

# Theme IIb: System and geometrical optimization for linear and non-linear structural behaviour

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **IABSE congress report = Rapport du congrès AIPC = IVBH  
Kongressbericht**

Band (Jahr): **10 (1976)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## **II b**

**Optimisation des systèmes et des dimensions pour des comportements structuraux linéaires et non-linéaires**

**Optimierung der Systeme und der Abmessungen bei linearem und nicht-linearem Verhalten des Tragwerkes**

**System and Geometrical Optimization for Linear and Non-Linear Structural Behaviour**

Leere Seite  
Blank page  
Page vide

## Über das Leistungsvermögen von Tragwerken am Beispiel von Balken, Druckbogen und Zugbogen

Capacity Range of Structures, such as Beams, Compression Arches and Tension Arches

Capacité de résistance de structures telles que poutres, arcs de compression et arcs de tension

HELMUT BOMHARD

Direktor der Dyckerhoff & Widmann AG  
München, BRD

### 1. Einführung

Balken, Druckbogen und Zugbogen sind die Grundformen aller Tragwerke zur Bewältigung von Spannweiten. Die eine Spannweite bestimmenden Größen und ihr Zusammenwirken, die Bandbreite technisch möglicher Spannweiten, lassen sich denn auch an diesen Grundformen am besten studieren. Dies um so mehr als die Gesetzmäßigkeiten verhältnismäßig leicht analytisch faßbar sind.

Ziel des Beitrags sind Spannweitenfunktionen für alle drei Grundformen bei allgemeinen Baustoffgesetzen und ggf. Gleichgewicht am verformten System, wenn nötig mit nichtlinearen Geometriebeziehungen, auf deterministischer Basis und für statische Belastung.

Die Spannweitenfunktionen bilden wichtige Grundlagen für jeden Entwurf und jede Tragwerkentscheidung und sind Hilfen bei der Optimierung.

### 2. Die Spannweitenfunktion

Die Spannweite ist Ausdruck des Leistungsvermögens. Sie ist bei einem bestimmten Versagenszustand eine Funktion des Systems (S), der Form (F) und der Baustoffe (M) des Tragwerks sowie der Fremdlast (L), die getragen werden muß:

$$l = f(\text{System, Form, Baustoff, Fremdlast}) \quad (1).$$

"Fremdlast" ist für das Tragwerk alles, was nicht Teil seiner tragenden Form (= aktives Gewicht  $g_a$ ) ist, wie etwa das Gewicht von Pfetten (= passives Gewicht  $g_p$ ), die quer zu einem Balken gespannt sind und die gesamte Verkehrslast  $p$ .

Die Spannweitenfunktion (1) läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen als Produkt dreier Kenngrößen  $K$  schreiben:

$$l = K_{S+F_{\text{längs}}} \cdot K_{M+F_{\text{quer}}} \cdot K_L = l_{\text{Gr}} \cdot K_L \quad (2a),$$

nämlich dann, wenn 1. das System sich statisch bestimmt verhält, 2. das Gleichgewicht am unverformten System angeschrieben werden kann und 3. Fremdlast  $g_p + p$  und aktives Gewicht  $g_a$  affin sind. Es beschreiben:

$K_{S+F_{\text{längs}}}$	das System und die Verteilung der Tragwerkmasse in seiner Längsrichtung,
$K_{M+F_{\text{quer}}}$	die Baustoffe und die Verteilung der Tragwerkmasse in Systemquerrichtung,
$K_L$	die Fremdlast.

So aufgeschlüsselt sind die sehr unterschiedlichen Einflüsse, die  $l$  bestimmen, am leichtesten durchschaubar.

Bei Lastaffinität allein ist:  $l = K_{S+F+M} \cdot K_L = l_{Gr} \cdot K_L$  (2b).

Die Einflüsse aus System, Form und Baustoff lassen sich dann nicht mehr trennen.

In (2) ist:  $K_L = \frac{1}{1 + (g_p+p)/g_a}$ ,  $0 \leq K_L \leq 1$  (3).

Die Grenzspannweite  $l_{Gr}$  ist demnach die Spannweite bei verschwindender Fremdlast ( $K_L = 1$ ). Sie kann nicht mehr übertroffen werden: Das Leistungsvermögen des Tragwerks ist erschöpft.

Den Untersuchungen liegen der Einfachheit halber Spannweitenfunktionen nach (2) zugrunde. Die so gewonnenen Aussagen bleiben qualitativ gültig, auch wenn Fremdlast und tragendes aktives Gewicht nicht affin sind.

### 3. Die Tragwerkformen

#### 3.1 Balken

Grenzfälle von Balkensystemen sind der "einfache Balken" und der "Kragbalken". Mit ihnen ist der gesamte Leistungsspielraum von Balkensystemen faßbar. Der einfache Balken begrenzt das Leistungsvermögen nach unten, der Kragbalken nach oben. Seilverspannte Balken werden nicht betrachtet. Sie besitzen bei engen Seilabständen hohes Leistungsvermögen und sind dann dem Kragbalken mit dem Idealquerschnitt  $m_U = 1$  (s. Bild 2) vergleichbar.

Der Einfluß der Baustoffe und der Querschnittform ist bei beiden Systemen gleich:

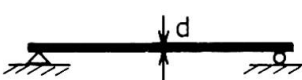
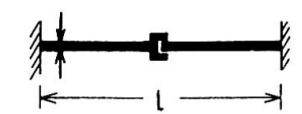

$$K_{M+F_{\text{quer}}} = \frac{\beta_R}{\gamma} \frac{m_U}{\nu} \tag{4}$$

Dabei bedeuten:

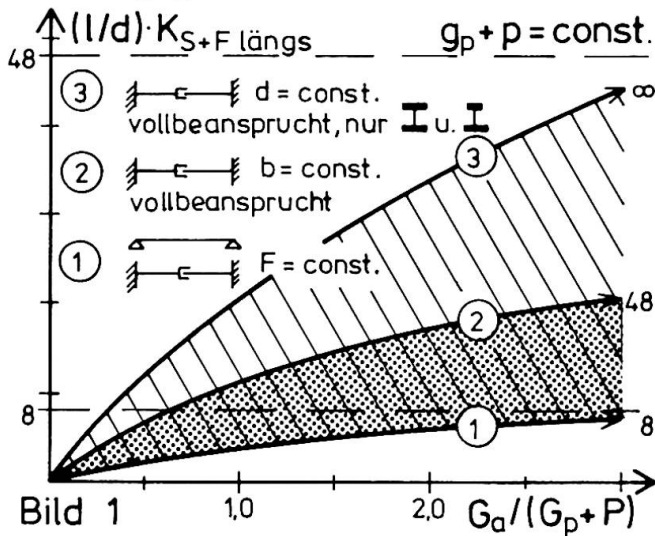
- $\beta_R$  Rechenfestigkeit des Bezugsbaustoffs
- $\gamma = a \rho$  Berechnungsgewicht des Balkenmaterials im Beschleunigungsfeld  $a$  (Erde  $a = 9,81 \text{ m/s}^2$ )
- $\beta_R / \gamma$  Reißlänge bzw. Zerdrückhöhe des Balkenmaterials bei zugfestem bzw. druckfestem Bezugsbaustoff
- $m_U$  bezogenes Bruchmoment  $M_U / F d$   $\beta_R$ , als Maß der Beanspruchbarkeit des Querschnitts (Fläche  $F$ , Höhe  $d$ , Breite  $b$ ) mit dem Größtmoment
- $\nu$  Gesamtsicherheitsbeiwert.

Wenn für das Tragvermögen ausnahmsweise der Gebrauchszustand maßgebend ist, muß in (4)  $m_U / \nu$  durch  $m$  des Gebrauchszustands ersetzt werden.

Die Bandbreite des Faktors  $K_{S+F_{\text{längs}}}$  ist dagegen sehr verschieden:

	$8 \frac{d}{l} \leq$	$\leq 9,9 \frac{d}{l}$	(5)
	$8 \frac{d}{l} \leq K_{S+F_{\text{längs}}}$	$\leq \infty$ : ideal Bild 1: real	(6)
	$2 \frac{d}{l} \leq$	$\leq \infty$ : ideal Bild 1: real (1/4 der Werte)	(7)

Die Werte auf der linken Seite gehören zu Balken mit konstantem Querschnitt, die auf der rechten zu - in jedem Querschnitt - vollbeanspruchten mit konstanter Höhe und idealem Zweipunktquerschnitt (quasi Fachwerkbalken). Im einen Fall ist die Tragwerkmasse demnach überhaupt nicht auf den Momentenverlauf abgestimmt, im anderen dagegen vollkommen.



Der ideale Wert  $\infty$  besagt nicht, daß  $l$  auch bei realen Kragbalken  $\infty$  groß oder auch nur sehr groß werden kann. Durch nicht affine Fremdlast und einen im Bereich der Kragbalkenspitze technologisch bedingten Mindestbalkenquerschnitt sinkt das Leistungsvermögen außerordentlich ab: der in (6) und (7) angegebene  $\infty$  große Leistungsspielraum schrumpft z.B. allein durch eine konstante Fremdlast auf den in Bild 1 schraffierten endlichen Bereich zusammen. Der baupraktisch nutzbare Spielraum ist noch kleiner, vor allem wenn  $d$

$\neq$  const. ist (im Bild gerastert) oder unterschiedliche Lastfälle zu berücksichtigen sind.

### 3.2 Druckbogen

Die nach oben gekrümmte Bogenform ist keine Form minimaler potentieller Energie. Ein Druckbogen hat deshalb den Drang, nach unten durchzuschlagen, sein Tragvermögen geht spätestens mit dem Einsetzen des Durchschlags verloren. Obwohl Durchschlagvorgänge nur mit einer geometrisch nichtlinearen Theorie faßbar sind, genügt für die numerische Traglastrechnung im Schlankheitsbereich, den die technischen Baubestimmungen erlauben, die geometrisch linearisierte Theorie. Bei den baupraktisch allein bedeutsamen Pfeilverhältnissen  $f/l \geq 0,1$  kann außerdem die Achsdehnung unberücksichtigt bleiben.

Das Leistungsvermögen ist am kleinsten, wenn der Durchschlagvorgang ohne Gleichgewichtsverzweigung abläuft. Dazu gehören Lastkombinationen, die die jeweils kritische Ausweichform durch gleichsinnige Störmomente begünstigen: antimetrische Momente beim 2-Gelenk-Bogen, beim gelenklosen Bogen und beim steilen 3-Gelenk-Bogen, symmetrische dagegen, wenn dieser flach ist (etwa  $f/l < 0,3$ ). Die kritische Fremdlast muß demnach zwei Anteile enthalten: einen voraussetzungsgemäß zu  $g_a$  affinen - durch  $K_L$  erfaßten - und einen anderen, - durch  $\beta$  gekennzeichneten - der die Störmomente erzeugt ( $\beta = q_{anti} K_L / g_{a,G}$  bei antimetrischer Störlast  $q_{anti}$ ,  $\beta = Q_G K_L / g_{a,G} l$  bei symmetrischer Störlast  $Q_G$  im Bogenscheitel).

Für den als Stützlinie für  $g_a$  geformten Kettenlinienbogen ( $F = \text{const.}$ ) sind die Kenngrößen für System, Form und Baustoff  $K_{S+F+M}$ :

$$\begin{array}{c} \text{Diagramm 1: Bogen mit E: 1/4-Pkt} \\ \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}}{\cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}} \cos \rho_E \frac{n \beta, E_{cr}}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{4} \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right)^2}} \left(1 + \frac{v_G}{f} \cos^2 \rho_E\right)} \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagramm 2: Bogen mit d, f} \\ \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}}{\cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}} \cos \rho_E \frac{n \beta, E_{cr}}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{4} \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right)^2}} \left(1 + \frac{v_G}{f} \cos^2 \rho_E\right)} \end{array} \quad (9)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagramm 3: Bogen mit l, \varphi} \\ \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}}{\cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right) \frac{\beta_R}{\gamma}} \cos \rho_E \left[ \frac{n \beta, E}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{4} \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right)^2}} \left(1 + \frac{v_G}{f} \cos^2 \rho_E\right)} + \frac{2m_A \left(\frac{d}{l}\right)}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{4} \frac{1 - \cos \rho_A \left(\frac{l}{f}\right)^2}} \left(1 + \frac{v_G}{f} \cos^2 \rho_E\right)} \sin \rho_E \right]_{cr} \end{array} \quad (10).$$

Die bezogenen kritischen Schnittgrößen  $n = N/F\beta_R$  und  $m$  enthalten implizit die Einflüsse aus (S), (F), (M) und (L). Bis auf das Glied mit  $v_G$ , der lotrechten Verschiebung des Scheitelgelenks beim 3-Gelenk-Bogen, stimmen (8)(9)(10) formal mit den Ausdrücken der Theorie 1. Ordnung überein. Ab etwa  $f/l > 0,3$  gilt (9) auch für den 3-Gelenk-Bogen.

$$\text{Für flache Kettenlinienbogen ist } \frac{1 - \cos \rho_A}{\cos \rho_A} \frac{l}{f} \approx 8 \frac{f}{l} \quad (11).$$

Damit kann bis etwa  $f/l < 0,3$  gerechnet werden.

Das Leistungsvermögen ist um so kleiner, je größer die Störmomente sind und je schlanker der Bogen ist. Es wird dann auch mehr und mehr  $f/l$ -unabhängig. Nur bei sehr kleinen Störmomenten werden in etwa die klassischen Extremstellen für  $\max. l$  erreicht (z.B.  $f/l \approx 0,3$  beim Kettenlinienbogen). Der Leistungsabbau kann in allgemeiner Form nur qualitativ angeschrieben werden:

$$n_{\beta,cr} \geq n_{\beta,UII} < n_{\beta,UI} < n_U, (m = 0) \quad (12).$$

Bei  $n_U$  ist wegen  $m = 0$  das Leistungsvermögen des Querschnitts ausgenutzt, durch die Störmomente nimmt es ab auf  $n_{\beta,UI}$ , durch den Einfluß der Bogenverformungen auf  $n_{\beta,UII}$ ; bei "Stabilitätsversagen" geht das Tragvermögen bereits im Innern des  $n$ - $m$ -Interaktionsdiagramms verloren,  $n_{\beta,cr}$  ist dann  $> n_{\beta,UII}$ . Numerische Berechnung ohne besonderen Aufwand nach [1] möglich, dort und in [2] Beispiele zu (12).

Großes Leistungsvermögen setzt gedrungene Bogen voraus. Querschnitte, die dem idealen 2-Punkt-Querschnitt nahekommen, bringen Leistungssteigerung vor allem bei großem  $l/d$ ,  $f/l$  und großen Störmomenten. Der gelenklose Bogen ist am leistungsstärksten. Ausweichen senkrecht zur Bogenebene bedeutet zusätzlichen Leistungsabbau.

### 3.3 Zugbogen

Ein biegesteifer Zugbogen vermag, dem Druckbogen ähnlich, das Leistungsvermögen des Querschnitts nicht auszunutzen:

$$n_{\beta,cr} = n_{\beta,UII} \begin{array}{l} > n_{\beta,UI} \\ < n_U, (m = 0) \end{array} \quad (13),$$

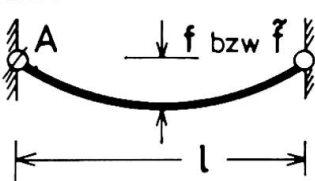
wenn auch bei ihm die Systemverformungen ( $n_{\beta,UII} > n_{\beta,UI}$ ) leistungssteigernd wirken.

Ein Zugbogen muß aber nicht biegesteif sein: Die hängende Bogenform ermöglicht als Form minimaler potentieller Energie den biegeweichen Bogen mit voller Querschnittsausnutzung

$$n_{\beta,cr} = n_U, (m = 0) \quad (14).$$

Er wird dadurch zum leistungsfähigsten System.

Baupraktisch bedeutsam ist allein der flache Kettenlinienbogen mit



$$K_{M+F_{\text{quer}}} = \frac{\beta_R}{\gamma} \frac{n_{UA}}{v} \quad (15)$$

$$K_{S+F_{\text{längs}}} = \frac{8}{\sqrt{1 + 16(\tilde{f}/l)^2}} \frac{\tilde{f}}{l} \approx 8 \frac{\tilde{f}}{l} \quad (16).$$

Je nach Bogenbaustoff kann statt  $n_{UA}/\gamma$  auch der Wert des Gebrauchszustandes  $n_A \equiv n_{(m=0)}$  maßgebend sein. Der Zirkumflex kennzeichnet das Pfeilverhältnis des verformten Bogens

$$\tilde{f}/l \approx f/l \sqrt{1 + 3/8 \cdot (l/f)^2 \cdot (\tilde{b} - b)/l} \quad (17)$$

mit der gedehnten Bogenlänge  $\tilde{b}$ .

