Anwendung der stochastischen Programmierung für die Berechnung der Sicherheit und für die Optmierung von Konstruktionen

Autor(en): **Klingmüller, O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH Kongressbericht**

Band (Jahr): **10 (1976)**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10408

Anwendung der stochastischen Programmierung für die Berechnung der Sicherheit und für die Optimierung von Konstruktionen

Application of Stochastic Programming for the Computation of Safety and for the Optimization of Structures

Application de la programmation stochastique pour le calcul de la sécurité et pour l'optimisation des structures

O. KLINGMÜLLER
Dipl.-Ing.
Universität Essen — Gesamthochschule
Essen, BRD

1. Einleitung

Die Beurteilung der Sicherheit statisch unbestimmter Konstruktionen ist wegen der Möglichkeit der Spannungsumlagerung nicht in gleicher Weise möglich wie bei statisch bestimmten Konstruktionen. Als wesentlicher Parameter zur Beurteilung der Sicherheit gilt die Versagenswahrscheinlichkeit, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß eine genau definierte Grenzlast eines Tragwerks überschritten wird. Die deterministische Berechnung der Grenzlast erfolgt auf der Grundlage der Traglastsätze [1]. Die Anwendung des zweiten Traglastsatzes zur Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit statisch unbestimmter Stahlrahmen wurde von F.Moses [2] gezeigt. Bei diesem Verfahren müssen alle kinematisch verträglichen Verschiebungszustände (kinematische Ketten,"Failure Modes") angegeben werden. Im vorliegenden Beitrag wird nun vorgeschlagen, die Versagenswahrscheinlichkeit aus der systematischen Formulierung des Traglastproblems als mathematische Programmierungsaufgabe [1] mit Hilfe von Verfahren aus der stochastischen Programmierung zu berechnen. Die Erweiterung der Bemessungsaufgabe, formuliert als plastische Optimierung, auf eine Bemessung für eine zulässige Versagenswahrscheinlichkeit der Gesamtkonstruktion folgt dann aus dieser stochastischen Traglastberechnung.

2. Traglastberechnung mit linearer stochastischer Programmierung

Eine lineare deterministische Formulierung des Traglastproblems ist durch

$$\text{maximiere } \lambda$$

unter den Nebenbedingungen

$$R\,(\lambda b_o P + b_x X) \geq F_o \qquad (1)$$
$$\lambda \geq 0$$

gegeben [1]. Hierbei bedeutet :

λ : Traglastfaktor ;

R : (p,n)-Matrix, deren Koeffizienten sich aus der Linearisierung der nichtlinearen Fließbedingungen ergeben; mit p = r k, das ist : Anzahl der Gleichungen für eine linearisierte Fließbedingung (r) mal Anzahl der Kontrollpunkte, in denen Fließbedingungen aufgestellt wurden (k); n ist die Anzahl der Schnittkräfte;

b_o : (n,m)-Matrix der Einheitsspannungszustände des statisch bestimmten Hauptsystems mit m als Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen;

P : (m)-Vektor der Knotenlasten;
b_x : (n,n-m)-Matrix der Einheitsspanunngszustände aus den statisch Unbestimmten;
X^x : (n-m)-Vektor der statisch Unbestimmten;
F_o : (p)-Vektor der rechten Seiten der linearisierten Fließbedingungen.

Die Anzahl der Unbekannten ist $h = n - m + 1$.

Faßt man die Unbekannten im (h)-Vektor y und die Koeffizienten der Restriktionen in der (p,h)-Matrix B zusammen, ergibt sich mit $c'=(1,0,\dots,0)$ als (h)-Vektor der Kostkoeffizienten die Standardformulierung einer linearen Optimierungsaufgabe :

$$\text{maximiere} \quad c'y$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} B\,y &\geqslant F_o \\ y_1 &> 0 \quad . \end{aligned} \qquad (2)$$

Die hierzu duale Formulierung lautet :

$$\text{minimiere} \quad F_o'\,z$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} B'\,z &= c \\ z &> 0 \quad . \end{aligned} \qquad (3)$$

Von M.M.Faber [3] wird der Einfluß stochastischer Größen in der Koeffizientenmatrix B oder in den Vektoren c und F_o auf den Wert der Zielfunktion untersucht.

