

# Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Fachwerksbrücken

Autor(en): **Kriso, Karl**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **3 (1935)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4153>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# **DIE KNICKSICHERHEIT DER DRUCKGURTE OFFENER FACHWERKSBRÜCKEN**

LA RÉSISTANCE AU FLAMBAGE DE LA MEMBRURE COMPRIMÉE  
DES PONTS OUVERTS À POUTRES EN TREILLIS

BUCKLING STRENGTH OF BOOMS OF OPEN LATTICE  
GIRDER BRIDGES

Professor Dr. Ing. KARL KRISO, Deutsche Technische Hochschule, Brünn.

In den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts hatten verschiedene Einstürze von offenen Fachwerksbrücken, die durch ungenügende Knicksicherheit der Obergurte verursacht wurden, das Augenmerk der Techniker auf dieses Problem gelenkt. Es ist das große Verdienst Engesser's, erstmalig im Jahre 1884 eine noch heute vielfach benutzte Näherungslösung<sup>1)</sup> entwickelt zu haben, die in einfacher Weise die Knickkraft bezw. die Knicksicherheit des Obergurtes oder die erforderliche Steifigkeit der Querrahmen von Trägern mit parallelen oder polygonalen Gurten zu ermitteln gestattet. Die Grundlagen einer strengen Lösung verdankt man Zimmermann, der die Ergebnisse seiner Arbeiten<sup>2)</sup> in den Jahren 1905—1909 in den Sitzungsberichten der preußischen Akademie der Wissenschaften niederlegte. Ostefeld<sup>3)</sup> entwickelte 1916 ebenfalls ein strenges Verfahren und verbesserte die von Zimmermann in nicht ganz einwandfreier Weise erfaßten Stetigkeitsbedingungen eines Trägers mit polygonalen Gurten.

In den fünfzig Jahren seit dem Erscheinen der Engesser'schen Arbeit bis in die letzte Zeit wurde eine ansehnliche Reihe von Näherungsverfahren für Träger mit polygonalen und geradlinigen Druckgurten veröffentlicht<sup>4)</sup>, die sich eine Verbesserung der Engesserlösung zum Ziele setzten. Wenn auch die meisten dieser Verfahren in mancher Hinsicht die am Obergurt der Brücke herrschenden statischen Verhältnisse schärfer erfaßten als die Engesser'sche Methode, so müssen hiebei doch immer wieder auch Annahmen getroffen werden, die in keiner Weise, auch nur annähernd erfüllt sind, deren Einfluß auf das Ergebnis daher schwer abzuschätzen ist. Natürlich lassen sich diese Annahmen stets so festsetzen, daß eine absolute Sicherheit gewährleistet ist, doch führen derart grobe Voraussetzungen einerseits zu einer Materialverschwendung und stehen andererseits im Widerspruch zur angestrebten Verfeinerung des Näherungsverfahrens. Inwieweit nun das Ziel, die Verbesserung des Engesserverfahrens, erreicht wurde, ist allerdings

1) Abhandlungen im Zentralblatt der Bauverwaltung: 1884, 1885, 1892, 1909.

2) Sitzungsberichte 1907 (S. 235, 326); 1909 (S. 180, 348).

3) Seitensteifigkeit offener Brücken. Beton und Eisen. 1916.

4) A. HAWRANEK, Seitensteifigkeit von Eisenbetonbogenbrücken. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau. Wien 1928.



nicht bekannt, da die meisten dieser Arbeiten nur mit dem Engesser-Verfahren allein verglichen und vielfach als genauer erklärt wurden, falls sich die Ergebnisse im Vergleich zu Engesser's Lösung ungünstiger gestalteten, weil gelegentlich die Meinung vertreten wird, daß die vereinfachenden, dem Engesserverfahren zugrunde liegenden Annahmen auf zu günstige Ergebnisse gegenüber der Wirklichkeit führen. Auch diese Behauptung ist nicht erwiesen, da die Ergebnisse des Engesserverfahrens, ebensowenig wie jene aller übrigen Näherungsverfahren, gehörig überprüft wurden, weder mit den Ergebnissen eines Modellversuches, noch mit jenen einer strengen Berechnung nach Zimmermann. Die Überprüfung und Durchrechnung von einigen speziellen Beispielen genügt in diesem Falle nicht, um Einsicht in die Verhältnisse zu bekommen, sind im Gegenteil ganze Bereiche nach bestimmten, durch die Praxis gegebenen Gesichtspunkten miteinander zu vergleichen. Die hiezu erforderlichen außerordentlich zeitraubenden und langwierigen Arbeiten sind wohl die Ursache, daß solche allgemeine Untersuchungen bisher noch nie durchgeführt wurden, auch Stichproben auf die Zuverlässigkeit eines Näherungsverfahrens, durch strenge Berechnung von wenigstens einigen speziellen Beispielen und Vergleich der Resultate, liegen nicht vor.