Von allen Tragwerkformen für Baukonstruktionen dürfen beim biegeweichen Bogen als einziger die Geometriebeziehungen nicht von vornherein linearisiert werden. Dem entspricht (17). Die lineare Beziehung geht um so eher verloren, je flacher der Bogen ist.

Der biegeweiche Bogen ist kinematisch verschieblich, weil seine Achse stets Seillinie der jeweiligen Belastung sein muß. Kritisch sind antimetrische Störungen zusammen mit hoher Entlastung. Sie können mit wachsendem  $f/l$  Anlaß großer Verformungen sein, ein zu leichter oder ein in anderer Weise nicht ausreichend stabilisierter Bogen kann nach oben durchschlagen. Dieses Durchschlagproblem, das in [2] behandelt ist, beeinträchtigt das Leistungsvermögen nicht.

#### 4. Die Baustoffe

Die Leistungskenngrößen  $K$  enthalten den Baustoffeinfluß in allgemeingültiger Form als Produkt

$$\beta_R/\gamma \cdot n_U \text{ bzw. } \beta_R/\gamma \cdot m_U \quad (18)$$

Die Spannungsdehnungslinien stecken dabei in  $n$  und  $m$ , ebenso die Querschnittform und der kritische Dehnungszustand.

Das Leistungsvermögen wächst mit der Reißlänge und der Zerdrückhöhe. Hochfeste Stähle und hochfeste Betone und Leichtbetone kennzeichnen die Entwicklung, mit der Tendenz, auch im Betonbau zu Werten zu kommen, die denen von Baustahl vergleichbar sind.

Für  $n_U$  und  $m_U$  lassen sich von der Spannungsdehnungslinie unabhängige obere Grenzwerte angeben:

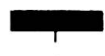



$n_U = 1$	$m_U = 0,5$	$m_U = 1,0$
Form	$1/2 \cdot F$ 	$1 \cdot F$ 
beliebig	$1/2 \cdot F$ 	$0 \cdot F$ 

Bild 2

$$\beta_D = \beta_Z = \beta_R$$

$$\beta_D = \beta_R, \beta_Z / \beta_D \rightarrow \infty$$

bei homogenem Material.  $n_U = 1$  ist im biegeweichen Zugbogen realisierbar.  $m_U = 0,5$  und  $1,0$  lassen sich als die Beanspruchbarkeiten der Querschnitte von Fachwerkbalken deuten, deren Diagonalengewicht verschwindend klein ist. Tatsächlich brauchen alle biegebeanspruchten baupraktischen Querschnitte gewisse Zuggurtmassen und, vor allem im Vollwandbereich, Stegmassen, die das Leistungsvermögen verringern. Für sie sind deshalb  $m_U = 0,5$  und  $1,0$  unerreichbare Grenzwerte:  $0,5$  für die Querschnitte des Stahlbaus,  $1,0$  für die des Spannbetonbaus.

Für Betontragwerke seien noch einige weitere Angaben gemacht:

##### 4.1 Balken

Das Leistungsvermögen der Balkenquerschnitte wird durch die Tragfähigkeit der Biegedruckzone begrenzt (Grenzstauchung  $\epsilon_{bU}$ ). Voll nutzbar wird es durch eine entsprechend hohe Bewehrung der Biegezugzone, wobei die Bewehrungsgrenze normalerweise aus dem Wunsch



folgt, ein Versagen der Druckzone zu vermeiden, bevor die Zugbewehrung fließt (Bruchvorankündigung durch  $\xi_e \geq 3 \text{ ‰}$ ).

Im übrigen wird hohes Leistungsvermögen durch geschicktes Formen der Querschnitte erreicht. Wie groß dabei der Spielraum ist, zeigen die Grenzformen "Rechteckquerschnitt" mit  $m_U \approx 0,25$  und "idealer Zweipunktquerschnitt" mit  $m_U = 1,0$  bei unbewehrter Druckzone. Die Bandbreite der realen, baupraktischen Querschnitte ist der in Zuggurt und Steg allein schon technologisch bedingten Betonflächen wegen beträchtlich schmaler. Die bei großen Spannweiten bisher gebauten Formen vollwandiger Balken besitzen etwa

$$\begin{aligned} 0,35 \leq m_U &\leq 0,60 \\ 0,40 \leq \bar{\mu} = \mu \beta_S / \beta_R &\leq 0,65 \end{aligned} \quad (19).$$

Je höher  $m_U$  ist, um so weniger ist die Beanspruchbarkeit von der  $\sigma - \epsilon$ -Linie des Betons abhängig.

Nur mit Hilfe der Vorspannung gelingt es, dem Idealquerschnitt mit  $m_U = 1,0$  nahezukommen, denn nur durch Vorwegnehmen der Stahldehnung werden hochfeste Stähle ausnutzbar, so daß sich große und größte Zugkräfte in verhältnismäßig kleinen Betonquerschnitten unterbringen lassen. Die damit erzielbare Einsparung an Querschnittfläche wächst mit der Spannweite. Der Vorspanngrad selbst beeinflußt i.a. nur das Verhalten im Gebrauchszustand, nicht aber das Leistungsvermögen. Auch eine "Druckspannbewehrung" zur Zugvorspannung der Druckzone erhöht das Leistungsvermögen nur durch den Bewehrungsgehalt der Druckzone. Wenn die Gebrauchsfähigkeit dies zuläßt, soll auch bei Vorspannung nicht mehr Bewehrung eingelegt werden, als der Bruchzustand erfordert mit einem möglichst hohen Anteil an Spannstahl.

#### 4.2 Druckbogen

Im Druckbogen sind zweipunktnahe Querschnittformen der einfachen Rechteckform nicht so selbstverständlich weit überlegen wie im Balken, weil die ihnen eigene überragende Steifigkeit verlorengelht, sobald einer der Gurte reißt. Die Tragfähigkeit fällt dann jäh ab, auf Werte, die sich von denen des Rechteckquerschnitts meist nurmehr unwesentlich unterscheiden. Hohlquerschnitte sind deshalb nur dann entscheidend leistungsfähiger, wenn sie im gesamten Beanspruchungsbereich ungerissen bleiben. Dazu bedarf es vielfach gedrungener Bogen, vor allem bei merklichen Störmomenten und mit wachsendem  $f/l$ . Auch eine Vorspannung kann manchmal zweckmäßig sein.

Mit dem Bewehrungsgehalt ist das Leistungsvermögen nur im Zugbruchbereich entscheidend zu beeinflussen. Die Wirkung wächst mit den Störmomenten und wird durch die Schlankheit beschleunigt. Doch ist selbst bei großen Störmomenten eine bewehrungsproportionale Leistungssteigerung nicht erreichbar. Nahezu ohne Wirkung bleibt der Bewehrungsgehalt bei Stabilitätsversagen, zu dem sehr kleine bis kleine Störmomente gehören. Dann kommt es vor allem auf die  $\sigma - \epsilon$ -Linie des Betons an.

Die Bandbreite der  $n_{\beta,cr}$  des Zweigelenkbogens ist in [2] untersucht.

#### 4.3 Zugbogen

Im biegeweichen Zugbogen hat der Beton, anders als in den mit Biegung arbeitenden Systemen, keine wesentliche Tragfunktion, diese übernehmen die Spannglieder. Der Beton bildet vor allem Raumabschluß oder Fahrbahn, formstabilisierendes Element (Schale, Platte,

Gewicht) und Korrosionsschutz der Bewehrung.

Wenn Spannglieder der Festigkeit  $\beta_Z$  die Bewehrung bilden, ist

$$n_{UA} = \mu_Z \beta_Z / \beta_R \quad (20).$$

Der Bewehrungsgehalt  $\mu_Z$  hat nur technologische Grenzen: Die Spannglieder sollen des einfachen Korrosionsschutzes wegen im Betonquerschnitt Platz finden. Das ergibt

$$\text{etwa } \mu_Z \leq 0,15 \quad (21).$$

Bei Balken und Druckbogen setzt das Tragvermögen der Biegedruckzone dem Bewehrungsgehalt weit niedrigere technische Grenzen:

$\mu_Z = \beta_R / \beta_S$  oder  $\bar{\mu}_Z = 1$  als oberste Schranke beim idealen Zweipunktquerschnitt mit  $m_U = 1$  und etwa  $\bar{\mu}_Z \leq 0,65$  oder  $\mu_Z \leq 0,015$

bei den baupraktischen Vollwandquerschnitten (19). Der biegeeweiche Zugbogen kann demnach etwa 10mal so stark bewehrt werden wie Balken oder Druckbogen. Das, zusammen mit einem hohen  $\beta_Z$ , begründet sein überlegenes Leistungsvermögen.

Die nutzbare Stahlfestigkeit  $\beta_Z$  hängt allein vom plastischen Verformungsvermögen des Bogens ab. Sein Gleichgewicht verlangt ein Spannungsgefälle von den Kämpfern zur Bogenmitte. Deshalb ist das plastische Verformungsvermögen nur mit Stählen nutzbar, die einen Verfestigungsbereich besitzen. Das ist bei allen Spannstählen mehr oder weniger ausgeprägt der Fall. Da sich der Bogen nicht beliebig weit in den Verfestigungsbereich hinein verformen darf, wird  $\beta_Z$  durch das Erreichen kritischer Spannstahldehnungen begrenzt, etwa

$$\text{crit. } \varepsilon_Z \leq (1,0 \text{ bis } 1,5) 10^{-2} + \varepsilon_Z^{(0)} \quad (22),$$

mit der Spannbettdehnung  $\varepsilon_Z^{(0)}$  [3]. Bei Bogen bis etwa  $f/l \leq 0,1$

wird dadurch  $\beta_Z$  so groß, daß die im Gebrauchszustand zulässige

Stahlspannung zul  $\sigma_Z$  mit  $n_A = \mu_Z$  zul  $\sigma_Z / \beta_R$  (23)

das Leistungsvermögen bestimmt. - Bei Stählen mit idealelastisch-idealplastischem bzw. sprödem Verhalten wäre  $\beta_Z = \beta_S$  bzw.  $\beta_Z$  zu setzen.

## 5. Die Tragwerkmasse

Die das aktive Gewicht  $g_a$  bildende Tragwerkmasse ist dann am wirksamsten eingesetzt, wenn sie

- an jeder Tragwerkstelle und
- in jeder Querschnittfaser voll ausgenutzt ist und
- selbst möglichst wenig Beanspruchung erzeugt.

Damit ist hohes Leistungsvermögen gegeben, nicht aber unbedingt auch ein optimales Tragwerk vom Aufwand und Nutzen her gesehen. Je weniger das Leistungsvermögen gefordert wird, um so mehr darf und wird man von diesen Kriterien abweichen.

Das Abstimmen von Tragwerkmasse und Momentenverlauf lohnt sich demnach am meisten beim Kragbalken, der dadurch viel leistungsfähiger als der einfache Balken wird. Dieser reagiert darauf viel weniger empfindlich, weshalb bei ihm der mögliche Leistungsgewinn nur ein ziemlich grobes Abstimmen rechtfertigt (5) (6). Begründet ist dies in der unterschiedlichen Völligkeit des Momentenbildes beider Systeme: Der Kragbalken braucht, im Gegensatz zum einfachen Balken, die Tragwerkmasse dort, wo sie nur mit kleinem Hebelarm momentenwirksam ist. Ein Tragwerk aus aneinandergereihten, richtig geformten Kragbalken ist deshalb auch leistungsfähig-

ger als ein solches mit Einhängebalken oder aus Durchlaufbalken. Da der einfache Balken auch "Ersatzbalken" der Bogen ist, lohnen auch diese das Abstimmen der Tragwerkmasse auf den Beanspruchungsverlauf nur mit einem ähnlich eng begrenzten Leistungszuwachs. Der Zweigelenkdruckbogen nach (9) kann dadurch wenig mehr als 10 % weiter gespannt werden. Beim biegeweichen Zugbogen scheidet diese Möglichkeit, Leistung zu gewinnen, fast ganz aus.

Nicht ausgenutzte Tragwerkmasse kann sich sehr unterschiedlich bemerkbar machen: solange sie die Grenzspannweite  $l_{Gr}$  unbeeinflusst läßt, bedeutet sie eine Leistungsreserve und wirkt wie eine erhöhte Fremdlast, sobald durch sie aber  $l_{Gr}$  kleiner wird, wirkt sie leistungsmindernd. Das typische Beispiel für eine solche Leistungsminderung ist der Kragbalken mit  $F = \text{const}$ .

Bei jedem Tragwerk dürfen bestimmte Mindestabmessungen nicht unterschritten werden, die untere Grenze der Tragwerkmasse ist deshalb technologisch bedingt. Auch das sind nicht ausgenutzte Tragwerkmassen und leistungsmäßig dementsprechend zu behandeln.

## 6. Die Fremdlast

Beide Anteile der Fremdlast, die nutzungsbedingte Verkehrslast  $p$  und das konstruktionsbedingte passive Gewicht  $g_p$  beeinflussen das Leistungsvermögen gleich nachteilig durch  $K_L < 1,0$ . Vor allem bei hoher Leistungsforderung muß deshalb  $g_p$  so klein wie möglich gehalten werden.  $g_p$  ist nicht immer nur Gewicht, auch die formstabilisierende Vorspannung in Seilwerken und Seilnetzen zählt dazu. Flächentragwerke nutzen die Baumasse vielfältig, sie haben daher meist ein verhältnismäßig kleines  $g_p$ , Stabtragwerke mit ihren eindimensionalen Traggliedern dagegen ein großes.

Eine zur Tragwerkmasse nicht affine Fremdlast ist leistungsmäßig über ihre beanspruchungswirksamen Hebelarme zu beurteilen. Sind sie größer als die der Tragwerkmasse, wirkt die Nichtaffinität leistungsmindernd. Nur beim Kragbalken mit einer auf die Beanspruchung abgestimmten Tragwerkmasse ist die Annahme einer Affinität keine gute erste Näherung, weil bei ihm eine konstante Fremdlast sehr leistungsmindernd ist.

## 7. Das Maßstabgesetz

Die Spannweitenfunktion (1) beschreibt  $l$  als absolute Größe; mit  $\gamma / \beta_R$  multipliziert enthält sie nur mehr relative Größen:

$$l \cdot \gamma / \beta_R = \gamma / \beta_R \cdot f \text{ (Verhältnismerte für (S), (F), (M), (L))} \quad (1a).$$

Das ist das Maßstabgesetz des Leistungsvermögens. Beispiel:

$$l \frac{\gamma}{\beta_R} = 8 \frac{m_U}{v} \frac{d}{l} \frac{1}{1 + (g_p + p)/g_a} \cdot$$

Die linke Seite sagt nun aus, wie weit die Reißlänge oder Zerdrückhöhe des Bezugsbaustoffs als Spannweite nutzbar ist, - über  $\gamma = a\delta$  ist der Einfluß allgemeiner Schwerkraftfelder enthalten.

Wenn die Beanspruchbarkeit ausgenutzt und damit wie die Reißlänge und Zerdrückhöhe ein Festwert ist, müssen die Maßstabsfaktoren:  $\lambda$  für die Spannweite,  $\lambda_{d/l}$  für das Bauhöhenverhältnis und

$\lambda_{K_L}$  für das Lastverhältnis die Bedingung

$$\lambda = \lambda_{d/l} \cdot \lambda_{K_L} \quad \text{oder} \quad \bar{\lambda} = \lambda / \lambda_{d/l} = \lambda_{K_L} \quad (24)$$

erfüllen. Statt  $\lambda_{K_L}$  interessiert  $\lambda_{g_a}$ , der Maßstabsfaktor für die Tragwerkmasse, der mit ihm verknüpft ist. Bei konstant bleibender Fremdlast ist dieser

$$\lambda_{g_a} = \frac{1 - K_L}{1 - \bar{\lambda} K_L} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \lambda^2 \quad \text{bei } K_L \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad \frac{\lambda^2 - \bar{\lambda}}{\lambda^2 - 1} \quad (25)$$

$$\lambda_{g_a} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0: \text{Leistungsvermögen besteht} \\ \text{versagt.}$$

Bei  $\lambda_{g_a} = \lambda^2$  und  $\lambda_{d/l} = 1$  ist das gesamte Tragwerk affin größer geworden.  $K_L$  ist auf das Ausgangstragwerk bezogen.

