à la ruine, les mécanismes de ruine associés concernent nécessairement différentes régions de déformation de l'ouvrage; aucun de ces critères n'exclut les déformations irréversibles.

Dans le choix du mode de calcul approprié il faut considérer l'exécution de deux analyses indépendantes, l'une relative à l'inaptitude au service et l'autre à la ruine. L'une et l'autre exigent que l'on prenne en compte le comportement anélastique du matériau de construction: dans la première en limitant l'intensité de la réponse non élastique, et ce, soit explicitement, comme dans le cas du calcul des déformations de fluage des ouvrages en béton soumis à des compressions élevées de longue durée (arcs de longue portée, poutres précontraintes) ou des constructions métalliques exposées à des températures élevées, soit implicitement, comme dans le cas du calcul des déformations plastiques imposées par l'élasticité sous l'action d'une application de charge unique (diminution, du fait des phénomènes plastiques, des concentrations d'efforts élastiques) ou dans le cas du calcul rapporté à la formation d'un système de contraintes résiduelles stabilisatrices en présence de chargements répétés («shake down»); dans la seconde analyse, en considérant l'effet des réponses non élastiques sur le développement de l'instabilité de déformation (flambement élasto-plastique et de fluage, mécanismes de ruine plastiques, instabilité de traction) ou sur les caractéristiques mécaniques des ruptures (rupture fragile, rupture due à la fatigue ou au fluage).

La rupture et l'instabilité de déformation anélastique sont des mécanismes de ruine qui s'excluent mutuellement. Cela peut être mis en évidence en faisant l'hypothèse d'une déformation quasi-statique lorsque le travail de déformation entrant en jeu W se transforme en énergie (élastique) libre W_F, en énergie liée (de dissipation) W_D et dans l'énergie correspondant à la production de nouvelles surfaces W_s, soit [1]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} + \frac{dW_s}{dt} \tag{1.1}$$

Le taux d'accroissement de l'énergie libre est donc:

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \tag{1.2}$$

En imposant, pour définir la condition de ruine de l'ouvrage, une valeur constante d'énergie élastique $dW_F/dt = 0$, on obtient:

$$\frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \tag{1.3}$$

qui exprime que la rupture ne s'étendra pas en présence d'un mécanisme efficace de dissipation d'énergie qui absorbe le travail de déformation mis en jeu.

C'est faute de reconnaître cette dualité du calcul que nombre de controverses se sont élevées qui n'auraient pas dû avoir lieu. Comparant leurs résultats avec ceux donnés par le calcul élastique classique, les partisans intransigeants du calcul plastique à la ruine déclarent que le calcul à la ruine est plus logique que le calcul élastique et représente mieux la réalité que celui-ci ne le fait [2]. Entre les limites bien connues dont est assorti le calcul plastique à la ruine (proportionnalité des charges jusqu'à la rupture, absence d'instabilité locale et de rotations excessives aux articulations plastiques), cette revendication n'est justifiée qu'en ce qui concerne la ruine proprement dite, car dès qu'il s'agit de l'inaptitude au service c'est le calcul élastique qui est le plus proche de la «réalité».

Quant à savoir laquelle de ces deux méthodes convient le mieux pour fournir des bases de calcul valables, la réponse à cette question dépend des valeurs «admissibles» assignées à $F_N(n_s)$ et à $F_N(n_F)$, où n_s et n_F représentent respectivement le nombre d'applications du système de charges de service et du système de charges de rupture pendant la durée de vie prévue de l'ouvrage, et dépend aussi des paramètres et de la forme des distributions de la résistance R_s à la limite de la serviceabilité et de R_F à la ruine. Pour les valeurs moyennes on a $\breve{R}_s < \breve{R}_F$, et la dispersion de R_s, qui le plus souvent dépend des propriétés élastiques, est beaucoup moins grande que celle de R_F, alors que $F_N(n_s) \doteq n_s p_{Fs}$ peut toujours être supérieur à $F_N(n_F) \doteq n_F p_F$ étant donné que les conséquences de la mise hors service sont toujours infiniment moins graves que celles entraînées par la ruine. Dans l'hypothèse d'un spectre de chargement unique contenant à la fois les charges de service et de rupture, de sorte que $n_s = n_F$ et par conséquent que $p_{Fs} > p_F$, on voit au schéma de la Fig. 1 l'illustration du rapport entre les deux types de calcul de la sécurité, rapportés l'un à la limite de serviceabilité et l'autre à la rupture.

Ce schéma met également en lumière la diffeience qui existe entre le coefficient de sécurité central relatif à la rupture ν_{0F} et le «coefficient de surcharge» $m = \breve{R}_F/\breve{R}_s = \nu_{0F}/\nu_{0s}$, que, dans la théorie de la plasticité, l'on considère de façon erronée comme étant un coefficient de sécurité [3]; ν_{0s} représente le coefficient de sécurité central relatif à la mise hors service. La Fig. 1 fait ressortir la dépendance du «coefficient de surcharge» m de l'ouvrage, qui doit assurer que ce soient bien les valeurs spécifiées qu'aient les probabilités de mise hors service et de rupture p_{Fs} et p_F associées respectivement aux coefficients de sécurité centraux ν_{0s} et ν_{0F}; c'est par ce coefficient que doivent être liés les mécanismes du processus élastique de la mise hors service et du processus plastique de la ruine, et c'est donc ce coefficient qui établit la corrélation existant entre la probabilité de ruine, la sécurité et le calcul plastique.

La bonne exécution du calcul de la sécurité dépend de la possibilité de séparer nettement les critères indépendants relatifs d'une part à la limite de serviceabilité et d'autre part à la ruine. Ceci implique qu'à ces deux critères correspondent, pour les réactions des matériaux, des intervalles de variation significativement differents, ainsi qu'il en est dans le cas d'un mécanisme de mise hors service basé sur une déformation (élastique) limitée et d'un mécanisme de ruine associé à une instabilité plastique ou visco-élastique. Lorsque la ruine se trouve engendrée par la propagation de fissures restant dans le domaine des petites déformations, une telle séparation n'est pas possible étant donné que les deux mécanismes en cause ne sont pas indépendants et se recouvrent: les dommages progressifs provoqués par des charges dont l'intensité reste dans la gamme des charges de service exercent un effet sur le mécanisme de ruine, ainsi que cela se produit dans le cas des ruptures catastrophiques par fatigue à la suite des sursollicitations («shake down») subies par des ouvrages élasto-plastiques soumis à des charges cycliques.

Le calcul de la sécurité dans le domaine de la fatigue doit être basé sur la notion de ruine, sous l'action d'une charge unique exceptionnelle d'intensité élevée, de l'ouvrage déjà endommagé du fait de la fatigue sous les charges de service. La résistance à la ruine de l'ouvrage décroît ainsi à mesure que s'accroissent les dommages $D(n)$ résultant de n répétitions de ces charges. Il s'ensuit que le coefficient de sécurité $\nu_F = [R(n)/S]$ diminue progressivement à mesure que, sur la courbe traduisant la fonction de densité $p_R[R(n)]$, on se déplace vers les valeurs inférieures de $R(n)$, la probabilité de ruine $p_F = p_F(n)$ correspondante prenant de ce fait des valeurs de plus en plus grandes. Cet accroissement peut être évalué à l'aide des graphes de la Fig. 1 du Rapport sur le Thème Ia, pour des valeurs de ν_0 ou $\bar{\nu}$ décroissantes avec n avec une fonction $R(n)$ [4] convenablement choisie. Comme $p_F(n)$ n'est pas une constante, la fonction de fiabilité $L(n)$ n'est plus exponentielle, mais on peut la déterminer à partir de l'équation (2.7) du Rapport Ia en admettant comme approximation que $p_F(n) = h_N(n)$ et en prenant, pour valeur approchée de $h_N(n)$, celle donnée par une fonction croissante de n de la forme simple $h_N(n) = c\alpha n^{\alpha-1}$:

$$L(n) = exp\left[-\left(\frac{n}{v}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.4}$$

avec $c = v^{-1}$, où v représente le «délai de retour» de la ruine par fatigue indiquant la valeur de n au quantile e^{-1}. L'équation (1.4) est la classique fonction de probabilité asymptotique du Type III pour les valeurs extrêmes [5] (les plus faibles), fonction d'un emploi très courant dans le calcul de la fiabilité des constructions sensibles à la fatigue [6]; pour $\alpha = 1$ et $v = p_F^{-1} = T_F$, l'équation (1.4) dégénère pour donner la fonction exponentielle de fiabilité correspondant aux ruines fortuites.

2. Distribution de probabilité des mécanismes de ruine

A mesure qu'augmente la complexité des réactions du matériau de construction, il devient de plus en plus difficile d'évaluer la dispersion statistique de la résistance R qui caractérise le mécanisme de ruine critique de l'ouvrage.

Si la réaction des matériaux est linéaire, cette évaluation exige, dans les équations appropriées de la résistance des matériaux, de remplacer les constantes physiques (modules d'élasticité, coefficients de viscosité) par des paramètres qu'on définit sous la forme de densités de probabilité et par lesquels on confère aux réactions des matériaux le caractère (stochastique) d'un «milieu aléatoire», ce qui a pour effet de transformer les équations différentielles de la résistance des matériaux en des équations comportant des coefficients stochastiques. L'espérance mathématique de la solution d'une équation de cette sorte peut être assimilée, avec une précision suffisante, à la solution de l'équation classique correspondante dans laquelle les paramètres prennent la valeur de leur espérance mathématique, ce qui par conséquent fournit directement une approximation. Dans le cas de réactions non linéaires de la part du matériau, il est plus indiqué [7] d'introduire directement la dispersion des relations classiques de réponse, telles que la relation moment-courbure en présence d'efforts de flexion, car ce n'est que dans des cas très simples [8] que l'on a, jusqu'à présent, essayé d'effectuer une analyse rigoureuse portant, même, uniquement sur des milieux stochastiques continus linéaires. Dans le cas non linéaire le plus simple d'un milieu élasto-plastique, quelques essais ont été faits en vue d'introduire une distribution stochastique de la limite élastique locale dans l'expression de l'équation décrivant le milieu en question et sa dispersion statistique [9]. Mais aucun de ces essais n'a donné de résultats pouvant être exploités par l'ingénieur.

De nombreuses études [10] ont été consacrées à la distribution de la résistance à la ruine d'un milieu élastique-fragile à partir de l'hypothèse simple d'une variation statistique connue de la résistance locale. Pour la résistance à la rupture fragile sous une traction uniforme, on obtient une distribution de la forme de la distribution asymptotique du Type III des valeurs extrêmes (inférieures) ou distribution de Weibull [11]:

$$P(R) = 1 - e^{-V\left(\frac{R - R_0}{R^*}\right)^{\alpha}} \tag{2.1}$$

où V représente le volume, R_0 la résistance minima, R^* une mesure de la tendance centrale connue sous le nom de «résistance caractéristique» et $\alpha > 0$ un coefficient d'échelle dont la valeur diminue quand augmente la dispersion; on a constaté que cette distribution concordait avec les observations faites sur l'effet dû aux dimensions, à la géométrie et à la distribution des contraintes dans la rupture des matériaux fragiles [12] tels que le verre, la céramique et les métaux réfractaires avec des valeurs de α satisfaisant à $3 < \alpha < 8$ équivalentes à des coefficients de variation tels que $0{,}35 > v > 0{,}15$ par rapport à la moyenne. En partant de cette théorie, et pour le même niveau de probabilité de ruine, on établit la relation suivante liant la résistance R_B à la flexion pure et la résistance R_T à la traction [13]

$$R_B = \eta R_T \left[2(\alpha + 1) \frac{V_T}{V_B} \right]^{1/\alpha} \tag{2.2}$$

où V_T et V_B sont respectivement les volumes de l'éprouvette de traction et de celle de flexion, et où $\eta = S_B/A_T$ est le rapport entre le module de section S_B de l'éprouvette de flexion et la section A_T de celle de traction.

Dans le domaine élastique, l'instabilité est régie par les paramètres élastique et géométrique et par l'excentricité des efforts de compression. Dans le cas simple, pris à titre d'illustration, d'une barre élastique prismatique de longueur L, biarticulée, une excentricité initiale se présentant sous la forme d'une flexion latérale se trouve approximativement amplifiée dans le rapport $(1 - c)^{-1}$ par l'effort de compression P, expression dans laquelle $c = P/P_c$ est le rapport entre P et l'effort (de flambement) critique $P_c = \pi^2 EI/L^2$, dont la distribution dépend seulement de E et de I si l'on peut considérer que la longueur est un paramètre non stochastique. Ainsi, une dispersion relativement étroite de P_c transforme c et le coefficient d'amplification résultant $(1 - c)^{-1}$ en une variable stochastique de plus forte dispersion qui, en augmentant la dispersion initiale de l'excentricité, engendre une dispersion encore plus forte de la charge de rupture de la barre soumise à une compression excentrique. La densité de probabilité correspondante $p_R(P) = p_R(R_F)$ doit présenter une forte asymétrie négative relativement aux valeurs de P étant donné que la distribution de l'excentricité est limitée à zéro et que, à cette limite, la dispersion n'est affectée que par celle de E et de I.

Avec une barre visco-élastique à comportement linéaire, la dispersion de la charge de rupture est plus forte, car elle dépend très sensiblement du coefficient de viscosité [14] qui, lui-même, est assorti d'une forte dispersion. Comme la dispersion de la viscosité a sur la charge de rupture un effet qui augmente avec le temps, les charges de «flambement par fluage» de longue durée et de relativement faible intensité présentent une dispersion qui est nécessairement plus forte que celle des charges d'intensité élevée et de courte durée. La connaissance que l'on a actuellement de la forme des distributions de la résistance à la ruine par compression ne justifie pas encore l'hypothèse d'une densité de probabilité spécifique dans le calcul de la sécurité.