Im folgenden werden Ergebnisse aus einer umfassenden Arbeit mitgeteilt: ein Verfahren zur Berechnung der Knickdeterminante aus den Zimmermann'schen Knickgleichungen, das im Gegensatz zu dem bestehenden von Zimmermann<sup>5)</sup> entwickelten Verfahren einen mehr einheitlichen Aufbau zeigt und mit ziemlichem Zeitgewinn die strenge Berechnung der Knickdeterminante mit Benützung eines Rechenschiebers durchzuführen gestattet; aus dem strengen Verfahren wird ein Näherungsverfahren entwickelt, das die herrschenden statischen Verhältnisse weitgehendst erfaßt, einfach zu handhaben ist, durch eine Reihe von Vergleichsrechnungen überprüft wurde und im Durchschnitt Fehler von nur wenigen Prozenten aufweist, während es in gewissen, auch in der Praxis oft näherungsweise erfüllten Grenzfällen strenge Lösungen liefert; die Kenntnis der rasch zu ermittelnden Näherungswerte führt andererseits wieder zu einer Vereinfachung im strengen Verfahren, indem sie eine derartige Stellung des Problems gestattet, die die strenge Berechnung des erforderlichen Rahmenwiderstandes aus linearen Gleichungen ermöglicht; überdies wurden die vielen bestehenden Näherungsverfahren auf eine einheitliche Basis gebracht, um auf diese Weise einen Vergleich dieser Verfahren untereinander und mit dem hier entwickelten Näherungsverfahren zu ermöglichen.

### 1. Die Zimmermann'schen Knickgleichungen.

Ein gerader Stab sei in einzelnen Punkten elastisch gestützt und nach Figur 1a belastet. Innerhalb eines Feldes sind dann die Stabkräfte  $O$ , konstant, auch sind die Querschnitte  $F$ , und Trägheitsmomente  $J$ , im Felde unveränderlich, im übrigen aber ebenso wie die Feldweiten  $c$ , von beliebiger Größe. Die elastische Stützung sei durch Angabe des Wertes  $\delta$  gekennzeichnet, der die Stützensenkung in cm pro Tonne Belastung angibt. Wird dieser Stab durch  $\rho$ -fache Erhöhung der Belastung an die Knickgrenze gebracht, so verläßt er seine ursprünglich gerade, jetzt labile Gleichgewichts-

<sup>5)</sup> H. ZIMMERMANN, Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken. Ernst & Sohn, Berlin 1910.

lage zugunsten einer benachbarten stabilen Form, deren elastische Linie durch Figur 1b angezeigt sei. Die Verbindungslinie der Stützpunkte bildet das Stabsehnepolygon, dessen Seiten zur ursprünglichen geraden Stabachse unter den Winkeln  $\nu_r$  geneigt sind. Der deformierte Stab befindet sich unter der Wirkung der Kräfte  $S, \Delta S$  und der elastischen Stützenwiderstände  $W$  im Gleichgewicht. Konstruiert man das zu dieser Belastung gehörige Drucklinienpolygon, so kommt in der zum Felde  $r$  gehörigen Seite die Knickkraft  $S_r = \rho O_r$  zur Wirkung, während in den Stützpunktquerschnitten die Biegemomente  $M_r$  entstehen.