Die Auswertung zeigt: Nur bei kleinen Spannweiten ist es möglich, ein Tragwerk, das sich bei einer Bauaufgabe bewährt hat, durch bloß affines Vergrößern einer größeren Aufgabe anzupassen. Bei großen Spannweiten muß stets und vor allem auch das Bauhöhen- oder Pfeilverhältnis vergrößert werden.

Das bedeutet: Große Tragwerke müssen nicht nur massiger sein als kleine, System, Form und Baustoffe sind schließlich nicht mehr frei wählbar, sondern werden eine Funktion der absoluten Größe.

(25) ist für Balken ermittelt. Die damit gewonnenen Aussagen gelten qualitativ auch für Bogen.

## 8. Das wirtschaftliche Leistungsvermögen

Das technische Leistungsvermögen endet mit der Grenzspannweite  $l_{Gr}$ . Tatsächlich wird ein Tragwerk aber lange vorher bedeutungslos, weil seine Wirtschaftlichkeit verlorengeht.

Aus (2) (3) folgt das aktive Gewicht, das bei gegebener Fremdlast aufzuwenden ist, um eine gegebene Spannweite zu bewältigen:

$$g_a = \frac{1}{l_{Gr}/l - 1} \quad (g_p + p) \geq \text{technolog. } g_a \quad (26).$$

Die Tragwerkmasse, beschrieben durch  $g_a$ , wächst demnach hyperbolisch mit abnehmendem Verhältnis  $l_{Gr}/l$  oder je mehr das technische Leistungsvermögen ausgeschöpft wird. Sie wird schließlich unwirtschaftlich groß, bei  $l_{Gr}/l = 1$  unendlich groß, auch wenn die Fremdlast noch so klein ist.

Ziel des Entwerfens muß es demnach sein, System und Baustoffe so zu wählen, das System so zu formen und das passive Gewicht so zu beeinflussen, daß der Abstand  $l_{Gr} - l$  groß genug bleibt, um  $g_a$  vernünftig klein zu halten. Wird für ein bestimmtes Tragwerk  $g_a$  unwirtschaftlich groß, muß ein leistungsfähigeres mit größerer Grenzspannweite gewählt werden. Ausreichendes Leistungsvermögen ist dabei im gesamten Spannweitenbereich nötig.

Die Tragwerkmasse zeigt zwar, daß die wahren Leistungsgrenzen wirtschaftlich bedingt sind, doch ist das im Leichtbau sinnvolle Prinzip des minimalen Gewichts kein allgemein brauchbares Kriterium für niedrige Herstellkosten oder gar für ein wirtschaftliches Bauwerk. Dazu sind die Stoff- und Verarbeitungskosten der einzel-

nen Baustoffe viel zu unterschiedlich. Wenn z.B. im Stahlbau  $g_a/(g_p + p) \leq 0,5$  die wirtschaftliche Grenze wäre, müßte sie im Betonbau um ein Vielfaches höher sein. Außerdem ist der Aufwand für die Stützkonstruktionen einzubeziehen, der vom einfachen Balken über den Kragbalken und Druckbogen bis zum erdverankerten Zugbogen größer und größer wird. Die Wirtschaftlichkeit eines Bauwerks ist deshalb - wenn überhaupt - nur im Einzelfall und nur als Ganzes zutreffend zu beurteilen.

#### SCHRIFTTUM

- [1] Bomhard, H.: Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen. IVBH - Symposium, Quebec 1974, Vorbericht S. 323-332
- [2] Bomhard, H.: Versagensformen und -größen der Druck- und Zugbogen des Hallenbaus. Sicherheit von Betonbauten, Beiträge zur Arbeitstagung, Berlin 1973, Wiesbaden: Deutscher Betonverein E.V. S. 341-351
- [3] König, G.: Zur Beurteilung der Sicherheit von Hängedächern aus Spannbeton, Habilitationsschrift TH Darmstadt, 1970

#### ZUSAMMENFASSUNG

Balken, Druckbogen und Zugbogen sind die Grundformen aller zur Bewältigung von Spannweiten geeigneten Tragwerke. Die für sie im gesamten Leistungsbereich massgebenden Spannweitenfunktionen werden angegeben und die diese bestimmenden Kenngrößen untersucht und diskutiert. Nichtlinearitäten der Baustoffe und - soweit erforderlich - auch der Geometrie werden berücksichtigt. Der Einfluss unterschiedlicher Baustoffgesetze und der Vorspannung wird studiert. Die Grenzen der Wirtschaftlichkeit und ihre Kriterien werden aufgezeigt.

#### SUMMARY

Beams, compression arches and tension arches are the fundamentals of all structures suitable to cope with spans. The standard span functions for the whole capacity range are specified and their characteristic values examined and discussed. Nonlinearities of building materials and - as far as necessary - of the geometry are considered. The effects of different laws of building material and of prestressing are studied. Limits of economy and their criteria are shown.

#### RESUME

Des poutres, des arcs de compression et des arcs de traction constituent les formes fondamentales de toutes les structures franchissant une certaine portée. Les fonctions de portées déterminantes sont indiquées, leurs valeurs caractéristiques sont examinées et commentées. Des non-linéarités des matériaux de construction et - si nécessaire - de la géométrie sont considérées. L'influence de différentes lois relatives aux matériaux de construction ainsi que de la précontrainte sont étudiées. Les limites économiques et leurs critères sont donnés.

**A Basic Parameter for Optimum Design of Arch and Suspension Bridges**

Un paramètre fondamental pour le calcul optimal de ponts suspendus et en arc

Ein Grundparameter für die Optimierung von Bogen- und Hängebrücken

ITIO HIRAI  
Professor  
Kumamoto University  
Kumamoto, Japan

TORAZO YOSHIMURA  
Professor  
Kyushu University  
Hakozaki, Fukuoka, Japan

**1. Introduction**

The purpose of this paper is to propose a basic parameter effective to the optimum designs of arch and suspension bridges. Since the dynamic factors ( e. g., eigenvalues and eigenvectors ) and the static factors ( e.g., influence lines for deflection and bending moment ) of an arch ( or suspension ) bridge are subjected to this parameter only, designated by  $F$ , we are able to determine the  $F$  value which satisfies the structural optimization of the bridge, which means that one constraint can be made for the design variables of the bridge. For the optimum design of an arch ( or suspension ) bridge, its geometry and the cross sectional areas of the elements such as the arch and the stiffening girder will be the design variables. These design variables are usually found by mathematical and numerical search methods. Although these search methods are applicable to a variety of problems, they require repeating similar calculation changing the values of the design variables until the optimum conditions are satisfied. So, it will save much computer cost to give the one constraint for the design variables.

There are many analogous points between a suspension bridge and an arch bridge, and they may be said to be essentially of the same type of structure from the view-point that they have girders stiffened with parabolic members ( = cable and arch ) respectively. So, both structures can be analyzed by a common theory (2).

In general, the cross sections of the elements such as the arch and the stiffening girder are variable. For these elements, the average values should

be used as approximate values. The errors due to the approximation seem to be small judging from numerical examples.

2. Theory

In this paper, the bridges are assumed to satisfy the following conditions:

- (i) The stiffening girder is of uniform cross section and simply supported at both ends.
- (ii) The cross section of the arch ( or cable ) is constant and its mass is transferred to the stiffening girder.
- (iii) The flexural rigidity of the arch can be transferred approximately to the stiffening girder.
- (iv) The arch ( or cable ) configuration is given by a parabolic function.
- (v) The arch ( or cable ) and stiffening girder are connected with an infinite number of hangers whose elongations are completely neglected.

When the arch and stiffening girder shown in Fig. 1 is forcibly deformed by the amount given by

$$w = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

where  $l$  : span, the horizontal thrust  $\Delta H$  of the arch is found from the compatibility condition:

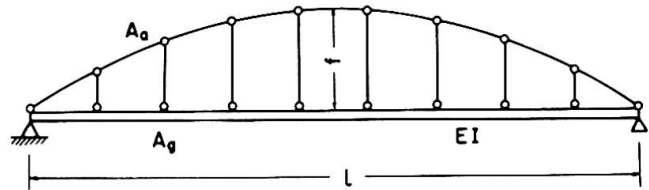


Fig. 1

$$\Delta H = \frac{16fEB}{\pi l^2} \sum_n \frac{a_n}{n} \quad \text{for } n = 1,3,5,\dots \tag{2}$$

$$= 0 \quad \text{for } n = 2,4,6,\dots \tag{3}$$

where  $B = \frac{A_a}{\frac{A_a}{A_g} + 1 + 8(\frac{f}{l})^2 + 19.2(\frac{f}{l})^4}$  (4)

$A_a$  ( $A_g$ ) : cross sectional area of arch ( girder ). From this, we see that the arch resists symmetric deformation only and does not resist asymmetric deformation. In other words, for asymmetric deformation the arch bridge is reduced to a simple girder.

The amplitude of the simple girder loaded with a periodical uniform load  $p_g \sin \omega t$  ( in Fig. 2 ) is given by

$$w = \frac{4p_g}{\pi \rho} \sum_n \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \sin(\frac{n\pi x}{l}) \tag{5}$$

where

$$\omega_{gn} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

( =  $n$ -th natural frequency of the girder ) and  $\rho$  : mass per unit length of the girder.

When the arch bridge is forced to vibrate at the amplitude represented by Eq. (5), the thrust  $\Delta H$  caused in the arch is computed directly from Eqs. (2) and (5), i.e.,

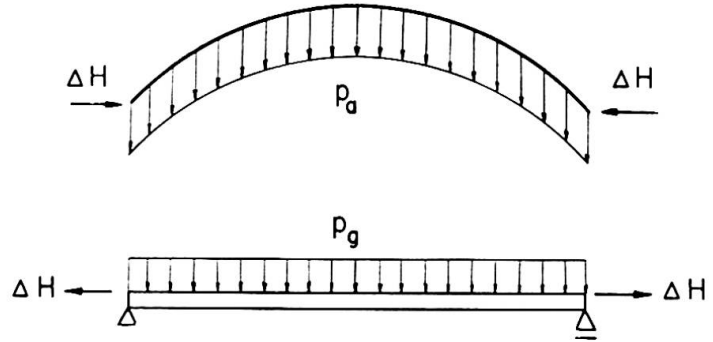


Fig. 2

$$\Delta H = \frac{64fEB}{\pi^2 \rho l^2} \sum_n \frac{1}{n^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} p_g \tag{6}$$

When the arch is isolated from the girder, retaining its deformation, a uniform load  $p_a$  must be placed on the arch to let it satisfy the equilibrium condition of force and moment, and its magnitude is determined from,(3)

$$p_a = \frac{8f}{l^2} \Delta H = \frac{512Ef^2B}{\pi \rho l^4} \sum_n \frac{1}{n^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} p_g \tag{7}$$

Fig. 3

Let us superpose the arch and girder to restore the arch bridge. The arch bridge constructed in this way is subjected to a uniform load with the magnitude

$$p_0 = p_a + p_g \tag{8}$$

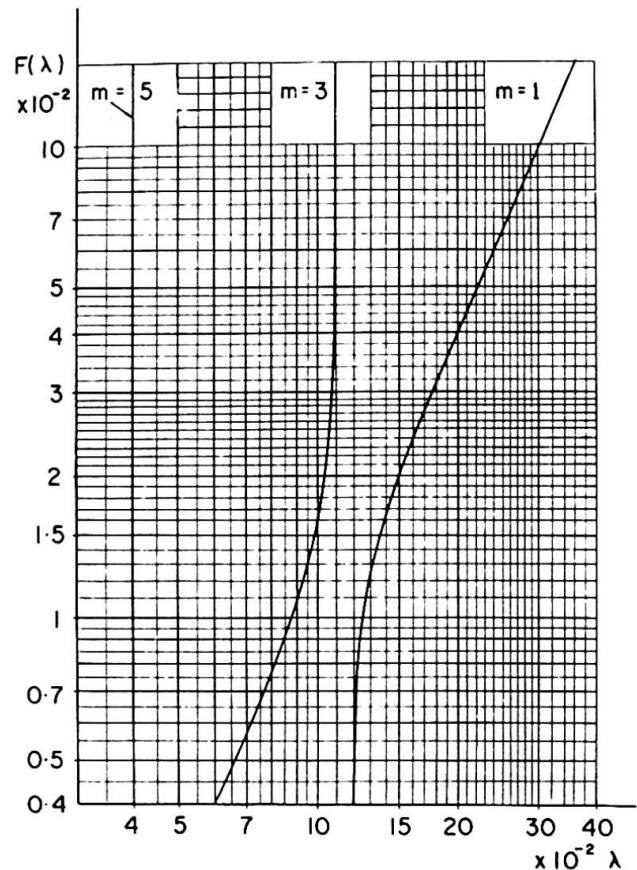
Using the condition that the applied force must be zero for free vibration, i.e.,

$$p_a + p_g = 0 \tag{9}$$

we arrive at the following frequency equation:

$$1 + \frac{512Ef^2B}{\pi^2 \rho l^4} \left\{ \frac{1}{n^2(\omega_{gn}^2 - \omega^2)} \right\} = 0$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \tag{10}$$





which can be expressible in the following nondimensional form,(1)

$$F(\lambda) = \frac{\pi^6 I}{512 f^2 B} = \sum_n \frac{1}{n^6 (1-n^4 \lambda^2)} - 1.0014 \tag{11}$$

where

$$\lambda = \frac{\omega g l}{\omega} , \quad \omega_{g1} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \dots (12)$$

The left hand side, i.e.,  $F$  -- value is a non-dimensional value to be determined from the dimensions of the arch bridge. The relation between  $F$  and  $\lambda$  is shown in Fig. 3. The  $m$ -th natural mode  $\phi_m(x)$  is computed by substituting the  $m$ -th natural frequency  $\omega_m$ , obtained from Eq. (11), into Eq. (5).

That is,

$$\phi_m(x) = \sum_n b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l} , \quad \left( b_{mn} = \frac{1}{n(\omega_{gn}^2 - \omega_m^2)} \right) \tag{13}$$

For the normalized mode  $\Phi_m(x)$ , we have

$$\Phi_m(x) = C_m \sum_n b_{mn} \sin \left(\frac{n\pi x}{l}\right) , \quad C_m^2 = \left(\frac{2}{\rho l}\right) \left(\sum b_{mn}^2\right)^{-1} \tag{14}$$

The first normalized mode  $\Phi_{m=1}(x)$  is shown in Fig. 4 for some  $F$ -values. Once the  $m$ -th natural frequencies  $\omega_m$  and the normalized modes  $\Phi_m(x)$  have been found, the dynamic and static responses are easily determined.

The static deflection  $w_s$  at  $x$  due to the force  $P_0$  applied at  $x_j$  is found from

$$w_s = \sum_m \frac{\Phi_m(x) \Phi_m(x_j)}{\omega_m^2} P_0 \tag{15}$$

and the bending moment  $M^B$  is calculated from

$$M^B = - EI \frac{d^2 w_s}{dx^2} \tag{16}$$

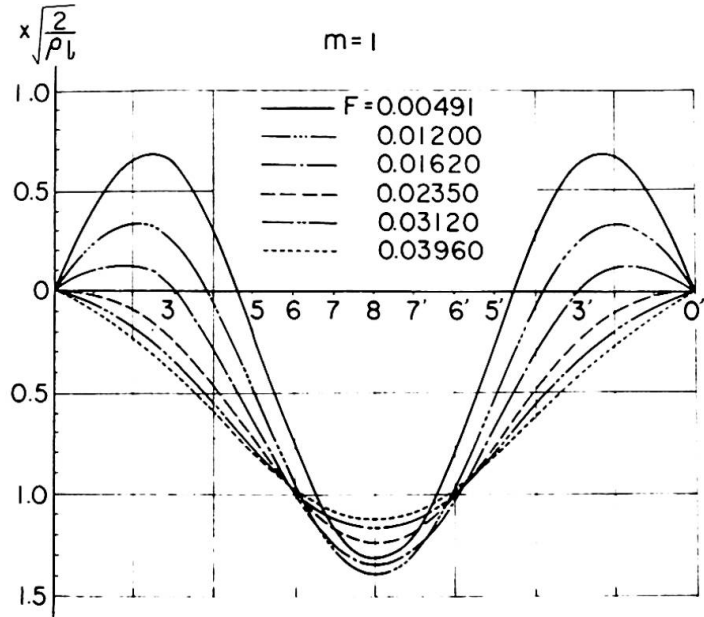


Fig. 4

Note that these responses are subjected to the non-dimensional parameter  $F$ . For example, the influence lines for deflection at  $l/4$  and  $l/2$  points are shown in Figs. (5) and (6).

