

Zeitschrift: IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH
Kongressbericht

Band: 9 (1972)

Rubrik: Theme I: The influence of strength and deformations of the following
nonlinear phenomena

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 31.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'influence de la plasticité et de la viscosité sur la résistance et la déformation des constructions

Der Einfluss der Plastizität und der Viskosität auf die Traglast und die Verformung von Tragwerken

The Influence of Plasticity and Viscosity on the Strength and Deformation of Structures

M. SAVE

Professeur à la Faculté Polytechnique
de Mons

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université
de Liège

1. INTRODUCTION.

1.1. Contenu du rapport.

Le thème décrit par le titre ci-dessus est extrêmement vaste. Il a fait l'objet, dans les quarante dernières années, de travaux de recherche innombrables et de dizaines de livres.

Dans le présent rapport, nous nous limiterons à deux matériaux : l'acier, considéré comme un matériau élasto-plastique, et le béton considéré comme un matériau visco-élasto-plastique aux caractéristiques dépendant de l'âge, tous deux à la température ambiante. Nous nous intéresserons aux doctrines de calcul inélastique des structures formées de ces deux matériaux. Nous rappellerons les éléments essentiels de ces doctrines dans leur état actuel, nous soulignerons les points délicats ou non résolus et nous tenterons de dégager les voies de recherche les plus intéressantes. L'historique et les exposés détaillés de ces méthodes de calcul pourront être trouvés dans les textes de références.

Afin d'éviter toute duplication avec les travaux du Colloque de Madrid de septembre 1970 sur l'influence du fluage et du retrait sur les constructions en béton, nous nous contenterons d'évoquer les applications essentielles du modèle visco-élastique linéaire.

1.2. Le modèle parfaitement plastique.

La Mécanique des Solides déformables schématise les corps réels en des modèles mécaniques pour lesquels elle construit des théories mathématiques rigoureuses.

En théorie des structures, le modèle parfaitement plastique est apparu avec les travaux de G. de Kazinczy [1], en 1914, et de N.C. Kist [2], en 1917, sur les poutres fléchies. Il comporte les hypothèses suivantes :

- 1. le moment fléchissant dans une section droite ne peut dépasser un seuil, appelé moment plastique (M_p en flexion positive, M'_p en flexion négative) indépendant de la déformation subie par cette section (plasticité parfaite).

-2. quand ce seuil est atteint, les parties adjacentes à la section droite peuvent subir une rotation relative permanente arbitraire sous moment constant (plasticité parfaite), cette rotation ayant obligatoirement le même signe que le moment fléchissant (loi d'écoulement). On dit qu'il s'est formé une "rotule plastique dans la section".

Sous un système de charges dont toutes les grandeurs sont proportionnelles à un seul paramètre scalaire P , une structure formée de poutres fléchies parfaitement plastique possède une "charge limite" P_ℓ , valeur du paramètre de charge à laquelle elle se transforme, par formation d'un nombre suffisant de rotules plastiques, en un mécanisme cinématiquement déformable, sous charge constante P_ℓ tant que le changement de forme produit par le mécanisme reste négligeable.

Dans l'état limite qui vient d'être décrit, le champ des moments fléchissants satisfait aux conditions d'équilibre et ne viole pas la condition de plasticité :

$$-M'_p \leq M \leq M_p \quad (1)$$

Tout champ de moments ayant en commun avec le champ à l'état limite de satisfaire aux conditions d'équilibre et à la condition de plasticité (1) est dit "statiquement admissible". Si son paramètre de charge est appelé P_- , le premier théorème fondamental de l'analyse limite, dit théorème statique (ou de la borne inférieure) nous apprend que : [3] [4] [5] [6]

$$P_- \leq P_\ell \quad (2)$$

Dans l'état limite, le mécanisme fait produire aux charges appliquées une puissance positive P_e .

Si le mécanisme comporte n rotules positives de vitesse de rotation $\dot{\theta}_i$ et m rotules négatives de vitesse de rotation $\dot{\theta}_j$, la puissance dissipée dans les rotules est

$$D = \sum_{i=1}^n M_{pi} \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^m M'_{pj} |\dot{\theta}_j| \quad (3)$$

La conservation de l'énergie impose :

$$P_e = D \quad (4)$$

équation qui fournit P_ℓ .

Tout mécanisme ayant en commun avec le mécanisme de l'état limite de fournir une puissance positive P_e est dit cinématiquement admissible. Si on appelle P_+ son paramètre de charge calculé par l'équation de puissance (4), le second théorème fondamental de l'analyse limite, dit théorème cinématique (ou de la borne supérieure) nous apprend que [3], [4], [5], [6]

$$P_\ell \leq P_+ \quad (5)$$

Quand $P_- = P_+$, on a, d'après (2) et (5),

$$P_- = P_\ell = P_+ \quad (6)$$

(théorème combiné).

Cette situation se présente quand le champ de moments statiquement admissible et le mécanisme cinématiquement admissible se correspondent par la loi d'écoulement : $\text{signe } \dot{\theta}_i = \text{signe } M_i$ en toute rotule i . On a alors une solution complète.

La théorie qui vient d'être esquissée s'étend facilement aux structures plus complexes comportant plusieurs variables statiques Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) : poutres simultanément fléchies, tendues (ou comprimées) et tordues, plaques, coques [7], [8]. Un élément de structure possède une condition d'écoulement représentée dans l'espace des forces internes Q_i par une surface d'écoulement fixe et convexe vers les axes positifs. Tout champ de sollicitations internes en équilibre et représenté par des points à l'intérieur de la surface ou sur celle-ci est statiquement admissible. Il fournit une approximation P_- de la charge limite.

Si on superpose à l'espace des Q_i l'espace des vitesses de déformation correspondantes \dot{q}_i (si Q_1 est par exemple un moment, \dot{q}_1 est une vitesse de courbure, Q_2 un effort normal, \dot{q}_2 une vitesse d'extension ou de contraction, etc...), la loi d'écoulement s'exprime par la normalité du vecteur de composantes \dot{q}_i à la surface d'écoulement au point de contraintes de composantes Q_i , situé sur la surface.

Un mécanisme cinématiquement admissible est maintenant décrit par un champ de vitesses de déplacement, dont dérivent les champs des \dot{q}_i à l'aide desquels on peut, par la loi de normalité, calculer la dissipation. En égalant la dissipation à la puissance, positive, des forces appliquées, on obtient une approximation P_+ de la charge limite.

Cette théorie s'applique également lorsque les charges se divisent en un système de charges permanentes données, incapables à elles seules de produire la ruine par mécanisme, et en un système de surcharges à un paramètre P_s [3] [7]. La charge limite est alors la valeur limite $P_{s,\ell}$ de P_s telle que l'ensemble des charges conduise à l'état limite. On a

$$P_{s,-} \leq P_{s,\ell} \leq P_{s,+} \quad (7)$$

où $P_{s,-}$ et $P_{s,+}$ sont, une fois associés aux charges permanentes, fournis respectivement par les méthodes statique et cinématique. On peut ainsi suivre d'assez près les recommandations du C.E.B. [9] et de la C.E.A.C.M. en utilisant une limite d'écoulement "de calcul" déduite d'une limite d'écoulement caractéristique tenant compte de la dispersion dans les limites d'écoulement mesurées, et deux coefficients de majoration des charges, l'un γ_p sur les charges permanentes et l'autre γ_s sur les surcharges. La valeur de P_{γ} étant fixée, il faut s'assurer que, à l'état limite de ruine par mécanisme, $\gamma_s P_{s,\ell}$ est supérieur à la valeur imposée. Parallèlement à cette façon pratique d'évaluer la sécurité, on peut envisager de considérer certaines variables comme aléatoires (la limite élastique de certaines barres par exemple) de distributions connues, et rechercher la distribution correspondante de $P_{s,\ell}$. Il s'agit là d'un problème de programmation stochastique [10].

Si l'on fait un dimensionnement (et non une analyse) il est possible d'assurer une charge limite minima $P_{s,\ell}$ imposée tout en optimisant la structure.

Dans cet ordre d'idées, la théorie du dimensionnement plastique de poids minimum peut actuellement fournir un grand nombre de solutions, tant analytiques que mécaniques, de problèmes d'ossatures, de plaques et même de coques, soumises à des charges fixes ainsi qu'à des charges déplaçables [11].

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas préoccupés du comportement de l'élément de structure avant son écoulement plastique, à la seule réserve près que la structure doit rester, juste avant la ruine, assez peu déformée que pour pouvoir être étudiée dans sa géométrie initiale. Si maintenant nous supposons que l'élément de structure est élastique linéaire jusqu'à son écoulement plastique, nous pouvons étudier pas à pas le comportement de la structure en tenant compte, si nécessaire, de l'influence des déformations élasto-plastiques sur les effets des forces. Nous obtenons ainsi la force portante de la structure, à partir de laquelle les déplacements croissent sous charge décroissante [6],[7].

Le comportement post-limite décrit par la forme de la courbe liant le paramètre de charge P à un déplacement caractéristique δ après formation du mécanisme de ruine est très important à connaître. Selon que cette courbe est descendante ou montante, la charge de ruine par mécanisme est une charge d'écoulement ou bien seulement la charge à partir de laquelle l'accroissement de force portante de la structure ne peut se produire qu'au prix de grandes déformations permanentes. Cette étude peut se faire à l'aide du modèle rigide - parfaitement plastique.

Tous les problèmes évoqués ci-dessus peuvent être traités par des méthodes de calcul qui sont actuellement bien établies [6],[7].

Il est très important de faire remarquer ici que, sur la base des théorèmes fondamentaux, l'analyse limite plastique peut se formuler comme un problème de programmation linéaire [6].

Tous les résultats de la programmation mathématique et tous ses algorithmes de calcul lui sont donc applicables. Il en est de même pour le dimensionnement de poids minimum [6]. De nombreux problèmes spécifiques ont déjà été résolus de cette manière.

Avec l'augmentation de puissance des ordinateurs, la méthode basée sur la programmation linéaire [11, 6] semble avoir pris le pas, en rendement-machine, sur les méthodes spéciales développées antérieurement par Heyman [12, 6] et par Prager - Heyman [13, 6] et programmées par Kalker [14]. Par ailleurs, la meilleure méthode manuelle d'étude des ossatures semble rester celle par combinaison de mécanismes simples, due à Neal et Symonds [15, 6] et basée sur le théorème cinématique.

Un essai de programmation de cette méthode sur ordinateur, dû à Cohn et Grierson [16], a conduit à un programme nommé COMECH, qui effectue toutes les combinaisons de mécanismes à un degré de liberté et se révèle par conséquent comme assez inefficace dès que le degré d'hyperstaticité de la structure devient important.

Dans un travail non publié communiqué à l'un des auteurs du présent rapport, Mr. Jubete Portilla a trouvé une méthode permettant de sélectionner automatiquement les mécanismes combinés de manière à augmenter le moment plastique (dans le problème de dimensionnement restreint). Cette méthode devrait pouvoir conduire à un dimensionnement efficace sur ordinateur.

1.3. Le modèle viscoélastique linéaire.

Les recherches expérimentales de Glanville [17] et Davis [18] ont montré que le béton de ciment est essentiellement un matériau viscoélastique linéaire, c'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la déformation de fluage est proportionnelle, à la contrainte appliquée. Il en résulte qu'on peut appliquer le principe de superposition de Boltzmann, selon lequel il est permis de superposer les effets de fluage provenant de plusieurs états de contrainte, en considérant la durée de leur application et la date de leur début d'application.

Depuis ces recherches fondamentales, le fluage et le retrait du béton - qui sont indissociables - ont été l'objet de recherches expérimentales très nombreuses (cf. par exemple les publications du C.E.B. et Kesler [19]), qui ont permis de mettre en évidence les principaux paramètres qui contrôlent ces phénomènes. Il est clair aujourd'hui que la déformation de fluage est une fonction complexe non seulement de la composition du béton considéré, mais encore de la forme de l'élément étudié de ses dimensions absolues, de son pourcentage d'armatures, des variations du degré hygrométrique de l'atmosphère dans laquelle l'élément est plongé. Il n'est pas possible actuellement de prédire avec précision les propriétés de fluage d'un élément à partir des données ci-dessus.

D'autre part, on peut dire que l'analyse théorique des corps viscoélastiques linéaires a fait, dans ces vingt dernières années, des progrès immenses. Le modèle mécanique généralement admis pour ces corps est une combinaison de ressorts et de dash-pots linéaires. On peut montrer [20, 21] que, quel que soit le nombre de ses éléments, le modèle obéit en traction simple à la loi :

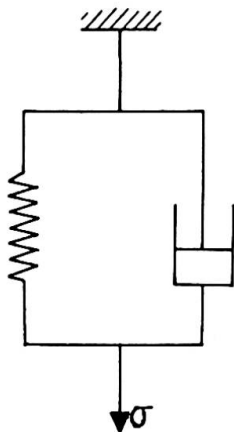
$$P\sigma = Q\epsilon \tag{8}$$

où P et Q sont les opérateurs différentiels linéaires :

$$P = \sum_0^m p_K \frac{d^K}{dt^K}, \quad Q = \sum_0^n q_K \frac{d^K}{dt^K} \tag{9}$$

Souvent, on considère comme suffisant le modèle de Kelvin (fig. 1) qui obéit à l'équation :

$$\sigma = E\epsilon + \mu\dot{\epsilon} \tag{10}$$



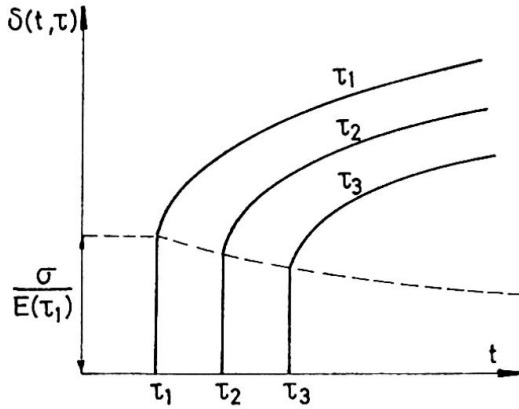
Une autre technique d'analyse est celle basée sur les intégrales héréditaires de Volterra. Elle a l'avantage de mieux se prêter à la représentation d'un matériau dont les propriétés dépendent de l'âge. On y admet que le béton simple sollicité par une contrainte de compression constante σ à partir du temps τ (appelé âge du béton) présente au temps $t > \tau$ la dilatation totale (élastique plus de fluage)

$$\epsilon = \sigma \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] = \sigma \delta(t, \tau) \tag{11}$$

Fig. 1. qui est linéaire en σ .