La forme de la dispersion de la résistance à la limite associée à un mécanisme spécifique de ruine plastique à la flexion est liée au fait qu'on peut l'exprimer au moyen d'une combinaison linéaire des moments aux articulations plastiques qui engendrent ce mécanisme. Par suite du théorème de la limite centrale, la distribution de la résistance lors de la ruine plastique tendra vers la loi normale à mesure qu'augmentera le degré d'hyperstaticité de l'ouvrage, et ce indépendamment de la forme des distributions des divers moments aux articulations plastiques qui sont semblables et dépendent essentiellement de la distribution de la limite élastique. Or, de nombreuses observations montrent que l'on peut considérer cette distribution comme étant, avec une précision suffisante, une distribution logarithmico-normale [15], avec un coefficient de variation par rapport à la médiane compris entre 0,05 et 0,15 selon le degré du contrôle auquel est soumise la production, et l'on peut donc admettre que la distribution de la résistance lors de la ruine a une forme qui passe de celle de la distribution logarithmico-normale, pour une faible hyperstaticité, à celle de la loi normale dans le cas d'une hyperstaticité élevée, avec des coefficients de variation qui, conformément au théorème de la limite centrale, diminuent quand augmente l'hyperstaticité.

Il est facile d'illustrer l'effet de la réaction des matériaux sur la dispersion des charges d'instabilité par traction en prenant le cas de l'allongement d'une barre homogène de section A et de longueur L, en un matériau incompressible, avec pour relation contrainte-allongement:

$$\sigma = M \varepsilon_L{}^n \tag{2.3}$$

où $\varepsilon_L = \ln(L/L_0)$ et $0 < n < 1$. Comme $P = \sigma A$, les conditions d'instabilité $dP = \sigma dA + A d\sigma = 0$, conjointement à la condition d'incompressibilité $dV = d(AL) = AdL + LdA = 0$, conduisent à $(d\sigma/\sigma) = d\varepsilon_L$ ou $(d\sigma/d\varepsilon_L) = \sigma$, ce qui donne par conséquent, à partir de l'équation (2.3), pour «l'allongement d'instabilité»: $\varepsilon_L = n$. L'effort d'instabilité correspondant est donc:

$$P = A_0 M (n/e)^n \tag{2.4}$$

puisque $A = A_0 e^{-\varepsilon_L}$. En introduisant le «coefficient d'écrouissage» n en qualité de variable stochastique pour reproduire la dispersion des relations contraintes-allongements données par l'observation, on peut, à partir de l'équation (2.4), déterminer la densité de probabilité $p_R(R_F)$, où $R_F = P$. C'est ainsi, par exemple, que pour l'intervalle de variation assez étendu de la déformation d'instabilité $0{,}25 > \varepsilon_L = n > 0{,}125$, on a comme limites de la variation de P: $1{,}83 A_0 M > P > 1{,}48 A_0 M$. Etant donné que les relations d'écrouissage relatives à un seul et même matériau sont généralement reproductibles à l'intérieur d'un intervalle de dispersion beaucoup plus étroit de n, la résistance dans les conditions de l'instabilité due à des efforts de traction est assortie d'une dispersion si étroite qu'on peut la considérer comme n'ayant pas un caractère stochastique.

3. Limitations des méthodes probabilistes de calcul de la sécurité

Les facteurs les plus manifestes qui imposent une limite aux méthodes probabilistes du calcul de la sécurité sont l'existence d'effets non aléatoires affectant la fiabilité des ouvrages, tels que ceux résultant des charges non-aléatoires, ainsi que les effets dus à la précision du calcul des charges et des contraintes, la qualité de la main-d'œuvre et le degré des contrôles locaux en cours de construction. Certains de ces effets sont toutefois pris en compte dans le choix des distributions et des paramètres adoptés pour effectuer le calcul probabiliste.

C'est ainsi que le degré du contrôle des matériaux influe tant sur l'étendue de la dispersion des paramètres critiques des matériaux que sur la forme de leur distribution. Des observations effectuées, il ressort qu'un coefficient de variation par rapport à la médiane de valeur $v = 0{,}05$ représente un degré exceptionnellement élevé du contrôle de la résistance et de la limite élastique des matériaux de construction métalliques ou en béton. Un coefficient de variation v compris entre 0,10 et 0,12 correspond à un degré moyen alors qu'un v supérieur à 0,15 témoigne d'un contrôle de qualité insuffisant. En outre, ce dernier cas se caractérise par des distributions «extrémales» des paramètres des matériaux [16] alors que les contrôles de degré satisfaisant s'assortissent de distributions logarithmico-normales.

Les charges non aléatoires, comme le poids propre, peuvent être ajoutées à la moyenne ou à la médiane de la population des intensités des surcharges de service, ce qui a pour effet de réduire le coefficient de variation de la charge qui détermine le coefficient de sécurité central ν_0 de l'ouvrage. Un coefficient de variation des surcharges $v = 0{,}20$ se trouve ainsi ramené à $v = 0{,}10$ dans le cas d'un rapport poids propre/surcharge égal à 1:1, et réduit à $v = 0{,}05$ si ce rapport est de 3:1, avec une réduction parallèle du coefficient de sécurité central à mesure qu'augmente le poids propre.

La précision des calculs et la qualité de la main-d'œuvre entraînent des effets qui doivent être pris en considération en dehors du cadre de l'analyse probabiliste, et celle-ci doit par conséquent être considérée comme ne donnant qu'une valeur minima du coefficient de sécurité qui doit être corrigée, pour tenir compte des effets non stochastiques, en appliquant une pondération appropriée [17]. Mais aucune base rationnelle ne fonde les valeurs numériques qui sont proposées pour ces «facteurs de correction», multipliant les coefficients de sécurité objectifs, et il s'ensuit qu'ils ne peuvent être rapportés à une probabilité de ruine objective.

Les objections les plus sérieuses élevées à l'encontre de l'emploi des méthodes probabilistes procèdent du fait qu'il n'est pas possible de déterminer la forme des distributions des paramètres qui entrent en ligne de compte à partir d'observations concrètes dont le domaine soit suffisamment étendu pour conférer une signification au calcul de la sécurité. Ce fait a également donné lieu à des propositions tendant à introduire des méthodes non paramétriques [18] à la place des distributions spécifiques. Mais, comme il est impossible d'obtenir des valeurs de p_F suffisamment faibles en utilisant une méthode non-paramétrique, ces propositions ne peuvent être retenues dans les applications pratiques, et c'est bien le problème posé par le choix de la forme des distributions de S et de R à effectuer à partir des données existantes, ou à obtenir, qui constitue l'obstacle principal à l'acceptation générale de l'interprétation probabiliste du calcul de la sécurité.

Aucune solution rationnelle ne pourra toutefois être trouvée à ce problème si l'on ne prend pas clairement conscience du fait qu'il s'agit en fait de choisir des modèles probabilistes propres à engendrer les distributions appropriées, et qu'il ne s'agit aucunement de choisir des fonctions par lesquelles ajuster les observations, et cela tout simplement parce que le nombre des observations, notamment en ce qui concerne les caractéristiques déterminantes des matériaux, ne pourra jamais être suffisamment grand pour couvrir un intervalle de variation d'étendue significative pour le calcul de la fiabilité. D'autre part, à l'intérieur de l'intervalle réel des observations, l'ajustement statistique des données ne peut mener à opérer, entre les fonctions de probabilité, une discrimination qui justifierait une extrapolation sur un domaine de variation d'étendue significative.

Les modèles probabilistes les plus simples et les plus efficaces sont basés sur les notions de phénomènes «rares» et «extrémaux» qui donnent lieu, respectivement, aux distributions de Poisson ou aux distributions discontinues apparentées et aux distributions extrémales [19]. Ces distributions sont appropriées aux cas où, dans le calcul de la sécurité, l'on se trouve en présence d'intensités de charge élevées rares ou extrêmes en même temps que de valeurs faibles, elles aussi rares ou extrêmes, de la résistance. Une fois choisie la distribution de forme convenable, il n'est besoin que d'un nombre restreint d'observations pour estimer les paramètres de la distribution, et l'extrapolation peut alors se justifier, non pas à partir de l'ajustement d'une courbe dans le domaine central, mais sur la base, beaucoup plus solide, de la signification physique. Il se révèle donc beaucoup plus utile d'avoir un petit nombre d'observations pouvant être considérées comme se rapportant à des valeurs «rares» ou «extrémales» que de disposer d'une longue série de données de caractère indéterminable. Par exemple, si l'on connaît les crues annuelles maximales, on peut extrapoler de façon satisfaisante en utilisant les distributions extrémales [20], alors que l'entité constituée par les enregistrements quotidiens du niveau des eaux ne serait d'aucune utilité à cet égard.

Il importe en outre de remarquer qu'il n'est nécessaire de connaître la forme de la distribution de S et celle de la distribution de R que si la dispersion de ces deux variables est approximativement de la même grandeur. La Fig. 2 du Rapport Ia fait nettement ressortir que, si la dispersion des intensités des charges est assez forte, l'importance de la forme de la distribution de la résistance se trouve réduite; pour des coefficients de variation $v_S = 0{,}20$, les relations entre p_F et v sont quasiment identiques qu'il s'agisse d'une distribution logarithmico-normale ou d'une distribution extrémale avec une valeur de $v_R = 0{,}10$, et ce en dépit du fait qu'une dispersion de la résistance mesurée par $v_R = 0{,}10$ ne puisse être tenue pour très faible. Or il n'est pas exceptionnel d'avoir pour les intensités des charges un coefficient de variation $v_S = 0{,}20$ (on a déterminé des coefficients de variation $v_S = 0{,}18$ pour les pressions du vent [21] et $v_S = 0{,}177$ pour les surcharges des bâtiments [22], alors que la valeur $v_R = 0{,}10$ se trouve à la limite supérieure de la dispersion des caractéristiques des matériaux dans les conditions d'un contrôle convenable, et il semble par conséquent légitime de conclure que la forme de la distribution des caractéristiques des matériaux ne prend de l'importance que dans les cas où l'intensité des charges est assortie d'une très faible dispersion ou bien n'a pas le caractère stochastique.

Deux méthodes différentes ont été mises en œuvre pour évaluer et justifier un risque de ruine chiffré donné comme «admissible»: a) la première consiste à comparer le risque de ruine à d'autres risques qu'on estime «admissibles» parce qu'ils sont généralement prévus dans les contrats d'assurance, et b) la seconde est basée sur l'introduction d'une «règle de décision» ou ligne de conduite par laquelle on optimise une certaine mesure d'«efficacité» de l'ouvrage. L'intérêt que suscitent actuellement la «théorie des décisions» et l'«optimisation» en tant qu'éléments importants du calcul des systèmes complexes a donné lieu à des essais portant sur l'application de principes similaires pour déterminer un risque de ruine admissible, soit qu'on choisisse, en vue de l'optimiser, une mesure appropriée de l'«efficacité», comme par exemple le poids de l'ouvrage ou son coût, en la faisant intervenir sous la forme d'une fonction de la probabilité de ruine caractérisant le projet, soit qu'on se propose plusieurs objectifs simultanés comme par exemple d'obtenir un coût minima pour une sécurité maxima.

L'application de ces méthodes ne fait toutefois pas disparaître la nécessité de porter, à un moment ou à un autre de l'étude, un jugement de valeur subjectif consistant, par exemple, à évaluer l'importance relative qui s'attache aux divers objectifs recherchés, ou bien encore, si l'on n'a en vue qu'un seul objectif, à évaluer le rapport du coût de l'ouvrage aux frais entraînés par sa ruine. On peut le montrer, sur l'exemple du dernier cas cité, en faisant intervenir le critère le plus simple possible d'un coût total de l'ouvrage rendu minimum. Les éléments de ce coût sont le prix de revient $A(p_F)$ et le coût de la ruine $C(p_F)$ capitalisé, c'est-à-dire $p_F \cdot C(p_F) \cdot Q$, où Q représente le coefficient de capitalisation et p_F la probabilité de ruine rapportée à une durée de service d'une année. On en déduit la condition

$$A(p_F) + p_F C(p_F) \cdot Q \rightarrow min \tag{3.1}$$

ou

$$\frac{dA(p_F)}{dp_F} + Qp_F \frac{dC(p_F)}{dp_F} + QC(p_F) = 0 \tag{3.2}$$

qui donne la valeur de p_F par laquelle le coût total de l'ouvrage est optimisé à condition qu'on puisse établir la dépendance de A et de C à l'égard de p_F. En exprimant $A(p_F)$ sous la forme d'une fonction décroissante de p_F telle que [23]

$$\frac{dA}{dp_F} = -\frac{c}{p_F} \quad \text{ou} \quad A = -c \ln p_F + B \tag{3.3}$$

et en supposant que le coût de la ruine, écrit sous la forme $C = C' + C''$, comprend deux éléments: le coût de reconstruction $C' \sim A$ et une partie C''

qui est indépendante du coût de reconstruction mais d'une certaine façon exprime le coût général de la ruine, l'équation (3.2) avec $p_F Q \ll 1$, prend alors la forme:

$$p_F^* \doteq \frac{c}{QA}\left(1 + \frac{C''}{A}\right)^{-1} \sim \frac{c}{QC''} \tag{3.4}$$

pourvu que $C''/A \gg 1$. On obtient ainsi une expression dans laquelle figure le rapport du prix de revient de l'ouvrage à son coût de ruine ou le coût de ruine lui-même en tant que paramètre directeur qui permet, en le choisissant, de modifier de plusieurs ordres de grandeur la valeur numérique du risque «admissible». Au lieu d'avoir un risque «admissible» défini à partir de considérations subjectives, telles que celles procédant d'une comparaison avec d'autres risques, on peut ainsi fixer le coût de ruine en fonction du prix de revient de l'ouvrage. Bien que cette dernière façon de faire soit moins arbitraire, il n'en reste pas moins vrai qu'on ne peut éviter d'avoir à prendre une décision de caractère subjectif à un point ou à un autre de l'étude; seul le moment auquel elle doit être prise peut être choisi.