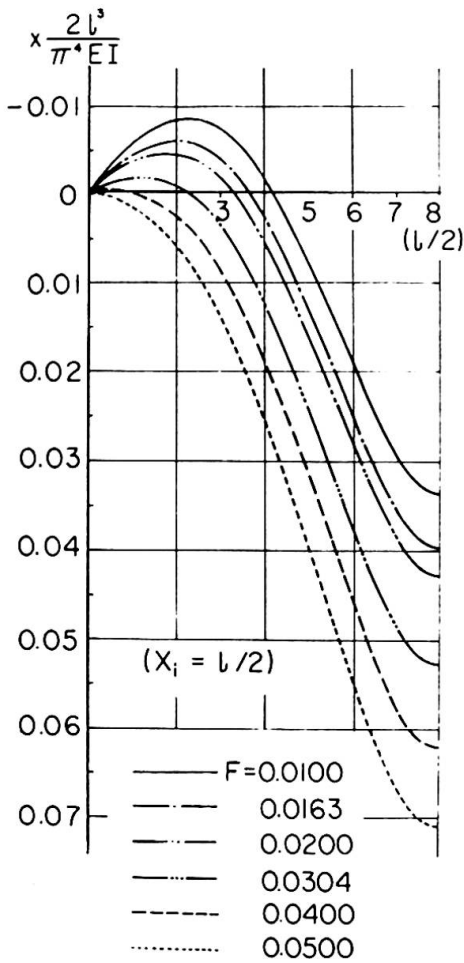


Fig. 5

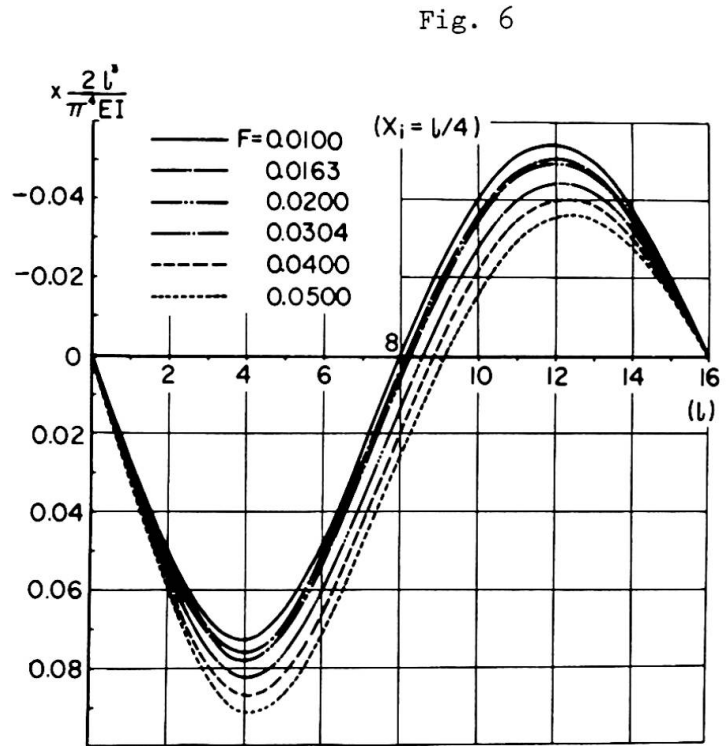


Fig. 6

Fig. 7

The aforementioned equations can be used for the arch bridges shown in Fig. 7 by changing the cross sectional areas and flexural rigidities of arches and stiffening girders. For the system (e) in Fig. 7, the flexural rigidity  $I_g$  of the girder is zero and the cross sectional area  $A_g$  of the girder is infinity.

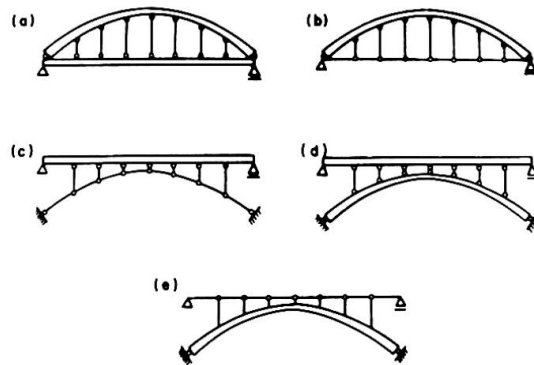
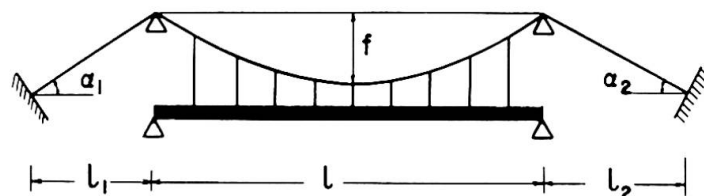


Fig. 8

The above equations derived for arch bridges can be applied to suspension bridges. For the suspension bridge shown in Fig. 8, the  $B$  in Eq. (4) is



$$B = \frac{A_c}{1 + 8\left(\frac{f}{l}\right)^2 + 19.2\left(\frac{f}{l}\right)^4 + \frac{l_1}{l} \sec^3 \alpha_1 + \frac{l_2}{l} \sec^3 \alpha_2} \quad (17)$$

where  $A_c$  : cross sectional area of the cable.

### 3. References

- 1 Hirai, I., " Analyses of Eigenvalue Problems by the Use of External Forces ", Research Report, ST-1-68, Engineering Science, Univ. of Western Ontario, London, Canada, Jan., 1968.
- 2 Yoshimura, T., Hirai, I., " Dynamic Analysis of Stiffened Arch Bridges and Suspension Bridges ", Transactions of Japan Society of Civil Engineers, No. 115, 1965, pp. 1-11.
- 3 Yoshimura, T., Hirai, I., " Dynamic Analysis of Arch with Stiffening Girder", Transactions of Japan Society of Civil Engineers, No. 101, 1964, pp. 1-14.

### SUMMARY

This paper proposes a basic parameter effective to the optimum design of arch and suspension bridges. The dynamic factors (for example, eigenvalue problem) and static factors (for example, stress and deformation) of these bridges are subjected to this parameter only, which means that one constraint can be made for some design variables. So, numerical calculation will easily be done on the basis of this parameter. Several diagrams are shown.

### RESUME

Ce mémoire propose un paramètre fondamental qui est efficace pour le calcul optimal de ponts suspendus et en arc. Les facteurs dynamiques (par exemple le problème des valeurs principales) et les facteurs statiques (par exemple la contrainte et la déformation) de ces ponts ne dépendent que de ce paramètre. Le nombre de variables peut alors être réduit et les calculs numériques effectués facilement. Quelques diagrammes sont présentés.

### ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Mitteilung wird ein für die Optimierung von Bogen- und Hängebrücken geeigneter Grundparameter vorgeschlagen, der dynamische Faktoren (z.B. Eigenwertprobleme) und statische Faktoren (z.B. Spannung und Deformation) dieser Brücken berücksichtigen kann. Dies bedeutet, dass die Zahl der Entwurfsvariablen reduziert und die Berechnung vereinfacht werden kann. Diagramme für die praktische Anwendung werden angegeben.

## Planning of Floor System at Long-Span Suspension Bridges

Conception du système de platelage pour des ponts suspendus de longue portée

Deckensysteme für weitgespannte Hängebrücken

TOSHIKAZU SURUGA  
Chief, Technical Section  
S.C.E. Group, Kobe Steel Ltd.  
Kobe, Japan

YUKIO MAEDA  
Prof. of Civil Engineering  
Osaka University  
Suita, Osaka, Japan

### 1. Introduction

When a long-span suspension bridge is planned, the selection of its floor system as well as its suspended structure has great influence on its safety and economy, and its erection and maintenance. When a floor system is planned at a long-span suspension bridge provided with stiffening truss girders, many kinds of floor systems can be proposed as discussed later in this paper. At the present study, structural features of various floor systems are examined and compared with one another on such condition as fabrication, erection, maintenance, economy, etc..

Through discussions the relationship of planning of the floor system with construction methods will be evaluated in detail for a design example of bridge in Japan.

### 2. Suspended Stiffening Structures and Floor System

In the planning of a long-span suspension bridge two type of suspended stiffening structures are considered: one is a truss type structure and another is a box girder type one. Since the former is more conventional than the latter in Japan, a truss type stiffening structure with a floor system combined with an open grating floor, as shown in Fig. 1.

Many kinds of construction methods for the floor system can be proposed as discussed later in this paper. Now, the comparative study was carried out on a heavy weight floor system (closed steel grating floor) with a light weight one (steel plate deck) in steel amount and cost at

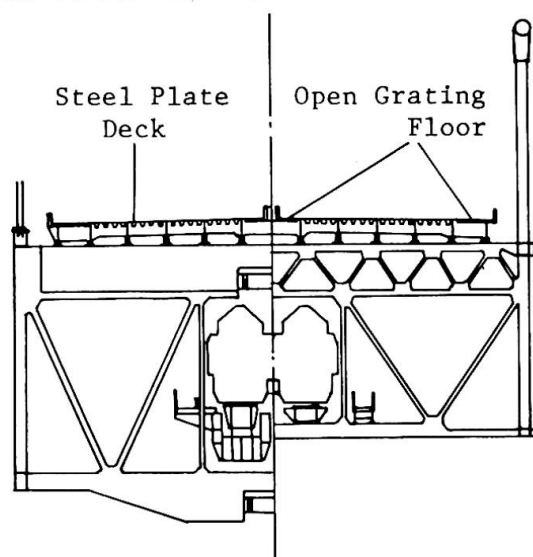


Fig. 1 Cross Section of Suspension Bridge

their construction time, at an illustrated suspension bridge, which has a length of 1630 m consisting of a main span of 870 m and two side spans of each 380 m, and has a width of 30 m. The result of this comparison is given in the Table 1, which shows that the bridge with the light weight floor system has the advantage of the heavy weight one in steel amount and cost. Since there is an opinion that the floor system had better be heavier judged from the aerodynamic stability of a long-span suspension bridge, the relative merits for aerodynamic stability between heavy and light weight floor systems have to be discussed separately.

Table 1 Comparison for steel construction of super-structure at suspension bridge

Steel Works	Bridge with Closed Steel Grating Floor			Bridge with Steel Plate Deck		
	Weight (ton)	Unit Price (10 <sup>3</sup> yen)	Sum of Money (10 <sup>6</sup> yen)	Weight (ton)	Unit Price (10 <sup>3</sup> yen)	Sum of Money (10 <sup>6</sup> yen)
Floor System	11 420	350	3 997	11 930	400	4 772
Stiffening Structure	26 750	400	10 700	26 250	400	10 500
Cable	20 840	600	12 504	18 580	600	11 148
Tower	10 930	400	4 372	10 230	400	4 112
Anchorage	5 660	300	1 698	4 980	300	1 494
Total	75 600		33 271	61 970		32 026

### 3. Outline of Each Floor System

In planning of a floor system for a long-span suspension bridge, its load-carrying capacity, durability, aerodynamic stability, deformation adaptability, easy and fast erection, easy maintenance, overall cost saving and so on, have to be examined. Several floor systems including new construction methods which have been developed by authors, will be discussed as follows:

- (1) Floor system with reinforced concrete slab: A conventional reinforced concrete slab deck is considered to be generally cheapest one among various floor decks at present day in Japan. On the other hand, site works of forming and reinforcing at high elevation of a bridge are not always suitable for safe and fast erection.
- (2) Floor system with closed steel grating Floor<sup>1)2)</sup>: This type of floor, as shown in Fig. 2, was adopted in Verrazano Narrows

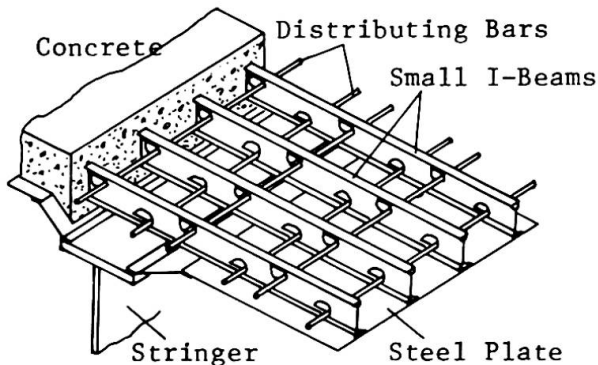


Fig. 2 Detail of Grating Floor System

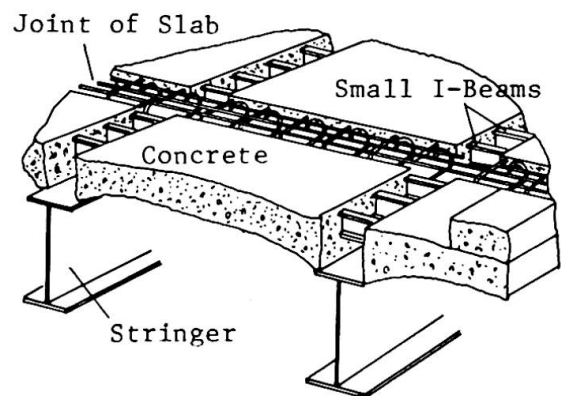


Fig. 3 Detail of Precast Concrete Steel Grating Floor

(UAS), Kanmon Bridge (Japan) and so on.

- (3) Floor system with precast concrete steel grating floor: This floor is illustrated in Fig. 3, and its slab concrete is precast at a shop and after it is connected to steel stringer, concrete is cast between slab and slab, and also between slab and stringer.
- (4) Floor system with prefabricated steel deck plate sandwiching concrete: This deck proposed by authors<sup>3)</sup>, consists of two steel plates and concrete sandwiched between them. These plates are connected with stud bolts, and stud shear connectors are welded to both of the plates making a steel-concrete composite deck. Photo. 1 shows shop assembly of this deck before filling up concrete. Fig. 4 and 5 show jointing methods of this deck.

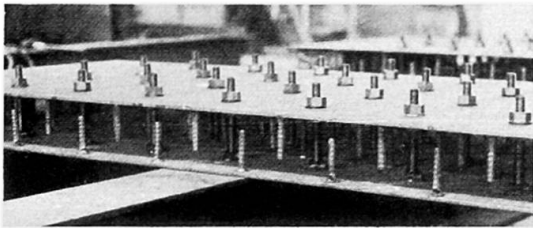


Photo. 1 Assembly of deck

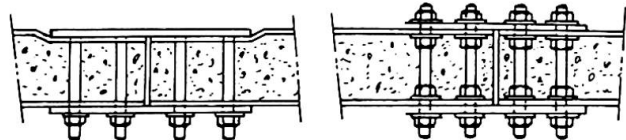


Fig. 4 Jointing of Deck Plates

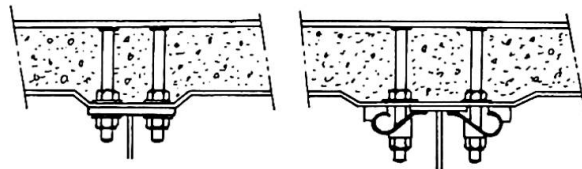


Fig. 5 Jointing of Deck Plate to Beam

- (5) Floor system for prefabricated composite girder: This composite girder, proposed by the authors<sup>4)</sup> as shown in Fig. 6, consists of an inverted steel T-beam without an upper flange and a steel grating floor frame, which is directly attached at a shop. After the prefabricated floor deck is connected to main cross beam of stiffening trusses, the slab concrete is cast at the site.
- (6) Floor system with orthotropic steel plate deck: A typical steel deck panel which is well known is shown in Fig. 7.