Die Gleichgewichtsbedingungen dieses Knickfalles werden durch zwei Gruppen von linearen homogenen Gleichungen formuliert, die Zimmermann

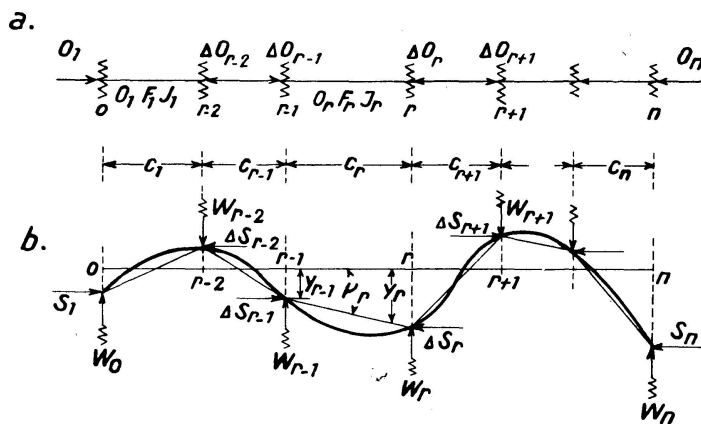


Fig. 1.

als Knickgleichungen bezeichnet hatte. Die eine Gruppe, die „Stetigkeitsbedingungen“, umfaßt bei einem  $n$ -feldrigen Stab mit gelenkiger Auflagerung ( $M_0 = M_n = 0$ ) der Stabenden  $n - 1$  Gleichungen von der Form

$$M_{r-1} \frac{s_r}{S_r c_r} + M_r \left( \frac{t_r}{S_r c_r} + \frac{t_{r+1}}{S_{r+1} c_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{s_{r+1}}{S_{r+1} c_{r+1}} = \nu_r - \nu_{r+1} \Big|_{r=1, 2, \dots, n-1} \quad (I)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \frac{\varphi_r}{\sin \varphi_r} - 1; & \varphi_r &= \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}} \\ t_r &= 1 - \frac{\varphi_r}{\operatorname{tg} \varphi_r}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$T_r =$  Knickmodul und  $J_r =$  Trägheitsmoment im Felde  $r$ .

Die zweite Gruppe der Knickgleichungen, die „Lagerbedingungen“, umfassen  $n$  Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} + \frac{\delta_{r-1}}{c_{r-1}} M_{r-2} - \left[ \frac{\delta_{r-1}}{c_{r-1}} + \frac{\delta_{r-1} + \delta_r}{c_r} \right] M_{r-1} + \left[ \frac{\delta_{r-1} + \delta_r}{c_r} + \frac{\delta_r}{c_{r+1}} \right] M_r - \frac{\delta_r}{c_{r+1}} M_{r+1} + S_{r-1} \delta_{r-1} \nu_{r-1} + \\ + [c_r - (\delta_{r-1} + \delta_r) S_r] \nu_r + S_{r+1} \delta_r \nu_{r+1} = 0 \end{aligned} \quad (II)$$

Als Unbekannte in den Gleichungsgruppen (I) und (II) erscheinen die  $(n - 1)$  Stützmomente  $M_1, M_2 \dots M_{n-1}$  und die  $n$  Neigungswinkel  $\nu_r$  des Stabsehnepolygons. Aus den obigen  $(2n - 1)$  homogenen Gleichungen resultieren nur dann von Null verschiedene Werte der Unbekannten  $M_r$  und  $\nu_r$ ,

wenn die Determinante  $\Delta$  aus den Beiwerten der Unbekannten verschwindet. Diese Determinante  $\Delta$  wird als **Knickdeterminante** bezeichnet, die Bedingung  $\Delta = 0$ , die den Knickzustand kennzeichnet, bildet die „Knickbedingung“ des vorliegenden Knickfalles.

Die Ausrechnung der Knickdeterminante liefert eine einzige Gleichung, die zur Bestimmung von nur einer, in den Beiwerten enthaltenen Unbekannten ausreicht.

Das Problem der Berechnung des Druckgurtes einer offenen Brücke mit Rücksicht auf die seitliche Knicksicherheit geht darauf hinaus, daß in den Beiwerten der Knickgleichungen eine passend gewählte Größe frei gelassen und aus der Bedingung  $\Delta = 0$  errechnet wird.