La plupart des auteurs admettent que la fonction C (t, τ) peut s'écrire :

$$C(t, \tau) = f(\tau) C(t - \tau)$$



Dans ce cas, les parties courbes de la figure 2 sont semblables de forme. Si la contrainte varie suivant la loi connue $\sigma = \sigma(\tau)$, on admet avec Boltzmann que la dilatation totale $\bar{\epsilon}$ est donnée à un instant t quelconque par la formule

$$\epsilon = \sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau \quad (12)$$

- Fig. 2.-

analyser les effets viscoélastiques dans les coques et dans d'autres pièces à trois dimensions, on doit tenir compte du fait que les déformations de fluage en dilatation sont beaucoup moindres en dilatation qu'en distorsion; on doit alors décomposer le tenseur contrainte $\bar{\sigma}$ en chaque point en sa composante sphérique

$$s = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad \text{avec } s = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

et son déviateur

$$S = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_y & s_{yz} \\ s_{xz} & s_{yz} & s_z \end{bmatrix}$$

avec $s_x = \sigma_x - s$, etc..., $s_{xy} = \tau_{xy}$, etc...

De même, on doit décomposer le tenseur déformation ϵ en sa composante sphérique représentant une dilatation pure

$$e = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \quad \text{avec } e = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

et sa distorsion

$$E = \begin{bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_y & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_z \end{bmatrix}$$

avec $e_x = \epsilon_x - e$, etc..., $e_{xy} = \epsilon_{xy}$, etc...

Les lois fondamentales les plus générales du corps viscoélastique linéaires s'écrivent alors

$$\begin{cases} P''s = Q'e \\ P'S = Q'E \end{cases} \quad (13)$$

où P' , P'' , Q' , Q'' sont quatre opérateurs différentiels linéaires différents analogues à P et Q .

Une littérature extrêmement abondante, basée sur les lois [8] ou [13] et employant comme outil mathématique essentiel la transformation de Laplace, s'est développée ces vingt dernières années. Cette littérature étant largement ignorée des ingénieurs des constructions, il vaut la peine de citer les quelques synthèses de ces travaux qui sont suffisamment complètes et en même temps relativement faciles à lire.

Pour les corps dont les propriétés ne dépendent pas de l'âge, on recommande le chapitre (Viscoelasticity) rédigé par E. H. LEE, dans le Handbook of Engineering Mechanics édité par le Professeur W. Flugge [22] ainsi que l'excellent livre de Flugge intitulé "Viscoelasticity". Ces deux ouvrages ont peut-être plus en vue l'application aux matières plastiques qu'au béton de ciment. Par contre, le livre d'Aroutiounian [23] basé sur l'emploi des intégrales héréditaires, envisage particulièrement l'effet de l'âge du matériau et l'application au béton. Il n'existe pas, en viscoélasticité, de théorèmes généraux équivalents aux deux principes fondamentaux de l'analyse limite (cf. § 1.2.). Néanmoins, on peut mettre en évidence les deux principes de correspondance qui donnent la solution d'une classe restreinte de problèmes pratiques. Ces principes ont été découverts par T. Alfrey [24] et D. Mc. Henry [25], en se basant d'ailleurs sur des lois de viscoélasticité légèrement différentes. Le livre de Levi et Pizzetti, paru en 1951 [28] où ces principes portent le nom de théorèmes d'isomorphisme, a contribué à les clarifier et à les diffuser. On donne ci-après les énoncés de ces principes pour le cas d'ossatures faites de barres soumises à flexion composée, d'après [21] :

Premier principe de correspondance.

Si l'on applique à une structure viscoélastique linéaire une mise en charge simple dans laquelle toutes les forces extérieures varient en fonction du temps suivant la même loi $L(t)$, les contraintes en tout point et les réactions hyperstatiques éventuelles évoluent suivant la même loi et sont à tout moment égales à celles qui naîtraient, sous l'action des mêmes forces, dans la structure correspondante, parfaitement élastique. Les déplacements et déformations évoluent tous proportionnellement suivant la loi $y(t)$ identique à la loi d'allongement par fluage d'un barreau tendu sollicité par l'effort de traction $L(t)$.

Cas particulier important : Dans le cas simple où l'on applique brusquement au temps τ des forces de volume et de surface que l'on maintient ensuite constantes, les contraintes dans la structure viscoélastiques prennent une valeur constante. Par ailleurs, le déplacement d'un point quelconque varie en fonction du temps suivant la loi du fluage en traction.

Deuxième principe de correspondance.

Si l'on donne à une structure viscoélastique linéaire non chargée certains déplacements qui évoluent tous proportionnellement en fonction du temps suivant la loi $L(t)$ (avec $L(\tau) = 1$), les déplacements et dilatations de tous les points de la structure évoluent suivant la même loi et sont, à l'instant $t = \tau$, identiques à ceux qui naîtraient sous l'effet des déplacements imposés dans la structure correspondante parfaitement élastique du module d'élasticité $E(\tau)$. Quant aux contraintes et réactions hyperstatiques, elles sont à tout moment proportionnelles à celles qui existeraient dans la structure parfaitement élastique. Le coefficient de proportionnalité est l'effort de traction $g(t)$ nécessaire pour soumettre un barreau du matériau viscoélastique à un allongement imposé $\delta = L(t)$.

Remarque : L'énoncé général ci-dessus s'applique également au cas où la structure subit une variation thermique ou un retrait dont la loi dans le temps est connue, car on peut aisément calculer les déplacements d'appui équivalents à ces phénomènes. On voit, par conséquent, que les effets défavorables du retrait et du tassement d'appui accidentels dans des constructions en béton sont considérablement atténués par le fluage du béton.

Cas particulier important : Dans le cas simple où l'on donne brusquement, à l'instant τ , des déplacements d'appui connus à une structure viscoélastique non chargée, cette structure prend brusquement une déformation fixe. Les contraintes en tout point et les réactions hyperstatiques éventuelles prennent brusquement les valeurs qui correspondent à la structure parfaitement élastique de référence et décroissent ensuite au fil du temps selon la loi de relaxation valable en traction simple.

$$\begin{array}{c} x \\ x \quad x \end{array}$$

Pour la généralisation de ces principes aux corps continus gouvernés simultanément par les deux lois de fluage [13], nous renvoyons à la littérature (cf. par ex. [20]).

La grande importance des principes de correspondance résulte du fait qu'ils permettent une appréciation plus réaliste de l'effet sur les structures en béton des tassements d'appui, variations thermiques, etc...

Il est clair que de nombreux problèmes relatifs à l'effet du fluage sur les constructions en béton ne peuvent se réduire à l'emploi pur et simple des principes de correspondance. En employant des méthodes pas à pas, on peut écrire des programmes pour ordinateurs qui résolvent les problèmes les plus complexes. Zienkiewicz [26] a montré comment, par la technique des éléments finis, on peut ainsi aborder des problèmes de pièces planes, plaques fléchies, et même des pièces des formes les plus complexes telles que barrages-voûtes et les enveloppes de réacteurs nucléaires en béton précontraint. On peut donc affirmer qu'à l'heure actuelle, en y mettant le prix en programmation et consommation d'heures ordinateurs, on peut résoudre à peu près n'importe quel problème dès que les lois fondamentales ont été formulées. On ne saurait cependant mettre trop les ingénieurs en garde contre le caractère illusoire des résultats de calculs complexes, basés sur des méthodes mathématiques correctes, mais dont les équations de départ (c'est-à-dire les équations constitutives du matériau) représentent mal le comportement physique du matériau.

2. STRUCTURES EN ACIER.

2.1. Ossatures.

L'analyse limite plastique décrite en 1.2. suppose que ni la faiblesse des assemblages ni l'instabilité élastique ou élasto-plastique des éléments de la structure ne viennent limiter la force portante à une valeur inférieure à P_0 . Les règles à suivre pour qu'il en soit ainsi ont été établies à la suite de très importants travaux sur ces sujets, surtout entre 1945 et 1965 [29] ..

On dispose donc actuellement d'une doctrine pratiquement achevée pour les structures en acier, sanctionnée par plusieurs normes [30] [31] [32] et permettant l'établissement des projets jusque dans leurs détails [6] , [33] [34] . Elle s'applique au moins aux deux principaux aciers de construction (A 37 et A 52), qui possèdent un palier d'étirage suffisant.

Quand certains éléments de la structure ne peuvent être considérés sans danger comme parfaitement plastiques (cordons de soudure ou boulons d'un assemblage) on est conduit à n'admettre qu'une redistribution limitée des sollicitations internes entre ces éléments, selon des règles qui restent encore à perfectionner [35].

Sous chargement statique à un paramètre, une ossature métallique correctement dimensionnée par le calcul plastique ne présentera une rupture qu'après très grandes déformations, loin au delà de la formation du mécanisme. Au contraire, si les charges varient indépendamment entre des bornes, on peut craindre une accumulation des déformations plastiques ou même une rupture par épuisement de la ductilité. Le calcul de la charge de stabilisation (shake-down load), prescrit par certaines normes [32], n'est alors même pas suffisant car il faudrait savoir au prix de quelle déformation permanente elle est obtenue. Par contre, dans des cas où le nombre de cycles de chargement prévu est faible, et certaines déformations permanentes permises, une charge de non stabilisation pourrait être prise comme limite. On est ici à la frontière du problème de la fatigue plastique des structures, où presque tout reste à faire.

Le calcul des ossatures en acier à l'état limite plastique apparaît ainsi comme encore perfectible dans certains points de détail et demandant un développement vers le calcul à la fatigue plastique. Il n'en reste pas moins qu'il constitue, dans le cadre où il est applicable, une méthode en bon accord avec les faits expérimentaux, suffisamment simple à employer, et plus réaliste que le calcul élastique qui se réfère à un état limite (de première plastification) dénué de sens physique réel et généralement hors d'atteinte du calcul (présence de contraintes initiales de laminage, soudage, etc...).

Le calcul plastique permet d'uniformiser la sécurité des structures isostatiques et hyperstatiques vis-à-vis d'un état limite réel (ruine par mécanisme). Pourtant, il conduit en général à un dimensionnement plus économique des structures hyperstatiques formées de barres laminées. Il exploite en effet la possibilité de redistribution des moments lors d'une surcharge, qu'entraîne une pré-contrainte automatique après déchargement subséquent. Son influence croissante marque même les normes de nombreux pays [36] où il n'est même pas encore totalement accepté. Son application tend aussi à s'étendre à de plus nombreux types de structures et en particulier aux ossatures à étages multiples.

Plusieurs normes [30] [31] [32] admettent le calcul plastique des ossatures contreventées, quel que soit le nombre d'étages. Pour les ossatures non contreventées, la prise en compte des phénomènes du second ordre (effet P, δ) qui amènent l'instabilité élastoplastique d'ensemble avant la production de toutes les rotules de la théorie plastique simple, fait que le dimensionnement de ces ossatures n'est pas encore entré dans les Normes. Il permet une recherche directe de la structure de poids minimum [6], éventuellement par programmation linéaire. Il s'inscrit dans le cadre d'une doctrine générale de calcul des constructions métalliques vis-à-vis des différents états limites que ces constructions peuvent présenter [9].

2.2. Plaques et coques.

Le calcul à l'état limite plastique de flexion des plaques en acier est très développé [7] [60]; cependant il n'a de sens physique que pour des plaques relativement épaisses. Si μ est la minceur de la plaque, rapport de la "portée caractéristique" (diamètre d'une plaque circulaire, petit côté d'une plaque rectangulaire) à l'épaisseur, il semble [7], [38] que l'on doive se limiter à $\mu < 40$.

Quand $\mu > 40$, les efforts de membrane dus à la déformation élasto-plastique, sont prédominants (ils sont d'ailleurs déjà importants en régime purement élastique dès que la charge devient assez grande). La force portante doit donc s'évaluer par une théorie de plaque-membrane élasto-plastique [39] [40] ou plus simplement par une analyse plastique en membrane pure, de forme à priori inconnue, [7]. Cette force portante est, en général, continûment croissante avec la déformation plastique et n'est limitée que par celle ci.

Cette influence des changements de forme, pré et post-limite, est moins grande dans de nombreux cas de coques de révolution [7], mais risque de reprendre vigueur dans les éléments de couverture, où l'instabilité élastique peut être prépondérante.

3. STRUCTURES EN BETON.

3.1. Introduction.

On se bornera dans ce qui suit à examiner les structures en béton armé ou précontraint. Le matériau béton simple peut être considéré comme un matériau semi-raide, qui manifeste au cours du temps les phénomènes de retrait et de fluage.

Tout d'abord, une pièce quelconque faite en béton de ciment, libre de se déformer, et placée dans une atmosphère non saturée d'humidité subit au cours du temps un raccourcissement triaxial appelé retrait. Ce phénomène est indépendant de l'état de contrainte. De plus, une pièce de béton soumise de façon permanente à l'action de forces extérieures subit, outre une déformation élastique ou élasto-plastique instantanée, une déformation différée partiellement irréversible appelée fluage. Ces phénomènes ont été étudiés extensivement au cours des toutes dernières années.

3.1.1. Le retrait du béton armé.

D'après les Recommandations du Comité Mixte CEB-FIP, la dilatation finale de retrait ϵ_r d'une pièce en béton armé peut être déterminée par la relation :

$$\epsilon_r = \psi \alpha_r \beta_r (1 - 0,1 \bar{\omega}_0)$$

où :

ψ est le retrait final du béton non armé, dépendant de l'humidité relative du milieu de conservation ;

α_r est un coefficient traduisant l'influence de la plus petite dimension de la pièce. Plus cette dimension est faible, plus le retrait est important ; α_r dépend du diamètre moyen de la section droite de la pièce, égal à $2 \Omega / l$, où Ω est l'aire de la section et l son périmètre ;

β_r est un coefficient dépendant de la composition du béton et principalement du rapport eau/ciment et du dosage en ciment ;

$\bar{\omega}_0$ est le pourcentage géométrique d'armatures longitudinales de la pièce.

Tous ces coefficients sont définis dans les Recommandations susdites par des courbes expérimentales

3.1.2. Le fluage du béton armé ou précontraint.

Comme le retrait, le fluage d'une pièce en béton armé ou précontraint dépend principalement des trois variables ci-après : conditions climatiques - dimensions de la pièce - composition du béton. Le Comité Mixte FIP-CEB propose une relation permettant de calculer en fonction du temps la dilatation totale d'une fibre due à une contrainte unitaire, relation dans laquelle interviennent divers coefficients expérimentaux traduisant l'effet des variables ci-dessus.

Il est admis par la généralité des auteurs que la dilatation en un point est proportionnelle à la contrainte appliquée en ce point ; on peut donc appliquer aux structures en béton armé ou précontraint la théorie des corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge (cf § 1.3.).

En tenant compte du fluage éventuel des câbles de précontrainte, il est donc possible de prévoir le comportement d'un ouvrage en béton précontraint sollicité par des postcontraintes appliquées à des temps successifs, comme c'est le cas pour les ponts construits en encorbellement ou par voussoirs préfabriqués. Evidemment, il faut tenir compte également du retrait du béton et du fluage des câbles de précontrainte.