Bei den hier betrachteten Traglastproblemen enthält die erste Spalte von B mit den Knotenlasten P stochastische Variable; die übrigen Elemente von B sind aus den Systemabmessungen abgeleitet und werden wegen ihres kleinen Streubereichs als fest vorgegeben betrachtet. Der Vektor F_o enthält mit den Festigkeiten der Werkstoffe (z.B.der Fliesspannung σ_F) ebenfalls stochastische Größen. In Abhängigkeit dieser stochastischen Größen ergibt sich eine Verteilungsfunktion $F(\lambda)$ für den Lastfaktor λ . Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$p_f = W(\lambda \leqslant 1) = F(1) \quad . \qquad (4)$$

Eine vereinfachte Möglichkeit der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn man für proportionale Belastung, das heißt, die Verhältnisse der Knotenlasten zueinander bleiben konstant, bei der stochastischen Lösung von Problem (2) oder (3) nur die Verteilung der Elemente von F_o berücksichtigt. In einem zweiten Rechengang kann dann die Verteilung der Last mit der Verteilung des Lastfaktors verknüpft werden. Berechnet man die Versagenswahrscheinlichkeit näherungsweise mit der Methode der zweiten Momente [4], so genügt es, den Erwartungswert und die Varianz des Lastfaktors zu bestimmen.

Setzt man für die Elemente von F_o deren Erwartungswerte ein, so ergibt sich, wie bei der deterministischen Berechnung vorausgesetzt wird, der Erwartungswert von λ .Nach [3] läßt sich bei einer Lösung von Problem (2) die Varianz des Lastfaktors aus

$$\sigma_\lambda^2 = s'\,C_F\,s \quad , \qquad (5)$$

oder bei einer Lösung von Problem (3) aus

$$\sigma_\lambda^2 = z'\,C_F\,z \qquad (6)$$

errechnen. Hierbei bedeutet :

C_F : Kovarianzmatrix der Elemente von F_o ,
s : Vektor der Simplexkoeffizienten; sie werden bei einer Lösung nach der Simplexmethode benötigt ,
z : Lösungsvektor von Problem (3).

Der Streubereich der stochastischen Variablen F_o darf allerdings nur so groß sein, daß weder die Zulässigkeit noch die Optimalität der Lösung verlorengeht. Der maximal zulässige Streubereich ergibt sich aus einer Sensitivitätsanalyse /‾5_7.

3. Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit nach der Methode der Momente

Sind der Mittelwert $\bar{P}$ und die Streuung σ_P der Last gegeben, so kann mit der Methode der zweiten Momente /‾4_7 Erwartungswert und Varianz des Lastfaktors zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit verwendet werden.

Die Sicherheitszone ist gegeben durch

$$Z = (\lambda - 1)\ \bar{P} \quad , \tag{7}$$

ihre Varianz durch

$$\sigma_Z^2 = \sigma_\lambda^2 + \sigma_P^2 \ . \tag{8}$$

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist dann

$$p_f = \varphi(-\frac{Z}{\sigma_Z}) \ . \tag{9}$$

φ ist die normierte Gauß'sche Verteilungsfunktion.

4. Plastische Optimierung für eine zulässige Versagenswahrscheinlichkeit

Die deterministische Formulierung des plastischen Bemessungsproblems ist

$$\text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{e} \gamma \cdot l_i A_i \,\middle|\, \Phi_j(X, A_i) \geq 0, A_i \geq 0 \right\} \quad \begin{matrix} j = 1 \ldots k, \\ i=1 \ldots e. \end{matrix} \tag{10}$$

Die Querschnittsflächen A_i und die Eigenspannungszustände X sind die Variablen des Problems; e ist die Anzahl der Elemente. Gesucht ist also das minimale Gewicht des Gesamttragwerks bei Einhaltung der Fließbedingungen Φ_j für einen fest vorgegebenen Traglastfaktor λ_o Die Schnittkräfte wurden bei (17) durch die statisch Unbestimmten und den konstanten Anteil $\lambda_o b_o P$ ausgedrückt.

Um den stochastischen Parametern in Problem (17), Belastung und Festigkeit, Rechnung zu tragen, muß man bei der plastischen Optimierung noch die Versagenswahrscheinlichkeit berücksichtigen. Das Problem lautet dann:

$$\text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{e} \gamma l_i A_i \,\middle|\, \Phi_j(\lambda, X, A_i) \geq 0, p_{f\ zul} - p_f \geq 0, A_i \geq 0 \right\} \tag{11}$$

$p_{f\ zul}$ ist die zulässige Versagenswahrscheinlichkeit.