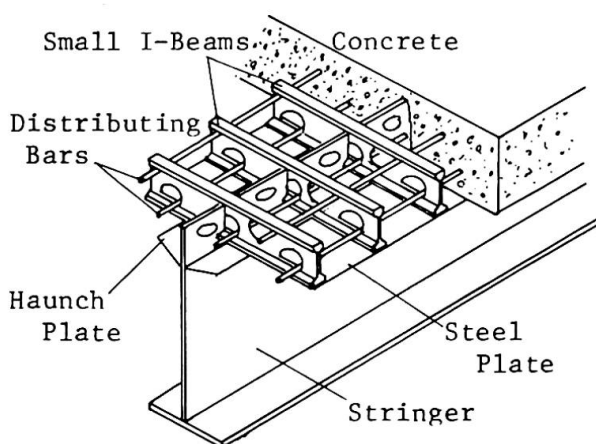


Fig. 6 Detail of Prefabricated Composite Girder

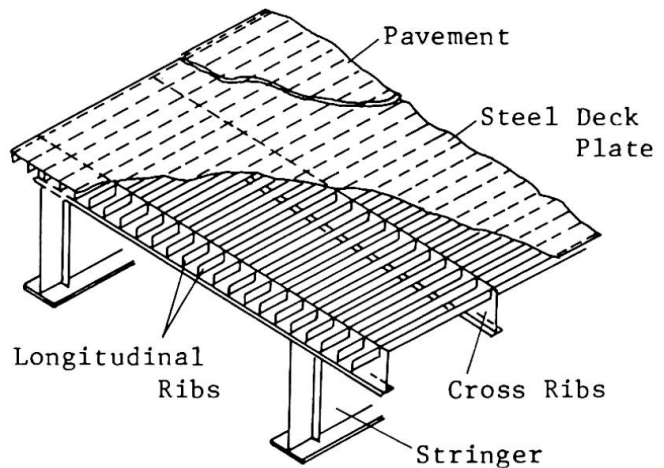


Fig. 7 Detail of Orthotropic Steel Plate Deck

- (7) Hollow steel plate deck: This deck developed by the authors has such a cross section as shown in Photo. 2, and the welded steel deck consists of two face plates and core plates which are installed diagonally as shown Photo. 2. To apply this deck to a floor system at a suspension bridge, it is set on main

cross beams of trusses directly without stringer.

#### 4. Comparison of Floor Systems in Terms of Weight and Cost

In order to evaluate which floor system will be the most suitable for a long-span suspension bridge, the design of each floor system outlined above was carried out under the same design requirements that each floor system has a span length of 12 m and a width of 11 m, and carries a live load of 20 tons truck specified at the Specification for Design of Highway Bridges, Japan Road Association, 1974. As the result of the design, dimension and construction cost of each floor system were obtained, and then unit weight and unit cost per square meters of a floor area could be calculated as shown in Table 2. The value of unit weight and unit cost show that the heaviest reinforced concrete slab is cheapest in cost while the lightest steel plate deck and hollow steel plate deck are high-priced. Therefore, it might be not only very difficult, but also risky to make decision only by these two conditions, because for a long-span suspension bridge the third condition expressed in terms of a kind of function or performance of the floor system has to be examined.

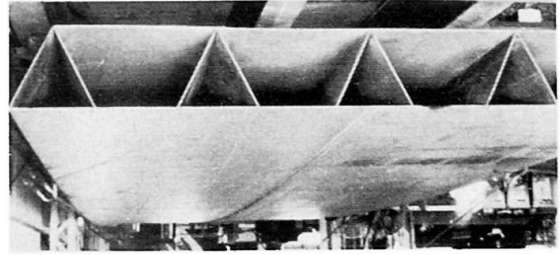


Photo. 2 Hollow Steel Plate Deck

#### 5. Function Condition and Decision Matrix

As function conditions, fabrication, erection, construction time, wind-resistance, paving, maintenance and overall economy may be considered for long-span suspension bridges. Each of the function conditions are defined as follows:

- (1) Fabrication condition: the nature of fabrication works to evaluate easiness or hardness of steel works at a shop and time requirement for fabrication.
- (2) Erection condition: the nature of erection works to evaluate easiness or hardness of field works and safety for operation at the site.
- (3) Construction time: the time nature of erection works to evaluate a construction period.
- (4) Wind-resistance: the condition of resistance against wind depending upon the height of a floor system and some other requirements.
- (5) Paving: the nature of paving works depending upon the smoothness floor surface.
- (6) Maintenance: the nature of maintenance works to be evaluated by painting on steel surface of a floor system, etc..
- (7) Overall economy: an effect of the weight of a floor system on an overall construction cost of the whole bridge, because as seen in Table 1, the weight of the floor system of a suspension bridge may have great influence on the overall construction cost of the bridge.

While the weight and cost of a floor system is deterministic and certain, these function or performance conditions are uncertain and not deterministic. Therefore, it will be reasonable to evaluate a degree of those conditions by "excellent", "good", "ordinary" and "undesirable", to which marks may be given, respectively, with 4 points, 3 points, 2 points and one point for trial. Furthermore, a so-called emphasis coefficient  $k$ , may be proposed to evaluate

Table 2 Comparison of Floor Systems

Conditions		Floor Systems							
		Reinforced Concrete Floor	Closed Steel Grating Floor	Precast Concrete Steel Grating Floor	Prefabricated Steel Deck Sandwiching Concrete Floor	Prefabricated Composite Floor	Steel Plate Deck	Hollow Steel Plate Deck	
Unit Weight of Floor System ( $\frac{kg}{m^2}$ )		530	460	490	380	470	220	220	
in Ranking		7	4	6	3	5	1	1	
Unit Cost of Floor System ( $\frac{yen}{m^2}$ )		50 000	60 000	65 000	70 000	65 000	85 000	75 000	
in Ranking		1	2	3	5	3	7	6	
Fabrication	$F_1$	4	3	2	1	1	1	2	
	$k_1 = 2$	8	6	4	2	2	2	4	
Erection	$F_2$	1	3	3	2	3	4	4	
	$k_2 = 3$	3	9	9	6	9	12	12	
Construction Time	$F_3$	1	2	3	3	3	4	4	
	$k_3 = 3$	3	6	9	9	9	12	12	
Wind-Resistance	$F_4$	3	3	3	3	3	3	4	
	$k_4 = 2$	6	6	6	6	6	6	8	
Paving	$F_5$	3	3	3	2	3	2	2	
	$k_5 = 2$	6	6	6	4	6	4	4	
Maintenance	$F_6$	3	2	3	2	2	2	2	
	$k_6 = 2$	6	4	6	4	4	4	4	
Overall Economy	$F_7$	1	2	2	3	2	4	4	
	$k_7 = 3$	3	6	6	9	6	12	12	
Total	$\Sigma F_i$	16	18	19	16	17	20	22	
	$\Sigma k_i F_i$	35	43	46	40	42	52	56	
Mean Value	$\Sigma F_i / 7$	in Point	2.29	2.57	2.71	2.29	2.43	2.86	3.14
		in Ranking	6	4	3	6	5	2	1
	$\frac{\Sigma k_i F_i}{\Sigma k_i}$	in Point	2.06	2.53	2.71	2.35	2.47	3.06	3.29
		in Ranking	7	4	3	6	5	2	1

relative importance among the function condition or to emphasize relatively a specific condition. Here, the value of  $k$  is taken tentatively two or three, because it is very difficult to give deterministic numbers verified by numerical statistical data.

As shown in Table 2, each floor system depending on construction methods and each function condition with its emphasis coefficient will make a decision matrix and its outcome will express functional nature or performance evaluated by marks. In Table 2,

$F_i$  = the  $i$ -th function condition with  $i=1$  to 7,

$k_i$  = the  $i$ -th emphasis coefficient with  $i=1$  to 7.

The decision-making for function or performance will be made by either  $\Sigma F_i / 7$  or  $\Sigma k_i F_i / \Sigma k_i$ , where

$\Sigma F_i / 7$  = a mean value for  $k_i=1$

$\Sigma k_i F_i / \Sigma k_i$  = a weight mean value.

The final decision has to be made in the overall result for weight, cost and function of each floor system, depending on the importance of these three factors because there is no common objective function among the factors for the most optimum floor system.



## 6. Conclusion

The following decision-making in planning will be concluded from Table 2 as an example:

- (1) The most conventional reinforced concrete floor system is cheaper in construction cost, but is heavier in weight and undesirable in performance or function.
- (2) Steel plate deck or hollow steel plate deck is more expensive in construction cost, but is lighter in weight and more desirable in performance or function, especially in erection and overall economy.
- (3) The emphasis coefficient has to be determined more precisely, objectively by various field conditions at the site of bridge erection and subjectively by designer's judgement. With well-selected values of the emphasis coefficient, more weighted evaluation for the nature of function or performance could be made.
- (4) When the suitability of a floor system cannot be judged from deterministic ranking alone based on its comparative designs, the relative evaluation of the floor system on its performance or function which is generally uncertain, will be of great help to approach to its optimum construction method.

## References

- 1] Y. Maeda and S. Matsui, Proceeding of Japan Society of Civil Engineerings, No. 181, 1970 (in Japanese).
- 2] K. Kushida, S. Suruga and Y. Maeda, Symposium on Steel and Composite Structures for User Needs of IABSE (DRESDEN), 1975.
- 3] Y. Maeda and S. Matsui, Symposium on Mass-produced Steel Structures of IABSE (PRAHA), 1971.
- 4] Y. Maeda, T. Suruga and H. Yamada, Symposium on Mass-produced Steel Structure of IABSE (PRAHA), 1971.

## SUMMARY

The present study is intended to plan properly the floor system which will be optimum for a long-span suspension bridge with stiffening truss. Various construction methods for the floor system are examined in construction cost and weight by comparative designs, and also in its performance or function by a decision matrix.

## RESUME

Le but de cette étude est de concevoir de façon optimale le système de platelage d'un pont suspendu de longue portée, dont le tablier est une poutre à treillis. Plusieurs types de platelage sont considérés, du point de vue méthode de construction, coût, poids, performances, utilisation; une matrice de décision est proposée.

## ZUSAMMENFASSUNG

Zweck dieses Berichtes ist es, das Deckensystem weitgespannter Hängebrücken mit Fachwerkaussteifung zu optimieren. Verschiedene Deckensysteme werden vom Standpunkt der Ausführung, der Kosten, des Gewichts und der Nutzung anhand einer Entscheidungsmatrix überprüft.

## Stochastic Optimization Methods in Collapse Load Analysis

Méthodes d'optimisation stochastique dans le calcul de la charge de rupture

Stochastische Optimierungsmethoden für Bruchlastberechnungen

J. TEGZE C.E.                      P. LENKEI D.E.  
Hungarian Institute for Building Science – ETI  
Budapest, Hungary

### 1. Introduction

The deterministic optimization of statically indeterminate reinforced concrete or steel structures of non-linear behaviour has been worked out in detail e.g. [1, 2, 3]. In contrast to this in the field of the stochastic frame optimization a great number of problems are left unsolved.

It is well known [4] that the failure probability of statically indeterminate structures is lower than that of statically determinate ones. This is due to the fact that in the semiprobabilistic design used almost all over the world, the failure probability is associated with one critical cross section /elementary beam length/ only. In reality, the failure of a statically indeterminate structure is not characterized with the failure of one, but of several critical sections /elementary beam lengths/. Obviously, the probability of the simultaneous failure of several critical sections /elementary beam lengths/ is lower than the failure probability of one critical section /elementary beam length/ alone.

In this contribution the increase of the plastic collapse load of a given probability is investigated for statically indeterminate linear plane structures on the basis of the investigations carried out at the Hungarian Institute for Building Science [5, 6, 7].

### 2. The structural model

The model of the structures investigated is characterized with the following conditions:

- /a/ the plane structure is formed of linear bars;
- /b/ only one-parametric concentrated static loads are taken into account, with the restriction, that constant moment length cannot appear;
- /c/ the influence of shear and normal forces and longitudinal deformations is neglected;
- /d/ the collapse mechanism is determined by plastic hinges due to bending only;
- /e/ rigid-plastic material behaviour is assumed, i.e. the rotations are concentrated in the plastic hinges and the bars between the plastic hinges are rigid;
- /f/ the critical elementary bar lengths /hereinafter referred to as critical sections/ at which, in case of concentrated loads, plastic hinges can be formed are the discontinuity points of the functions or the first derivatives of the bending moments or those of the plastic moment capacities;
- /g/ all the quantities influencing collapse load are assumed deterministic but the bending moment capacity is assumed random variable with infinitely divisible distribution function [8].

As the consequence of conditions /c/ and /d/ the stability problem is not investigated.

Condition /b/ regarding the lack of constant bending moment lengths means that the position of the critical sections is deterministic. If constant bending moment lengths exist, the position of the critical sections should be a random variable and together with the moment capacity can be characterized with an extremal distribution function only.

In accordance with condition /g/ the distribution function among others could be the normal or gamma-type distribution.

### 3. Formulation and solution of the problem

The problem is solved by the kinematic approach of the plastic analysis to determine the smallest load factor in case of which a collapse mechanism can be formed. For the solution the so called Combinations of Mechanisms method was used in which from a set of independent elementary mechanisms the real collapse mechanism with the smallest load factor is determined from the linear combination of these elementary mechanisms. This method which is well known for the deterministic model [9, 1, 2] was developed for the stochastic model. A related economic problem was independently solved in [10].

The problem for both models can be formulated as one of mathematical programming, where the objective function is the  $\lambda$  load factor

$$\lambda = \underline{\Theta}^* \underline{M} \rightarrow \min \quad /1/$$

and the constraints are the following system of linear equations

$$\underline{\Theta}^* = \underline{t}^* \underline{\Theta}_f \quad /2/$$

$$\underline{t}^* \underline{e} = 1 \quad /3/$$

where  $\underline{\Theta}$  is the vector of the inelastic rotations at  $s$  critical sections;

$\underline{\Theta}_f$  is the matrix of the inelastic rotations of the set of  $m$  independent elementary mechanisms and  $m = s - n$ , where  $n$  is the degree of statical indeterminacy;

$\underline{e}$  is the vector of external work, done by loads during the formation of elementary mechanisms;

$\underline{t}$  is the vector of constants of the linear combinations forming critical collapse mechanism.

The vector of the inelastic rotations was divided according to [1, 2] as

$$\underline{\Theta} = \underline{\Theta}^+ - \underline{\Theta}^- \quad /4/$$

and the method was completed with the justification of the uniqueness condition for /4/ in [6, 7] as

$$\underline{\Theta}^+ \circ \underline{\Theta}^- = 0 \quad /5/$$

where the symbol  $\odot$  is the so called logical product. The justification showed for both the deterministic and the stochastic model that the uniqueness condition /5/ is always fulfilled automatically for the extrema of the objective function. Consequently, this non linear condition can be neglected and the remaining constraints are linear. The vector  $\underline{t}$  can be written in the form

$$\underline{t} = \underline{t}' - \underline{t}'' \quad /6/$$

where  $\underline{t}'$  is the new variable vector which in case of subsequent  $\underline{t}''$  will always be non-negative,  $\underline{t}''$  is a constant vector.

Having /4/ and /6/ the objective function can be written in the following form

$$\lambda = \underline{M}^* \cdot \underline{x} \rightarrow \min \quad /7/$$

$$(2s+m) \quad (2s+m)$$

and the constraints will be replaced by the following system of linear equations

$$\underline{A} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ s+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b} \\ s+1 \end{pmatrix} \quad /8/$$

where  $\underline{M}^* = [\underline{M}^{+*}, \underline{M}^{-*}, \underline{0}^*]$  .  $\underline{x}^* = [\underline{\theta}^{+*}, \underline{\theta}^{-*}, \underline{t}'^*]$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{I} & -\underline{I} & -\underline{\theta}_f^* \\ \underline{0}^* & \underline{0}^* & \underline{e}^* \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -\underline{\theta}_f^* \cdot \underline{t}'' \\ 1 + \underline{e}^* \cdot \underline{t}'' \end{bmatrix}$$

$\underline{M}^+$  and  $\underline{M}^-$  are vectors of the positive and negative plastic moment capacities at the critical sections and

$\underline{I}$  and  $-\underline{I}$  are identity matrices of appropriate signs.

The plastic moment capacities for the deterministic model are fixed values, but for the stochastic model they are random variables of known distribution function. The combination of these plastic moment capacities results in the collapse load factor, which, consequently, will also be a random variable of the same type of distribution function.

Any point of the distribution function of the collapse load factor i.e. the collapse load of a given probability can be determined as follows.