Un travail de Fin d'Etudes exécuté par un des étudiants de la section des Constructions de l'Université de Liège, sous la direction du professeur R. Baus, montre qu'il est possible, moyennant des calculs à la portée des bureaux d'études, d'arriver à des prédictions numériques concernant :

- a) l'évolution dans le temps de la flèche d'une travée d'un pont continu ;
- b) la variation dans le temps des moments dits "parasitaires" par feu le professeur Magnel - et de montrer que ces moments croissent avec le temps d'une manière non négligeable, contrairement à la théorie élastique qui les suppose constants ;
- c) l'importance de l'effet de la relaxation des armatures sur les pertes différées de précontrainte, qui est sous-estimée en pratique.

Par ailleurs, il faut veiller, pour les pièces comprimées soumises à des charges de longue durée, à prendre en considération le flambement par fluage. La théorie des déformations progressives d'une pièce chargée axialement obéissant au modèle viscoélastique $P \sigma = Q \epsilon$ du § 1.3. et présentant une déformée initiale quelconque a été donnée par Hilton [27]. Il reste évidemment à l'ingénieur à tirer parti de cette théorie en définissant un état limite pour la pièce.

3.1.3. Les propriétés plastiques des pièces en béton armé ou précontraint.

Le béton de ciment lui-même étant d'autant plus raide qu'il est plus âgé, la plasticité d'une pièce en béton armé ou précontraint ne provient que de l'acier qu'on y a placé et dépend essentiellement :

- a) du pourcentage d'armature ;
- b) de la limite élastique de l'acier utilisé ;
- c) du caractère (passif, précontraint, ou mixte) de l'armature ;
- e) de la résistance du béton à la compression ;
- d) de la ductilité supplémentaire éventuelle provenant de la présence d'une armature comprimée et d'étriers [51] [55].

Il en résulte que la ductilité de la pièce en question est essentiellement variable d'une pièce à l'autre et éventuellement, pour une même pièce, d'une section droite à l'autre.

3.2. Dimensionnement non-linéaire des ossatures formées de barres en béton armé ou précontraint.

3.2.1. Introduction.

Le problème du dimensionnement à la ruine a donné lieu à un nombre de publications dépassant largement la centaine. C'est pourquoi nous ne pouvons en donner qu'une bibliographie très partielle et renvoyer le lecteur, entre autres, au Symposium d'Ankara du C.E.B. 1964 et au Symposium de Miami de l'A.C.I.-A.S.C.E.

Idéalement, on devrait, dans le dimensionnement d'une structure soumise à un certain chargement, considérer plusieurs stades de ruine de plus en plus sévères et de moins en moins probables [53]. Pour du béton armé travaillant essentiellement en flexion, ces stades pourraient être le début de

1. la fissuration fine (d'habitude précédant la plastification de l'acier) ;
2. la fissuration large (d'habitude après plastification de l'acier) et la déformation excessive ;
3. l'écrasement et l'épaufrage du béton ;
4. la ruine locale ;
5. la ruine générale par écroulement de la structure.

C'est pourquoi Sawyer [53] considère que, idéalement, le dimensionnement est une procédure complexe par laquelle on établit une corrélation entre les résistances de la structure aux différents stades cités ci-dessus et la probabilité des charges correspondantes de façon à minimiser le coût total, y compris le coût initial et les valeurs des pertes provenant des divers états de ruine.

Le dimensionnement élastique linéaire et le dimensionnement à la ruine ne sont que des aspects limités de ce problème général.

Comme il semble impossible d'appliquer pratiquement la procédure ci-dessus, on doit la simplifier arbitrairement. A ce point de vue, les positions du Comité Européen du Béton [9] et celles exprimées par Sawyer [54] au Symposium de Miami sur le Comportement inélastique du Béton Armé sont les mêmes, à savoir que le dimensionnement du béton armé hyperstatique devrait être basé sur deux stades principaux de ruine :

- 1) le stade de ruine par fissuration large ;
- 2) le stade de ruine par écrasement et épaufrage du béton.

La structure doit être étudiée dans le premier stade pour garantir une bonne serviciabilité sous les conditions de service. L'étude dans le second stade, de son côté, montrera sa résistance effective à une surcharge.

3.2.2. Analyse du stade largement fissuré.

L'opinion la plus répandue est que le premier stade peut être analysé sur la base de la théorie élastique. Cependant, Macchi [49], [50] a montré théoriquement et expérimentalement que la redistribution des efforts intérieurs commence à l'apparition de la première fissure et que son effet est déjà important sous la charge de service. Cette redistribution existe donc aussi si la structure est dimensionnée pour les moments fléchissants prédits pour la théorie élastique ; par conséquent, dans ce cas, son effet est défavorable.

3.2.3. Analyse du stade ultime.

Pour ce qui concerne le second stade de ruine, de grandes divergences existent parmi les chercheurs en ce qui concerne la forme de la courbe moment-courbure ou moment rotation à utiliser comme base de l'étude, et en ce qui concerne la meilleure méthode d'analyse.

Les calculs exécutés sur ordinateur par Ferry Borges et ses collaborateurs [47] en admettant la loi de conservation des sections planes d'où découle l'existence d'une loi moment-courbure, ont nettement mis en lumière le fait que, pour des structures à faible degré d'hyperstaticité, on peut compter sur la formation et la rotation plastique suffisante des rotules plastiques dans le cas de pièces ayant un pourcentage d'armature nettement inférieur au pourcentage critique, ces armatures étant faites d'acier doux. Dans ces conditions, le modèle élastique (ou rigide) parfaitement plastique du § 1.2. peut s'appliquer de façon très satisfaisante.

Au fur et à mesure que le pourcentage d'armature et la limite élastique de l'acier utilisé augmentent, la capacité de rotation plastique des rotules diminue, pour éventuellement disparaître totalement (rupture par insuffisance du béton), et avec elle, le bénéfice dû à la redistribution des moments fléchissants.

Selon un travail non publié, ce problème complexe d'analyse peut se formuler comme un problème de programmation mathématique et être résolu sur ordinateur par les méthodes mathématiques correspondantes. On peut, dans ce cas, tenir compte des variations des propriétés du béton armé d'une section à l'autre et des différents états limites qui peuvent être atteints.

3.2.4. Procédures de dimensionnement.

Notons immédiatement une différence essentielle entre les ossatures en acier et en béton : dans les secondes, il est possible de faire varier les propriétés de résistance et de ductilité d'une section à l'autre en variant le pourcentage d'armature, le frettage par étriers, etc...

Les trois conditions fondamentales qui doivent être satisfaites dans un dimensionnement limite concret des structures en béton armé ou précontraint sont :

- 1) l'équilibre limite ;
- 2) la compatibilité des rotations ;
- 3) la serviciabilité.

Celà étant, on peut distinguer deux grandes catégories de méthodes de dimensionnement :

Première catégorie : les méthodes de dimensionnement proprement dites ; où l'accent est mis sur l'optimisation. Dans cette catégorie rentrent les méthodes de A.L.L. Baker [41], [42], [45] de Ferry Borges et collaborateurs [47], de Guyon [45], de Macchi [45], [49], [50], de Sawyer [54], etc... La place nous manque même pour présenter ces diverses méthodes. Bornons-nous donc à dépeindre les grandes lignes de la méthode de A.L.L. Baker, qui est une des premières et des mieux connues :

Baker considère qu'une structure doit être dimensionnée pour avoir une marge de sécurité prédéterminée contre la ruine et, dans ce but, développe une technique simplifiée. De plus, il faut éviter une fissuration et des déformations excessives sous la charge de service, de sorte qu'on a également besoin d'une solution élastique ; cependant, cette solution ne doit être qu'approchée, parce qu'elle ne sert qu'à contrôler que la fissuration n'est pas excessive. Les deux analyses mentionnées ci-dessus peuvent se faire en utilisant des versions simplifiées des équations de compatibilité de la méthode des forces (Müller-Buslan) généralisées pour les déformations non linéaires.

Deuxième catégorie : les méthodes de dimensionnement optimal. Ces méthodes, dues surtout à Cohn [43] [44] et Petcu [51], ont évolué fortement au cours des années et la terminologie employée par leurs inventeurs a également varié.

Les recherches récentes ont révélé, ainsi qu'on l'a déjà dit (fin § 3.2.3) la possibilité de formuler le problème de dimensionnement en sorte que les solutions soient optimales au sens mathématique, c'est-à-dire qu'elles minimisent des "fonctions économiques" adéquates qui sont le volume de béton, d'armatures, ou mieux le coût total de la structure.

Théoriquement, il est possible à présent [44], de formuler (et dans des cas simples) de résoudre des problèmes en satisfaisant simultanément aux conditions d'équilibre limite de serviceabilité, de compatibilité élastique, de limitation des rotations maxima dans les rotules plastiques, et à un critère d'optimalité. Cependant, pour l'application pratique, il paraît plus simple de ne considérer au départ que les conditions d'équilibre limite et de serviceabilité [43], [43 bis], [43 ter], [51].

3.2.5. Situation actuelle (1970).

La pratique actuelle du calcul du béton armé à travers le monde ne fait généralement intervenir qu'un seul contrôle de résistance au lieu du double contrôle défini au § 3.2.1. ; elle est donc insatisfaisante. De plus, il y a de grandes variations dans les méthodes employées. En effet, dans certains pays tels que l'U.R.S.S., on utilise des relations non linéaires, tant pour déterminer la distribution des moments fléchissants que pour déterminer les dimensions des diverses sections droites [46] [48]. Au Portugal, les Normes permettant un certain degré de redistribution découlent des études de Ferry Borges et collaborateurs commentées au § 3.2.3. Dans d'autres pays, on détermine la distribution des moments fléchissants par la théorie élastique, tandis que le dimensionnement organique des sections est basé sur leur résistance ultime. Il est donc clair qu'à travers le monde, les ingénieurs du génie civil ont des opinions très divergentes quant à la manière de tenir compte de l'inélasticité des structures en béton dans leur dimensionnement.

3.2.6. Conclusions.

Il semble qu'après une intense activité de recherche déployée entre 1955 et 1965, le sujet en discussion soit un peu en veilleuse actuellement. Cela provient à notre avis de la résistance des ingénieurs à exploiter des phénomènes inélastiques dans les barres fléchies pour des raisons fondamentales de sécurité et de durabilité de la structure.

Ce point de vue a été clairement mis en évidence en 1964 par Winter, dans sa discussion introductive présentée au Symposium de Miami [56]. Quelques uns des arguments du professeur Winter sont résumés ci-après :

1) Il y a une différence fondamentale entre le comportement de l'acier, matériau ductile écrouissable, et du béton, matériau semi-raide désécrouissable, dans lequel les déformations plastiques sont dues à une micro-fissuration progressive. Cette différence a d'importantes conséquences sur le comportement inélastique des structures faites de ces deux matériaux :

a) Quand une structure continue soudée en acier est chargée jusqu'au point où certaines rotules plastiques se sont développées mais que le stade de ruine n'est pas encore atteint, aucun dommage visible n'a été produit.

Au contraire, quand des soi-disant rotules plastiques se sont développées en béton armé, une fissuration par traction absolument excessive a déjà eu lieu dans les rotules "underreinforced" (c'est-à-dire de pourcentage inférieur au pourcentage critique) ou bien des écrasements et épaufréments inadmissibles ont eu lieu dans des rotules à pourcentage élevé d'armatures ;

b) Si une structure en acier partiellement plastifiée est déchargée, puis rechargée dans le même sens, on constate que son domaine de comportement élastique s'est agrandi à cause des moments fléchissants résiduels favorables provoqués par le premier cycle de charge. Dans le cas du béton armé, les informations concernant le comportement après rechargement de structures qui ont été partiellement plastifiées puis déchargées, semblent rares. Pour de faibles pourcentages d'armatures, le comportement est probablement semblable à celui de structures en acier. Pour de plus grands pourcentages, le développement des rotules exige d'utiliser la branche descendante de la courbe moment-rotation. Or, à ce moment, l'expérience montre que la structure est une semi-ruine. On peut accepter de baser le dimensionnement sur un tel état de semi-ruine dans des situations extrêmes telles que violents séismes ou souffle de bombes nucléaires, mais un état de semi-ruine peut difficilement servir de critère de dimensionnement pour les structures civiles habituelles.

- 2) Vu la capacité de rotation limitée du béton armé, si le dimensionnement des structures en béton armé devait être basé sur la charge ultime calculée en utilisant pleinement cette capacité, il n'y aurait plus de ductilité additionnelle disponible pour absorber les effets des tassements d'appui, du retrait et des effets thermiques, etc ...
- 3) La ductilité d'une structure en béton armé décroît rapidement quand la limite élastique de l'armature augmente. Ainsi, il apparaît que le dimensionnement inélastique est économiquement prometteur principalement pour les aciers doux. D'autre part, tous les développements de ces dix dernières années, aux Etats-Unis comme en Europe, démontrent la supériorité économique des armatures en acier à haute résistance. Nous arrivons ainsi à la situation paradoxale qu'une nouvelle méthode (le dimensionnement inélastique) est présentée, qui promet quelque bénéfice économique précisément pour les nuances douces d'acier qui se voient rapidement remplacées par de plus économiques.

3.3. Plaques et coques.

Les plaques en béton armé sont, avec les ossatures en acier, le domaine dans lequel, à l'heure actuelle, le calcul plastique (dit ici aussi "calcul à la rupture") s'applique le mieux. C'est d'ailleurs au congrès de l'AIPC (Zurich 1932) que fut présenté un des premiers mémoires sur ce sujet [57]. Bien que le critère de plasticité le plus généralement admis reste l'objet de certaines discussions [58][59], les applications auxquelles il conduit ont obtenu une bonne vérification expérimentale [60][61]. Les dalles en béton armé sont en effet très généralement peu armées et suivent donc bien le schéma parfaitement plastique. Les efforts tranchants y sont négligeables, sauf dans le problème du poinçonnement. Même l'analyse purement cinématique, donnant une charge limite erronée par excès, est très souvent acceptée comme suffisante compte tenu de divers effets stabilisants et à condition de prendre à son égard une sécurité adéquate. Cependant, le progrès est sans aucun doute dans le développement des solutions statiques, grâce auxquelles on peut distribuer au mieux les armatures [7][61]. Pour des plaques fabriquées en série, on peut même rechercher l'armature de poids minimum [62], et assurer la rigidité en service par une épaisseur suffisante de la plaque. De manière plus générale, on peut, dans le dimensionnement plastique, imposer une optimisation (prix minimum par exemple) sous diverses contraintes (charge limite minimum assurée, flèche en service limitée, etc ...).

Quoi qu'il en soit, l'analyse limite cinématique des plaques est actuellement d'un emploi courant en pratique dans de multiples pays, où elle est accompagnée de règles empiriques permettant de pallier l'absence d'analyse statique.

Il n'en est pas de même de l'analyse limite des coques (couvertures, réservoirs, etc...) où la recherche, théorique [63] et expérimentale [64], [65], en est encore à ses débuts. L'importance du sujet est cependant évidente, car le "mécanisme plastique" est bien un des plus fréquents modes de ruine d'une coque en béton armé. Un autre mode tout aussi important est le voilement par fluage, qui a entraîné plusieurs écroulements. A notre avis, la solution la plus directe de ce problème est par un essai sur modèle dont le matériau doit représenter aussi fidèlement que possible le matériau réel. La voie théorique exigerait l'analyse pas à pas de l'équilibre des formes successives en lesquelles la coque initiale se transforme par le fluage. Ceci impose bien entendu le recours à un ordinateur de grande puissance.