Der Traglastfaktor λ gehört bei diesem Problem zu den Variablen.

Berechnet man die Versagenswahrscheinlichkeit nach der Methode der zweiten Momente, so kann die Wahrscheinlichkeitsrestriktion nach einem Vorschlag van Bracken und Mc Cormick /‾6_7 in ein deterministisches Äquivalent umgeformt werden.

$$p_f = \varphi(-\frac{Z}{\sigma_Z}) \geq p_{f\ zul} \tag{12}$$

Mit der inversen Gauß'schen Verteilungsfunktion φ^{-1} gilt dann:

$$\varphi^{-1}(p_{f\ zul}) + \frac{Z}{\sigma_Z} \geq 0 \tag{13}$$

oder

$$\varphi^{-1}(p_{f\ zul})\, \sigma_Z + Z \geq 0 \quad . \tag{14}$$

Bei vorgegebener zulässiger Versagenswahrscheinlichkeit ist $\varphi^{-1}(p_{f\ zul})$ eine Konstante mit gleicher Dimension wie die Sicherheitszone Z. Zur Bestimmung der Varianz des Lastfaktors λ nimmt man näherungsweise eine lineare Funktion in den stochastischen Variablen an. Für das Testbeispiel, bei dem nur die Varianz der Fliesspannung σ_F berücksichtigt wurde, wurde

$$\lambda_{opt} = k\, \sigma_F \qquad (15)$$

gesetzt. Somit gilt für die Streuung

$$\sigma_\lambda = \sqrt{k}\, \sigma_\sigma \qquad (16)$$

Die Streuung der Sicherheitszone ist dann durch (8)gegeben.

5. Testbeispiele

Das beschriebene Verfahren zur Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten wurde an zwei Konstruktionen getestet.

5.1. Fachwerk

Die Fließbedingung für Fachwerkstäbe lautet:

$$F \geqslant F_o \ ,$$

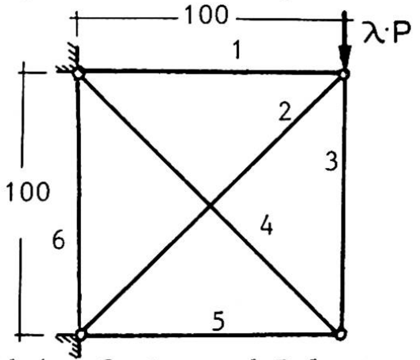
$$-F \geqslant F_o \ .$$

Somit ergibt sich für die Matrix R

$$R = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} .$$

I ist die (n,n)-Einheitsmatrix .

Systemabmessungen und Belastung sind in Bild 1 dargestellt.



Querschnittswerte :

$A_1 = 0.6462 \quad [\mathrm{cm}^2]$

$A_2 = 0.7996 \quad [\mathrm{cm}^2]$

$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0.1 \quad [\mathrm{cm}^2]$

Belastung : $\bar{P} = 1000 \quad [\mathrm{kp}]$

Variationskoeffizient der Last: $v_P = 0.1$

Bild 1 : System und Belastung des Fachwerks

Die Querschnittswerte sind mit dem Optimierungsverfahren von W.Lipp und G.Thierauf [7] ermittelt worden. Als zulässige Spannungen wurden hierbei eingesetzt :

$$\text{Druck :} \quad \sigma_{zul} = 1400 \left[\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}\right] ,$$

$$\text{Zug :} \quad \sigma_{zul} = 1600 \left[\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2}\right] .$$

Die vollplastischen Schnittgrößen F_o für die Traglastberechnung wurden mit einem Mittelwert der Fliesspannung $\bar{\sigma}_F$ berechnet.

$$F_o = A_i \cdot \bar{\sigma}_F \ , \quad \text{im Beispiel} \quad F_o = A_i \cdot 2700 \ .$$

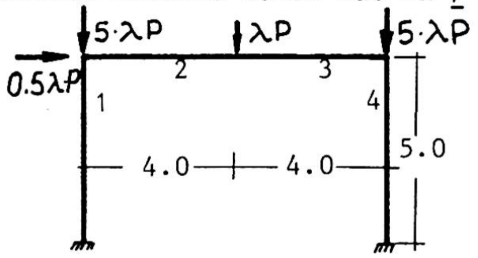
Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit erfolgte somit für einen Traglastfaktor $\lambda = 1.5267$. Für unterschiedliche Variationskoeffizienten der Fliesspannung v_σ ist das Ergebnis in Tabelle 1 zusammengestellt.