It is well known [8] that any linear combination of random variables with infinitely divisible distribution function will be of the same type of distribution function. The mean value, the standard deviation etc. of the resulting distribution can be expressed knowing the mean values, standard deviation etc. of the initial distribution and the combination coefficients as:

$$\bar{\lambda} = (\underline{\theta}^+)^* \bar{\underline{M}}^+ + (\underline{\theta}^-)^* \bar{\underline{M}}^- \quad /9/$$

$$D^2(\lambda) = \{(\underline{\theta}^+)^2\}^* \cdot \underline{q}^+ + \{(\underline{\theta}^-)^2\}^* \cdot \underline{q}^- \quad /10/$$

where  $\underline{q}^+$  and  $\underline{q}^-$  are the variances of the respective plastic moment capacities.

Assume according to [11] that the failure probability of a structure will be  $p_0 = 8,2 \cdot 10^{-5}$ . Knowing the distribution function of  $\lambda$  determine that value of  $\lambda_s$ , depending on vectors  $\underline{\theta}^+$  and  $\underline{\theta}^-$  for which the probability of occurrence of the smallest  $\lambda$  will be less than the given  $p_0$ . If  $u_0$  will be the quantile  $p_0$  of the standardized distribution function, then this  $\lambda_s$  value will be

$$\lambda_s = D(\lambda) u_0 + \bar{\lambda} \quad /11/$$

Using the previous expressions the value of  $\lambda_s$  can be given as function of rotation vectors as

$$\lambda_s = u_0 \sqrt{\underline{x}^* \underline{Q} \underline{x} + \bar{M}^* \underline{x}} \quad /12/$$

where  $\underline{Q} = \langle \underline{q}^+, \underline{q}^- \rangle$  is a diagonal matrix, formed of vectors  $\underline{q}^+$  and  $\underline{q}^-$ .

The minimum of this objective function, which in this way is deterministic, will be the collapse load of the given probability according to the stochastic model.

For the deterministic model the objective function is linear and for its solution the simplex method is appropriate. However, for the stochastic model, the objective function is concave as was shown in [6]. This type of problem, with linear constraint can be solved by the cutting plane method [12] well suitable for computer applications [13].

#### 4. Practical application of the method

The effectiveness of the more exact stochastic model was checked on some practical examples of different parameters.

The deterministic and stochastic models can be compared by prescribing similar failure probabilities for critical sections using the deterministic model  $/p_i/$  and for the whole structure using the stochastic model  $/p_0/$  and determining how much the load bearing capacity computed according to the deterministic model will be exceeded by the one computed according to the stochastic model.

It was proved [7] that for this condition the deterministic load bearing capacity will be a lower bound solution of the stochastic load bearing capacity. In [6, 7] two simple upper bound solutions were also given.

Simple one span, one storey frames were analysed in case of 7 loading schemes, consisting of vertical and horizontal concentrated loads. The possible distributed loads were modelled by a system consisting of an odd number of concentrated loads.

The distribution function of the plastic moment capacities of the critical sections was assumed to be of normal distribution.

The span  $/l/$  to height  $/h/$  ratio was assumed as  $l/h=2,4,1/2$ .

The assumed ratios of the plastic moment capacities of the girder  $M_l$  and the column  $M_h$  are shown in the Table 1.

Table 1

Plastic moment capacity type		1	2	3
$M_l/M_h$	+	3/2	1	3
	-	1	2/3	3/2

Signs + and - indicate moments, producing tension at the inner and outer side, respectively, of the bars. The coefficient of variation of the plastic moment capacities was assumed as  $r=0.015, 0.05, 0.15$  and  $0.25$ . Of course for the latter and small failure probabilities the assumed normal distribution gives a considerable error. The convergence of the solution was very slow in case of high coefficients of variations, too.

Altogether 30 frames were investigated using both the deterministic and the stochastic model.

The results of the calculation for the frame shown in Fig.1 are given in Table 2.

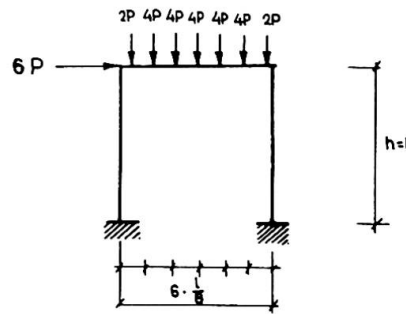


Fig.1

Table 2

parameters number of example	$l/h$	plastic moment capacity type	$\frac{\lambda_{so}}{\lambda_{do}}$	$\frac{r_\lambda}{r}$	$P_i$
10	2	1	1.104	0.553	$1.9 \cdot 10^{-2}$
			1.051	0.782	$1.6 \cdot 10^{-3}$
13	4	1	1.078	0.663	$6.1 \cdot 10^{-3}$
			1.026	0.887	$4.1 \cdot 10^{-4}$
16	1/2	1	1.116	0.500	$3.0 \cdot 10^{-2}$
			1.061	0.738	$2.7 \cdot 10^{-3}$
22	2	3	1.082	0.648	$7.4 \cdot 10^{-3}$
			1.032	0.862	$5.8 \cdot 10^{-4}$

where  $\lambda_{so}$  and  $\lambda_{do}$  are the collapse load factors for the stochastic and for the deterministic model, respectively,

- $r_\lambda$  is the coefficient of variation of the collapse load factor for the frame,
- $r$  is the coefficient of variation of the plastic moment capacity at the critical sections,
- $p_i$  is failure probability of the plastic moment capacity at the critical sections, assuming the failure probability of the whole frame  $p_0 = 8,2 \cdot 10^{-5}$ .

The two values in each box in Table 2 correspond to the lower and upper bound values after iterations consuming prefixed computer time.

### 5. Discussion of the results

- /a/ From the results it became clear, that a substantial difference is observed between the load bearing capacity of the deterministic and the stochastic structural models. This difference is given in Table 3.

$r$	0.015	0.05	0.15
$\lambda_{so} / \lambda_{do}$	2-3 %	3-12 %	22 %

- /b/ The different analyses according to the deterministic and stochastic models give not only different collapse load factors, but in some cases different failure mechanisms too, as is shown in Fig.2.

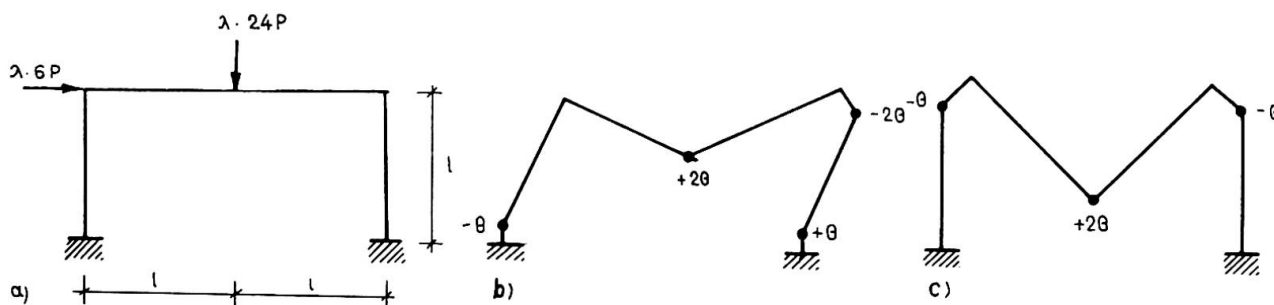


Fig.2

- a - the frame scheme; b - failure mechanism according to the deterministic model; c - failure mechanism according to the stochastic model.

- /c/ The coefficients of variation of the collapse load factor of the frame for the stochastic model are much lower than for the deterministic model, as can be seen in Table 2. The ratio of  $r_\lambda / r$  was between 0,5 and 0,78.
- /d/ There is another way of comparison of the results obtained according to the two models. This is the determination of the failure probabilities of the plastic moment capacities at the critical sections  $p_i$  at a given failure probability of the whole frame  $p_0 = 8,2 \cdot 10^{-5}$  according to the stochastic

model. These values of  $p_i$  in case of examples of good convergence were in the range of  $10^{-31}$  -  $2 \cdot 10^{-2}$ , which is much higher than in case of the deterministic model, where in each critical section  $p_i = 8,2 \cdot 10^{-5}$  should be maintained.

## 6. Conclusions

The stochastic structural model for statically indeterminate plane structures formed from linear bars gives considerably higher load bearing capacity, lower coefficient of variation, higher failure probability in each critical section, than the deterministic structural model. In some cases the failure mechanisms can also be different for stochastic and deterministic models.

It is planned to investigate distributions more realistic than the normal one taking the elastic-plastic material behaviour and the randomness of the critical section position into account. Examples of more complicated structural schemes are planned to be analysed by applying computational methods of better convergence.

## References

- [1.] Grierson D.E., Gladwell G.M.L.: Collapse Load Analysis Using Linear Programming  
Journal of the Struct.Div. ASCE Vol.97,  
May 1971 pp. 1561-1573
- [2.] Cohn M.Z., Ghosh S.K., Parimi S.R.: Unified Approach to Theory of Plastic Structures Journal of the Eng.Mech.Div. ASCE Vol.98, Oct.1972.pp.1133-1158
- [3.] Čiras A.: Optimization Theory in Limit Analysis of a Solid Deformable Body, Vilnius, 1971.pp.1-123.
- [4.] Tichy M., Vorlicek M.: Statistical Theory of Concrete Structures, Prague, 1972. pp.242-260 and 318-331.
- [5.] Lenkei P.: Mathematical Programming Methods Applied in Plastic Structural Analysis Report of the Hung.Inst.for Building Sci. ETI, 1972. pp.1-56 /in Hungarian/
- [6.] Tegze J.: Mathematical Programming Methods in the Plastic Analysis of Reinforced Concrete Linear Structures. Report, Hung.Inst.for Building Sci. Budapest, 1974. pp. 1-42 with an Annex on "Investigations of the Stochastic Model of Plane Frames" pp. 1-48 /in Hungarian/
- [7.] Tegze J.: Collapse Load Determination of Reinforced Concrete Linear Structures by Optimization Methods. Report, Hung.Inst.for Building Sci. Budapest, 1975, pp. 1-67 /in Hungarian/
- [8.] Feller W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.II. Wiley, New York 1966 p. 173



- [9.] Neal B.G., Symonds P.S.: The Rapid Calculation of the Plastic Collapse Load for a Framed Structure. Proceedings ICE, London Vol.I. Pt.3, 1952, pp.58.
- [10.] Callahan J.R., Bector C.R.: Optimization with General Stochastic Objective Functions, ZAMI Vol.55. 1975. pp.528-530.
- [11.] Korda J.: Statical Analysis of Existing Structures According to the New Code. Magyar Építőipar, Budapest, 1975. 6.sz. pp. 342-348 /in Hungarian/
- [12.] Forgó F.: Cutting Plane Methods for Solving Nonconvex Programming Problems. Acta Cybernetica, Tom.I. Fasc.3. Szeged, 1972. pp.171-192.
- [13.] Zsigmond I.: Cutting Plane Methods for the Solution of Non-linear Programming Problems. Tájékoztató az Egyetemi Számítóközpont Munkájáról, Budapest, 1975 Oct. 16.sz. pp.32-35 /in Hungarian/

#### SUMMARY

The increase of the plastic collapse load of a given probability is investigated for statically indeterminate linear plane structures, assuming the plastic moment capacities at the critical section to be random variables of infinitely divisible distribution. The Combinations of Mechanisms method was developed for the stochastic structural model. The mathematical and computational problems were solved and 30 simple frame examples were investigated. The results showed higher plastic collapse load, lower coefficient of variation and higher possible critical section failure probabilities for the stochastic model as compared to the deterministic one.

#### RESUME

L'augmentation de la charge plastique de rupture pour une probabilité donnée est examinée pour des systèmes de barres hyperstatiques en plan, sous la condition que les capacités de moment plastique sont des variables probables d'une distribution infiniment divisible. La "combinaison des mécanismes" est développée pour le cas du modèle stochastique. Les problèmes mathématiques et d'ordinateur sont résolus et 30 portiques simples examinés. Les résultats ont montré pour le modèle stochastique une charge de rupture plastique élevée, un moindre coefficient de variation et une plus grande probabilité de rupture possible comparé au modèle déterministique.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die Erhöhung der plastischen Bruchlast gegebener Wahrscheinlichkeit wurde bei statisch unbestimmten ebenen Stabwerken unter der Bedingung geprüft, dass die plastische Momenten-Tragfähigkeit in den kritischen Querschnitten eine unbegrenzt dividierbare Zufallsvariante ist. Die Methode der "Kombination der Mechanismen" wurde im Fall eines stochastischen Konstruktionsmodells weiterentwickelt. Mathematische und rechnungstechnische Fragen wurden gelöst und das Zahlenmaterial von 30 einfachen Rahmen geprüft. Die Ergebnisse zeigen eine höhere plastische Bruchlast, kleinere Variationskoeffiziente und grössere mögliche Wahrscheinlichkeit der Zerstörung im Falle des stochastischen Modells gegenüber dem deterministischen Modell.

## IIb

### Structural System Optimization Based on Suboptimizing Method of Member Elements

L'optimisation du système structural basée sur la suboptimisation d'éléments

Optimierung der Tragstrukturen auf Grund der Suboptimierungsmethode der Teilelemente

SADAJI OHKUBO  
Associate Professor  
Ehime University  
Matsuyama, Japan

TOSHIE OKUMURA  
Professor Emeritus  
University of Tokyo  
Tokyo, Japan

#### 1. INTRODUCTION

The complexity and difficulty arised in the optimization procedure of a practical structural system are caused mainly by the various characteristic and numerous design variables and constraints involved in a structural system. The methodological expansion on the treatment of such design variables and constraints has been expected for the efficient optimum design method of the structural systems. This paper presents practical optimization methods intended to solve the problems based on suboptimization of structural elements.

In the optimum design methods presented herein, suboptimization of the structural elements are performed first for the range of possible loadings and design variables, then suboptimized relationships between an intensive design variable and design constraints, objective function etc. are introduced. Using these relationships logical reductions in the number of design variables and constraints, and introduction of material selection variables may be possible. Objective function is also simplified, and geometrical and discrete variables can be treated easily. The optimum solutions are found by sequential linear programming algorithm and graphical approach. Examples of cost minimization problems of highway girders and minimum weight design of trusses are presented. Using the methods direct optimum design diagrams for highway girders have been established.

#### 2. OPTIMUM DESIGN USING SUBOPTIMIZATION OF STRUCTURAL ELEMENTS AND SLP METHOD

##### 2.1 Girder Problems

Problem Formation - The cost minimization problems of constant-depth highway welded plate girders are solved by SLP method using suboptimization of girder elements. The design variables are assumed as cross sectional dimensions, length,  $l$ , and steel type,  $M$ , to be used for each girder segment. Design criteria imposed in the steel girder section are constraints on allowable stresses, plate thicknesses for stability of the girder and minimum rigidities of vertical and horizontal stiffeners which are taken from "Specifications for Steel Highway Bridges". (Ref. 13) Discrete constraints on commercial availability of plate thicknesses are also considered.

Total cost of the girder, TCOST, is assumed to consist of material cost,  $CM$ , fabrication cost,  $CFF \times (1+FF)$ , and welding cost,  $CWM + CWF \times (1+FF)$ , which are evaluated with reference to "Tables of Prime Costs for Steel Highway Bridges". (Ref. 14)

$$TCOST = \sum_{i=1}^{NM} COST_i \times l_i = \sum_{i=1}^{NM} [ CM_i + CFF_i \times (1+FF) + CWM_i + CWF_i \times (1+FF) ] \times l_i \quad (1)$$

in which  $FF$  = factor of indirect fabrication cost,  $CWM$  = cost for welding materials,  $CWF$  = welding cost.

Suboptimization of Girder Elements - In the girder problems, behavior variables are determined by the arrangement of moment of inertia,  $I$ , and length,  $l$ ,

of each girder segment and usually dimensions of a girder section are determined by applied maximum bending moment. For this reason suboptimization of the girder sections are performed first for various combinations of steel types, M, web heights, WH, and bending moments, BM, by taking into account all of the design variables and constraints.

The mixed-discrete nonlinear optimization problems of the girder sections may be solved quite effectively by a modified branch and bound algorithm and SLP method, where the order to branch and bound of discrete variables is pre-assigned according to their importance for the design of girder section, and only two adjacent discrete values to the continuous optimum solution are examined for their optimality. Macro flow chart of the algorithm is shown in Fig. 1.