L'une des objections que l'on a faites aux méthodes probabilistes du calcul de la sécurité se rapporte au fait que l'on ne peut attribuer aucune signification réelle aux probabilités de très faible grandeur (10^{-4}–10^{-8}) utilisées dans l'interprétation probabiliste, et ce notamment parce que l'inférence statistique ne permet pas de connaître les distributions dans ce domaine. Il faut toutefois reconnaître que ce n'est pas par inférence statistique, mais à partir d'un raisonnement portant sur la signification physique, que l'on choisit les distributions, et il ne faut pas oublier non plus que les valeurs réelles des probabilités sont moins importantes que ne l'est la possibilité qu'elles offrent, à l'exclusion de toute autre méthode, d'imposer une mesure de fiabilité *uniforme* à toutes les parties d'un ouvrage.

Ib

Untersuchung der Tragwerkssicherheit mittels der Elastizitäts-, Plastizitäts- und Viskositätstheorie

A. M. FREUDENTHAL
Professor of Civil Engineering, Columbia University, New York

Die Annahme eines «Bruchmechanismus», die der Sicherheitsanalyse eines Tragwerkes zugrunde liegt, muß das Kriterium des Bruchs widerspiegeln, in Verbindung mit der Verformung des Tragwerks, die durch seine Geometrie und durch die mechanische Verformung des Konstruktionsmaterials bestimmt ist.

1. Bruchkriterien

Die Kriterien des *funktionellen* Bruchs oder der «Unbrauchbarkeit» einer Konstruktion werden entweder bestimmt vom Erhaltungszustand eines stabilen, den funktionellen Erfordernissen entsprechenden Tragwerks unter einer kleinen Anzahl anfänglicher «Probebelastungen», oder von der Spezifikation der maximalen, noch jenen Erfordernissen entsprechenden Verformung dieses Tragwerks am Ende seiner Nutzungsdauer, und ausgedrückt in einem annehmbaren Grad der Veränderung der Tragwerksgeometrie. Der Zusammenbruch eines Tragwerks hat den Charakter der Instabilität: eine Verformung nimmt zu oder Trennflächen breiten sich in wachsendem Maße aus, jedoch unter gleichbleibender oder sogar abnehmender Belastungsintensität. Infolge des Unterschieds zwischen funktionellem und totalem Versagen bezieht sich der entsprechende Bruchmechanismus notwendigerweise auf verschiedene Bereiche der Verformung des Tragwerks. Keines der beiden Kriterien schließt eine irreversible Verformung aus.

Die Auswahl der Bemessungsbedingungen setzt die Durchführung zweier unabhängiger Berechnungen voraus, eine für Unbrauchbarkeit, die andere für den Zusammenbruch des Tragwerks. In beiden Berechnungen muß das unelastische Verformungsverhalten des Tragwerkmaterials in Betracht gezogen werden: in der ersteren durch Begrenzung seiner Größe, entweder explizit, wie im Fall der Berechnung von Kriechverformungen von Betontragwerken unter ununterbrochen hoher Druckspannung (Bögen mit großer Spannweite, vorgespannte Träger), oder bei Stahlkonstruktionen bei erhöhten Temperaturen, oder implizit, wie im Falle der Berechnung von elastisch erzwungener plastischer Verformung unter einer einmaligen Lastanwendung (plastische Verminderung elastischer Spannungsspitzen), oder bei Bildung eines Systems von bleibenden stabilisierenden Restspannungen unter «shake-down»-Belastung. In der zweiten Berechnung muß der unelastischen Verformung des Tragwerkmaterials Rechnung getragen werden, indem man die Wirkung des unelastischen Verformungsverhaltens auf die Entwicklung der Instabilität (elastisch-plastisches und Kriechknicken, plastische Zusammenbruchmechanismen, Zuginstabilität) oder auf den Bruchvorgang (Sprödbruch, Ermüdungs- und Kriechbruch) betrachtet.

Unelastische Verformungs-Instabilität und Bruch sind alternative Bruchmechanismen des Tragwerks. Das kann unter der Annahme einer quasistatischen Verformung gezeigt werden, wobei die angewendete Verformungsarbeit W umgewandelt wird in freie (elastische) Energie W_F, in gebundene (Dissipations-)Energie W_D und in Energie zur Herstellung neuer Querschnitte W_s, oder anders ausgedrückt [1]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_F}{dt} + \frac{dW_D}{dt} + \frac{dW_s}{dt} \tag{1.1}$$

Die Zuwachsrate der freien Energie beträgt daher:

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} - \frac{dW_s}{dt} \tag{1.2}$$

$dW_F/dt = 0$ gibt die Bruchbedingung des Tragwerks an, für einen konstanten Betrag an elastischer Energie, die vor dem Bruch aufgespeichert werden kann,

$$\frac{dW}{dt} - \frac{dW_D}{dt} = \frac{dW_s}{dt} \tag{1.3}$$

was bedeutet, daß sich der Bruch nicht ausbreitet, falls ein wirksamer Mechanismus der Energiedissipation vorhanden ist, der die angewandte Verformungsenergie absorbiert.

Die mangelnde Kenntnis dieses doppelten Aspektes der Tragwerksberechnung war die Ursache eines gegenstandslosen Streites. Die Vertreter einer unbesehenen Anwendung der plastischen «Bruchtheorie», die die Resultate ihrer Berechnungen mit jenen der konventionellen elastischen Bestimmung verglichen, behaupteten, die Zusammenbruchstheorie sei logischer und stelle die Wirklichkeit besser dar als die elastische Bestimmung [2]. Im Rahmen der gut bekannten Grenzen der plastischen Bruchberechnung (proportionale Belastung bis zum Bruch, kein Auftreten von lokaler Unstabilität und von allzugroßer Rotation in den plastischen Gelenken) ist diese Behauptung nur in Hinsicht auf das totale Versagen des Tragwerks gültig, während hingegen die elastische Bestimmung die «Wirklichkeit» des funktionellen Bruchs besser darstellt.

Welche der beiden Bestimmungsmethoden die besseren Bemessungsbedingungen hervorbringt, hängt deshalb sowohl von den ausgewählten «annehmbaren» Werten von $F_N(n_s)$ und $F_N(n_F)$ ab, wobei n_s beziehungsweise n_F die Zahl der Anwendungen der Betriebs- und der Nutzlastgruppe während der vorgesehenen Nutzungsdauer des Tragwerkes angeben, als auch von den Parametern und der Form der Verteilungen der Festigkeit R_s an der Grenze der Brauchbarkeit, beziehungsweise von R_F bei totalem Versagen des Tragwerks. Die Mediane $\breve{R}_s < \breve{R}_F$ und die Streuung von R_s, die in den meisten Fällen von elastischen Eigenschaften abhängt, ist viel geringer als die von R_F, während $F_N(n_s) \doteq n_F p_{Fs}$ immer größer sein kann als $F_N(n_F) \doteq n_F p_F$, weil die Folgen des funktionellen Bruchs stets weniger schwerwiegend sind als jene eines totalen Versagens des Tragwerks. Unter der Annahme eines einzigen Lastspektrums, das Nutzlast und Bruchlast in gleicher Weise enthält, so daß $n_s = n_F$ und damit $p_{Fs} > p_F$, zeigt die schematische Darstellung von Fig. 1 den Zusammenhang zwischen den Sicherheitsberechnungen für funktionelles oder totales Versagen.

Fig. 1 illustriert auch den Unterschied zwischen dem zentralen Sicherheitsfaktor ν_{0F} und dem «Überlastfaktor» $m = \breve{R}_F/\breve{R}_s = \nu_{0F}/\nu_{0s}$, der in der Plastizitätstheorie fälschlicherweise als Sicherheitsfaktor bezeichnet wird [3]; ν_{0s} gibt den zentralen Sicherheitsfaktor für funktionelles Versagen an. Fig. 1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem «Überlastfaktor» m des Tragwerks, der notwendig ist, um die spezifischen Wahrscheinlichkeiten p_{Fs} und p_F, beziehungsweise bezogen auf die zentralen Sicherheitsfaktoren ν_{0s} und ν_{0F} sicherzustellen. Es ist dieser Faktor, durch den die Mechanismen des elastischen (funktionellen) und des plastischen Bruches (structural collapse) aufeinander bezogen werden müssen, und der deshalb den Zusammenhang zwischen Bruchwahrscheinlichkeit, Sicherheit und plastischer Bruchberechnung herstellt.

Eine wirksame Bestimmung der Sicherheit hängt von der Möglichkeit einer klaren Trennung unabhängiger Kriterien des funktionellen und totalen Zusammenbruchs eines Tragwerks ab. Dies schließt ein, daß die beiden Kriterien von deutlich verschiedenen Bereichen der Materialverformung abgeleitet werden, so im Fall eines funktionellen Bruchmechanismus von einer begrenzten (elastischen) Spannung, und im Fall eines Bruchmechanismus des Tragwerks von plastischer oder visco-elastischer Unstabilität. Wenn ein Bruch durch

Risseausbreitung im Bereich geringer Verformungen erfolgt, ist keine solche Trennung möglich, weil die beiden Bruchmechanismen nicht unabhängig sind, sondern sich überschneiden: ein fortschreitender Schaden, hervorgerufen durch Belastungen im Nutzlastbereich, beeinflußt den Bruchmechanismus, so wie in dem Fall des katastrophalen Ermüdungsbruchs, der auf die Stabilisierung («shake-down») des durch Wechsellasten beanspruchten, elastisch-plastischen Tragwerks folgt.

Die Bestimmung der Sicherheit im Ermüdungsbereich muß auf der Konzeption des Bruchs unter einer einmaligen, selten vorkommenden hohen Belastung des Tragwerks beruhen, das schon durch Ermüdungsbeanspruchung unter Gebrauchslasten geschwächt wurde. Der Tragwerkswiderstand R nimmt somit mit wachsendem Schaden $D(n)$, der durch n-fache Wiederholung solcher Belastungen hervorgerufen wurde, ab. Daher nimmt der Sicherheitsfaktor $\nu_F = [R(n)/S]$ so rasch ab, als sich die Dichtefunktion $p_R[R(n)]$ gegen niedrigere Werte von $R(n)$ bewegt, was wiederum die damit verknüpfte Bruchwahrscheinlichkeit $p_F = p_F(n)$ erhöht. Dieses Anwachsen kann mit Hilfe der Diagramme in Fig. 1 bestimmt werden. Report Ia liefert Werte von ν_0 oder $\bar{\nu}$, die mit n abnehmen, entsprechend einer passend ausgewählten Funktion von $R(n)$ [4]. Da $p_F(n)$ keine Konstante ist, ist die Vertrauensfunktion $L(n)$ nicht mehr exponentiell, sondern kann aus der Gleichung (2.7) in Report Ia entnommen werden, unter der approximativen Annahme $p_F(n) = h_N(n)$, wobei $h_N(n)$ durch eine steigende Funktion von n in der einfachen Form $h_N(n) = c\alpha n^{\alpha-1}$ angenähert wird:

$$L(n) = exp\left[-\left(\frac{n}{v}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.4}$$

mit $c = v^{-1}$, wo v als «Periode der Wiederholung» («return period») des Ermüdungsbruchs, die den Wert von n bei der Quantile e^{-1} wiedergibt, betrachtet wird.

Gleichung (1.4) ist die bekannte dritte asymptotische Wahrscheinlichkeitsfunktion für extreme (kleinste) Werte [5], die oft in der funktionellen Sicherheitsbestimmung von für Ermüdung empfindlichen Tragwerken verwendet wird [6]. Wenn $\alpha = 1$ und $v = p_F^{-1} = T_F$ ist, degeneriert Gleichung (1.4) zu einer exponentiellen Vertrauensfunktion von zufälligen Brüchen.

2. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Bruchmechanismen

Die Bestimmung der statistischen Streuung der Festigkeit R, die den kritischen Bruchmechanismus eines Tragwerks charakterisiert, wird immer schwieriger mit wachsender Komplexität des Materialverhaltens des Tragwerks. Im Falle eines linearen Verformungsverhaltens verlangt eine solche Bestimmung, daß in den in Frage kommenden Gleichungen der Tragwerksmechanik konstante physikalische Parameter (Elastizitätsmodule, Viskositätskoeffizienten) durch Parameter in der Form von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ersetzt werden, durch welche die Materialverformung den (stochastischen) Charakter eines «Zufallsmediums» («random-medium») erhält. Die Differentialgleichungen der Tragwerksmechanik werden in Gleichungen mit stochastischen Koeffizienten umgeformt. Der statistische Erwartungswert der Lösung einer solchen Gleichung stellt eine näherungsweise genügend genaue Lösung der klassischen Gleichung mit den «erwarteten» Werten der Parameter dar, die daher direkt als eine Annäherung aufgestellt werden könnte. Im Falle eines nicht-linearen Materialverhaltens ist die direkte Einbeziehung der Streuung der klassischen Verformungsgleichungen, z. B. der Momenten-Krümmungsbeziehungen bei Biegung, angebrachter [7], weil eine genaue Berechnung, selbst von linearen festen stochastischen Medien, nur in sehr einfachen Fällen versucht wurde [8]. In dem einfachsten nicht-linearen Fall eines elastisch-plastischen Mediums wurden einige Versuche unternommen, eine stochastische Verteilung der lokalen Fließgrenze in die Formulierung einer grundlegenden Gleichung für ein solches Medium und für seine statistische Streuung einzuführen [9]. Jedoch hat keiner dieser Versuche Erfolge gezeitigt, die für den Ingenieur von Nutzen sein könnten.