4. STRUCTURES MIXTES ACIER - BETON.

La littérature relative aux structures mixtes, dont l'exemple principal est le pont à poutres métalliques et tablier en béton, est bien connue des ingénieurs des constructions. Elle débute avec les recherches de Dischinger [66] et a trouvé un développement plus ou moins raffiné dans les ouvrages de Sattler [67], Fritz [68] et d'innombrables articles de revue.

Les calculs de dimensionnement sont assez complexes et sont souvent, à l'heure actuelle, effectués sur ordinateur. Le modèle rhéologique adopté pour le béton est généralement le modèle simple de Kelvin (Fig. 1) qui en fluage simple se déforme suivant la loi exponentielle bien connue.

L'objection principale à ces méthodes est que la prédiction du coefficient de fluage est si complexe et si incertaine (cf. [19]) que la signification des calculs est quelque peu illusoire. Pour ces raisons, il semble que, dans les pays non de langue allemande, de nombreux bureaux d'études se contentent toujours de tenir compte du fluage en jouant sur la valeur du coefficient d'équivalence $m = E_a/E_b$. Si cette méthode nous paraît insuffisante, par contre l'emploi des méthodes raffinées ne se justifiera pleinement que quand on sera mieux armé pour prédire les propriétés rhéologiques effectives des éléments de béton qu'il est prévu de mettre en oeuvre. Pour le présent, il faut signaler l'excellent petit livre de Birkenmaier [69] qui, en décomposant l'effet du fluage en un petit nombre d'intervalles de temps - souvent un ou deux suffisent - permet d'obtenir de façon très simple des résultats suffisamment précis. La méthode de Birkenmaier donne toute la précision que l'on désire - il suffit d'augmenter le nombre d'intervalles Δt - et est réellement conçue dans l'esprit "ordinateur".

En conclusion de ce paragraphe, il faut attirer l'attention sur la nécessité, sous peine de s'exposer à des déboires, de tenir compte du fluage du béton si l'on veut combattre la fissuration de la dalle en béton par dénivèlement des appuis intérieurs dans les ponts continus ou par précontrainte longitudinale des tronçons de la dalle situés au droit de ces appuis.

5. CONCLUSIONS.

5.1. Influence de la théorie de la plasticité sur la pensée de l'ingénieur constructeur.

L'introduction du calcul plastique en théorie des constructions a établi clairement la distinction entre

- 1) le groupe des lois de statique ;
- 2) le groupe des lois de cinématique ;
- 3) le groupe des lois de comportement du matériau,

auparavant très mêlées dans le traitement du seul corps élastique. Il a ouvert la voie vers l'étude d'autres comportements (modèle visco-élastique). La Résistance des Matériaux et la Théorie des Structures sont ainsi devenues des applications de la Mécanique des Solides à l'art de l'ingénieur constructeur.

Jusqu'en 1940, la seule doctrine enseignée et appliquée était la théorie élastique, pessimiste quant à la capacité portante de la structure et en désaccord avec les règles pratiques de la construction métallique (en particulier dans le calcul des assemblages). Le théorème statique, sous sa forme la plus générale (cf [7]) était employé intuitivement par les ingénieurs depuis un siècle. Il a donné une formulation précise à la règle empirique d'après laquelle il faut dimensionner les pièces de manière à trouver un chemin pour les efforts sans violer la capacité de résistance du matériau. Le théorème statique nous apprend que cette règle n'est valable que pour un matériau de ductilité infinie. D'où :

- 1) l'accent mis sur la ductilité et la nécessité de la contrôler soigneusement lors de la réception des matériaux ;
- 2) l'accent mis sur la nécessité de préserver la ductilité pendant la fabrication (exemple : interdiction des trous poinçonnés) ;
- 3) l'accent mis sur l'obligation de restaurer la ductilité initiale si elle a été diminuée par le processus de fabrication (recuit après cintrage, après soudage, pour détendre les contraintes résiduelles).

La doctrine plastique a déteint sur la doctrine classique (dite des contraintes admissibles) en tendant à faire adopter - dans le cas des charpentes soumises à des charges quasi-statiques - une conception plus simple des assemblages et un mode de calcul purement statique ainsi qu'un coefficient de sécurité porté sur les charges plutôt que sur les contraintes (règles C.M. 1966), ce qui est obligatoire en cas de comportement non linéaire.

Alors que l'ingénieur de 1940 n'avait à sa disposition qu'une théorie pessimiste en laquelle il n'avait qu'une foi relative, l'ingénieur de 1970 a à sa disposition plusieurs modèles mathématiques, dont deux particulièrement développés vers les applications :

- le modèle élastique (pessimiste)
- le modèle parfaitement plastique (souvent optimiste quant à la ductilité, parfois encore pessimiste quant à la résistance).

Comme nous l'avons dit dans notre communication au Congrès de Rio de Janeiro [9], il reste à élaborer une "doctrine-cadre" générale dans laquelle chacun de ces modèles entrerait, et à développer d'autres théories particulières entrant dans ce cadre (visco-élasticité appliquée, fatigue plastique et avec fluage etc...).

La clef de l'élaboration d'une telle "doctrine-cadre" réside dans la classification des processus de ruine en fonction d'une part du comportement mécanique du matériau et d'autre part de la variabilité des charges dans le temps.

Devant la puissance des méthodes de la programmation mathématique et leur adaptation au calcul sur ordinateur, et devant la découverte de leur applicabilité au calcul des structures, il importe de faire un effort considérable vers une meilleure connaissance des lois de comportement des matériaux et des modes d'application des charges, afin de ne pas perdre dans l'incertitude des données de base tout le progrès réalisé dans les méthodes de calcul.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] De Kazinczy, G., Expériences sur des poutres encastées (en hongrois) (Betonszemle, vol. 2, p. 68, 1914).
- [2] Kist, N.C., Leidt een sterkteberekening, die uitgaat van de evenredigheid van kracht en vormverandering, tot een goede constructie van ijzeren bruggen en gebouwen ? Dissertation inaugurale, Ecole polytechnique de Delft (1917).
- [3] Gvozdev, A. A., La détermination de la valeur de la charge de ruine pour les systèmes hyperstatiques subissant des déformations plastiques (Compte rendu de la Conférence sur les déformations plastiques, décembre 1936, p. 19, Adademia Nauk, U.S.S.R. Traduction par Haythornthwaite, R. M. dans Int. Journ. Mech. Sci., vol. 1, p. 322, 1960).
- [4] Hill, R., On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield-point (Phil. Mag., vol. 42, pp. 868-875, 1951).
- [5] Drucker, D. C., Prager, W. et Greenberg, H. J., Extended limit design theorems for continuous media, Quart. Appl. Math., Vol. 9, pp. 381-389, 1952.
- [6] Massonnet, Ch. et Save, M., Calcul plastique des Constructions, Vol. 1, structures à un paramètre, deuxième édition française, édit. CBLIA, 47, rue Montoyer, Bruxelles, et les traductions de la première édition : en anglais : éd. Blaisdell Publishing Co., 1965 - en espagnol : éd. Montaner y Simon, Barcelone 1966 - en italien : éd. N. Zanichelli, Bologne, 1967.
- [7] Massonnet, Ch. et Save, M., Calcul plastique des Constructions, Vol. 2, structures spatiales, 2ème édition, 1970, éd. CBLIA, Bruxelles, et les traductions de la 1ère édition : en espagnol : Montaner y Simon, Barcelone 1966 - en italien : éd. N. Zanichelli, Bologne, 1968.
- [8] Hodge, P. G., Plastic Analysis of Structures, Mc. Graw Hill, New-York, 1959.
- [9] Comité Européen du Béton : Recommandations pratiques à l'usage des constructeurs, Bulletin n° 39, 1963.
- [10] Gavarini, C., Concezione probabilistica del Calcolo a Rottura, Giornale del Genio Civile, fascicule 8, août 1969.
- [11] Save, M. A. and Shield, R. T., "Minimum-weight design of sandwich shells subjected to fixed and moving loads", Proc. 11 th Int. Congr. Appl. Mech., Munich 1964, pp. 341-349, H. Görtler ed., Springer 1966.
- [11 bis] Gavarini, C., I teoremi fondamentali del calcolo a Rottura e la dualità in programmazione lineare, Ingegneria Civile, N° 18, 1966.
- [12] Heyman, J., Automatic plastic analysis of steel framed structures under fixed and varying loads, Proc. Inst. Civ. Eng., vol. 12, p. 39, 1959.
- [13] Heyman, J., and Prager, W., Automatic minimum weight design of steel frames, Journ. Franklin Inst. vol. 266, pp. 339-364, 1952.

- [14] Kalker, J.J., Automatic minimum weight design of steel frames on the IBM 704 Computer, Rapport IBM 2038/3, Brown University, September 1958.
- [15] Neal, B.G. et Symonds, P.S., The rapid calculation of the plastic collapse load for a framed structure, Proc. Inst. Civ. Engrs, London, pp. 68-100, 1952.
- [16] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., An automatic approach to the analysis of plastic frames under fixed and variable loading, Solid. Mech. Div., Univ. of Waterloo, Report N°22, Oct. 1969.
- [17] Glanville, W.H., Building Research Paper N° 12, p. 111, 1930.
- [18] Davis, R. H., Journal Amer. Concrete Institute N° 7, 1932.
- [19] Wallo, E.M. et Kesler, C.E., Prediction of creep in structural concrete. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin N° 498, 65 pp. , 1968.
- [20] Flugge, W.:Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Co., 1967.
- [21] Massonnet, Ch., Résistance des Matériaux, Vol. II, 2ème édition, 1970, Thone, Liège, et Dunod, Paris, éd.
- [22] Flugge, W., Editeur : Handbook of Engineering Mechanics, Mc Graw Hill Co., 1962 (voir le chapitre 53, intitulé : Viscoelasticity, 22 pp. rédigé par E.H. Lee).
- [23] Aroutiounian, N.Kh., Applications de la théorie du Fluage, Eyrolles, 1957.
- [24] Alfrey, T.Jr., Quart. Applied Math., Vol.2, pp. 113-119, 1944 et Mechanical Behavior of High Polymers, Interscience Ed., New-York, 1948.
- [25] Mc. Henry, D., Proc. Amer. Soc. Test. Mater., Vol. 43, p. 1069, 1943.
- [26] Zienkiewicz, O.C., Watson, M; et King, I.P., A numerical method of Visco-elastic stress analysis, Inter. Jl. Mech. Sci. Vol. 10 pp. 807-827, 1968.
- [27] Hilton, H., Journ. Aero. Sci., Vol. 19, pp. 844-846, 1952.
- [28] Levi, F. et Pizzetti, G., Fluage, Plasticité, Précontrainte, Paris, Dunod, 1951.
- [29] Nombreuses publications de l'Université Lehigh et leur synthèse intitulée "Commentary on Plastic Design in steel"
- [30] British Standard 449, 1948.
- [31] Specifications for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings, Part 2, American Institute of Steel Construction, 1969.
- [32] Addendum "Calcul en Plasticité" à la norme belge N.B.N. 1 "Charpentes en acier", Institut Belge de Normalisation, 29, avenue de la Brabançonne, Bruxelles 1040, 1961.

- [33] Baker, J.F., Horne, M.R. et Heyman, J., The Steel skeleton, Vol 2. : Plastic behaviour and design, Cambridge University Press, 1956.
- [34] Beedle, L.S., Plastic design of steel frames, J. Wiley, New-York, 1958.
- [35] Guiaux, P. et Peschon, E., Charpentes en acier. Calcul des assemblages soudés soumis à une sollicitation statique. Revue (belge) de la Soudure, Nos. 1, 2 et 3, Bruxelles, 1965.
- [36] Beedle, L.S., Recent developments in plastic design practice, Proc. ASCE, Journ. Struct. Div., Vol. ST9, pp. 1911-1937, 1969.
- [37] Massonnet, Ch. et Save, M., Reflexions sur une doctrine générale de calcul des Constructions Métalliques (VII^e Congrès de l'A.I.P.C., Rio de Janeiro, Rapport final, pp. 101-108, 1966).
- [38] Save, M.A., "Vérification expérimentale de l'analyse plastique des plaques et des coques en acier doux", (Experimental verification of plastic limit analysis of mild steel plates and shells), C.R.I.F. Report n° M.T. 21, February 1966, Fabrimétal, 21, rue des Drapiers, Brussels.
- [39] Massonnet, Ch., General theory of elasto-plastic membrane plates, pp. 443 à 471 du livre "Engineering Plasticity" Ed. J. Heyman et F.A. Leckie, Cambridge Univ. Press., 1968.
- [40] Capurso, M., Comportamento elasto-plastico delle piastre sottili metalliche nel campo dei grandi spostamenti, Costruzioni Metalliche, pp. 42-51, 1968.
- [41] Baker, A.L.L., General equations for frame analysis. Concrete and Constr. Eng., pp. 97-103, 1961.
- [42] Baker, A.L.L., Ultimate load design of reinforced concrete beams : a recapitulation and appraisal, Mém. A.I.P.C., Vol. 23, pp. 33-50, 1963.
- [43] Cohn, M.Z. Limit design of reinforced concrete frames, Journ. Struc. Div. ASCE, vol. 94, N° ST 10, pp. 2467-83, Oct. 1968.
- [43bis] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., Optimal design of reinforced concrete beams and frames, Rapport final, 8ème Congrès de l'A.I.P.C., New-York, pp. 215 à 226, Sept. 1968.
- [43ter] Cohn, M.Z. et Grierson, D.E., Further results on the equilibrium method of limit design, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada Report N° 15, Août 1969.
- [44] Grierson, D.E. et Cohn, M.Z., A general formulation of the optimal frame problem, Mémoire présenté au Second Congrès canadien de Mécanique Appliquée, Mai 1969, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario.
- [45] Comité Européen du Béton,
Bulletin N° 21, notes de A.L.L. Baker, G. Macchi et Y. Guyon.
Bulletin N° 30, note de A.L.L. Baker.
Bulletin N° 34, résumé des trois méthodes à la ruine développées par A.L.L. Baker, Y. Guyon et G. Macchi.