## 2. Die Ermittlung der Knickdeterminante des Druckgurtes einer offenen Brücke.

Der Obergurt einer offenen Brücke, der in den Rahmenköpfen in Kugeln Gelenken lagernd gedacht wird, entspricht den in 1) dargelegten Bedingungen. Die Knickkräfte  $S_r = \varrho \max O_r$  werden durch die  $\varrho$ -fach erhöhten maximalen Druckkräfte  $O_r$  der Gebrauchsbelastung gebildet. Die Kräfte  $\max O_r$  werden

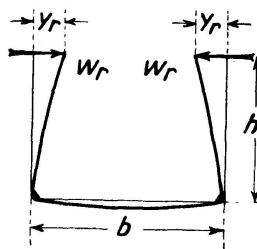


Fig. 2.

allerdings durch verschiedene Zugstellungen erzeugt und können daher niemals gleichzeitig zur Wirkung kommen. Trotzdem wird im weiteren eine gleichzeitige Einwirkung angenommen und demnach rechnerisch eine Sicherheit ermittelt, die kleiner ist als die wirklich vorhandene.

Die elastische Stützung wird durch die Querrahmen gewährleistet. Werden die Querträger in den Vertikalen des Rahmens frei gelagert, so treten in denselben bei beliebiger Querträgerbelastung keinerlei Verbiegungen auf, die Rahmenköpfe und damit auch der Obergurt verbleiben in der vertikalen Tragwand und treten erst im Knickzustand aus derselben heraus, wobei in seitlicher Richtung die elastische Stützung der Querrahmen zur Wirkung kommt und die Rahmenwiderstände  $W_r$  hervorgerufen werden (Figur 1). Umgekehrt wirkt der Gurt belastend mit  $W_r$  auf die Querrahmen (Figur 2), die Kräfte  $W_r$  erzeugen die Verschiebungen  $y_r$  der Rahmenköpfe, es ist

$$W_r \delta_r = \frac{y_r}{\delta_r},$$

wenn  $\delta_r$  die durch  $W_r = 1$  erzeugte Rahmenkopfverschiebung vorstellt.

Der einer Durchbiegung  $y_r = 1$  cm entsprechende Rahmenwiderstand wird mit  $A_r$  bezeichnet und spezifischer Rahmenwiderstand (Federkonstante des Querrahmens) genannt. Demnach ist auch

$$A_r = \frac{1}{\delta_r}$$

mit Kenntnis von  $\delta_r$ , das mit Rücksicht auf die konstruktive Durchbildung des Rahmens zu errechnen ist, als bekannt anzusehen <sup>6)</sup>).

Für die weitere Untersuchung wird Symmetrie zur Mitte, sowohl für die Konstruktion, als auch für die Belastung vorausgesetzt. Mit Rücksicht darauf kann die elastische Linie eines  $n$ -feldrigen Stabes im Knickfalle, bezüglich der Gurtmitte, nur eine symmetrische Form mit 1, 3, 5, ...  $(n - 1)$  Knickwellen oder eine polarsymmetrische Form mit 2, 4, ...  $(n - 2)$  Wellen aufweisen. Bei der Herleitung der Knickbedingung werden diese zwei Knickfälle von vorneherein getrennt behandelt und hiefür gelegentlich die abkürzende Bezeichnung „Knickfall  $nc/1$ “ bzw. „Knickfall  $nc/2$ “ gebraucht.

Für die weitere Durchführung empfiehlt es sich, die Gleichungsgruppen (I) und (II) so umzuformen, daß die Beiwerte der Unbekannten und diese selbst als dimensionslose Zahlen erscheinen. Wählt man passende konstante Mittelwerte  $S, c, \delta$  bzw.  $A$ , setzt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_r}{S} &= S'_r ; & \frac{c_r}{c} &= c'_r ; & \frac{\delta_r}{\delta} &= \delta'_r ; \\ \frac{S_r}{S'_r c'_r} &= s'_r ; & \frac{t_r}{S'_r c'_r} &= t'_r ; & t'_r + t'_{r+1} &= t'_{r,r+1} ; \\ \frac{M_r}{S c} &= M'_r ; & \frac{c}{S \delta} &= \frac{A c}{S} = y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und führt diese Größen in die Gleichungsgruppen (I) und (II) ein, so umfassen diese Gruppen für einen  $n$ -feldrigen Träger mit gerader Felderzahl infolge der herrschenden Symmetrie je  $\frac{n}{2}$  Gleichungen von der Form