Die Verteilung der Bruchfestigkeit eines elastisch spröden Materials, die auf der vereinfachenden Annahme einer bekannten statistischen Variation der lokalen Festigkeit beruht, wurde weitgehend untersucht [10]. Die sich daraus ergebende Verteilung der Festigkeit gegen Sprödbruch unter gleichförmiger Spannung in der Form der dritten asymptotischen Verteilung der extremen (kleinsten) Werte (Weibullverteilung) [11] stellt sich in folgender Weise dar:

$$P(R) = 1 - e^{-V\left(\frac{R - R_0}{R^*}\right)^{\alpha}} \tag{2.1}$$

Dabei gibt V das Volumen an, R_0 ist die minimale Festigkeit, R^* ist ein Mittelwert, bekannt als die «charakteristische» Festigkeit und $\alpha > 0$ ein Parameter, der mit steigender Streuung abnimmt. Man hat herausgefunden, daß diese Gleichung die experimental beobachteten Wirkungen der Größe, Geometrie und Spannungsverteilung beim Bruch von spröden Materialien [12], wie Glas, keramischen Stoffen und hitzebeständigen Metallen, mit Werten von $3 < \alpha < 8$, entsprechend den Variationskoeffizienten von $0{,}35 > v > 0{,}15$, bezogen auf das arithmetische Mittel, darstellt. Auf der Grundlage dieser Theorie und bei gleicher Größe der Bruchwahrscheinlichkeit ist die Festigkeit bei reiner Biegung R_B bezogen auf die Spannungsfestigkeit R_T [13]:

$$R_B = \eta R_T \left[2(\alpha + 1)\frac{V_T}{V_B}\right]^{1/\alpha} \tag{2.2}$$

Hierbei sind V_T und V_B die Volumina des Zerreißstabes, beziehungsweise des Biegungsstabes, $\eta = S_B/A_T$ ist das Verhältnis zwischen dem Widerstandsmoment S_B des Querschnittes und Fläche A_T des durch Spannung beanspruchten Querschnittes.

Instabilität im elastischen Bereich wird von elastischen und geometrischen Parametern und durch die Exzentrizität der Druckkräfte beherrscht. Im einfachen instruktiven Beispiel eines gleichförmigen Druckstabes mit frei rotierenden Enden wird eine anfängliche Exzentrizität in Form einer seitlichen Ausweichung durch die Druckkraft P etwa im Verhältnis $(1 - c)^{-1}$ verstärkt. Dabei ist $c = P/P_c$ das Verhältnis von P und der kritischen (Knick-)Kraft $P_c = \pi^2 EI/L^2$, deren Verteilung allein von der Streuung von E und I abhängt, falls die Länge als ein nicht-statistischer Parameter betrachtet werden kann. Somit verwandelt eine verhältnismäßig geringe Streuung von P_c die Größe c und den Erweiterungsfaktor $(1 - c)^{-1}$ in eine statistische Variable von größerer Streuung, die durch Vergrößerung der anfänglichen Streuung der Exzentrizität die Streuung der Bruchlast des Stabes unter exzentrischem Druck noch weiter vergrößert. Die zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichte $p_R(P) = p_R(R_F)$ muß sehr schief gegen kleine Werte von P sein, da die Verteilung der Exzentrizität durch Null begrenzt ist und da an dieser Grenze auf die Streuung (der Bruchlast) nur die Streuung von E und I einwirkt.

Die Streuung der Bruchlast eines linearen, visco-elastischen Druckstabes ist größer wegen ihrer ziemlich bedeutenden Abhängigkeit vom Viskositätskoeffizienten [14], der eine beträchtliche Streuung aufweist. Da die Wirkung der Streuung der Viskosität auf die Bruchlast mit der Zeit zunimmt, ist die Streuung der relativ niedrigen, langzeitigen «Kriech-Knick»-Last notwendigerweise größer als die der kurzzeitigen hohen Lasten. Die gegenwärtige Kenntnis über die Form der Verteilung der Festigkeit gegen Druckbruch rechtfertigt jedoch noch nicht die Annahme irgendeiner spezifischen Wahrscheinlichkeitsfunktion in der Sicherheitsbestimmung.

Die Form der Streuung der Tragwerksfestigkeit, in Verbindung mit einem spezifischen Mechanismus des plastischen Bruchs bei Biegung, ist abhängig von einer linearen Kombination der Momente der plastischen Gelenke, die diesen Mechanismus hervorrufen und kann durch sie ausgedrückt werden. Als Folge des zentralen Grenzwertsatzes tendiert die Verteilungsfunktion der Festigkeit bei plastischem Zusammenbruch gegen eine Normalverteilung mit einem wachsenden Grad der statistischen Unbestimmtheit des Tragwerks, unabhängig von den Verteilungen der individuellen plastischen Momente in den Gelenken, die einander ähnlich sind und hauptsächlich auf der Fließspannung beruhen. Da zahlreiche Beobachtungen gezeigt haben, daß diese Verteilung einer logarithmischen Normalverteilung [15] mit einem Variationskoeffizienten von 0,05 bis 0,15, je nach Ausmaß der Kontrolle im Produktionsprozeß, gleicht, kann angenommen werden, daß die Form der Verteilungsfunktion der Tragwerksfestigkeit beim Zusammenbruch zwischen einer Log-Normalverteilung für geringe Überzähligkeit (statische Unbestimmtheit) und einer Normalverteilung für große Überzähligkeit variiert, mit Variationskoeffizienten, die wegen des zentralen Grenzwertsatzes mit zunehmender Überzähligkeit abnehmen.

Die Wirkung der Materialeigenschaften auf die Streuung von Zuginstabilitätslasten kann im Fall der Beanspruchung eines gleichförmigen Zugstabes aus einem inkompressiblen Material, mit dem Querschnitt A und der Länge L und mit der Spannungsdehnungsrelation

$$\sigma = M \varepsilon_L{}^n \tag{2.3}$$

einfach dargestellt werden. Dabei ist $\varepsilon_L = \ln(L/L_0)$ und $0 < n < 1$. Da $P = \sigma A$, ergibt die Instabilitätsbedingung $dP = \sigma dA + A d\sigma = 0$, zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung $dV = d(AL) = AdL + LdA = 0$ den Ausdruck $(d\sigma/\sigma) = d\varepsilon_L$ oder $(d\sigma/d\varepsilon_L) = \sigma$, und daher ist nach der Gleichung (2.3) die «Instabilitätsdehnung» $\varepsilon_L = n$. Die zugeordnete Traglast beträgt daher

$$P = A_0 M (n/e)^n \tag{2.4}$$

weil $A = A_0 e^{-\varepsilon_L}$. Wenn man den «Verfestigungskoeffizienten» n als eine statistische Variable, die die Streuung der beobachteten Spannungsdehnungsrelation ausdrückt, einführt, kann man die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_R(R_F)$, in der $R_F = P$ ist, aus der Gleichung (2.4) erhalten. So ist zum Beispiel für den ziemlich weiten Variationsbereich der Instabilitätsdehnung $0{,}25 > \varepsilon_L = n > 0{,}125$ der Bereich von P auf $1{,}83 A_0 M > P > 1{,}48 A_0 M$ beschränkt. Da die Verfestigungsfunktionen für ein und dasselbe Material gewöhnlich in einem viel engeren Bereich der Streuung von n reproduzierbar sind, ist die Streuung der Traglast für Zuginstabilität so klein, daß sie praktisch nicht mehr als statistisch bezeichnet werden muß.

3. Grenzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Bestimmung der Sicherheit

Die offensichtlichsten Grenzen für die wahrscheinlichkeitstheoretische Sicherheitsbestimmung sind die Existenz von nicht-zufälligen Einflüssen auf die Zuverlässigkeit des Tragwerks, wie zum Beispiel die Wirkungen von nicht-zufälligen Belastungen, und die Auswirkung von Ungenauigkeiten bei der Belastungs- und Spannungsbestimmung, die Qualität der Arbeit und die Güte der örtlichen Kontrolle während des Baues. Einige dieser Wirkungen spiegeln sich jedoch in der Auswahl der Verteilungsfunktionen und Parameter der Wahrscheinlichkeitsbestimmung wider.

Daher beeinflußt das Niveau der Materialkontrolle sowohl die Größe der Streuung der kritischen Materialeigenschaften als auch die Form ihrer Verteilung. In Übereinstimmung mit den bestehenden Beobachtungen zeugt ein auf den Median bezogener Variationskoeffizient von $v = 0{,}05$ von einem außerordentlich hohen Niveau der Kontrolle sowohl der Festigkeit und Fließspannung des Konstruktionsmetalles als auch des Betons. Ein Variationskoeffizient von $v = 0{,}10$ bis $0{,}12$ stellt einen mittleren Wert dar, während $v > 0{,}15$ eine unzureichende Qualität der Kontrolle anzeigt. Diese letzteren Sachverhalte werden überdies durch «Extremwert»-Verteilungen gekennzeichnet [16], während bei gutem Kontrollniveau die Log-Normalverteilung anwendbar ist.

Nicht-zufällige Lasten, z. B. Eigengewicht, können zum Mittelwert oder Median der Nutzlasten addiert werden und verkleinern dadurch den Variationskoeffizienten der Last, welche den zentralen Sicherheitsfaktor ν_0 des Tragwerks bestimmt. So wird ein Variationskoeffizient der Betriebslast von $v = 0{,}20$ auf $v = 0{,}10$ reduziert, bei einem Verhältnis ruhende Last zu Betriebslast von 1:1 und auf $v = 0{,}05$ bei einem Verhältnis von 3:1, wobei der zentrale Sicherheitsfaktor mit zunehmender ruhender Last abnimmt.

Die Auswirkungen der Ungenauigkeit der Berechnung und der Qualität der Arbeit erfordern eine Betrachtung außerhalb des Rahmens der Wahrscheinlichkeitsberechnung, welche daher nur einen minimalen Wert des Sicherheitsfaktors liefert, welcher daher wegen der nicht-statistischen Einflüsse durch einen angemessenen Prozentsatz korrigiert werden muß [17]. Numerische Werte, die als solche Wägungsfaktoren in Betracht kommen und mit denen man einen objektiven Sicherheitsfaktor multiplizieren muß, haben jedoch keine rationale Grundlage und können deshalb nicht mit einer objektiven Bruchwahrscheinlichkeit in Beziehung gesetzt werden.

Die Tatsache, daß die Form der Verteilungsfunktionen der bestimmenden Parameter durch tatsächliche Beobachtungen nicht in einem wesentlichen Vertrauensbereich bestimmt werden kann, hat die ernstzunehmenden Einwände gegen den Gebrauch einer solchen Analyse hervorgerufen. Sie hat auch den Bestrebungen, nicht-parametrische Methoden [18] den spezifischen Verteilungsfunktionen gegenüber zu bevorzugen, Auftrieb gegeben. Da aber diese Vorschläge unpraktisch sind, wegen der Unmöglichkeit, annehmbar niedrige Werte von p_F durch ein nicht-parametrisches Verfahren zu erlangen, scheint das Problem der Auswahl und Form der Verteilungsfunktionen von S und R aus bestehenden oder erhältlichen Daten die Hauptschwierigkeit für die allgemeine Annahme der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Sicherheit von Tragwerken zu sein.

Für dieses Problem ist allerdings keine rationale Lösung möglich, ohne daß man sich vergegenwärtigt, daß das Problem darin besteht, Wahrscheinlichkeitsmodelle auszuwählen, die relevante Verteilungsfunktionen produzieren, und nicht Verteilungsfunktionen auszuwählen, die mit Beobachtungen übereinstimmen. Dies einfach, weil die Zahl der Beobachtungen, besonders bei den wesentlichen Materialparametern, nie groß genug sein kann, um den Wahrscheinlichkeitsgrad zu erreichen, der für die Bestimmung der Zuverlässigkeit des Tragwerks in Betracht kommt. Andererseits kann statistisches Anpassen von

Daten im praktischen Bereich der Beobachtungen nicht zur Auswahl von Wahrscheinlichkeitsfunktionen führen, die eine Extrapolation in den wesentlichen Wahrscheinlichkeitsbereich rechtfertigen würde. Die einfachsten und wirksamsten Wahrscheinlichkeitsmodelle beruhen auf den Begriffen von «seltenen» und «extremen» Erscheinungen, woraus sich Poisson- und verwandte diskrete Funktionen sowie Extremwertverteilungen ergeben [19]. Diese Verteilungen passen besonders für die Bestimmung der Sicherheit von Tragwerken, bei denen seltene oder extrem hohe Belastungsintensitäten zusammen mit seltenen oder extrem niedrigen Werten der Tragfähigkeit vorkommen. Wenn erst einmal eine maßgebliche Verteilungsform ausgewählt ist, ist nur eine begrenzte Anzahl von Beobachtungen zur Bestimmung ihrer Parameter erforderlich, und die Extrapolation ist gerechtfertigt, und zwar nicht auf Grund des «Kurvenanpassens» im zentralen Bereich, sondern auf Grund der physikalischen Maßgeblichkeit. Daher sind kleine Zahlen von Beobachtungen von Daten, die als «selten» oder «extrem» klassifiziert werden können, viel nützlicher als lange Reihen von Daten unbestimmbaren Charakters. So können zum Beispiel Beobachtungen über den höchsten jährlichen Flutpegel verläßlich auf der Grundlage der Extremwertverteilungen extrapoliert werden [20], während die Gesamtheit der Aufzeichnungen über den täglichen Wasserstand für diesen Zweck nutzlos wäre.