- [46] Instructions pour le calcul des structures hyperstatiques en béton armé en tenant compte de la redistribution des efforts (en russe)- Académie de la Construction et de l'Architecture de l'U.R.S.S., Moscou 1961, traduction française par le C.E.B.
- [47] Ferry Borges, Arga et Lima, J. Teixeira Coelho et Monteiro, V., résultats analytiques concernant le comportement non linéaire des structures en béton armé, Lab. Nat. de Génie Civil, Lisbonne, 12 pp. août 1964.
- [48] Gvozdev, A.A. et Dmitriev ; Calcul des structures en béton armé et pré-contraint selon la méthode des états limites utilisée en U.R.S.S.- Contribution à la Session du Comité Mixte FIP-CEB.
- [49] Macchi, G. Moment redistribution beyond elastic limit and at failure in prestressed concrete beams, P.C.I. Journal, pp 8-26, 1957.
- [50] Macchi, G. , Behaviour of reinforced concrete continuous beams designed according to the elastic distribution of moments, Miami Symposium, paper N° 6, 1964.
- [51] Petcu, V. Nombreuses publications dans des revues techniques roumaines et autres.
- [52] Rüschi, H. et Stöckl, S., L'influence des étriers et de l'armature comprimée sur le comportement de la zone comprimée de poutres en béton armé (en allemand) Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Ernst und Sohn, éd., Berlin, n° 148, 1963.
- [53] Sawyer, H.A., The status and potentialities of non linear design of concrete frames, Miami Symposium, paper n° 11, 1964.
- [54] Sawyer, H.A., Design of concrete frames for two failure stages, Miami Symposium, paper N° 18, 1964.
- [55] Siess, C.P. Load-moment curvature characteristics of reinforced concrete cross sections. Journal A.C.I., Juillet 1964.
- [56] Winter, G., Whether inelastic concrete design, Note introductive présentée au Symposium de Miami, 1964.
- [57] Johansen, K.W., Bruchmoment kreuzweise ^{bewehrten Platten.} Mémoire de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, 1er volume, Zurich 1932.
- [58] Baus, R. and Tolaccia, S., "Calcul à la rupture des dalles en béton armé et étude expérimentale du critère de rupture en flexion pure", (yield line theory and experimental investigation of the yield criterion of reinforced concrete slabs in pure bending). Ann. Inst. Tech. Bât. Trav. Pub., Paris, June 1963.
- [59] Lenschow, R.J. et Sozen, M.A., "A yield criterion for reinforced slabs" A.C.I. Journal, pp. 266-273, May 1967. Discussion of this paper to be published in the November 1967, ACI Journal.
- [60] Sawczuk, A. and Jaeger, T. "Grenztragfähigkeits- Theorie der Platten, Springer - Verlag, pp. 522, 1963.
- [61] Wood, R.H. "Plastic and elastic design of slabs and plates", London, Thames and Hudson, 1961.

- [62] Sacchi, G. et Save, M., Le problème du poids minimum d'armature des plaques en béton armé. Mém. AIPC, Vol. 29, II, pp. 157-166, 1969.
- [63] Olszak, W. and Sawczuk, A., Inelastic behaviour in shells", Noordhoff, Groningen, 1967.
- [64] Sawczuk, A. "On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells", Shell research, North-Holland Publ. Co. Amsterdam, pp. 217-231, 1961.
- [65] Bouma, A.L., Riel, A.C., Van Koten, H. and Beranek, W.J., Investigations on models of eleven cylindrical shells made of reinforced and prestressed concrete", Shell research, North-Holland Pub. Co. Amsterdam, pp.79-101, 1961.
- [66] Dischinger, Fr. "Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Bauingenieur 18, 1937, p. 487.
"Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Bauingenieur 20, 1939, p. 54.
- [67] Sattler, K. "Theorie der Verbund konstruktionen" Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1959.
- [68] Fritz, B. "Verbundträger", Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1961.
- [69] Birkenmaier, M. "Berechnung von Verbundkonstruktionen aus Beton und Stahl" Verlag Leemann, Zurich, 1969.

Post-Critical Behavior

Comportement post-critique

Überkritisches Verhalten

M.P. BIENIEK

Professor of Civil Engineering
Columbia University
New York

1. INTRODUCTION

The problem of post-critical behavior of structural elements and structures is not new. The load-carrying capacity of structures in the post-critical range has been attracting attention of structural engineers for many years, and it has been successfully utilized in many practical designs. The analysis of the post-critical behavior of structures has been an interesting and challenging task of applied mechanics; even very early works in the theories of bars, plates, and shells contain investigations of buckling and post-buckling states.

Thin-walled structures represent the area in which the post-critical behavior is undoubtedly of greatest importance. Numerous significant contributions on various aspects of thin-walled structures were presented at the previous congresses of IABSE. Most recently, the 8th Congress, held in New York in 1968, had a theme dealing exclusively with thin-walled structures [1]. The reports by Prof. Winter [2], Dr. Scalzi [3], and Prof. Massonnet [4] give very extensive and enlightening accounts of the status up to 1968. The discussion in the Final Report contains many original theoretical and practical developments. The comments by Prof. Beer [5]

emphasize the great potential of structures working in the post-critical range.

Consistent with the spirit of Theme I of the present Congress, this report will concentrate on the progress of the general theory, necessarily nonlinear, of the post-critical behavior of structures. The formulation of the problem, methods of solution, and recent results for various types of structures will be reviewed. An intensive effort of many researchers in the field of mechanics of solids and structural mechanics generated, especially in the past two decades, an immense amount of original and important contributions in the field of the post-critical behavior and the related nonlinear analysis of structures. This makes the writing of a report in this field an extremely difficult task, forcing certain selection of the presented topics. Here, the effects of large deformations, or geometrical nonlinearities, will be emphasized at the expense of the effects of the nonlinear material properties.

The scope of the problem of the post-critical behavior of structures can be defined by examining typical load deflection relations.

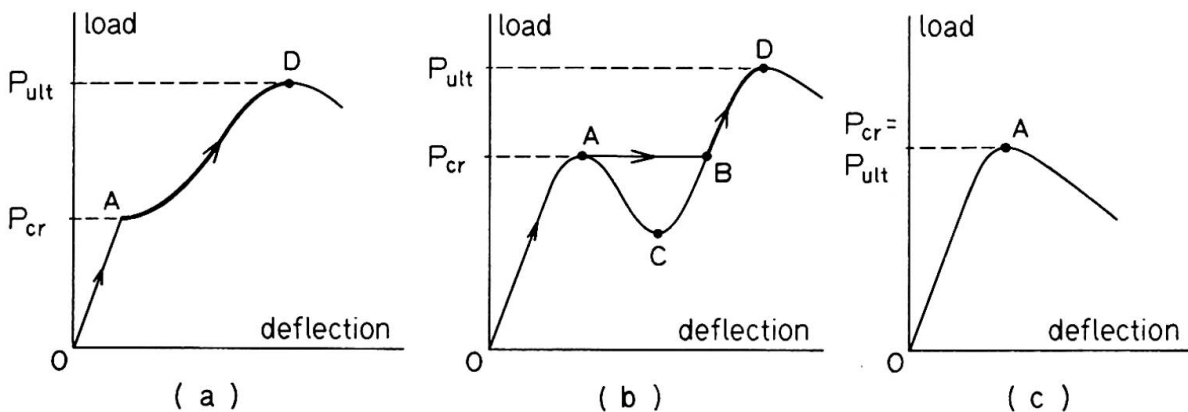


Fig. 1.

If a properly defined load parameter is plotted against a deflection component of the structure, a diagram of one of the types shown in Fig. 1 is usually observed. From the origin 0 to the point A, the structure is in the fundamental path of equili-

brium. At the point A, which is referred to as the first critical point, the path changes either by bifurcation buckling to A - D, Fig. 1a, or by snap buckling to B - D, Fig. 1b. Occasionally, no state of equilibrium exists for loadings above the critical point A (Fig. 1c). The point D in Figs. 1a and 1b represents the ultimate state, at which the structure fails by fracture, total buckling, or plastic flow. It is the path between the point A and the point D in Figs. 1a and 1b which corresponds to the post-critical state of the structure, and which is the main subject of this report.

An engineer's interest in the post-critical state of a structure is based on the fact that the ultimate load exceeds sometimes considerably the critical load, and the structure can be perfectly serviceable in the post-critical range. On the other hand, his caution in utilizing the post-critical loading capacity of the structure is also well founded, since frequently the deflections increase quite rapidly, and the deformations may become irreversible. The above factors justify a thorough investigation of the problem of the post-critical behavior.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

The equations describing the post-critical behavior of a structure cannot be based on the assumption of small displacements and small displacement gradients. The strain-displacement relations should include at least some of the second order terms, and the analysis of stress should take into account the effect of the deformed configuration. There are many excellent books and papers on the foundations of the nonlinear mechanics of solids. The current state, as well as the historical development, can be obtained from the works of F. D. Murnaghan [6], C. Truesdell [7], V. V. Novozhilov [8], [11], A. E. Green and W. Zerna [9], T. C. Doyle and J. L. Ericksen [10], C. Truesdell and R. A. Toupin [12], A. C. Eringen [13], L. I. Sedov [14], and M. A. Biot [15].

The following comments are made in order to clarify the posi-

tion of various special equations of structural mechanics within the general theory of continuous media. In the general theory, three types of coordinate systems are being used^{*}: (a) Material (or Lagrangean) coordinate system x , with x^A being the coordinates of a particle P_0 in the initial configuration of the body B_0 at the initial time t_0 ; (b) Spatial (Eulerian) coordinate system z , with z^k being the coordinates of the position P of the particle in the deformed, or current configuration B at time t ; (c) Convected coordinate system ξ , which deforms with the body in such a way that to the coordinates ξ^α corresponding to the subsequent positions P of a particle P_0 remain constant. For small, or "infinitesimal", deformations the distinction between different types of coordinate systems disappears. The problems of finite deformation in structural mechanics are usually formulated in the fixed material system x or in the convected system ξ , although it is very seldom that the choice of the method of description is stated explicitly. (Also, in many cases, these two descriptions are formally very similar).

If $u_A(x,t)$ are the components of the displacement vector in the system x , the components of the material strain tensor e_{AB} = in this system are

$$e_{AB} = \frac{1}{2}(u_{A|B} + u_{B|A} + u_{C|A}u^C_{|A}) \quad (2.1)$$

The components of the same tensor in the convected system ξ are

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u_{\gamma|\alpha}u^\gamma_{|\beta}) \quad (2.2)$$

where $u_\alpha(\xi,t)$ are the components of the displacement vector in the system ξ at P_0 ; the covariant differentiation in (2.2) is performed in the initial configuration, i.e. using the Christoffel symbols corresponding to the configuration of the system ξ at t_0 . If at t_0 the system ξ coincides with the system x , the values

^{*}) The subscripts and superscripts $A, B, C, \dots, k, l, m, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ assume values 1, 2, 3; repeated indices imply summation; partial differentiation with respect to a coordinate is denoted by a comma followed by the index of the coordinate; covariant differentiation with respect to a coordinate is denoted by a bar followed by the index of the coordinate.

of the corresponding components of e_{AB} and $e_{\alpha\beta}$ are identical. Frequently, the systems x and ξ at t_0 are orthogonal cartesian; the system ξ at t , however, becomes some curvilinear system, following deformation of the body.

The description of the state of stress in continuum mechanics is most frequently accomplished in terms of: (a) The spatial, or Cauchy, stress tensor associated with the position P in the deformed state and with the components p^{kl} in the fixed system z ; (b) The Kirchhoff two-point tensor t^{Al} , associated with the particle P_0 in the system x and with the position P in the system z ; (c) The material, or Piola-Kirchhoff, stress tensor s^{AB} , associated with the particle P_0 in the system x . The relations between these three tensors are

$$t^{Al} = J p^{kl} \frac{\partial x^A}{\partial z^k}, s^{AB} = J p^{kl} \frac{\partial x^A}{\partial z^k} \frac{\partial x^B}{\partial z^l} \quad (2.3)$$

where $J = dV/dV_0 = \rho_0/\rho$, with dV_0 and dV being the initial and the deformed volume elements, and ρ_0 and ρ , the initial and the current densities, respectively. In the convected coordinates ξ ,

$$s^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta} = J p^{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

If $\underline{p}_{(n)}$ is the stress vector referred to unit area in the deformed state and acting on the area element whose unit normal vector in the deformed state is \underline{n} , its components are

$$p_{(n)}^l = p^{kl} n_k \quad (2.5)$$

For the stress vector $\underline{s}_{(n)}$ referred to unit area in the initial state and acting on the area element whose unit normal vector in the initial state is \underline{n}_0 , we have the components in the z system

$$s_{(n)}^l = t^{Al} n_{0A} = s^{AB} \frac{\partial z^l}{\partial x^B} n_{0A} \quad (2.6)$$

In the absence of body forces, the equations of equilibrium in terms of the tensors p^{kl} and s^{AB} are

$$p^{kl} |_{|k} = 0, p^{kl} = p^{lk} \quad (2.7)$$

$$[s^{AB}(\delta_B^C + u^C|_B)]|_A = 0, \quad s^{AB} = s^{BA} \quad (2.8)$$

In the convected coordinate systems ξ , they read

$$p^{\alpha\beta}|_\alpha = 0, \quad p^{\alpha\beta} = p^{\beta\alpha} \quad (2.9)$$

$$[s^{\alpha\beta}(\zeta_\beta^\gamma + u^\gamma|_\alpha)]|_\alpha = 0, \quad s^{\alpha\beta} = s^{\beta\alpha} \quad (2.10)$$

It should be noted that the covariant differentiation in (2.9) is performed in the deformed configuration of the system ξ , while the differentiation in (2.10) is performed in the initial configuration. (The lack of the displacement gradients in eq. (2.9) is apparent only; since the coordinate system is that of the deformed configuration, the effect of the displacement is included.)

In structural mechanics, the components $p^{\alpha\beta}$, $t^{\alpha\beta}$, $s^{\alpha\beta}$, or s^{AB} are used. With the assumption $J \approx 1$, which appears to be justified in most practical problems; and if the systems x and ξ coincide at t_0 , we have

$$s^{AB} = s^{\alpha\beta} = t^{\alpha\beta} \approx p^{\alpha\beta}, \quad \text{for } A = \alpha, B = \beta. \quad (2.11)$$

The theory presented by M. A. Biot [15] differs from the above outline. Biot's theory is geared towards problems of stability and solutions of large deformations problems in small incremental steps. The acknowledged efficiency of the incremental methods of solution, makes Biot's theory an attractive tool in structural analysis.

For most structural material in the elastic range, the relation between the stress tensors (s^{AB} or $s^{\alpha\beta}$) and the strain tensors (e_{AB} or $e_{\alpha\beta}$) can be assumed in the form of Hooke's law. An exposition of the theory of plasticity for arbitrary deformation can be found in the paper by A. E. Green and Naghdi [17]. Some problems of the theory of viscoelasticity for finite deformations are presented in the paper by Oldroyd [18] and in the book by A. E. Green and J. E. Adkins [16]. A discussion of the constitutive equations of various materials is beyond the scope of this paper. Let us only point out that the use of the material or con-

vected coordinates offers distinct advantages also in this part of the problem. In fact, most of the constitutive relations used in the analysis of inelastic structures subjected to small deformations can be adapted to the present problem without major changes. Comprehensive reviews of these relations are given in the article by A. M. Freudenthal and H. Geiringer [19] and in the book by T. H. Lin [20].