The results of suboptimization of girder elements are arranged in terms of moment of inertia and I-RBM, I-COST, I-SDIM, RBM-GW relationships for each steel type and web height are introduced, where RBM = maximum resisting bending moment, COST = minimum cost per unit length, SDIM = optimum sectional dimensions, GW = girder weight per unit length. I-RBM and I-COST relationships shown in Fig. 2 may be expressed as

$$RBM(I) = a \cdot I + b, \quad COST(I) = c \cdot I + d \quad (2)$$

The coefficients a, b, c and d are all constants for the particular range of I, M and WH. Since flange plate thicknesses are increased discretely as applied bending moment increases, unit price of the steel plate and size of the fillet welding are changed also discretely and I-COST relationships are varied discontinuously at such points. On the contrary I-RBM relationships are varied linearly and may be expressed by several linear equations accurately.

Simplification of Problem and Introduction of Material Selection Variables - I-RBM relationships introduced by this method express the allowable upper limit of resisting bending moments of the girder sections to satisfy all of the constraints. Minimum costs of the girder sections with I, WH and M may be evaluated directly from related I-COST relationships. Therefore by using these relationships I of each girder element may be considered as a new design variable instead of all of the sectional dimensions if web height is preassigned as a design parameter and  $BM \leq RBM$  relationship comes to a new intensive constraint in place of all of the restrictions. This reduction in the number of design variables and constraints to be considered simultaneously gives significant advantages to solve complex structural optimization problems, such as simplification of the problem formulation and evaluation of the sensitivities, reduction of the core size and computation time, improvement of the convergency to the optimum solution. Furthermore the differences of values between two material types at a value of I in the I-RBM and I-COST relationships may be considered as the partial derivatives with respect to the design variable for selecting optimum steel type to be used for each girder element. (Fig. 2) The material selection variables M are introduced based on this concept, which

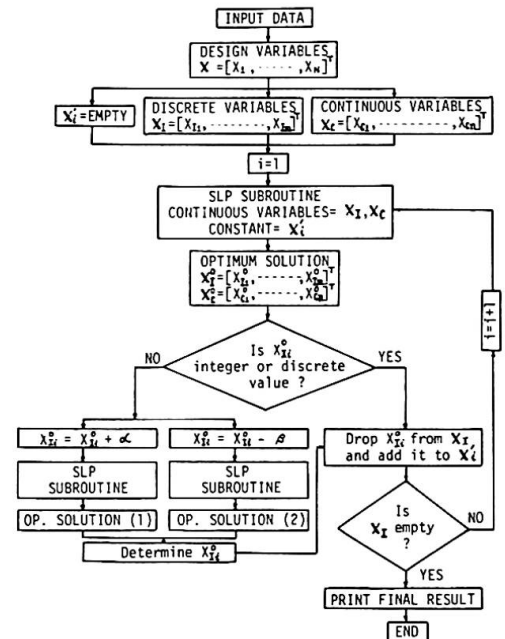


Fig. 1 Macro Flow Chart of Modified Branch and Bound Method with SLP Subroutine

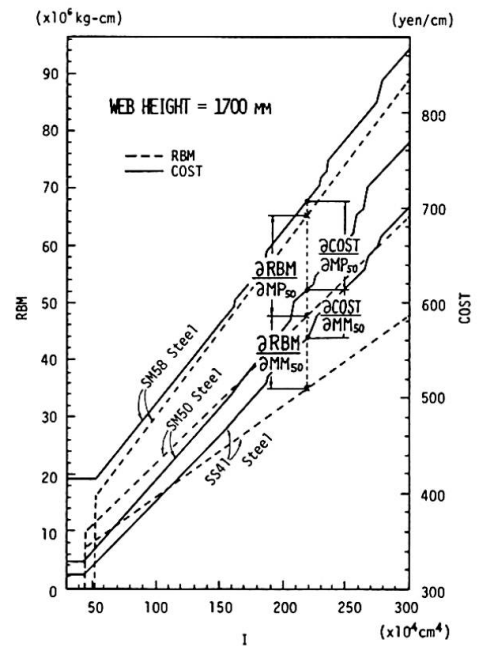


Fig. 2 I-RBM, I-COST Relationships for Girders with Web Height = 1700 mm

consist of MP and MM. The former are provided for selection of the stronger steel type and the latter are for the weaker. MP and MM are treated as independent continuous variables same as I and  $\ell$ .

Optimization by SLP Method - The girder is analysed by the displacement method and the behavior variables and their partial derivatives with respect to I,  $\ell$ , M are evaluated by using the influence line analysis. Partial derivatives of RBM and COST with respect to I,  $\ell$ , M are also evaluated from related I-RBM and I-COST relationships. The nonlinear optimum design problem is approximated with a linear programming problem by the first order terms of Taylor series expansion and an improved solution is determined by Simplex algorithm. Adaptive move limit constraints on the changes of design variables are also added to ensure the convergency to optimum solution. Since the material selection variables are assumed here as continuous variables, which are modified to the nearest discrete steel types at every iteration of analysis. If a solution comes closely to the optimum solution, all steel types are fixed as most profitable and material selection variables are eliminated from a set of the design variables. Then the problem is reanalysed until optimum solution is obtained. The optimum sectional dimensions for each girder element may be decided directly from the related I-SDIM relationships.

Examples - The method has been applied to many cases of simple span, 2~3-span continuous constant-depth highway girders and three examples are presented in Table 1 in which the solutions are compared with the results by graphical approach described later. In Table 1 BW = bridge width, SL = span length, WH = web height,  $P_e$  = a concentrated live load,  $q_e$  = uniformly distributed live load,  $q_d$  = distributed dead load which differs with each girder segment, but averaged value in the girder is shown in the table.

Approximate convergency to the optimum solution including material selection is quite well by using move limit constraints, but computation time and number of iteration of re-analysis required for the optimum solution are increased so much as number of design variables and constraints increases as seen in Table 1. Comparisons of several solutions with different initial inputs should be made for confirmation of the global optimum solution.

Table 1 Optimum Solutions by SLP Method and Graphical Method

Seg. No.	SLP Method			Graphical Method			Design Condition
	L (cm)	I (cm <sup>4</sup> )	M*	L (cm)	I (cm <sup>4</sup> )	M*	
1-SPAN**	1	296.7	1389224	41	293.7	1376687	41
	2	701.2	1507252	58	710.0	1520473	58
	3	1500.0	2113595	58	1500.0	2113532	58
	Min. TCOST		1643675 (YEN)		1643622 (YEN)		
CPU TIME		150~200(sec)		10~16 (sec)			
No. of Iter.		15~20		3~5			
2-SPAN***	1	323.1	779103	50	285.0	697606	50
	2	725.7	1430407	50	618.8	1288148	50
	3	1997.0	1695642	50	1962.0	1712473	50
	4	2683.0	1085665	50	2702.2	1136303	50
	5	3000.0 <sup>0)</sup>	1429441	58	3000.0 <sup>0)</sup>	1431270	58
	Min. TCOST		2891515 (YEN)		2893060 (YEN)		
CPU TIME		60~100(sec)		3~4 (sec)			
No. of Iter.		20~25		5~8			
3-SPAN***	1	248.8	888658	41	233.8	846592	41
	2	559.9	1250520	50	546.5	1238921	50
	3	1850.0	1700003	50	1805.6	1723537	50
	4	2486.0 <sup>0)</sup>	1217784	50	2501.5	1217830	50
	5	2812.5 <sup>0)</sup>	2180159	50	2812.5 <sup>0)</sup>	2128666	50
	6	3153.0	2180159	50	3153.5	2128666	50
	7	3841.0	1159787	50	3898.8	1112415	50
	8	4500.0	1486529	50	4500.0	1529952	50
	Min. TCOST		4241036 (YEN)		4224079 (YEN)		
CPU TIME		300~450(sec)		10~15 (sec)			
No. of Iter.		25~35		8~12			

\*\*Calculated by FACOM 230-28      \* 41 = SS41 (JIS) Steel  
 \*\*\*Calculated by HITAC 8800/8700      50 = SM50 (JIS) Steel  
 (s) indicates intermediate support      58 = SM58 (JIS) Steel

2.2 TRUSS PROBLEMS

The truss problems are solved as weight minimization problems and cross sectional dimensions of the member and coordinates of the panel points are considered as design variables. The steel is fixed as SS41 (JIS) only.

Suboptimization of member elements - In the truss problems, suboptimization of the compression and tension members for many combinations of applied loads and member lengths are treated first, then sectional area A - maximum allowable stress  $\sigma_a$ , A - optimum sectional dimensions, SDIM, relationships for various member lengths are introduced. A- $\sigma_a$  Relationships at any member length may closely be approximated as

$$\sigma_a = \{a \cdot (A-b)\}^{1/n} + C \quad \text{or} \quad \sigma_a = d \cdot A + e \quad (3)$$

in which a, b, c, d, e and n are all constants related to the member length and A. A- $\sigma_a$  relationships express the allowable upper limits of the stresses of

members with A which are guaranteed to satisfy all of the constraints prescribed to the member design.

By using  $A-\sigma_a$  relationships all design variables and constraints imposed in the member design can be replaced only by A and  $\sigma \leq \sigma_a$  relationships respectively, moreover the derivatives of  $\sigma_a$  with respect to the geometry variables  $X_g$  can be evaluated simply as

$$\frac{\partial \sigma_{ai}}{\partial X_{gj}} = \frac{\Delta \sigma_{ai}}{\Delta X_{gj}} \quad (4)$$

in which  $\Delta \sigma_{ai}$  represents the change in  $\sigma_a$  at i-th member due to the change in i-th member length. The problem is approximated as a linear programming problem and reanalyzed until optimum solution is obtained.

**Examples** - An example of eleven bar truss subjected to the moving loads  $P=50$  ton,  $q_l=4$  ton/m, and the dead load  $q_d=2$  ton/m is shown in Fig. 3. The panel length is fixed as 5 m. Sectional areas of member 1 to 6 and coordinates of panel point 1 and 2,  $Y_1, Y_2$ , are assumed as the design variables and only  $\sigma \leq \sigma_a$  constraints of the members are taken into account. The initial  $Y_1$  and  $Y_2$  are assumed as 500 cm, however they are reduced finally to 340 cm and 483 cm respectively. Furthermore, members 1, 2, 3, 4 and 6 are fully stressed, while sectional area of member 5 is determined by the maximum slenderness ratio requirement. The minimum total volume obtained is  $25.56 \times 10^4 \text{ cm}^3$  and maximum live loads displacement is 1.17 cm at panel point 5.

In the case maximum live loads displacements of the panel points are limited to 1.0 cm, the optimum solution is found such that the sectional areas  $A_i$  are 29.58, 45.45, 66.71, 45.13, 39.30, 62.90 ( $\text{cm}^2$ ) respectively and  $Y_1 = 428$  cm,  $Y_2 = 549$  cm with the total volume  $27.53 \times 10^4 \text{ cm}^3$ . The total volume increases 7.7% more than previous solution and only member 3 and 6 are fully stressed.

**Topological Member Arrangement** - If the constraints on lower limits of member sections are not imposed, sectional areas of unnecessary members come to  $0 \text{ cm}^2$ . Then optimum topological member arrangement of truss may also be determined. Several simple examples on this problem are shown in Ref. 2).

### 3. GRAPHICAL OPTIMIZATION OF HIGHWAY GIRDERS BASED ON SUBOPTIMIZATION OF GIRDER ELEMENTS

SLP method has been used successfully on a wide range of large and complex structural optimization problems, however in the optimization procedures partial derivatives of the behavior variables and objective function with respect to the design variables should be evaluated at every iteration of reanalysis. Therefore as depicted in the previous girder examples computation time is so much increased as number of design variables increases and more efficient methods to solve the large optimization problems are expected. Graphical optimization method, an approximate approach based on suboptimization of girder elements, has been developed for solving such problems and applied to the cost minimization girder problems.

**Design Procedure by Graphical Method** - In the graphical approach, a minimum cost diagram related to the initial girder arrangement is developed first by using maximum bending moment diagram of the girder and I-RBM, I-COST relationships. Then improvement of I,  $l$  and M of each girder segment is performed by investigation of the change in minimum cost at the adjoining two segments due to a change of segment length,  $\Delta l$ . In case of Fig. 4, the change of minimum cost

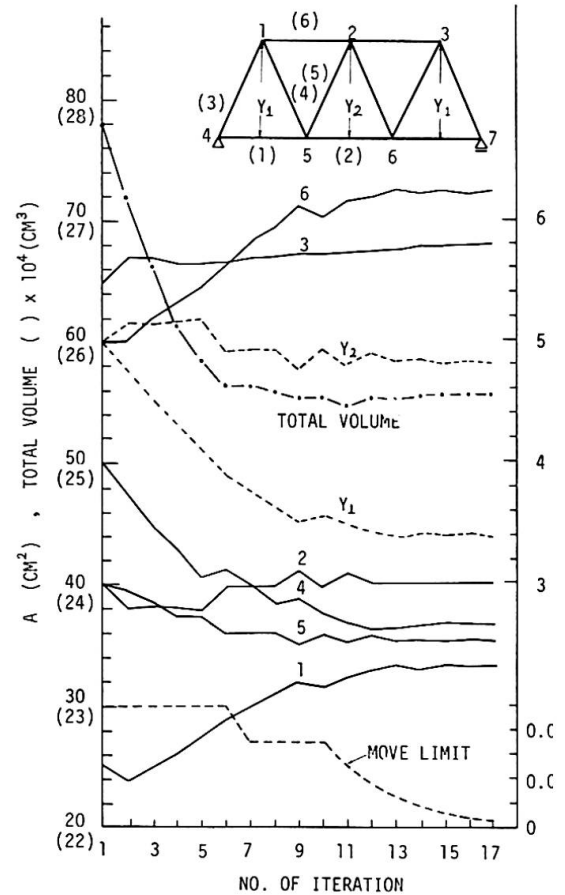


Fig. 3 11-Bar Truss, Moving Loads,  $\sigma \leq \sigma_a$  Constraints

of the girder,  $\Delta\text{TCOST}_i$ , due to a change of  $\Delta\ell_i$  can be evaluated as

$$\Delta\text{TCOST}_i = \Delta\text{COST}_i \cdot \ell_i - \Delta\text{COST}_{i+1} \cdot \Delta\ell_i \quad (5)$$

If  $\Delta\text{TCOST}_i$  is positive,  $\Delta\ell_i$  may proceed to  $-\Delta\ell_i$  direction. The improvement due to  $\Delta\ell_i$  may be finished when  $\Delta\text{TCOST}_i$  converges to zero then next improvement on  $\ell_{i+1}$  is performed. After the improvement of all segments is accomplished, the girder is reanalyzed with new I,  $\ell$  and M and the procedure is repeated until a converged solution will be obtained. Three highway girder examples are given in Table 1.

In this approach, attention is paid only to the change of objective function in order to improve the design variables of a girder segment, and effects to the over all behavior variables caused by changes of the design variables are evaluated by reanalysis of the girder. In this sense graphical method is more approximate approach than SLP method, but convergency to the global optimum solution by this method is quite well as seen in Table 1. Computation times required for optimum solution are reduced notably as 3~5 sec. and 10~15 sec. on HITAC 8800/8700 for 2 and 3-span continuous girder problems respectively, which are 1/12~1/30 cpu. time compared with SLP method. Larger reduction in cpu. time is made as number of variables and constraints increases.

Optimum Web Height - To decide the optimum web height at each span length, optimum solutions for several web heights should be compared with each other. Fig. 5 shows an example for 2-span continuous girder with span length 30 m. As seen clearly in the figure, several local minimum solutions exist on web heights and the girder with WH=170 cm gives absolutely minimum cost in this example. For this reason, web height should be treated as a parametric variable in cost minimization highway girder problems.

Optimum Design Diagrams for Highway Girder Bridges - For the purpose of direct optimum design or planning of 1~3-span constant-depth highway welded plate girders, various optimum design diagrams and tables such as span length - minimum total cost, optimum WH, I,  $\ell$ , M, and I - SDIM relationships for the girders with nonuniform cross sections, and bending moment - minimum cost, optimum WH, I, M, GW diagrams for the girders with uniform cross sections have been established by using the graphical method, and they will be published soon.<sup>6,7,8)</sup>

The optimum design diagrams mentioned above may be utilized as one of the suboptimized structural size design programs in a general purpose system program for highway bridges.