Des weiteren muß man festhalten, daß die Kenntnis der Verteilungen sowohl von S als auch von R nur erforderlich ist, wenn die Streuung beider Variablen ungefähr die gleiche Größe besitzt. Man kann aus Fig. 2 in Report Ia leicht ersehen, daß eine mäßig große Streuung der Lastintensität die Wichtigkeit der Form der Festigkeitsverteilung des Tragwerks reduziert: für Variationskoeffizienten von $v_S = 0{,}20$ sind die Beziehungen zwischen p_F und ν für die Log-Normalverteilung und für die Extremwertverteilung von $v_R = 0{,}10$ praktisch identisch, trotz der Tatsache, daß eine Streuung der Tragfähigkeit, charakterisiert durch $v = 0{,}10$, nicht sehr klein ist. Da ein Variationskoeffizient von $v_S = 0{,}20$ einer Belastungsintensität nicht außergewöhnlich ist (es sind schon Variationskoeffizienten von $v_S = 0{,}18$ für Windbelastungen [21] und von $v_S = 0{,}177$ für Deckenbelastungen [22] bestimmt worden), und da $v_R = 0{,}10$ an der oberen Streugrenze von Materialparametern für eine angemessene Kontrollstufe liegt, scheint die Schlußfolgerung gerechtfertigt, daß die Form der Verteilung der Materialparameter nur wesentlich ist, wenn die Lastintensität eine sehr kleine Streuung aufweist oder nicht-statistisch ist.

Die Bewertung und Rechtfertigung eines quantitativen, «tragbaren» Risikos wurde durch zwei Methoden versucht: a) durch Vergleich des Risikos des Tragwerkzusammenbruchs mit anderen Risiken, die als tragbar erachtet werden, da sie gewöhnlich durch eine Versicherung gedeckt sind oder b) durch Einführung eines «Entscheidungsmaßstabes» oder «Handlungsverlaufes» (course of action), durch den ein gewisser Grad an «Wirksamkeit» des Tragwerks optimiert wird. Das allgemeine Studium der «Entscheidungstheorie» und der «Optimierung» als wichtige Aspekte der «Systemberechnung» hat zu Versuchen geführt, ähnliche Begriffe für Tragwerke anzuwenden. Dies geschieht, indem man ein passendes Maß von «Wirksamkeit» auswählt, das optimiert werden muß, wie zum Beispiel das Gewicht eines Tragwerks oder seine Kosten, und dieses als Funktion der Bruchwahrscheinlichkeit, die die Konstruktion charakterisiert, einführt, oder indem man gleichzeitig zu erreichende Ziele angibt, wie zum Beispiel ein Minimum der Kosten bei gleichzeitigem Maximum der Sicherheit des Tragwerks.

Die Anwendung dieser Methoden ersetzt jedoch nicht die Notwendigkeit, an irgendeinem Punkt der Bestimmung ein subjektives Werturteil einzuführen, zum Beispiel bei der Bewertung der relativen Wichtigkeit alternativer Ziele – wie die minimalen Kosten – die Bewertung des Verhältnisses zwischen den Kosten eines Tragwerks und den Kosten seines Einsturzes. Für den letzteren Fall kann man dies zeigen, indem man das einfachste mögliche Kriterium, nämlich die Minimierung der Gesamtkosten des Tragwerks, einführt. Diese Kosten setzen sich zusammen aus den Herstellkosten $A(p_F)$ und aus den kapitalisierten Kosten des Zusammenbruchs $C(p_F)$, nämlich $p_F \cdot C(p_F) \cdot Q$. Dabei ist Q der Kapitalisierungsfaktor und p_F die Wahrscheinlichkeit des Zusammenbruchs, bezogen auf ein Betriebsjahr. Daher werden die Bedingungen

$$A(p_F) + p_F C(p_F) \cdot Q \to min \tag{3.1}$$

oder

$$\frac{dA(p_F)}{dp_F} + Q p_F \frac{dC(p_F)}{dp_F} + Q C(p_F) = 0 \tag{3.2}$$

den Wert p_F liefern, durch den die Gesamtkosten des Tragwerks optimiert werden, vorausgesetzt, die Beziehung von A und C zu p_F könne hergestellt werden. Wenn $A(p_F)$ als eine abnehmbare Funktion von p_F in der einfachen Form [23]

$$\frac{dA}{dp_F} = -\frac{c}{p_F} \quad \text{oder} \quad A = -c \ln p_F + B \tag{3.3}$$

eingeführt wird, und wenn man die Kosten des Zusammenbruchs, geschrieben in der Form $C = C' + C''$, aus zwei Teilen bestehend annimmt, nämlich den Kosten des Wiederaufbaus $C' \sim A$ und einen Teil C'', der zwar unabhängig von den Kosten des Wiederaufbaues ist, aber irgendwie die allgemeinen Kosten des Zusammenbruchs ausdrückt, dann nimmt die Gleichung (3.2) mit $p_F Q << 1$ die Form

$$p_F^* \doteq \frac{c}{QA}\left(1 + \frac{C''}{A}\right)^{-1} \sim \frac{c}{QC''} \tag{3.4}$$

an, vorausgesetzt, daß $C''/A >> 1$. Daher enthält die Bestimmung das Verhältnis zwischen den Erstellungskosten eines Tragwerks und den Kosten seines

Zusammenbruchs oder den Kosten des Zusammenbruchs selbst als einen sehr wichtigen Parameter, durch dessen Auswahl der numerische Wert des «tragbaren» Risikos über einige Größenordnungen hinaus geändert werden kann. Anstatt das «tragbare» Risiko durch subjektive Betrachtungen auszuwählen, so zum Beispiel durch den Vergleich mit anderen Risiken, sind die Kosten des Zusammenbruchs auf diese Weise als Funktion der Erstellungskosten eines Tragwerks ausgewählt. Obwohl dieses letztere Vorgehen weniger willkürlich erscheinen mag, zeigt sich, daß eine subjektive Entscheidung an irgendeinem Punkt des Verfahrens unumgänglich ist, nur kann der Punkt, an dem sie gefällt werden muß, variiert werden.

Einer der Einwände gegen die Wahrscheinlichkeitsmethode bei der Bestimmung der Sicherheit besagt, daß Wahrscheinlichkeiten von sehr kleiner Größenordnung (10^{-4} bis 10^{-8}), die in diesem Verfahren besonders gebraucht werden, keine wirkliche Bedeutung anhaftet, da Verteilungen in diesem Bereich nicht von statistischen Schlußfolgerungen abzuleiten sind. Man muß sich jedoch darüber klar sein, daß die Verteilungen nicht nach statistischen Schlußfolgerungen, sondern nach Kriterien physikalischer Maßgeblichkeit ausgewählt werden und daß die tatsächlichen Werte der Wahrscheinlichkeiten weniger wichtig sind als die Tatsache, daß ihr Gebrauch das Erzielen eines *gleichmäßigen* Zuverlässigkeitsmaßes für alle Teile des Tragwerks erlaubt, was durch keine andere Methode zu erreichen ist.

Leere Seite
Blank page
Page vide

Ic

Optimisation des structures

J. COURBON
Prof., Paris

A notre avis, l'optimisation d'une structure consiste à concevoir et à réaliser cette structure au moindre prix, en vue d'un service bien défini. En particulier le coefficient de sécurité de la structure doit être imposé. Ce point soulève déjà bien des difficultés pour comparer les différents projets d'une même structure utilisant des matériaux dont les qualités sont très différentes. Dans l'évaluation du prix, il faut bien entendu faire intervenir la durée de vie de la structure, son entretien, et la possibilité de son adaptation aux modifications prévisibles du service demandé. Ces modifications résultent, par exemple, de l'augmentation de poids et de vitesse des surcharges pour les ponts, de l'augmentation du poids des avions pour les pistes, de l'accroissement du tonnage des navires pour les ouvrages portuaires.

Le prix de la structure dépend de très nombreux paramètres. Certains sont connus et constituent des données imposées à l'Ingénieur. D'autres, variables, doivent être choisis de façon à rendre le prix de la structure minimum.

Parmi les données imposées, on peut distinguer

A. Les données *générales*. Ce sont:

A1. Les qualités et les prix des matériaux disponibles au moment de la construction de la structure.

A2. L'état des connaissances concernant le comportement mécanique et physique de ces matériaux, se traduisant par des critères de sécurité et des modèles mathématiques permettant le calcul a priori des structures.

B. Les données *particulières* à la structure étudiée. Ce sont:

B1. Les données géométriques, en particulier les dimensions imposées à la structure. Tels sont, par exemple, les gabarits à réserver sous un pont tant durant sa construction qu'en situation définitive.

B2. Les sollicitations, mécaniques et autres que mécaniques (température par exemple). Il faut distinguer les sollicitations provoquées par un système de forces extérieures données non équivalent à zéro, et les sollicitations qui conduisent à un état de coaction.

B3. Les données géographiques impliquant en particulier le prix des transports et de la main-d'œuvre, et la qualité du sol de fondation.

B4. Le délai de construction – S'il n'est pas respecté, il faut tenir compte des intérêts intercalaires et évaluer le dommage causé par le retard dans la mise en service.

B5. Eventuellement l'esthétique de la structure.

Les paramètres variables laissés au choix de l'Ingénieur sont essentiellement:

C1. Le choix des matériaux: pierre, bois, acier, béton, béton armé, béton précontraint, etc.

C2. Le choix de la structure.

C3. Le mode de réalisation de la structure comprenant le problème fondamental des assemblages et les procédés de construction.

Dans le cas d'un pont, le problème du choix des matériaux et de la structure est relativement simple, parce que l'expérience d'un grand nombre d'ouvrages permet à l'Ingénieur de savoir rapidement quelles sont les variantes, en nombre réduit, qu'il convient d'étudier.

Par contre, dans le cas des structures industrielles qui font appel à la collaboration de plusieurs techniques, le problème est beaucoup plus délicat. Prenons par exemple le cas d'une enveloppe de réacteur nucléaire; si on réalise cette enveloppe en béton précontraint, il est nécessaire de calorifuger et de refroidir le béton pour diminuer les contraintes provoquées par le gradient de température. L'optimisation résulte alors d'un bilan comprenant les prix de la structure, du calorifuge et du circuit de refroidissement, prix variables suivant le gradient qu'on laisse subsister.

Autre exemple de collaboration de techniques, toujours dans le domaine des réacteurs nucléaires: la réduction de l'encombrement des échangeurs de température a permis de les placer à l'intérieur de l'enveloppe, ce qui a conduit à des simplifications et à des économies importantes.

Dans le cas général c'est donc toujours d'une optimisation d'ensemble qu'il doit s'agir. Chaque technique doit poser son problème aux autres en leur disant «voilà ce que je préfèrerais; avez-vous une solution, ou bien combien cela coûte-t-il en plus pour vous; nous ferons le total».

Le problème de l'optimisation tel que nous l'avons posé est extrêmement général: sa résolution constitue le métier de l'Ingénieur dont la valeur se mesure par la qualité de la solution retenue.

Notons que le prix d'une structure est toujours une fonction discontinue des paramètres C. Ce n'est qu'une fois ces paramètres choisis que le problème se ramène à la recherche du minimum d'une fonction continue d'une ou de plusieurs variables. Tels sont les problèmes classiques de poutres ou de colonnes d'égale résistance, de recherche des structures de poids minimum ou d'énergie de déformation minimum.

Nous jugeons toutefois que ces problèmes particuliers ne présentent qu'un intérêt mineur, car, d'une part, l'économie obtenue sera toujours faible, d'autre part, très souvent, la structure obtenu sera plus chère, voire même irréalisable, parce que trop complexe. Cependant, l'outillage et l'équipement permettent souvent, quand ils sont bien étudiés, de réaliser sans supplément de prix unitaire des structures théoriquement plus satisfaisantes. Il y a là un bilan à faire entre une simplification excessive des formes et les dépenses supplémentaires nécessitées, dans le cas du béton par exemple, par un coffrage plus élaboré et une mise en œuvre plus difficile. Cette remarque est parfaitement justifiée dans tous les cas où l'on doit réaliser un grand nombre de pièces identiques.

Il importe d'examiner plus en détail les paramètres dont l'influence sur le prix de la structure est la plus importante. Ce sont parmi les données les paramètres A1 et A2 et parmi les variables les paramètres C2 et C3. Reprenons ces points essentiels:

1. Amélioration de la qualité des matériaux et recherche de nouveaux matériaux

Deux facteurs jouent un rôle prépondérant pour l'amélioration des qualités des matériaux. Ce sont d'une part, l'augmentation des caractéristiques mécaniques (résistance et allongement), d'autre part, la diminution de la dispersion de ces caractéristiques. Il est alors possible, sans diminuer la sécurité, d'adopter des contraintes admissibles plus élevées. La résistance à la compression des bétons n'a cessé de croître, et il est vraisemblable que nous enregistrerons de grands progrès dans les années qui viennent. Depuis une dizaine d'années, grâce surtout à la précontrainte, la résistance à la rupture des fils d'aciers a augmenté d'environ vingt pour cent, sans que, pour cela, leur capacité d'allongement soit diminuée, bien au contraire.

L'importance de la recherche de nouveaux matériaux est illustrée par le développement prodigieux du béton précontraint au cours des trente dernières années. Le béton précontraint constitue en effet un matériau nouveau permettant de réaliser des structures dont le comportement mécanique est différent de celui des structures réalisées auparavant. Mais ce n'est pas le seul exemple: les bétons légers qui permettent de diminuer le poids propre sont de plus en plus employés, et nous verrons sans doute, dans un proche avenir, des bétons à base de résines synthétiques possédant des résistances considérables à la compression comme à la traction.

2. Connaissance des matériaux – Critères de sécurité et méthodes de calcul

Pendant longtemps, tout le calcul des structures a été fondé sur la loi de Hooke (modèle élastique). Le critère de sécurité était donné par la limitation des contraintes, sans souci particulier pour les déformations.

Les grands progrès récents sont dus à la prise en considération des déformations non élastiques grâce aux théories de la Plasticité. Seules ces théories permettent de tenir compte de l'adaptation des contraintes dans les sections d'une poutre, et, dans le cas des structures hyperstatiques, de montrer que l'adaptation entre sections donne à ces structures une résistance plus élevée que ne le laissait croire la théorie de l'Elasticité.