The procedure of derivation of the fundamental equations for specific types of structures follows the general ideas of the three-dimensional mechanics of solids. The strain-displacement relations, the equations of equilibrium in the deformed configuration, and the stress-strain relations must be established. As a rule, the assumption of small strains can be made; moreover, satisfactory theories can be developed by taking into account that only some of the displacements and displacement gradients are large (e.g. normal deflections of beams and plates).

A theory of moderately large deflections of plates has been proposed by Th. von Karman in 1910 [21] (see also S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger [22]). It retains all the basic assumptions of the classical (linear) theory of thin plates. The expressions, however, for the extensional strain components in the plane of the plate contain the squares of the gradients of the normal deflection, i.e.,

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2, \text{ etc.} \quad (2.12)$$

Similarly, the deformed configuration of the plate is taken into account in the equations of equilibrium which contain terms of the type

$$s_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad s_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \text{ etc.} \quad (2.13)$$

The resulting system of equations may be used in its original form, or it can be reduced to three equations with the three displacement components of the middle plane, or two equations for the normal deflection and a stress function can be written. The choice of the final form of the equations depends on the method of solu-

tion.

For curved panels, K. Margeurre [23] proposed a theory whose assumptions are similar to those of Kármán's plate theory. There are several versions of nonlinear theories of shells, which differ mainly in the degree of precision in which the geometry of the shell is taken into account. This situation is parallel to the variety of linear theories of shells. A discussion of this can be found in the works of L. H. Donnell [24], J. L. Synge and W. Z. Chien [25], W. Z. Chien [26], V. S. Vlasov [27], A. S. Volmir [28], Kh. M. Mushtari and K. Z. Galimov [29], J. L. Sanders, Jr. [30], P. M. Naghdi and R. P. Nordgren [31], W. T. Koiter [32].

Among the methods of solution of the nonlinear problems of post-critical behavior, the finite element method appears to be unusually versatile and effective. The basic ideas and relations of this method, including stability and large deformations, are presented in the papers by J. H. Argyris [33], and J. H. Argyris, S. Kelsey, and H. Kamel [34], and the books by O. C. Zienkiewicz [35], and J. S. Przemieniecki [36]. The papers by J. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin and R. J. Melosh [37], H. C. Martin [38], R. H. Mallett and P. V. Marcal [39] concentrate on the buckling and nonlinear problems.*

For a linear elastic structure, the finite element method results in a system of linear algebraic equations of the type

$$[K]\{q\} = \{P\} \quad (2.14)$$

where $[K]$ is the stiffness matrix, $\{q\}$ is the nodal displacement vector, and $\{P\}$ is the nodal load vector. The nodal displacement vector $\{q\}$ determined from eq. (2.14) the state of stress and deformation of the structure. The stiffness matrix $[K]$ depends on the geometry of the structure, its material properties, and on the geometry of the finite element system. The vector $\{P\}$ represents the external loading on the structure.

If the nonlinear effects of large deformations are taken into

* Additional references can be found in a recent survey paper by O. C. Zienkiewicz [40].

account the systems of equations for $\{q\}$ can be written as

$$([K] + [K_g]) \{q\} = \{P\} \quad (2.15)$$

where $[K_g]$ is sometimes referred to as the geometrical stiffness matrix. It depends on $\{q\}$; hence, the system of equations (2.15) is nonlinear. Instead of eqs. (2.15), the incremental formulation can be used. For the (small) increments of displacement $\{\Delta q\}_n$ and loading $\{\Delta P\}_n$, from the state of equilibrium $\{q\}_n$ and $\{P\}_n$, the system of equations holds

$$([K] + [K'_g]_n) \{\Delta q\}_n = \{\Delta P\}_n \quad (2.16)$$

where the matrix $[K'_g]_n$ is determined at the state $\{q\}_n$. The incremental formulation is especially suitable for nonlinear elastic or inelastic materials with incremental stress-strain relations (e.g. elastic-plastic solids). Then, however, also the matrix $[K]$ depends on $\{q\}$ and, its elements in eq. (2.16) have to be determined at the state $\{q\}_n$. Instead of the systems of equations (2.15) or (2.16), an energy formulation may be used in which the vector $\{q\}$ minimizes the total energy of the system. The methods of mathematical programming are then employed for the determination of $\{q\}$.

3. STABILITY

The problem of stability of a structure is usually formulated as follows. Suppose that the loadings are specified by a vector p . A state of equilibrium is a displacement vector $\underline{u}(\underline{x}, p)$ which satisfies the equations of equilibrium and the boundary conditions of the structure. The fundamental states of equilibrium, or the fundamental path of equilibrium, are the displacements $u_0(\underline{x}, p)$ single-valued and continuously differentiable in the components of p , and such that u_0 as $p \rightarrow 0$. In addition to the fundamental path, a structure may have, in general, other states or paths of equilibrium. The points of intersection of different paths of equilibrium are of two types: bifurcation points and limit points. They are shown in Fig. 2 for the simple case of one load component p and one displacement component u .

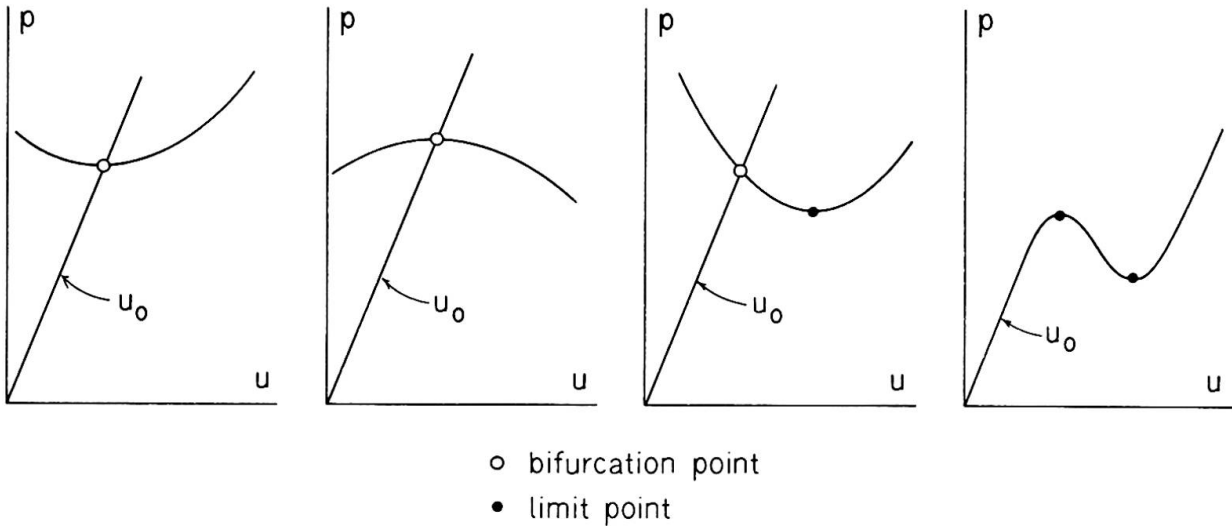


Fig. 2.

A precise and practically meaningful definition of stability is not an easy task. In engineering terms, a state of equilibrium is considered to be stable if sufficiently small perturbations cause arbitrarily small displacements of the structure. A path consisting of stable states of equilibrium is called a stable path. The states at which a path changes from stable to unstable are called critical states (or critical points); the corresponding loads are called the critical loads.

For the above notion of stability, certain criteria, or tests, of stability have been developed.

According to the static criterion, at a critical point two infinitesimally adjacent states of equilibrium exist for the same external loads. If the loads acting on the structure are proportional to a parameter, and if the fundamental state is linear elastic, the static criterion leads to the well known eigenvalue problems, for which an extensive literature is available.

The energy criterion of stability states that in any sufficiently small displacement from the state of equilibrium the internal energy stored or dissipated, ΔE , exceeds the work of the external loads, ΔW . Thus the condition of stable or neutral equilibrium is

$$\Delta E - \Delta W \geq 0 \quad (3.1)$$

In the case of an elastic structure loaded with potential forces, eq. (3.1) implies that the change of the total potential energy is positive or zero,

$$\Delta U \geq 0 \quad (3.2)$$

The condition (3.2) represents an extension of the Dirichlet criterion of stability of discrete systems.

The dynamic criterion is based on the investigation of small free oscillations about the state of equilibrium. For a stable state of equilibrium of an elastic structure, all the natural frequencies of these oscillations are real and different from zero.

In the cases of conservative systems under conservative loadings, these three criteria lead to the same lowest critical values of the load parameter, and the existing experimental evidence confirms their basic validity; the known examples of substantial discrepancies between the theory and the experimental results can be explained by factors other than faults in the basic concepts of the theory.

The above ideas and criteria form the foundations of the stability, or buckling, analysis in a large number of problems of structural mechanics. This theory is the product of over one-hundred-year effort. Important contributions have been made by R. V. Southwell [41], S. P. Timoshenk [42], G. B. Biezeno and H. Hencky [43], E. Trefftz [44], W. T. Koiter [45], H. Ziegler [46], C. E. Pearson [47], R. Hill [48]. There is a number of excellent books dealing with the methods of analysis and practical applications. To mention some of them: S. P. Timoshenko and J. M. Gere [49], F. Bleich [50], Pflinger [51], C. F. Kollbrunner and M. Meister [52], G. Gerard [53], A. S. Volmir [54], M. Gregory [55], H. Ziegler [56].

The actual application of any of the criteria of stability is based on the equations of small displacements, or vibrations, superimposed on a state of deformation, and on the expressions for the corresponding change of energy. They are given in Ref. [16], [44], and [15] for the general case of a three-dimensional solid.

In Refs. [49] through [56], and in numerous other papers the necessary relations are given for various types of structures.

In the finite element formulation, the conditions leading to the determination of the critical loads are discussed in Refs. [33], [35], [36], [38, [39] and [57] through [61]. It is worth mentioning that in the cases of linear elastic fundamental states, the critical load parameter λ follows either from the equation

$$\det|K + \lambda K_0| = 0 \quad (3.3)$$

or from

$$\det|K(\lambda)| = 0 \quad (3.4)$$

($[K(\lambda)]$ = the stiffness matrix whose elements are known functions of λ). For nonlinear fundamental states, the equation for the critical load is

$$\det|K'(q_0(\lambda))| = 0 \quad (3.5)$$

where $[K'(q_0(\lambda))]$ is the incremental stiffness matrix corresponding to the fundamental state $\{q_0(\lambda)\}$ which, in turn, depends on the load parameter λ .

In spite of great achievements of the classical theory of stability, there are certain areas which require more general approaches or, at least, refinements of the existing methods. The fallacy of the static methods in the case of nonconservative systems has been discovered long ago. A comprehensive review of this question and of recent contributions has been given by G. Herrmann [62]. Another area of practical interest is the stability, or buckling, under dynamic loading. Also, it has been pointed out (R. T. Shield and A. E. Green [63], R. J. Knops and E. W. Wilkes [64]), that, in general, the uniqueness of a path of equilibrium and the energy and the dynamic criteria not necessarily assure boundedness of the displacements, velocities, and strains.

An important step in answering certain fundamental questions is the development of the theory of stability of continuous media (A. A. Movchan [68], [69], [70] and Ref. [64]) along the lines of Liapunov's general theory of stability of motion [65]. (Modern accounts of this theory can be found in the books by N. G. Chetaev

[66] and W. Hahn [67]). The major points of this work are: precise definitions of "initial perturbations", rational measures of the magnitudes of the initial perturbations and the ensuing perturbed motions, rigorous definitions of stability, and derivation of the corresponding stability criteria. It has been shown, incidentally, that the classical energy criterion corresponds to the stability, or boundedness, in the mean square value of the displacements (but not to the boundedness of the maxima of the displacements).

Further studies on the foundations of the theory of stability are presented in Refs. [71] to [83].

A relatively new and important problem of the theory of stability (and in the post-critical buckling) is the effect of initial imperfections. It has been investigated originally to explain the discrepancies between the theoretical predictions and the experimental data in buckling of shells (L. H. Donnell and C.C. Wan [83], W. H. Horton and S. C. Durham [84]); recently, it became a part of more general studies on structural stability (W. T. Koiter [71], J. M. T. Thompson [85], [87], J. Roorda [86]; also the survey paper [76] by B. Budiansky and J. W. Hutchinson). The effect of initial imperfection may be one of the following:

(a) The equilibrium paths and the critical points are essentially of the same type as in the perfect structure, with the displacements and the critical loads slightly influenced by the initial imperfections. (b) The bifurcation point vanishes; the pre-

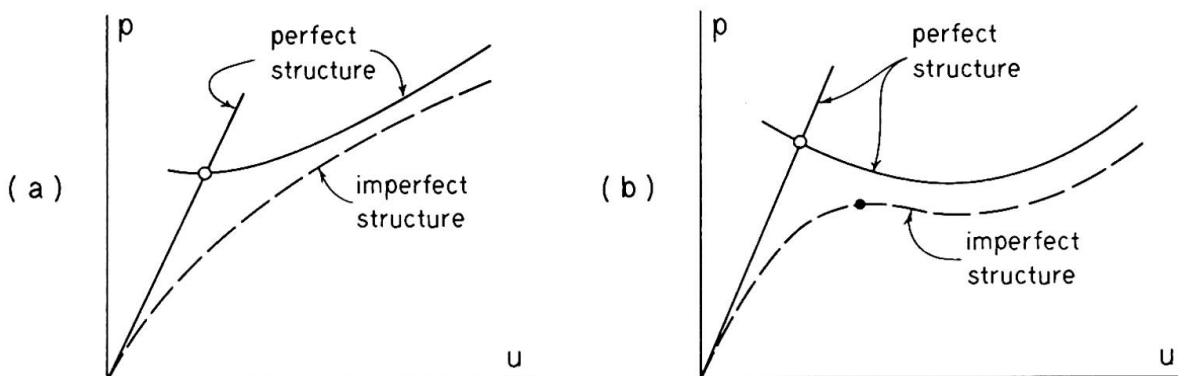


Fig. 3.

buckling and the postbuckling states form a continuous path (Fig. 3a). (c) The bifurcation point vanishes and a limit point appears, usually at much smaller magnitudes of the loadings (Fig. 3b).

The essential factor in the analysis of the effects of initial imperfections is their shape and size. It is, of course, possible to assume some unfavorable configuration of the initial imperfections and to determine the corresponding buckling load and the postbuckling behavior. Sometimes, conceivably, specific information concerning the initial imperfections in a structure may be available. Basically, however, the initial imperfections are errors of fabrication, of random magnitude and random distribution over the structure. Accordingly, the statistical methods appear to be the most rational approach. The analyses of buckling of various structures with random imperfections are presented in the works by V. V. Bolotin [88] and [89], W. E. Boyce [90], J. M. T. Thompson [91], B. Budiansky and W. B. Fraser [92], J. C. Amazigo [93], and J. Roorda [94]. There is a close relation between the statistical approach to the buckling loads and the statistical methods in structural safety.