4. CONCLUSIONS

Practical structural optimization methods based on suboptimization of structural elements, SLP and graphical method are presented.

An element size optimization for minimum cost is formulated as a mixed-discrete nonlinear programming problem, and a modified branch and bound algorithm with SLP can be solved the problem effectively. Cpu. time was 1.0 sec. on FACOM 230-75 required for an optimum solution of the girder section.

By using the relationships obtained from suboptimization of structural elements, structural optimization problems may be simplified and be solved effectively. Moreover material selection variables and graphical optimization algorithm

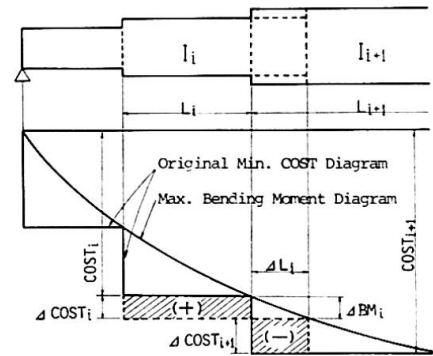


Fig. 4 The Change of TCOST due to  $\Delta\ell_i$

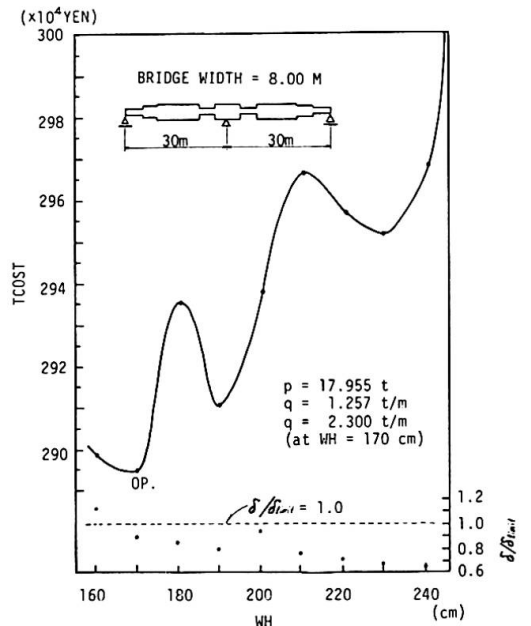


Fig. 5 WH-TCOST,  $\delta/\delta\ell_{i+1}$  Relationships for 2-Span Continuous Girder (SL = 30 m, BW = 8.00 m)

have been developed on the basis of this design concepts.

SLP method may be utilized successfully on a wide range of large and complex structural optimization problems and its approximate convergency to the optimum solution is quite well, however computation time and number of iteration of re-analysis increases so much as design variables and constraints increases.

Graphical optimization method is a practical and efficient design method for the cost minimization problems of highway girders. Formation of the computer program is simple, and excellent convergency to the global optimum solution and existence of several local minima on web height have been confirmed. Design diagrams prepared for direct cost minimum design or planning of highway girders have been established by this method. The design diagrams may be utilized as one of the suboptimized structural size design data in a general purpose system program for highway bridges.

## 5. REFERENCES

1. Ohkubo, S., Trans. JSCE, Vol.2, Part 1, Dec.1970. pp.111-118
2. Ohkubo, S., Proc. JSCE, No.177, May 1970. pp.9-19 (in Japanese)
3. Okumura, T. and Ohkubo, S., Proc. JSCE, No.215, July 1973. pp.1-14 (in Japanese)
4. Okumura, T. and Ohkubo, S., Proc. 20th National symposium on bridge and structural Engineering. Tokyo, Japan, Nov. 1973. pp.209-229
5. Ohkubo, S. and Okumura, T., "Graphical Optimization of Steel Girder Bridges based on Suboptimization of Girder Elements", 1976. (to be published)
6. Ohkubo, S. and Okumura, T., "Optimum Design Diagrams for Welded Plate Girder Sections in Highway Bridges", 1976. (to be published)
7. Ohkubo, S. and Okumura, T., "Optimum Design Diagrams for Steel Highway Girder Bridges with Uniform Cross Sections", 1976. (to be published)
8. Ohkubo, S. and Okumura, T., "Optimum Design Diagrams for Steel Highway Girder Bridges with Non Uniform Cross Sections", 1976. (to be published)
9. Moses, F., J. Struct. Div, ASCE, Vol.90. ST6, Dec. 1964, pp.89-104
10. Reinschmidt, K. F., Cornell, C. A. and Brotchie, J. F., J. Struct. Div, ASCE, Vol.92, ST6, Dec. 1966. pp.281-318
11. Razani, R. and Goble, G. G., J. Struct. Div, ASCE, Vol.92, ST2, Apr.1966. pp.253-281
12. Goble, G.G. and DeSantis, P.V., J. Struct. Div, ASCE, Vol.92, ST6, Dec.1966. pp.25-43
13. Japan Road Association, Tokyo, Feb. 1973. (in Japanese)
14. Japan Association of Steel Bridge Construction, Steel Rib and Bridge Association., 1971. (in Japanese)

**SUMMARY** - The optimum design concepts based on suboptimization of structural elements are presented. Large scale and complex structural cost minimization problems may be simplified, and treatments of various types of design variables and constraints such as sizing, material selection, geometry, continuous, discrete come to ease by this concept. SLP method and graphical optimization method are used effectively to find the minimum cost solutions of highway girder and truss examples.

**RESUME** - Les concepts de l'optimisation basés sur la suboptimisation d'éléments structuraux sont présentés. Cette suboptimisation permet de simplifier des problèmes de minimisation de coût de structures complexes de grande dimension; elle facilite le traitement de variables de projet, de contraintes de types variés telles que dimensionnement, sélection de matériaux, géométrie, continu, discret, ... La méthode "SLP" et la méthode d'optimisation graphique s'emploient pour trouver efficacement des solutions permettant de construire, au coût minimum, des ponts et des charpentes.

**ZUSAMMENFASSUNG** - Das Konzept des optimierten Entwurfes aufgrund der Suboptimierung struktureller Elemente wird dargestellt. Durch dieses Konzept lassen sich die Probleme der Kostenminimierung vereinfachen sowie die Behandlung verschiedener Arten von Entwurfsvariablen und Randbedingungen, wie z.B. Abmessungen, Materialwahl, Geometrie, stetige und unstetige Formen, überdies erleichtern. Die SLP-Methode und die Methode graphischer Optimierung werden verwendet, um die effektiven Minimalkosten eines Brückenträgers und eines Fachwerks zu erhalten.

**Optimierungsprobleme beim Projektieren von Stahlbetonbrücken**

Optimization Problems in the Design of Concrete Bridges

Problèmes d'optimisation dans les projets de ponts en béton armé

**B.J. ULIZKIJ**

Dr. d. techn. Wissensch., Professor

Z.N.I.I.S., Ministerium für Verkehrsbauwesen der UdSSR

Moskau, UdSSR

**J.M. JEGORUSCHKIN**

Kand. d. techn. Wissensch.

Z.N.I.I.S., Ministerium für Verkehrsbauwesen der UdSSR

Moskau, UdSSR

Die Aufgabe der Automatisierung des Projektierungsablaufs im Stahlbetonbrückenbau kann als Aufgabe der mathematischen Programmierung betrachtet werden. Es soll der Vektor (eingeordneter Brückenparameter-Satz) ermittelt werden, der dem gegebenen System von Einschränkungen entspreche und eine Funktion des Zweckes minimisierte.

Der Optimierungsvorgang umfasst den Projektierungsablauf die Varianteneinschätzung und die Auswahl von optimalen Lösungen.

Eine der wichtigsten und aufwendigsten Stufen, die den grössten Teil der Maschinenzeit in Anspruch nimmt ist die Berechnung unter Berücksichtigung der Raumwirkung der Konstruktion, der Einflüsse der plastischen Verformungen, der dynamischen Einwirkungen der Belastungen.

Da bei der Auswahl der optimalen Lösungen eine grosse Anzahl von Varianten zu untersuchen und zu analysieren war, waren ausführliche (aufwendige) Berechnungsverfahren unter Anwendung von EDV auch in der Stufe des Skizzenprojektierens schwer zu verwirklichen sind. Man muss wenig aufwendige Berechnungsverfahren mit genügender Genauigkeit schaffen.



Allgemeine Verfahren für vereinfachte Berechnungen, die auf grobannahrender Idealisierung des Berechnungsschemas gegründet sind, führen meist zu wesentlichen Fehlern, was mit sich irrationelle Verteilung des Materials in der Konstruktion bringt.

Es wird eine prinzipiell neue Auffassung der Ausarbeitung neuer vereinfachten Berechnungsverfahren empfohlen, welches auf der mathematischen Verarbeitung des gewonnenen Resultats von den in den EDV durchgeführten strengen räumlichen Berechnungen basiert [ 1 ] .

Gegenwärtig sind Algorithmus und Programm (SPIKA) für einen vollen Zyklus der räumlichen Berechnung der Plattenbalkenkonstruktionen ausgearbeitet, die die Konstruktion Einflussflächen für verschiedene Spannungen und Verschiebungen, ihre Belastungen an den ungünstigsten Stellen, die Ermittlung des Extremums der rechnerischen und massgebenden Werte für Spannungen und Verschiebungen einschliessen.

Das Programm SPIKA für räumliche Berechnung von Plattenkonstruktionen ist mehrmals beim Projektieren von Brücken und anderen Bauwerken verwendet.

Indem man umfangreiche bei der räumlichen Berechnung der Brückenüberbauten gewonnene Ergebnisse ausnutzt, kann man einfache mathematische Modelle zusammenstellen, welche auch Abhängigkeiten zwischen Form, Anordnung, Grosse der Bauteile und verformtem – gespanntem Zustand der Konstruktion unter ständiger, ungünstiger Verkehrslas sowie anderen rechnerischen Belastungen widerspiegelt. Zur Herstellung solcher mathematischen Modelle ist die Anlage der Regressionsanalyse verwendet.

Die Verfahren der Regressionsanalyse sind auf der Aufwendung einer grossen Anzahl von gespeicherten statischen Angaben begründet, die aus Versuch, langzeitiger Beobachtung des Verhaltens der tatsäch-

lichen Konstruktion oder aus übrigen Quellen erhalten sind. In gegebenen Falle ist die Information als Ergebnis mehrmals durchgeführter räumlicher Berechnungen gespeichert.

Das mathematische Modell des räumlichen Verhaltens der Konstruktion vom vorgegebenen Schema stellt eine Formel dar, wo die gesuchte Extremspannung oder  $\rightarrow$  verschiebung als von den geometrischen Hauptparametern der Konstruktion und von den physisch  $\rightarrow$  mechanischen Eigenschaften des Materials und der Belastung abhängige Funktion dargestellt ist.

Die Extremspannung oder  $\rightarrow$  verschiebung in einem Bauteil der Plattenbalkenkonstruktion einer frei gelagerter Brücke kann als Funktion

$$P = f(l, G, B_i, D_i, K, M, H, C_B, X, Y) \quad (1)$$

ausgedrückt werden;

wobei:

- $l$   $\rightarrow$  Spannweite,
- $G$   $\rightarrow$  Durchfahrtsprofil,
- $B_i$   $\rightarrow$  geometrische Parameter der Träger (  $i = 1, 2, \dots, k$  ),
- $D_i$   $\rightarrow$  geometrische Parameter von Platten,
- $K$   $\rightarrow$  Anzahl von Trägern,
- $M$   $\rightarrow$  physisch-mechanische Kennwerte vom Material,
- $H$   $\rightarrow$  Belastungsangaben,
- $C_B$   $\rightarrow$  Information über Anordnung des Brückenüberbaues,
- $X, Y$   $\rightarrow$  Koordinaten des Überbaugerschnitts.

Die Formeln wie (1) lassen den Einfluss von mehreren Parametern auf den gespannten-verformten Zustand der Konstruktion analysieren. Praktisch ist es zweckmässiger für gestellte Aufgaben nur einen Teil

von Parametern der Funktion (1) zu berücksichtigen, die anderen werden festgestellt.

Bei der Konstruktion der mathematischen Modelle sind für die EDV bestimmte Programme der Regressionsanalyse verwendet. Mit diesen Programmen kann man ein polynomiales Modell gegebenen Grades Zusammenstellen:

$$P = \beta_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} x_i x_j + \dots,$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_i &- \text{ unbekannte Faktoren,} \\ x_i &- \text{ zuberücksichtigende Parameter,} \\ n &- \text{ Anzahl von Parameter,} \end{aligned}$$

Werden wir die einfachsten Beispiele für Konstruktion der Verhältnisse wie (1) betrachten.

1. Der frei gelagerte Überbau ohne Querscheiben von Autobahnbrücken aus Stahlbeton mit gleichen Trägern.

Beim angegebenen Durchfahrtsprofil kann das rechnerische Biegemoment von der Verkehrslast in Hauptträgern des Überbaues mit der Formel

$$M_B = A_1 + \frac{\ell}{K} (A_2 + A_3 \ell + A_4 t) \quad (2)$$

ermittelt,

wobei

$M_B$  - rechnerischer Extrebiegemoment von der Verkehrslast (es werden Lasten HK-80, H-30 und Träger für Fussgängerstege unter Berücksichtigung des Überlastungsfaktors und des dynamischen Faktors betrachtet),

$\ell$  - Spannweite,

$K$  - Anzahl von Hauptträgern,

$t$  - Länge der Fussgängerauskragungen,

$A_i$  - unbekannte Koeffizienten,

## 2. Der freigelagerte Plattenüberbau.

Beim angegebenen Durchfahrtsprofil können Biegemomente mit den

Formeln:

$$\begin{aligned} M_x &= (B_1 + B_2 l) l + B_3 q_c l^2 + (B_4 q_n + B_5 P_t) l^2, \\ M_y &= (C_1 + C_2 l) l + C_3 q_c l^2 + (C_4 q_n + C_5 P_t) l \end{aligned} \quad (3)$$

ermittelt,

wobei

$M_x, M_y$  - rechnerische extremale Quer - und Längsbiegemomente;

$q_c$  - Eigengewicht,

$q_n$  - Belastung aus Fahrbahndecke,

$P_t$  - Gewicht der Fussgängerstege,

$B_i, C_i$  - unbekannte Koeffizienten,

$A_i, B_i, C_i$  - Koeffizienten sind mittels mathematischen Bearbeitung

der gewonnenen Ergebnisse der räumlichen Berechnung

für verschiedene Durchfahrtsprofile gewonnen. Analogisch

sind auch Abhängigkeiten zur Ermittlung von anderen

Arten der Spannungen und Verschiebungen erhalten.

Die Genauigkeit der mittels Regressionsanalyse gewonnenen Formeln hängt wesentlich vom Umfang der gespeicherten Information ab. Daraufhin, sind Resultate aller nach Programm SPIKA durchgeführten räumlichen Berechnungen im langzeitlichen Speicher von EDV für nachfolgende mathematische Verarbeitung gesammelt.

Die Formeln wie (2,3) finden ihren Einsatz in der Anfangsstufe des Projektierens, wenn alle Varianten untersucht werden, alle Kombinationen und Ausmasse von Konstruktionsbauteilen vorgesehen werden und mehr-

malige wiederholte Berechnungen nötig sind.

Die Anwendung solcher Formeln beim optimalen Projektieren von Brückenüberbauten lässt stark die Wirksamkeit des Suchens nach optimalen Lösungen steigern.

1. Ulizkij B.J., Potapkin A.A., Rudenko W.I., Ssacharowa I.D., Jegoruschkin J.M. "Räumliche Brückenberechnungen (unter Anwendung von EDV)!" M. Verkehrsverlag, 1967.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Es werden einige Optimierungsprobleme beim Projektieren von Stahlbetonbrücken mitgeteilt, die auf einer neuen Auffassung der Ermittlung des Spannungs- und Formänderungszustandes der Brückenkonstruktion basieren. Dabei erzielt man reduzierten Berechnungsaufwand und erhöhte Wirksamkeit beim Suchen nach optimalen Lösungen.

#### SUMMARY

Some optimization problems in the design of concrete bridges are solved with a new approach for predicting stress-strain state of bridges. This method reduces to a considerable degree time consuming calculations and increases the efficiency of search of optimal solution.

#### RESUME

Quelques problèmes d'optimisation sont résolus grâce à une nouvelle conception de l'état contraintes-déformations des ponts. Cette méthode permet une diminution importante du temps de calcul et une augmentation d'efficacité de l'optimisation.