L'étude des déformations non élastiques a permis de créer de nouveaux modèles mathématiques de calcul tels que modèle rigide-plastique, modèle élastoplastique, modèle visco-élastique, etc., qui donnent une meilleure représentation des phénomènes réels que les modèles élastiques. Ces modèles sont, bien entendu, différents suivant le matériau considéré. Cependant nos connaissances concernant les déformations non élastiques de certains matériaux sont encore insuffisantes, surtout lorsque ces déformations dépendent du temps. Les recherches de laboratoire sur les relations entre les contraintes et les déformations doivent être poursuivies pour que l'Ingénieur puisse mieux prévoir le comportement réel des structures qu'il conçoit. Un problème important et mal résolu est celui de l'évolution dans le temps des contraintes dans une structure hyperstatique en béton armé ou en béton précontraint.

Le calcul des charges limites des structures est la plus simple des applications des théories plastiques. Ce calcul présente l'intérêt de donner une meilleure approximation du coefficient de sécurité que les calculs basés sur la loi de Hooke. C'est ainsi que les Ingénieurs et les Règlements ont reconnu la nécessité de vérifier la sécurité à la rupture des poutres en béton précontraint. Pourquoi ne le fait-on pas pour les arcs en béton qui se trouvent pourtant dans une situation très semblable? Simplement par habitude, en souvenir des temps où seules les théories élastiques étaient considérées comme sérieuses.

Toutefois, l'Ingénieur ne doit jamais oublier les conditions nécessaires pour que le calcul des charges limites donne des résultats corrects. En premier lieu, les déformations doivent rester petites; pour certaines structures, il est indispensable d'imposer une limitation des déformations. En second lieu, dans le cas des sollicitations variables, le calcul des charges limites conduit souvent à surestimer la capacité de résistance des structures. Le théorème général d'adaptation permet un calcul correct des structures hyperstatiques soumises à des charges variables. Rappelons l'énoncé de ce théorème, établi moyennant l'hypothèse des petites déformations:

«Si pour une structure donnée, l'état de contraintes obtenu en ajoutant:

a) l'état élastique de contraintes dû aux forces extérieures variables

b) un état de contraintes fixe formant un état de coaction appelé état d'adaptation appartient au domaine élastique, cette structure demeurera stable et les contraintes résiduelles tendront vers les contraintes d'adaptation.»

L'adaptation peut du reste être facilitée par une compensation préalable obtenue par prédéformation.

Un problème important pour l'optimisation des structures est le suivant: Comment tenir compte, dans les critères de sécurité, des contraintes d'un état de coaction provoqué, par exemple par la température, le retrait ou le fluage? Faut-il les ajouter simplement aux contraintes dues à l'application d'un système de forces extérieures? Nous ne le pensons pas, mais le critère de sécurité reste à trouver. Signalons comme exemple les arcs en béton où le retrait et la température peuvent donner des contraintes élevées, et surtout les enveloppes en béton précontraint pour réacteurs nucléaires pour lesquelles les contraintes thermiques obligent à majorer fortement la précontrainte. Il faut toutefois faire très attention aux variations cycliques, car il y a une différence énorme entre un état de coaction stationnaire et les états de coaction résultant de phénomènes alternatifs.

3. Recherche de nouvelles structures

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, il y a encore beaucoup de structures nouvelles à trouver. L'Ingénieur qui étudie un projet doit faire preuve d'imagination, se méfier avant tout de la routine consistant à copier ce qui a déjà été fait sans y apporter d'amélioration. Ainsi, pourquoi construit-on encore des poutres à triangulation Pratt, alors que la poutre à triangulation Warren est plus économique? Comment se fait-il que ce n'est que récemment que l'on a construit des ponts à haubans, plus économiques et plus sûrs que les ponts suspendus classiques à câbles paraboliques?

Très souvent la recherche de nouvelles structures découle de l'amélioration des techniques de construction. Ce sont les progrès de la soudure qui ont permis la construction de structures métalliques tridimensionnelles. La technique de construction en encorbellement a permis la réalisation de ponts en béton précontraint de types nouveaux.

Les voiles minces nous paraissent un champ de recherche immense. Dans ce domaine, le rôle de l'expérience dans l'enhardissement progressif à l'égard de phénomènes encore mal connus, comme le flambement des coques, est prépondérant. Cette expérience est de deux natures: celle du constructeur qui sait, parce qu'il a fait un ouvrage et qu'il l'a éprouvé, qu'il peut aller plus loin, et celle du laboratoire, par des essais sur modèle réduit, malgré les difficiles questions de similitude.

4. Amélioration des techniques de construction

Nous distinguerons les assemblages et les procédés de construction proprement dits.

De nombreux exemples montrent que les assemblages constituent un des facteurs essentiels de l'économie d'une structure. Aujourd'hui les charpentes en bois, le cintre d'un grand arc par exemple, exigent trois fois moins de bois qu'il y a cinquante ans; cette économie est due uniquement à la conception des nouveaux assemblages: assemblages cloués pour transmettre les efforts de traction, nœuds de béton moulant les extrémités des fibres du bois pour transmettre les efforts de traction. Les charpentes en bois lamellé collé ont permis la réalisation économique de couvertures de grande portée. La précontrainte est le seul procédé satisfaisant pour assembler des pièces préfabriquées en béton: de très grands ponts construits récemment au moyen de voussoirs préfabriqués souligne l'intérêt de ce mode d'assemblage tant du point de vue de la rapidité et de la qualité de l'exécution que de l'économie. En construction métallique, l'apparition des boulons à haute résistance permet d'assembler rapidement et économiquement sur le chantier de grands éléments soudés en usine. C'est grâce aux progrès de la soudure que les charpentes composées de tubes, légères et économiques, ont pu se développer.

Mais il ne suffit pas de faire des projets, il faut aussi construire. L'importance des procédés de construction dans l'économie des structures est considérable. Citons, comme exemples, le développement de la préfabrication, l'emploi des coffrages glissants, la construction en encorbellement des ponts précontraints, et les grands progrès réalisés dans la technique de fondation des ouvrages. L'Ingénieur doit donc toujours avoir présent à l'esprit la façon dont sera réalisé l'ouvrage qu'il dessine; il doit chercher la facilité d'exécution qui se traduit par des gains de temps et d'argent et, en particulier, éviter le plus souvent la mesquinerie sous prétexte d'économie de matière.

Les développements précédents montrent l'importance et la diversité des connaissances que doit posséder l'Ingénieur chargé d'établir le meilleur projet d'une structure. Pour juger à coup sûr de la valeur de la solution retenue, il faudrait étudier totalement, construire et utiliser les diverses solutions mises en comparaison, autrement dit recourir à l'expérimentation. C'est possible, et c'est la meilleure solution du problème de l'optimisation dans le cas de pièces construites à un grand nombre d'exemplaires, par exemple des poteaux en béton précontraint pour lignes électriques.

Par contre, dans le cas des grandes structures, l'Ingénieur devra juger a priori de la solution choisie. Mais, à l'exception de structures très simples ou de structures dont une longue expérience a donné une parfaite connaissance, l'Ingénieur se heurtera à des difficultés que le calcul ne permettra pas de surmonter, parce que le calcul ne fait que transformer les hypothèses et ne crée pas. Nous ne mésestimons pas pour autant l'intérêt des ordinateurs pour le calcul des structures: ce n'est que grâce à eux que la solution de certains problèmes a pu être étudiée complètement. Ils présentent en outre l'avantage de débarrasser l'Ingénieur d'une besogne fastidieuse, et de lui laisser tout le temps nécessaire pour concevoir, faire un examen critique des hypothèses, apprécier le degré de sécurité et réaliser.

Faute de pouvoir résoudre ses problèmes par le calcul, l'Ingénieur sera placé devant la nécessité de construire et d'expérimenter un ou plusieurs modèles réduits des structures ou des parties de structures qu'il étudie. Ce n'est pas sans difficultés, car le matériau du modèle réduit doit posséder des propriétés mécaniques et physiques semblables à celles du matériau de la structure réelle, sinon l'expérimentation sur modèle ne serait, comme la photoélasticité, qu'un instrument de calcul analogique. Les modèles réduits ont déjà rendu de grands services dans l'étude des barrages-voûtes, des voiles minces et des enveloppes de réacteurs nucléaires.

En résumé, l'optimisation des structures doit être fondée sur l'expérience et la connaissance précise des propriétés mécaniques et physiques des matériaux. Si l'on veut obtenir, dans un avenir proche, des progrès substantiels dans l'économie des structures, il faut développer les laboratoires d'essais des structures, trop peu nombreux à l'heure actuelle. Ces laboratoires auront une double tâche: d'une part, se consacrer à la recherche fondamentale des propriétés des matériaux, d'autre part, expérimenter des modèles réduits. Quant à l'Ingénieur, son principal souci doit être de faire preuve d'imagination créatrice, tant dans la conception que dans la réalisation des ouvrages.

Ic

Optimierung von Tragwerken

J. COURBON
Prof., Paris

Die Optimierung eines Tragwerks beruht darauf, daß dieses Tragwerk in Hinsicht auf einen genau definierten Zweck möglichst wirtschaftlich geplant und ausgeführt wird. Dabei muß der Sicherheitskoeffizient des Tragwerks gegeben sein. Dieser Punkt bereitet bereits Schwierigkeiten, müssen doch verschiedene Entwürfe für dasselbe Tragwerk, unter Verwendung von Baumaterialien mit sehr verschiedenen Eigenschaften, miteinander verglichen werden. Zur Bestimmung der Kosten müssen selbstverständlich die Lebensdauer des Tragwerks, seine Instandhaltung und seine Anpassungsfähigkeit an voraussichtliche Abänderungen des ursprünglichen Zweckes mit veranschlagt werden. Solche Abänderungen ergeben sich für Brücken zum Beispiel aus Gewichts- und Geschwindigkeitszunahmen der Lastenzüge, für Rollbahnen aus der Gewichtszunahme der Flugzeuge und für Hafenanlagen aus der Vergrößerung der Schiffsabmessungen.

Die Kosten des Tragwerks hängen von zahlreichen Faktoren ab; einerseits von gegebenen Größen und anderseits von Veränderlichen, die so gewählt werden müssen, daß das Tragwerk möglichst wirtschaftlich wird. Die gegebenen Größen können eingeteilt werden in:

A. Allgemeine Gegebenheiten

A 1. Eigenschaften und Preise der verfügbaren Materialien im Zeitpunkt der Tragwerkerstellung.

A 2. Die Kenntnis des mechanischen und physikalischen Verhaltens dieser Materialien, die sich in Sicherheitskriterien und mathematischen Schemen ausdrücken und die auch die Bemessung des Tragwerks ermöglicht.

B. Besondere Gegebenheiten des zu untersuchenden Tragwerks

B 1. Die gegebenen geometrischen Größen, vor allem die vorgeschriebenen Abmessungen des Tragwerks, wie zum Beispiel der Lichtraum, der unter einer Brücke sowohl während des Baues als auch nach der Ausführung vorgesehen werden muß.

B 2. Mechanische und andere Beanspruchungen (zum Beispiel infolge Temperatur). Dabei muß zwischen Beanspruchungen, die durch ein System gegebener äußerer Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind, verursacht werden, und solchen Beanspruchungen, die zu einem Eigenspannungszustand führen, unterschieden werden.

B 3. Die geographischen Gegebenheiten, die sich vor allem in den Transportpreisen, Personalkosten, aber auch zum Beispiel in der Beschaffenheit des Baugrundes ausdrücken.

B 4. Die Bauzeit. Wenn sie nicht eingehalten wird, muß man die Bauzinsen berücksichtigen und die aus der verspäteten Inbetriebnahme resultierenden Schäden schätzen.

B 5. Möglicherweise auch die Ästhetik des Tragwerks.

C. Die dem Ingenieur zur Bestimmung überlassenen Veränderlichen sind im wesentlichen:

C 1. Wahl der Baustoffe: Stein, Holz, Stahl, Beton, Stahlbeton, Spannbeton usw.

C 2. Wahl des Tragwerks.

C 3. Die Art der Ausführung des Tragwerks, einschließlich des grundsätzlichen Problems, der Verbindungen und des Bauverfahrens.

Wenn es sich um eine Brücke handelt, ist die Wahl des Baustoffs und des Tragwerks verhältnismäßig einfach, weil der Ingenieur aus der Erfahrung vieler Bauwerke weiß, welche Möglichkeiten in die engere Wahl kommen. Handelt es sich dagegen um Industriebauten, bei denen meist mehrere Bau- und Maschinenzweige zusammenarbeiten müssen, so wird das Problem wesentlich komplizierter. Nehmen wir zum Beispiel einen Behälter für einen Atomreaktor: Wenn man diesen Behälter in Spannbeton ausführt, muß man den Beton isolieren und abkühlen, um die durch das Temperaturgefälle verursachten Spannungen zu vermindern. Die Optimierung hat also hier über die Summe der Kosten des Tragwerks, der Isolierung und des Abkühlsystems – variable Kosten also, je nachdem welches Temperaturgefälle man bestehen läßt – zu erfolgen.

Ein anderes Beispiel für die Zusammenarbeit mehrerer Techniken, ebenfalls aus dem Bereich der Atomreaktoren: Durch die Verminderung ihres Raumbedarfes konnten die Wärmeaustauscher innerhalb des Behälters angebracht werden, also wesentliche Vereinfachungen und Einsparungen erreicht werden.

Ganz allgemein muß es sich also immer um eine Gesamtoptimierung handeln. Jede Technik muß den übrigen ihr Problem stellen und sagen: «Das und das halte ich für das günstigste. Habt ihr einen andern Vorschlag oder um wieviel teurer würde diese Lösung euch kommen? Ziehen wir die Bilanz.»

Das Problem der Optimierung, wie wir es hier gestellt haben, ist allgemeiner Natur: Es ist die Aufgabe des Ingenieurberufs schlechthin. Das Können des Ingenieurs wird danach beurteilt, wie gut oder schlecht er dieses Problem löst.