4. METHODS OF ANALYSIS OF POST-CRITICAL STATES

The primary objective of the analysis is the determination of a stable state (or states) of equilibrium of the structure for a given system of loadings exceeding the lowest critical level. In the case of non-unique solutions, the accessibility of each state via a realistic path (history) of loading should be evaluated. The determination of the ultimate loading capacity of the structure is also an important part of the problem. Frequently, the complete path (or paths) of equilibrium from zero to the ultimate loading capacity is required.

The difficulties connected with the nonlinear equations of the post-critical behavior necessitate the use of approximate and numerical methods. The presently available solutions are usually based on one or a combination of the following methods: perturba-

tion methods, successive approximations, Ritz' method, Galerkin's method, finite differences and finite element method. The perturbation methods and the methods of successive approximations reduce the solution of the original nonlinear differential equations to repeated solutions of linear differential equations. The Ritz, Galerkin, finite difference, and finite element methods result in a system of nonlinear algebraic equations.

There is an extensive literature on the approximate and numerical methods; see, for example, Refs. [96], [97], [98], [99], [100]. The solution of the nonlinear algebraic equations connected with some of these methods is a formidable task in itself (Refs. [101] and [102]). The numerical treatment of the eigenvalue problems, which arise in the course of this analysis, is described in Refs. [103], [104], and [105].

K. O. Friedrichs and J. J. Stoker [106] analyse a supported circular plate subjected to radial aedge compression p , and described by von Kármán's equations. For this problem, they develop and appraise three methods suitable for three ranges of the ratio P/p_{cr} (where p_{cr} is the lowest buckling load): a perturbation method for $1 < p/p_{cr} < 2.5$, a power series solution for $2.5 < p/p_{cr} < 25$, an asymptotic solution for $p/p_{cr} \rightarrow \infty$ with a perturbation method for very large values of p/p_{cr} .

W. T. Koiter ([45] and [71]) discusses the energy method for the analysis of the initial post-buckling behavior of an arbitrary elastic structure. The determination of the critical points and buckling modes is accomplished with the aid of a stability criterion. The initial post-buckling deflections in the vicinity of a bifurcation point result from the minimizing of the energy increment functional. The stability at the critical point and the stability of the post-buckling states is investigated in terms of the asymptotic expansion of the energy in the vicinity of the critical point. Koiter's work includes also the effect of initial imperfections.

An extension of the well-known Newton's method for calculat-

ing roots of algebraic equations to the differential equations of nonlinear mechanics has been presented by G. A. Thurston [107], [108].

In general, the problem of determination of stable states of postbuckling equilibrium is not an easy one. The difficulties of the analysis beyond the first bifurcation or limit points exist even if the task is reduced to a system of nonlinear algebraic equations or a discrete system is dealt with, such as in the finite element method. The works by A. H. Chilver [109], M. J. Sewell [110], and J. M. T. Thompson [111], [112] contain further research on the methods of analysis.

The difficulties in the tests of stability and in the search for critical points make the linearization of the pre-buckling states an extremely tempting step. The consequences of this linearization are discussed in a paper by A. D. Kerr and M. T. Soifer [113].

5. APPLICATIONS

Trusses and Frames

For certain types of statically indeterminate, pin-jointed plane or space trusses, the post-buckling behavior can be determined in a relatively elementary manner, with the assumptions that the bars in their pre-buckling states are linearly elastic, the compressive forces in buckled bars remain constant, and the changes of the geometry of the truss are negligible. If successive bucklings of individual bars occur at the load levels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, the

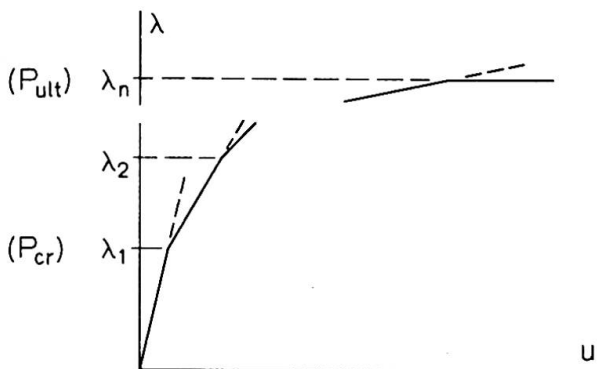


Fig. 4.

load-deflection history is as shown in Fig. 4. E. F. Masur [114] has derived the lower and upper bounds for the ultimate loads of redundant trusses in post-critical states. There is an analogy between this phenomenon and the elastic-plastic behavior of certain frames.

The assumptions listed above are not always satisfied; in numerous structural systems the changes of geometry influence the pre-buckling and post-buckling behavior, which become strongly nonlinear. A typical example is the truss shown in Fig. 5, with

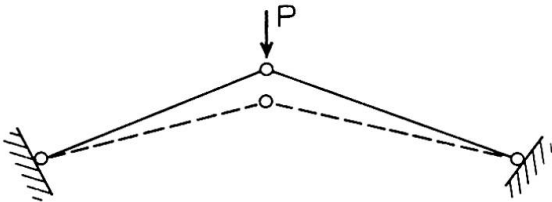


Fig. 5.

similar conditions existing in shallow reticulated shells. Large deflections cause also non-negligible secondary bend-moments; consequently, a truss must be analyzed as a frame (unless, of course, pin joints are actually constructed).

The classical works (Bleich [50]) in the area of stability of frames reduce the problem to a system of equations which are linear with respect to the joint displacements and rotations and joint forces and moments. The coefficients of these equations are known functions of the load parameter λ . While this approach has been successful in predicting the critical loads in many practical applications, it is inadequate for dealing with the post-critical behavior or for the cases when the pre-buckling behavior is nonlinear.

The analysis of the post-critical behavior and the fundamental states, and the determination of the critical loading conditions of a plane or space frameworks should take into account the following effects: (a) The influence of the axial forces acting in the individual bars on their stiffness characteristics. (b) The nonlinearities of the force-displacement relations in the bars (the effect of bending curvature on the relative axial displacement of the ends, large bending deformations, material nonlinearities, etc.) (c) The effect of the changes of geometry on the equations of equilibrium. An extensive discussion of the nonlinear effects in the frame behavior may be found in the works by R. K. Livesly [115], M. R. Horne [116], [117], S. J. Britvec and A.H. Chilver [118], S. A. Saafan [119], R. W. Williams [120], J. H. Argyris [33], and

R. H. Mallett and P. V. Marcal [39]; Th. V. Galambos, G. C. Driscoll, and L.-W. Lu report some related experimental research [121].

The results of the analysis which takes the above effects into account differ considerably from the stability problem of pin-joint trusses of linearized rigid-joint frames, not only quantitatively but also qualitatively. For example, the presence of primary and secondary bending moments will remove at least some of the bifurcation points in the equilibrium path (such as in Fig.4) and the behavior up to the ultimate load may consist of the fundamental path only. The absence, however, of the bifurcation points should not be assumed in advance. (To this effect, see H. L. Schreyer and E. F. Masur [122]). Also, a nonlinear analysis may reveal the existence of snap-buckling at certain load levels (Fig. 1b), which is entirely beyond any linearized theory.

Under certain circumstances, some of the effects listed above may be disregarded. For example, J. H. Argyris [33] proposes a method of analysis which neglects the influence of axial forces on the element stiffness. Accordingly, the buckling phenomena within individual elements cannot be predicted with this theory. If, however, the elements are relatively short and stiff, and the problem is such that the buckling "waves" extend over several elements, the analysis should yield satisfactory results, with considerable simplification of the numerical work. The theories presented by R. K. Livesley [175], J. D. Renton [122], S. J. Britvec and A. H. Chilver [118], R. J. Aguilar and T.-A. Huang [124], S. J. Britvec [125], S. S. Tezcan and B. Ovunc [126], J. J. Connor, R. D. Logcher, and S.-C. Chan [127] assume flexible elements to which the linearized theory of bending with axial loading is applicable. The stiffness coefficients of these elements contain trigonometric or hyperbolic functions of the axial forces. With the equilibrium equations written in the deformed configuration, the problems of local buckling, overall buckling (including snap-buckling), and post-buckling behavior are analyzed. The systems of nonlinear equations

of these theories are solved by either iterative or incremental schemes. The analyses presented by G. Lobel [128], F. W. Williams [120], C. N. Kerr [129], S. -L. Lee, F. S. Manuel, and E. C. Rossow [130] utilize the nonlinear bending theory of beams. They are capable to deal with the problems in which the post-buckling deflections are of the order of the column or girder lengths.

Some of the problems discussed in this report occur in the analysis of tall buildings and have been reviewed in the preliminary report by Professors Steinhardt and Beer [131] (8th Congress, 1968), which contains a very extensive list of references.

Plates

The papers by A. van der Neut [132], G. Winter[2], and Ch. Massonnet [4] contain comprehensive reviews of previous works on the post-critical behavior of plates. There are also two recent books on thin-walled structures (Refs. [133] and [134]), where the papers by W. J. Supple and A. H. Chilver [135], A. C. Walker [136], J. B. Dwight and A. T. Ractliffe [137], T. R. Graves Smith [138], and others, deal with plates in post-critical states.

Among most recent contributions, J. W. Dwight and K. E. Moxham [139] describe their research on welded steel plates in compression. The work reported by them is obviously a necessary step without which a full practical utilization of the post-buckling strength of plates would not be acceptable. K. R. Rushton [140] analyzes the post-critical state of tapered plates. The problem of a plate with three edges simply supported and one edge attached to a stiffener has been investigated by K. Klöppel and B. Unger [141], the analysis is based on the von Kármán equations and the energy method. The computed deflections agree very well with the results of a test program. An analysis of the post-critical behavior of thin plates, employing the finite element method has been presented by D. W. Murray and E. L. Wilson [142], [143]. The effect of creep deformation on the post-critical behavior of compressed plates has been investigated by I. M. Levi and N. J. Hoff [144].

Shells

The problems of post-critical behavior become probably most interesting and difficult in the theory of shells. They have received ample attention from many researchers, and a list of publications in this field could easily reach a few hundred positions. A review of the research on shell buckling has been made by Y. C. Fung and E. E. Sechler in 1960 [145]. The book by A. S. Volmir [54] contains numerous Russian contributions.

The load-displacement behavior of cylindrical shells under axial compression has been analyzed by Th. von Kármán and H. S. Tsien [146], W. T. Koiter [147], B. O. Almroth [148], N. J. Hoff, W. A. Madsen, and J. Mayers [149], R. L. de Neufville and J. J. Connor [150], and others (see also N. J. Hoff [151]). The load-displacement relations are of the type in Fig. 1b, with strong imperfection-sensitivity at the critical point A. The ultimate shape of the buckled shell (Fig. 6) is referred to as Yoshimura pattern [152]. (This shape, together with considerable loading

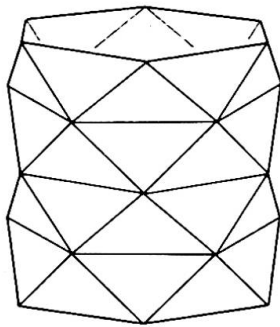


Fig. 6.

capacity of a buckled cylinder, prompted K. Miura's suggestion of a shell structure resembling Yoshimura's pattern [153]). The problem of stiffened and barreled shells is analyzed by J. W. Hutchinson and J. C. Frauenthal [154].

The nonlinear buckling problem and the initial post-buckling behavior of a complete spherical shell has been analyzed by W. T. Koiter [155], who also gives a review and assessment of previous work in this area. The papers by J. R. Fitch [156] and J. R. Fitch and B. Budiansky [157] deal with a similar problem for spherical caps. Ref. [157] clarifies, in particular, the effect of the load distribution, and of the shell thickness, on the type of buckling (bifurcation or snap-through) and on the post-buckling load carrying capacity.

An analysis of the initial post-buckling behavior of the toroidal shell segments has been given by J. W. Hutchinson [158]. The paper by G. A. Greenbaum and D. C. Conroy [159] contains an example of an efficient numerical analysis of a conical shell.

REFERENCES*

1. Preliminary Report and Final Report, 8th Congress, I.A.B.S.E., New York, 1968.
2. G. Winter, Preliminary Publication, 8th Congress, I.A.B.S.E., 101 - 136, 1968.
3. J.B. Scalzi, Preliminary Publication, 8th Congress, I.A.B.S.E., 137 - 155, 1968.
4. Ch. Massonnet, Preliminary Publication, 8th Congress, I.A.B.S.E., 157 - 208, 1968.
5. H. Beer, Final Report, 8th Congress, I.A.B.S.E., 497 - 498, 1968.
6. F.D. Murnaghan, American Journal of Mathematics, 59, 235 - 260, 1937.
7. C. Truesdell, Journal of Rational Mechanics and Analysis, 1, 125 - 300, 1952; 3, 593 - 616, 1954.
8. V.V. Novozhilov, Foundations of the nonlinear theory of elasticity, (in Russian), Moscow, 1948. English transl. Graylock Press, 1953.
9. A.E. Green and W. Zerna, Theoretical Elasticity, Oxford University Press, 1st Edition: 1954, 2nd Edition: 1968.
10. T.C. Doyle and J.L. Ericksen, Advances in Applied Mechanics, 4, 53 - 115, 1956.
11. V.V. Novozhilov, Theory of elasticity, (in Russian), Moscow, 1958.
12. C. Truesdell and R.A. Toupin, Handbuch der Physik, Vol. 3, Part 1, Springer - Verlag, 1960.
13. A.C. Eringer, Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw - Hill Inc. 1962.
14. L.I. Sedov, Introduction to mechanics of continuous media, (in Russian). Moscow, 1962.
15. M.A. Biot, Mechanics of Incremental Deformations, J.Wiley Sons Inc., 1965.
16. A.E. Green and J.E. Adkins, Large Elastic Deformations, Oxford University Press, 1960.

* Listed, whenever feasible, as follows:

Papers: Author's name, Journal or collection, volume number (underlined), pages, year of publication.

Books: Author's name, title, publisher, year of publication.

17. A.E. Green and P.M. Naghdi, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18, 251 - 281, 1965.
18. J.G. Oldroyd, *Proceedings, Royal Society of London, Series A*, 200, 523 - 541, 1960.
19. A.M. Freudenthal and H. Geiringer, *Encyclopedia of Physics* (ed. S. Flügge), Vol. 6, Springer-Verlag, 1958.
20. T.H. Lin, *Theory of Inelastic Structures*, J. Wiley & Sons Inc. 1968.
21. Th. von Kármán, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 4, p. 438, 1910.
22. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
23. K. Marguerre, *Proceedings 5th International Congress of Applied Mechanics*, p. 93, 1938.
24. L.H. Donnell, *Transactions, Am. Soc. Mech. Engrs.*, 56, 795 - 806, 1934.
25. J.L. Synge and W.Z. Chien, *Applied Mechanics*, Th. von Kármán Anniversary Volume, California Institute of Technology, 1941.
26. W.Z. Chien, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1, 297 - 327, 1943; 2, 120 - 135, 1944.
27. V.S. Vlasov, *Príkladnaia Matematika i Mekhanika*, 8, 109, 1944.
28. A.S. Volmir, *Flexible plates and shells* (in Russian), Moscow, 1956.
29. Kh. M. Mushtari and K.Z. Galimov, *Nonlinear theory of thin elastic shells* (in Russian), Kazan, 1957.
30. J.L. Sanders, Jr., *Quarterly of Applied Mathematics*, 21, 21 - 36, 1963.
31. P.M. Naghdi and R.P. Nordgren, *Quarterly of Applied Mathematics*, 21, 49 - 59, 1963.
32. W.T. Koiter, *On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells*, Report No. 310, Laboratory of Engineering Mechanics, The Technological University of Delft, 1965.
33. J.H. Argyris, *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
34. J.H. Argyris, S. Kelsey, and H. Kamel, *AGARDograph 72*, (B. Fraeyi de Veubeke, editor) Pergamon Press, 1964.
35. O.C. Zienkiewicz (in collaboration with Y.K. Cheung) *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1967.