v_σ	σ_λ	P_f
0.1	0.057	$2.37 \quad 10^{-6}$
0.2	0.114	$2.57 \quad 10^{-4}$

Tabelle 1 : Streuung des Lastfaktors und Versagenswahrscheinlichkeit des Fachwerks

5.2.Rahmen

Für die Traglastberechnung und die plastische Optimierung des in Bild 2 dargestellten Rahmens wurde das in [1] beschriebene Verfahren verwendet.



	$\lambda_\sigma = 1.5$		$\lambda_\sigma = 1.7$	
Element	MPL	NPL	MPL	NPL
1	0.59	7.12	0.66	8.1
2	2.34	28.40	2.65	32.19
3	2.24	27.21	2.54	30.84
4	1.48	18.00	1.68	20.40

MPL [Mp m] : vollplastisches Moment

NPL [Mp] : vollplastische Normalkraft

Mittelwert der Last : $\bar{P} = 1.0$ [Mp]

Variationskoeffizient der Last : $v_P = 0.1$

Bild 2 : System und Belastung des Rahmens

Die Querschnittswerte (vollplastische Schnittgrößen MPL und NPL) wurden für eine Fliesspannung von

$$\sigma_F = 24000 \left[\frac{Mp}{m^2}\right]$$

mit Hilfe der Traglastbemessung ermittelt (Plastic Design).Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ergab für einen Mittelwert der Fliesspannung

$$\bar{\sigma}_F = 27000 \left[\frac{Mp}{m^2}\right]$$

die in Tabelle 2 zusammengestellten Werte.

	$\lambda = 1.6875$		$\lambda = 1.9125$	
v_σ	σ_λ	P_f	σ_λ	P_f
0.05	0.045	$1.71 \quad 10^{-10}$	0.05	0.0
0.1	0.089	$1.45 \quad 10^{-7}$	0.10	$6.2 \; 10^{-11}$
0.2	0.178	$3.89 \quad 10^{-4}$	0.201	$2.4 \; 10^{-5}$

Tabelle 2 : Streuung des Lastfaktors und Versagenswahrscheinlichkeit des Rahmens

6. Literaturverzeichnis

[1] Thierauf,G.: Traglastberechnung und -bemessung von Stockwerkrahmen mit Hilfe der linearen Programmierung, Der Stahlbau 44,S.19-26, Berlin 1975

[2] Moses,F.: Optimization of Structures with Reliability Constraints, Symposium on Structural Optimization, AGARD Conference Proceedings Nr.36,1969

[3] Faber,M.M.: Stochastisches Programmieren, Physica Verlag, Würzburg 1970

/4/ Basler, E.: Der Aufbau von Sicherheitssystemen mit Hilfe der Methode der zweiten Momente, Sicherheit von Betonbauten, Deutscher Beton Verein e.V. ,Wiesbaden 1973

/5/ Dinkelbach, W.: Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung Springer Verlag, Berlin 1969

/6/ Bracken, J. und McCormick, G.: Selected Applications of Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, New York 1968

/7/ Lipp, W. und Thierauf, G.: Die Bedeutung des Kraft- und des Weggrößenverfahrens für die Optimierung von Tragwerken nach der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode, Kongreßbeitrag zum Thema II in diesem Heft

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit statisch unbestimmter Konstruktionen mit Hilfe der stochastischen Programmierung angegeben. Aus dieser Berechnungsmethode folgt dann die Formulierung der Traglastbemessung (plastische Optimierung) für zulässige Versagenswahrscheinlichkeiten.

SUMMARY

A method for the approximate computation of the probability of failure of statically indeterminate structures is proposed. It represents a direct application of stochastic programming to the limit analysis problem. This solution then leads to a formulation of the plastic design problem for allowable probabilities of failure.

RESUME

On propose dans ce travail une méthode pour estimer la probabilité de ruine des structures hyperstatiques. La méthode est une application directe de programmation stochastique à l'analyse des charges limitées. Cette solution donne une formulation pour le problème du dimensionnement plastique avec une probabilité de ruine admissible.