Halten wir fest, daß die Kosten eines Tragwerks immer eine unstetige Funktion der unter C aufgeführten Parameter sind. Sind diese Parameter einmal festgelegt, so beschränkt sich das Problem auf die Bestimmung des Minimums einer stetigen Funktion einer oder mehrerer Veränderlicher. Das sind zum Beispiel die klassischen Probleme der Träger oder Stützen gleicher Festigkeit, der Bestimmung von Tragwerken mit minimalem Gewicht oder minimaler Formänderungsenergie.

Allerdings ist die Lösung dieser besonderen Probleme im Grund nur von untergeordneter Bedeutung, denn einerseits werden dabei nur geringfügige Einsparungen erzielt, und anderseits ist sehr oft das so ermittelte Tragwerk zu teuer oder seiner großen Komplexität wegen unausführbar. Dagegen erlauben gut durchdachte Entwürfe bei Ausnützung der vorhandenen Einrichtungen und der Ausrüstung oft theoretisch befriedigende Tragwerke ohne eine Erhöhung des Einheitspreises. Man muß einen Vergleich ziehen zwischen zu weit gehender Vereinfachung der Formen und den zusätzlich erforderlichen Kosten, im Fall von Beton zum Beispiel infolge verfeinerter Schalung und anspruchsvollerer Ausführung. Dieses Vorgehen ist besonders am Platz, wenn viele gleiche Elemente ausgeführt werden müssen.

Diejenigen Faktoren, von denen die Kosten in erster Linie abhängen, sollten besonders eingehend untersucht werden. Es handelt sich unter den gegebenen Größen um die Parameter A1 und unter den Veränderlichen um die Parameter C2 und C3, weshalb zuerst diese wesentlichen Punkte betrachtet werden.

1. Verbesserung der Qualität der Materialien und Erforschung neuer Materialien

Zwei Faktoren haben besondere Bedeutung für die Verbesserung der Qualität der Materialien: erstens die Erhöhung der mechanischen Eigenschaften (Festigkeit und Dehnung) und zweitens die Verminderung der Streuung dieser Eigenschaften. Dadurch ist es möglich, höhere zulässige Spannungen zuzulassen, ohne daß die Sicherheit vermindert wird. Die Druckfestigkeit des Betons hat bisher ständig zugenommen, und in den nächsten Jahren werden sicher noch große Fortschritte zu verzeichnen sein. In den letzten zehn Jahren hat dank der Vorspannung die Bruchspannung der Spanndrähte um ungefähr 20% zugenommen, ohne daß dabei die Verformungsfähigkeit reduziert worden wäre – ganz im Gegenteil.

Wie wichtig die Erforschung neuer Materialien ist, zeigt die phantastische Entwicklung des Spannbetons in den letzten dreißig Jahren. Der Spannbeton stellt tatsächlich ein neues Material dar, das die Ausführung von Tragwerken, die ein verschiedenartiges mechanisches Verhalten aufweisen, ermöglicht. Aber das ist nicht das einzige Beispiel: Immer häufiger werden Leichtbetons verwendet, wodurch das Eigengewicht vermindert werden kann, und in nächster Zukunft werden bestimmt Betons auf Kunstharzbasis, die ausgezeichnete Festigkeiten sowohl auf Druck wie auf Zug aufweisen, verwendet werden.

2. Materialkenntnis, Sicherheitskriterien und Berechnungsmethoden

Die gesamte Berechnung von Tragwerken beruhte lange Zeit auf dem Hookeschen Gesetz (elastische Betrachtungsweise). Das Sicherheitskriterium war durch die Begrenzung der Spannung gegeben, ohne weitere Berücksichtigung der Verformungen.

Die heutigen großen Fortschritte verdanken wir der Tatsache, daß auf Grund der Plastizitätstheorien unelastische Verformungen mit in Betracht gezogen wurden. Nur mit Hilfe dieser Theorien kann man dem Spannungsausgleich in den Trägerquerschnitten Rechnung tragen und im Fall von statisch unbestimmten Tragwerken zeigen, daß der Ausgleich der inneren Schnittkräfte diesen Tragwerken eine höhere Tragfähigkeit gewährleistet, als die Elastizitätstheorie glauben ließe.

Durch die Untersuchung der unelastischen Verformungen war es möglich, neue mathematische Berechnungsmodelle zu schaffen, zum Beispiel das steifplastische Modell, das elastoplastische Modell, das visco-elastische Modell usw., die eine bessere Darstellung der wirklichen Phänomene geben als die elastischen Modelle. – Selbstverständlich sind diese Modelle je nach Material, das zu untersuchen ist, verschieden. Allerdings ist unsere Kenntnis der unelastischen Verformung noch ungenügend, vor allem wenn diese Verformungen zeitabhängig sind. Die Forschungen über die Zusammenhänge zwischen Spannungen und Verformungen müssen fortgesetzt werden, damit der Ingenieur das tatsächliche Verhalten eines Tragwerks besser vorausbestimmen kann. – Ein wichtiges und noch nicht in befriedigender Weise gelöstes Problem ist das der zeitabhängigen Entwicklung der Spannungen in einem statisch unbestimmten Tragwerk aus Stahl- oder Spannbeton.

Die Plastizitätstheorien finden ihre einfachste Anwendung in der Berechnung der Traglasten der Tragwerke. Diese Berechnungsweise hat gegenüber der auf dem Hookeschen Gesetz beruhenden den Vorteil, daß sie einen genaueren Näherungswert des Sicherheitskoeffizienten liefert. So haben auch die Ingenieure und die Normen die Notwendigkeit einer Kontrolle der Bruchsicherheit von Trägern in Spannbeton erkannt. Warum führt man sie nicht auch für Betonbrücken durch, bei denen doch ganz ähnliche Voraussetzungen vorliegen? Nur aus Gewohnheit, in Erinnerung der Zeiten, wo allein die Elastizitätstheorien als maßgebend erachtet wurden.

Allerdings darf der Ingenieur nie die Bedingungen vergessen, die notwendig sind, damit die Berechnung der Traglasten richtige Ergebnisse liefert. In erster

Linie müssen die Verformungen klein gehalten werden; für gewisse Tragwerke muß unbedingt eine Verformungsgrenze festgelegt werden. Daneben ist zu beachten, daß im Fall von veränderlichen Beanspruchungen die Traglastberechnung oft zu einer Überschätzung der Tragfähigkeit führt. Das verallgemeinerte Ausgleichstheorem erlaubt eine genaue Berechnung von statisch unbestimmten Systemen mit veränderlicher Belastung. Der Wortlaut des Theorems, das mittels der Hypothese kleinster Verformungen aufgestellt wurde, lautet:

«Falls für ein gegebenes Tragwerk der Spannungszustand, resultierend aus einer Überlagerung:

a) des elastischen Spannungszustandes infolge der veränderlichen äußeren Kräfte und
b) eines unveränderlichen Eigenspannungszustandes, der als Ausgleichszustand bezeichnet wird,

sich innerhalb des elastischen Bereichs befindet, bleibt dieses Tragwerk stabil und die Eigenspannungen streben den Ausgleichsspannungen zu.»

Übrigens kann der Ausgleich durch Vorverformung, die zu einer Vorauskompensierung führt, erleichtert werden.

Ein wichtiges Problem für die Optimierung von Tragwerken ist das folgende: Wie kann man in den Sicherheitskriterien den Spannungen Rechnung tragen, die durch einen Zwängungszustand verursacht sind, der zum Beispiel durch Temperatur, Kriechen oder Fließen hervorgerufen wird? Sollen sie einfach zu den Spannungen gezählt werden, die durch die Einwirkung eines Systems äußerer Kräfte entstehen? Wir glauben nicht, aber das Sicherheitskriterium ist hier noch nicht gefunden worden. Als Beispiel seien Betonbogen angeführt, wo das Kriechen und die Temperatur zu hohen Spannungen führen können, und vor allem die Behälter für Atomreaktoren in Spannbeton, wo die thermischen Spannungen eine starke Erhöhung der Vorspannung nötig machen. Zudem müssen die zyklischen Veränderungen besonders beachtet werden, da ein großer Unterschied besteht zwischen einem stationären Zwängungszustand und Zwängungszuständen, die sich aus veränderlichen Beanspruchungen ergeben.

3. Erforschung neuer Tragwerke

Obwohl es nicht so aussieht, sind noch viele neue Tragwerke zu erfinden. Der Ingenieur, der ein Projekt untersucht, soll seine Erfindungsgabe unter Beweis stellen und sich vor allem vor der Routine hüten, die nachahmt, ohne zu verbessern. Warum werden zum Beispiel immer noch Ständerfachwerke erstellt, wo doch das Strebenfachwerk wirtschaftlicher ist? Wie kommt es, daß man erst jetzt seilverspannte Brücken gebaut hat, die wirtschaftlicher und sicherer sind als die klassischen Hängebrücken mit parabolischer Kabelform?

Sehr häufig ergibt sich die Erforschung neuer Tragwerke aus der Verbesserung der Bautechnik. Die Entwicklung der Schweißtechnik hat die Herstellung dreidimensionaler Stahltragwerke ermöglicht und das Freivorbauverfahren die Ausführung neuartiger Brückensysteme in Spannbeton.

Die Schalen stellen ein riesiges Forschungsfeld dar. Hier spielt die Erfahrung eine wichtige Rolle und ermutigt zu kühneren Konstruktionen, trotz den noch schlecht bekannten Phänomenen, wie zum Beispiel das Durchschlagsproblem der Schalen. Diese Erfahrung wird auf zwei Arten gewonnen: Sie ist einmal die Erfahrung des Ingenieurs, der, weil er ein Bauwerk erstellt und erprobt hat, weiß, daß er noch weiter gehen kann, und sie ist die Erfahrung des Forschungsinstitutes, gewonnen aus Modellversuchen, und zwar trotz den schwierigen Problemen der Ähnlichkeit.

4. Verbesserungen der Bautechnik

Wir müssen unterscheiden zwischen Verbindungen und den eigentlichen Bauverfahren.

Zahlreiche Beispiele zeigen, daß die Verbindungen einen Hauptfaktor für die Wirtschaftlichkeit eines Tragwerks darstellen. – Heute braucht man für Holzkonstruktionen, zum Beispiel für das Lehrgerüst eines großen Bogens, dreimal weniger Holz als vor fünfzig Jahren. Diese Einsparung beruht ausschließlich auf der Entwicklung neuer Verbindungen: Nagelverbindungen, die Zugkräfte übertragen können, Betonknoten, die die Enden der Holzfasern zusammenfügen und Zugkräfte übertragen. Tragwerke in verleimter Holzbauweise (Hetzer-Bauweise) haben die wirtschaftliche Ausführung großer Überdachungen möglich gemacht. Die Vorspannung ist das einzig befriedigende Verfahren für die Verbindung großer vorgefertigter Betonelemente: Daß neuerdings große Brücken aus vorgefertigten Elementen ausgeführt worden sind, zeigt die Vorteile dieses Verfahrens in bezug auf schnelle und gute Arbeitsausführung und in bezug auf seine Wirtschaftlichkeit. Auf dem Gebiet der Stahlkonstruktionen bringt das Aufkommen hochfester Schrauben schnelles und billiges Verbinden großer fabrikgeschweißter Elemente auf der Baustelle mit sich. Dank der Fortschritte in der Schweißtechnik konnten sich die leichten und wirtschaftlichen Stahlrohrkonstruktionen entwickeln.

Aber entwerfen allein genügt noch nicht, man muß auch bauen. Das angewendete Bauverfahren ist für die Wirtschaftlichkeit eines Bauwerks von ganz erheblicher Bedeutung. Als Beispiele seien die Entwicklung der Vorfabrikation, die Anwendung von Gleitschalungen, des Freivorbaus vorgespannter Brücken und die großen Fortschritte in der Fundationstechnik genannt. Der Ingenieur muß bereits beim Entwerfen stets an die Ausführung seines Projekts denken, er muß auf leichte Ausführbarkeit, die Zeit- und Geldgewinn bedeutet, bedacht sein und sich vor allem davor hüten, unter dem Vorwand von Materialeinsparungen knauserig zu werden.

Obenstehende Ausführungen zeigen, wie vielseitig der Ingenieur sein muß, wenn er das beste Projekt eines Tragwerks zustande bringen soll. Wollte er die von ihm getroffene Lösung mit absoluter Sicherheit beurteilen, so müßte er alle überhaupt in Frage kommenden Lösungen untersuchen, bauen und benützen, das heißt, er müßte auf Versuche zurückgreifen. Das ist eine Möglichkeit und in dem Falle, wo ein gleiches Element sehr oft ausgeführt werden muß, zum Beispiel vorgespannte Betonmasten für elektrische Freileitungen, die beste Lösung des Problems der Optimierung.

Bei großen Tragwerken dagegen muß der Ingenieur die Lösung à priori beurteilen. Dabei wird er mit Ausnahme sehr einfacher oder altbekannter Tragwerke auf Probleme stoßen, die sich rechnerisch nicht lösen lassen, weil die Berechnung keine neue Lösung kreiert, sondern einzig Hypothesen umformt. Unterschätzen wir jedoch die Bedeutung von elektronischen Rechenmaschinen für die Berechnung der Tragwerke nicht: Nur durch sie konnten bestimmte Fragen restlos geklärt werden. Sie haben unter anderem den Vorteil, daß sie den Ingenieur von einer mühsamen Arbeit befreien und ihm dafür Zeit geben für den Entwurf, die kritische Untersuchung der Hypothesen, die Schätzung des Sicherheitsgrades und die Ausführung.