36. J.S. Przemieniecki, Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968.
37. J.J. Turner, E.H. Dill, H.C. Martin, and R.J. Melosh, Journal of the Aerospace Sciences, 27, 97 - 106, 1960.
38. H.C. Martin, Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
39. R.H. Mallett and P.V. Marcal, Journal of the Structural Division, ASCE, 94, 2081 - 2104, 1968.
40. O.C. Zienkiewicz, Applied Mechanics Reviews, 23, 249 - 256, 1970.
41. R.V. Southwell, Philosophical Transactions, Royal Society of London, A213, 187 - 244, 1913.
42. S.P. Timoshenko, Annales des ponts et chaussée, 1913. (Also: the Collected Papers of S.P. Timoshenko, McGraw-Hill, 1954)
43. G.B. Biezeno and H. Hencky, Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Science, 31, p. 569, 1928; 32, p. 444, 1929.
44. E. Trefftz, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 13, 160 - 165, 1933.
45. W.T. Koiter, On the stability of elastic equilibrium (in Dutch) H.J. Paris, Amsterdam, 1945.
46. H. Ziegler, Advances in Applied Mechanics, 351 - 403, 1956.
47. C.E. Pearson, Quarterly of Applied Mathematics, 14, 133 - 144, 1956.
48. R. Hill, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 5, 229 - 241, 1957.
49. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.
50. F. Bleich (edited by H.H. Bleich), Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.
51. A. Pflüger, Stabilitäts Probleme der Elastostatik, Springer-Verlag, 1950.
52. C.F. Kollbrunner and M. Meister, Knicken, Springer-Verlag, 1955; Ausbeulen, Springer-Verlag, 1958.
53. G. Gerard, Structural Stability Theory, McGraw-Hill, 1962.
54. A. S. Volmir, Stability of elastic systems (in Russian), Moscow, 1963.
55. M. Gregory, Elastic Instability, E & F.N. Spon Ltd., 1967.
56. H. Ziegler, Principles of Structural Stability, Blaisdell Publ. Co., 1968.
57. R.H. Gallagher and J. Padlog, AIAA Journal, 1, 1437 - 1439, 1963,

58. B.J. Hartz, *Journal of the Structural Division ASCE*, 91, 141 - 157, 1965.
59. Przemieniecki, *Symposium on Structural Stability and Optimization*, Royal Aeronautical Society and Loughborough University of Technology, 1967.
60. R.G. Anderson, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz, *International Journal of Solids and Structures* 4, 1031 - 1055, 1968.
61. R.H. Gallagher and H.T.Y. Yang, *Proceedings, 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
62. G. Herrmann, *Applied Mechanics Reviews*, 20, 103 - 108, 1967.
63. R.T. Shield and A.E. Green, *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 12, 354 - 360, 1963.
64. R.J. Knops and E.W. Wilkes, *International Journal of Engineering Science*, 4, 303 - 329, 1966.
65. A.M. Liapunov, *General Problem of Stability of Motion* (in Russian) Kharkov Mathematical Society, 1892.
66. N.G. Chetaev, *Stability of Motion* (in Russian) Moscow, 1955, English Translation: Pergamon Press, 1961.
67. Hahn, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov*, Springer - Verlag, 1959. English translation: Prentice - Hall, Inc., 1963.
68. A.A. Movchan, *Prikladnaya Matematikai Mekhanika*, 23, 483 - 493, 1959. English translation: *PMM*, 24, 686 - 700 (Pergamon Press).
69. A.A. Movchan, *Prikladnaya Matematikai Mekhanika*, 24, 988 - 1001, 1960. English translation: *PMM*, 24, 1506 - 1524, Pergamon Press.
70. A.A. Movchan, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 15, 650 - 682, 1963.
71. W.T. Koiter, *Proceedings of the Symposium on "Nonlinear Problems"* (edited by R.E. Langer), University Press, 1963.
72. A. Gjelsvik and S.R. Bodner, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 88, 87 - 134, 1962.
73. J.M.T. Thompson, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11, 13 - 20, 1963.
74. M.J. Sewell, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, 247 - 265, 1965.
75. M.F. Beatty, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19, 167 - 188, 1965.
76. B. Budiansky and J.W. Hutchinson, *AIAA Journal*, 4, 1505 - 1510, 1966.
77. J.L. Ericksen, *International Journal of Solids and Structures*, 2, 573 - 580, 1966.

78. A.E. Green, R.J. Knops, and N. Laws, International Journal of Solids and Structures, 4, 555 - 577, 1968.
79. R.J. Knops and L.E. Payne, International Journal of Solids and Structures, 4, 1233 - 1242, 1968.
80. K. Huseyin, International Journal of Solids and Structures, 6, 479 - 487, 1970.
81. K. Huseyin, International Journal of Solids and Structures, 6, 677 - 691, 1970.
82. J.M.T. Thompson, International Journal of Engineering Science, 8, 307 - 313, 1970.
83. L.H. Donnell and C.C. Wan, Journal of Applied Mechanics, 17, 73 - 83, 1950.
84. W.H. Horton and S.C. Durham, International Journal of Solids and Structures, 1, 59 - 72, 1965.
85. J.M.T. Thompson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13, 293 - 310, 1965.
86. J. Roorda, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 13, 267 - 280, 1965.
87. J.M.T. Thompson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 1 - 10, 1969.
88. V.V. Bolotin, Bulletin Academy of Sciences, U.S.S.R., 1958, No. 3, p. 33 - 46. (English translation: NASA Tech. Transl., F - 85, 1962).
89. V.V. Bolotin, Statistical methods in structural mechanics, (In Russian), Moscow, 1961.
90. W.E. Boyce, Journal of the Aerospace Sciences, 28, 308 - 312 and 320, 1961.
91. J.M.T. Thompson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 15, 413 - 417, 1967.
92. B. Budiansky and W.B. Fraser, Journal of Applied Mechanics, 36, 233 - 240, 1969.
93. J.C. Amazigo, Quarterly of Applied Mathematics, 26, 537 - 566, 1969
94. J. Roorda, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 111 - 128, 1969.
95. I.I. Vorovich, Prikladnaya Matematika i Mekhanika 23, 885 - 892, 1959. English translation: PMM, 23, 1263 - 1272, (Pergamon Press).
96. C.B. Biezeno and R. Grammel, Technische Dynamik, (2nd edition) Springer - Verlag, 1953. English translation: Engineering Dynamics, Blackie & Son Ltd., 1954 / 55. Vols. 1,2,3,4.

97. L.V. Kantorovich and V.I. Krylov, Approximate methods of higher analysis, (in Russian), 3rd Edition, Moscow, 1952. English translation: Interscience Publishers, 1958.
98. H. Kanderer, Nichtlineare Mechanik, Springer - Verlag, 1958.
99. L. Collatz, Funktional Analysis und numerische Mathematik, Springer - Verlag, 1964. English translation: Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, 1966.
100. M.S. Kornishin, Nonlinear problems of the theory of plates and shallow shells and the methods of their solution (in Russian), Moscow, 1964.
101. A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, 2nd Edition, Academic Press, 1966.
102. E. Isaacson and H.B. Keller, Analysis of Numerical Methods, J. Wiley & Sons, 1966.
103. L. Collatz, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, 1945.
104. D.K. Faddeev and V.N. Fadееva: Computational methods of linear algebra, (in Russian), English translation: W.H. Freeman, 1963.
105. J.H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
106. K.O. Friedrichs and J.J. Stoker, American Journal of Mathematics, 63, 839 - 888, 1941.
107. G.A. Thurston, Journal of Applied Mechanics, 32, 383 - 388, 1965.
108. G.A. Thruston, Journal of Applied Mechanics, 36, 425 - 430, 1969.
109. A.H. Chilver, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 15, 15 - 28, 1967.
110. M.J. Sewell, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 219 - 233, 1969.
111. J.M.T. Thompson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 1 - 10, 1969.
112. J.M.T. Thompson, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 18, 29 - 42, 1970.
113. A.D. Kerr and M.T. Soifer, Journal of Applied Mechanics, 36, 775 - 783, 1969.
114. E.F. Masur, Transactions, ASCE, 119, 699 - 712, 1954.
115. R.K. Livesley, The Structural Engineer, 34, 1 - 12, 1956.
116. M.R. Horne, Proceedings, Royal Society of London, Series A, 266, 47 - 67, 1962.
117. M.R. Horne, Progress in Solid Mechanics, 2, 292 - 298, North - Holl: Publishing Co., 1963.

118. S.J. Britvec and A.H. Chilber, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 89, 217 - 255, 1963.
119. S.A. Saafan, *Journal of the Structural Division, ASCE*, 89, 557 - 579, 1963.
120. F.W. Williams, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 17, 451 - 469, 1964.
121. Th.V. Galambos, G.C. Driscoll, and L. W. Lu, *Final Report, 8th Congress, I.A.B.S.E.*, 517 - 527, 1968.
122. H.L. Schreyer and E.F. Masur, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 89, 1 - 19, 1966.
123. J.D. Renton, *Journal of the Structural Division, ASCE*, 88, 81 - 103, 1962.
124. R.J. Aguilar and T. - A. Huang, *Space Structures* (ed. R.M. Davies), 459 - 470, J. Wiley & Sons, 1967.
125. S.J. Britvec, *Space Structures* (ed. R.M. Davies), 471 - 484, J. Wiley & Sons, 1967.
126. S.S. Tezcan and B. Ovunc, *Space Structures* (ed. R.M. Davies), pp. 491 - 501, J. Wiley & Sons, 1967.
127. J.J. Connor, Jr., R.D. Logcher, and S.-C. Chan, *Journal of the Structural Division, ASCE*, 94, 1525 - 1547, 1968.
128. G. Lobel, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 34, 25 - 46, 1963.
129. C.N. Kerr, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 17, 23 - 28, 1964.
130. S.-L. Lee, F.S. Manuel, and E.C. Rossow, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 94, 521 - 547, 1968.
131. O. Steinhardt and H. Beer, *Preliminary Publication, 8th Congress, I.A.B.S.E.*, 209 - 259, 1968.
132. A. van der Neut, *Post-buckling Behaviour of Structures, AGARD, Research Report 60*, 1956.
133. A.H. Chilver (editor), *Thin-Walled Structures*, J. Wiley & Sons, 1967.
134. K.C. Rokey and H.V. Hill (editors) *Thin-Walled Steel Structures*. Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
135. W.J. Supple and A.H. Chilver, *Elastic Post-Buckling of Compressed Rectangular Flat Plates*, pp. 136 - 152 in [133].
136. A.C. Walker, *Flat Rectangular Plates Subjected to a Linearly-Varying Edge Compressive Loading*, pp. 208 - 247 in [133].
137. J.B. Dwight and A.T. Ractliffe, *The Strength of Thin Plates in Compression*, pp. 3 - 34 in [134].

138. T.R. Graves Smith, The Ultimate Strength of Locally Buckled Columns of Arbitrary Length, pp. 35 - 60 in [134].
139. J.B. Dwight and K.E. Moxham, The Structural Engineer, 47, 49 - 66, 1969.
140. K.R. Rushton, International Journal of Mechanical Sciences, 11, 461 - 480, 1969.
141. K. Klöppel and B. Unger, Der Stahlbau, 38, 289 - 299, 1969, 39, 115 - 123, 1970.
142. D.W. Murray and E.L. Wilson, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 95, 143 - 165, 1969.
143. D.W. Murray and E.L. Wilson, AIAA Journal, 7, 1915 - 1920, 1969.
144. I.M. Levi and N.J. Hoff, Ingenieur - Archiv, 38, 329 - 342, 1969.
145. Y.C. Fung and E.E. Sechler, Structural Mechanics, (J.N. Goodier and N.J. Hoff, editors), pp. 115 - 168, Pergamon Press, 1960.
146. Th. v. Kármán and H.S. Tsien, Journal of the Aeronautical Sciences, 8, 303 - 312, 1941.
147. W.T. Koiter, Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Science, B66, 265 - 79, 1963.
148. B.O. Almroth, AIAA Journal, 1, 630 - 633, 1963.
149. N.J. Hoff, W.A. Madsen and J. Mayers, AIAA Journal, 4, 126 - 133, 1966.
150. R.L. de Neufville and J.J. Connor, Jr., Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 94, 585 - 603, 1968.
151. N.J. Hoff, Astronautics and Aeronautics, 5, 26 - 45, 1967.
152. Y. Yoshimura, On the Mechanism of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, NACA, TM 1390, 1955.
153. K. Miura, Proposition of Pseudo - Cylindrical Concave Polyhedral Shells, ISAS Report No.442. University of Tokyo, 1969.
154. J.W. Hutchinson and J.C. Frauenthal, Journal of Applied Mechanics, 36, 784 - 790, 1969.
155. W.T. Koiter, Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Sciences, B72, 40 - 123, 1969.
156. J.R. Fitch, International Journal of Solids and Structures, 4, 421 - 466, 1968.
157. J.R. Fitch and B. Budiansky, AIAA Journal, 8, 686 - 693, 1970.
158. J.W. Hutchinson, International Journal of Solids and Structures 3, 97 - 115, 1967.
159. G.A. Greenbaum and D.C. Conroy, AIAA Journal, 8, 700 - 707, 1970.

SUMMARY

This report reviews the problems related to the analysis of post-critical behavior of structures, including formulation of the basic equations, methods of their solution, and criteria of stability. Recent applications to trusses, frames, plates and shells are outlined.

RÉSUMÉ

Ce rapport traite de l'analyse du comportement post-critique des structures, avec formulation des équations fondamentales, les méthodes de leur résolution et les critères de stabilité. On présente aussi les applications récentes aux treillis, aux cadres, aux plaques et aux voiles.

ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Bericht behandelt die Probleme der Berechnung des überkritischen Verhaltens von Tragwerken, einschliesslich die Formulierung von Grundgleichungen, der Methode ihrer Lösung, und der Stabilitätskriterien. Neue Anwendungen auf Stabwerke, Platten und Schalen sind beschrieben.

Leere Seite
Blank page
Page vide