Weil der Ingenieur seine Probleme nicht mit Hilfe von Berechnungen lösen kann, ist er darauf angewiesen, einen oder mehrere Modellversuche eines Tragwerks oder einzelner Tragwerkteile durchzuführen. Dabei sollte das Material des Modells dieselben mechanischen und physikalischen Eigenschaften aufweisen wie das Material des Tragwerks, sonst bleiben die Versuche, wie bei der Photoelastizität, nur ein Mittel analoger Berechnungen. Modellversuche haben bereits sehr gute Dienste geleistet bei der Untersuchung von Bogenstaumauern, dünnen Schalen und Behältern für Atomreaktoren.

Kurz gesagt, die Optimierung muß aus der Erfahrung und der genauen Kenntnis der mechanischen und physikalischen Eigenschaften der Materialien hervorgehen. Wenn in nächster Zukunft wesentliche Fortschritte in der Wirtschaftlichkeit der Tragwerke gemacht werden sollen, müssen noch mehr Versuchsanstalten für Tragwerke entstehen. Diese Versuchsanstalten hätten eine doppelte Aufgabe: Sie müßten sich einerseits der grundlegenden Untersuchung der Eigenschaften der Materialien widmen und anderseits Modellversuche durchführen. Was den Ingenieur betrifft, so sollte er in erster Linie danach trachten, seine schöpferische Phantasie in bezug auf Entwurf und Ausführung unter Beweis zu stellen.

Ic

Optimisation of Structures

J. COURBON
Prof., Paris

In our opinion, the optimisation of a structure consists of designing and constructing that structure at the lowest cost, with the object of fulfilling a well defined purpose. In particular, the safety factor of the structure must be specified. This point already raises many difficulties when a comparison is made of different projects for the same structure using materials with markedly different properties. In estimating the cost, consideration must, of course, be given to the service life of the structure, its maintenance, and the possibility of its adaptation to meet any foreseeable changes in the service required. These changes result, for example, from an increase in the weight and speed of the live loads for bridges, an increase in the weight of aircraft for runways, and a rise in the tonnage of ships in the case of harbour works.

The cost of the structure depends on a very large number of parameters. Some of these are known and constitute data imposed on the engineer. Others are variable and must be chosen so as to reduce the cost of the structure to a minimum.

Among the data that are imposed, a distinction may be drawn between:

A. *General data.* These are:

A 1. The qualities and prices of the materials available at the time of construction of the structure.

A 2. The state of knowledge regarding the mechanical and physical behaviour of these materials, which finds expression in criteria of safety and mathematical models enabling a calculation to be made a priori of the structures.

B. The data relating *particularly* to the structure being studied. They are:

B 1. The geometrical data, more especially the dimensions laid down for the structure. Such are, for example, the headway and waterway to be left under a bridge, both during its construction and in its final state.

B 2. The stresses, both mechanical and other than mechanical (for example, temperature). A distinction must be drawn between the stresses brought about by a system of given external forces not equivalent to zero, and the stresses which lead to a state of coercion.

B 3. The geographical data involving, in particular, the cost of transport and labour, and the quality of the foundation soil.

B 4. The time limit for the completion of the construction. If this is not respected, allowance must be made for the intercalary interests and an estimate made of the damage caused by the delay in putting the structure into service.

B 5. Possibly, the aesthetics of the structure.

The variable parameters left to the choice of the engineer are mainly:

C 1. The choice of materials: stone, wood, steel, concrete, reinforced concrete, prestressed concrete, etc.

C 2. The choice of the structure.

C 3. The mode of carrying out the structure, including the fundamental problem of the assemblies and the methods of construction.

In the case of a bridge, the problem of the choice of the materials and of the structure is relatively simple, because the experience gained from a large number of structures enables the engineer to ascertain rapidly which are the variants, and they are few in number, that it is advisable to consider.

On the other hand, in the case of industrial structures which have recourse to the collaboration of several techniques, the problem is far more difficult. Let us take, for example, the case of the shield of a nuclear reactor. If this shield is constructed of prestressed concrete, it is necessary to insulate and cool the concrete in order to reduce the stresses brought about by the temperature gradient. Optimisation then results from a balance-sheet comprising the costs of the structure, the insulation and the cooling circuit, and these costs are variable and depend upon the temperature gradient that is allowed to remain.

Another example of the collaboration of techniques which is again taken from the field of nuclear reactors. A reduction in the space occupied by the heat exchangers has made it possible to locate them inside the shield, and this has resulted in considerable simplifications and economies.

In the general case, therefore, it is always a question of overall optimisation. Each technique must place its problem before the others and tell them: "this is what I would prefer, have you a solution, or else: what additional cost will this entail for you, and we will add up the total amount".

The problem of optimisation as we have propounded it is extremely general; its solution is the business of the engineer, whose ability is measured by the quality of the solution adopted.

It should be observed that the cost of a structure is always a discontinuous function of the parameters of Class C. It is only after these parameters have been selected that the problem is reduced to the finding of the minimum value of a continuous function of one or more variables. Such are the conventional problems of beams and columns of equal strength, of finding structures of minimum weight or of minimum deformation energy.

We consider, however, that these particular problems are only of minor interest because, firstly, the economy achieved will always be slight, and, secondly, the structure obtained will very often be more expensive, or even impracticable, because it is too complicated. However, the plant and equipment often make it possible, when they are well designed, to build structures that are theoretically more satisfactory without any increase in unit cost. A balance has to be struck between an excessive simplification of the shapes and the additional expenditure entailed, in the case of concrete, for example, by more elaborate shuttering and more difficult operations. This remark is fully justified in all cases where a large number of identical components have to be produced.

It is essential to examine in greater detail the parameters which exert the greatest influence on the cost of the structure. They are the parameters A 1 and A 2 among the given data and the parameters C 2 and C 3 among the variables. Let us consider further these essential items:

1. Improvement in the Quality of the Materials and Search for New Materials

Two factors play a predominant part in the quality of the materials. They are, firstly, an increase in the mechanical properties (strength and elongation) and, secondly, a reduction in the dispersion of these characteristics. It is then possible, without reducing the safety, to adopt higher permissible stresses. The compressive strength of concretes has not ceased to increase, and it is probable that we shall have great progress to report in the coming years. For about ten years, mainly due to prestressing, the breaking strength of steel wires has increased by about twenty per cent, without their elongation capacity being thereby diminished; indeed the contrary is the case.

The importance of the search for new materials is illustrated by the stupendous development of prestressed concrete during the past thirty years. Prestressed concrete is, indeed, a new material enabling structures to be erected which exhibit mechanical behaviour different from that of the structures previously constructed. But this is not the only example. Light concretes which enable the actual weight to be reduced are being more and more extensively employed and we shall doubtless see, in the near future, concretes based on synthetic resins and possessing considerable compressive and tensile strengths.

2. Knowledge of Materials. Criteria of Safety and Methods of Calculation

For a long time all calculation of structures was based on Hooke's law (elastic model). The criterion of safety was given by limitation of stresses, without any particular care for the deformations.

The great progress made recently is due to the taking into consideration of the non-elastic deformations thanks to the theories of plasticity. Only these theories make it possible to take into account the adjustment of the stresses in the sections of a beam, and, in the case of hyperstatic structures, to demonstrate that the adjustment between sections gives a greater strength to these structures than the theory of elasticity would lead us to suppose.

The study of non-elastic deformations has made it possible to create new mathematical models for calculations such as rigid-plastic, elasto-plastic and visco-plastic models, etc., which give a better representation of the actual phenomena than do the elastic models. These models differ, of course, according to the material being considered. However, our knowledge regarding the non-elastic deformations of certain materials is still inadequate, particularly when these deformations are time-dependent. Laboratory researches into the relationships between the stresses and the deformations must be continued so that the engineer is better able to predict the actual behaviour of the structures he designs. An important problem which has not yet been properly solved is that of the development with time of the stresses in a hyperstatic structure made of reinforced concrete or prestressed concrete.

The calculation of the limiting loads on the structures is the simplest of the applications of the plastic theories. This calculation has the advantage of giving a better approximation of the safety factor than do calculations based on Hooke's law. Thus both engineers and regulations have recognized the necessity of verifying the safety against rupture of prestressed concrete beams. Why is this not done for concrete arches which are nevertheless in a closely similar position? By sheer force of habit, in remembrance of the days when the elastic theories were alone regarded as reliable.

Engineers, however, must never forget the conditions that are necessary in order that the calculation of the limiting loads should give correct results. In the first place, the deformations must remain small; for certain structures it is essential to impose limits on the deformations. In the second place, in the case of variable stresses, the calculation of the limiting loads often results in an over-estimation of the capacity for resistance of the structures. The general theorem of adaptation makes possible a correct calculation of hyperstatic structures subjected to variable loads. Let us recall the statement of this theorem which was established by means of the hypothesis of small deformations:

"If, for a given structure, the state of stress obtained by adding:

a) the elastic state of stress due to variable external forces

b) a fixed state of stress forming a state of coercion termed state of adaptation belongs to the elastic range, the structure will remain stable and the residual stresses will tend towards adaptation stresses".

The adaptation may, moreover, be facilitated by a prior compensation obtained by pre-deformation.

An important problem for the optimisation of structures is as follows: How to make allowance, in criteria of safety, for the stresses of a state of coercion brought about, for example, by temperature, shrinkage or creep? Should they be merely added to the stresses due to the application of a system of external forces? We do not think so, but the criterion of safety has still to be found. We may mention, as examples, concrete arches in which shrinkage and temperature may result in high stresses, and, more particularly, the prestressed concrete shields for nuclear reactors in which the thermal stresses make it essential to increase the prestressing considerably. The most careful attention must, however, be given to the cyclic variations, because there is an enormous difference between a stationary state of coercion and the states of coercion resulting from alternating phenomena.

3. Search for New Structures

Contrary to what might be supposed, there are still many new structures to be found. An engineer who designs a project must give proof of imagination, and, above all, must be on his guard against the routine which consists of copying what has already been done without making any improvements. Thus, why are girders with Pratt triangulation still being constructed when a girder with Warren triangulation is more economical? How does it come about that it is only recently that bridges with guys have been constructed which are cheaper and more reliable than conventional suspension bridges with parabolic cables?

Very often the search for new structures proceeds from the improvement in the techniques of construction. Progress in welding has enabled three-dimensional steel structures to be constructed. The technique of construction by cantilevering out has made it possible to build new types of prestressed concrete bridges.

Thin shells appear to us to offer a vast field for research. The part played by experience in an increasingly emboldened attitude towards phenomena that are still not well understood, such as the buckling of shells, is predominant in this field. This experience is of two kinds: that of the constructor who, because he has built a structure and tested it, knows that he can go farther, and that of the laboratory, from tests on reduced-scale models, in spite of the difficulties of similitude.

4. Improvement in the Techniques of Construction

We shall draw a distinction between assemblies and actual methods of construction.

Numerous examples demonstrate that assemblies constitute one of the essential factors in the economy of a structure. Nowadays, timber-work, for example the centering for a large arch, requires only one-third of the timber that was necessary fifty years ago. This economy is due solely to the design of new methods of connection: nailed connections for transmitting the tensile stresses, concrete joints moulding the ends of the wood fibres for transmitting tensile stresses. Bonded laminated wooden frameworks have enabled wide-span roofs to be constructed economically. Prestressing is the only satisfactory process for connecting prefabricated concrete members. Very large bridges constructed recently by means of prefabricated voussoirs underline the advantage of this method of assembly from the point of view both of the rapidity and quality of the execution of the work, and of economy. In steel construction, the appearance of high strength bolts has enabled large structural members welded in the factory to be fastened together on the site both quickly and economically. It is owing to the progress made in welding that frameworks consisting of tubes, which are lightweight and cheap, have been developed.

It is not enough, however, to make projects; it is also necessary to construct. The methods of construction are of considerable importance in the economy of structures. We may mention, as examples, the development of prefabrication, the use of sliding forms, the construction of prestressed concrete bridges by cantilevering out, and the considerable progress achieved in the technique of foundations for structures. The engineer must therefore always bear in mind the manner in which the structure he is designing is to be built. He should endeavour to facilitate the construction by saving time and money and, in particular, avoid the niggardliness which, as often as not, takes a saving of materials as its pretext.

The foregoing developments demonstrate the extent and the diversity of the knowledge that should be possessed by an engineer responsible for designing the best project for a structure. In order to make a reliable judgement of the value of the solution adopted, it would be necessary to study fully, construct and utilise the various solutions submitted to comparison, or in other words, have recourse to experiments. This is feasible and it is the best solution of the problem of optimisation in the case of members constructed in a large number of copies, for example, prestressed concrete posts for electric power lines.

On the other hand, in the case of large structures, engineers are obliged to judge the chosen solution a priori. But with the exception of very simple structures or structures of which a thorough knowledge has been gained by long experience, engineers will come up against difficulties that they are unable to overcome by calculation, because calculation only converts the hypotheses, but is not creative. We do not underestimate the advantages of computers for the calculation of structures. Indeed, it is only thanks to them that it has been possible to make a thorough study of certain problems. Furthermore, they afford the advantage of relieving engineers of a wearisome task and of leaving them all the time they need for designing, making a critical examination of the hypotheses, and estimating the margin of safety.

If they are unable to solve their problems by calculation, engineers will be faced with the need for constructing and testing one or more reduced-scale models of the structures or parts of structures they are studying. This is not devoid of difficulty, because the material of the reduced-scale model must possess mechanical and physical properties similar to those of the material of the actual structure, since otherwise the tests on the model would only be, like photo-elasticity, an instrument of analogic computation. Reduced-scale models have already proved most useful in the study of arch dams, thin shells and the shields of nuclear reactors.

To sum up, the optimisation of structures must be based on experience and an accurate knowledge of the mechanical and physical properties of the materials. If it is desired to obtain, in the near future, substantial progress in the economy of structures, the number of test laboratories, of which there are far too few at present, must be increased. These laboratories would have a dual task; firstly, they should undertake fundamental research into the properties of materials, and secondly, they should conduct tests on scale models. The chief concern of engineers should be to afford proof of creative imagination, both in the design and in the construction of structures.

Leere Seite
Blank page
Page vide