$$s'_r M'_{r-1} + t'_{r,r+1} M'_r + s'_{r+1} M'_{r+1} = v_r - v_{r+1} \Big|_{r=1,2,\dots,\frac{n}{2}} \quad (Ia)$$

$$a'_{r-2} M'_{r-2} - b'_{r-1} M'_{r-1} + b''_r M'_r - a''_{r+1} M'_{r+1} + \alpha'_{r-1} v_{r-1} + \varepsilon_r v_r + \beta_{r+1} v_{r+1} = 0 \Big|_{r=1,2,\dots,\frac{n}{2}} \quad (IIa)$$

wobei die Koeffizienten der letzten Gruppe durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} a'_r &= \frac{\delta'_{r+1}}{c'_{r+1}} \Big|_{r=0}^{r=\frac{n}{2}-1} & a''_r &= \frac{\delta'_{r-1}}{c'_r} \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}+1} \\ b'_r &= a'_{r-1} + e'_{r+1} \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}-1} & b''_r &= e_r + a''_{r+1} \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}} \\ \alpha_r &= \delta'_r S'_r \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}} & \varepsilon_r &= c'_r y - \gamma_r \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}} & \beta_r &= \delta'_{r-1} S'_r \Big|_{r=2}^{r=\frac{n}{2}} \\ e_r &= a'_{r-1} + a''_r \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}} & \gamma_r &= c'_r e_r S'_r \Big|_{r=1}^{r=\frac{n}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Wegen der vorausgesetzten Symmetrie ist bei Anschreibung der Gleichungen (Ia) und (IIa) im speziellen Falle zu beachten, daß für alle Beiwerte deren Zeiger  $r > \frac{n}{2}$ , die Beziehungen

<sup>6)</sup> R. MAYER, Die Knickfestigkeit. Springer, Berlin 1921 (S. 200 ff.).

$$\left. \begin{aligned} s'_r &= s'_{n+1-r}; & a''_r &= a'_{n-r} \\ t'_r &= t'_{n+1-r}; & \beta_r &= \alpha_{n+1-r} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gelten und daß ferner, wenn  $r > \frac{n}{2}$ , beim symmetrischen bzw. polarsymmetrischen Knickfall die Beziehung

$$M_r = \pm M_{n-r} \quad \text{und} \quad \nu_r = \mp \nu_{n+1-r} \quad (5)$$

gilt.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) werden im folgenden, der besseren Übersicht halber, die Knickgleichungen für den speziellen Fall eines 8-feldrigen Gurtes angeschrieben und die Knickdeterminanten  $\Delta i'$  und  $\Delta i''$  des symmetrischen bzw. polarsymmetrischen Knickfalles entwickelt. Die Ergebnisse werden später verallgemeinert.

### Stetigkeitsbedingungen.

a) Symmetrischer Knickfall  $8c/1$ :

$$\left. \begin{aligned} + t'_{12} M'_1 + s'_2 M'_2 &= \nu_1 - \nu_2 \\ s'_2 M'_1 + t'_{23} M'_2 + s'_3 M'_3 &= \nu_2 - \nu_3 \\ s'_3 M'_2 + t'_{34} M'_3 + s'_4 M'_4 &= \nu_3 - \nu_4 \\ 2s'_4 M'_3 + 2t'_4 M'_4 &= \nu_4 - \nu_5 = 2\nu_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ib})$$

b) Polarsymmetrischer Knickfall  $8c/2$ :

Wegen  $\nu_5 = \nu_4$  und  $M'_4 = 0$  entfällt nach (Ia) und (5) in der obigen Gleichungsgruppe die letzte Gleichung, sowie das dritte Glied auf der linken Seite der vorletzten Gleichung.

### Lagerbedingungen.

a) Symmetrischer Knickfall  $8c/1$ :

$$\left. \begin{aligned} + b''_1 M'_1 - a''_2 M'_2 + 0 + \varepsilon_1 \nu_1 + \beta'_2 \nu_2 &= 0 \\ - b'_1 M'_1 + b''_2 M'_2 - a''_3 M'_3 + \alpha_1 \nu_1 + \varepsilon_2 \nu_2 + \beta'_3 \nu_3 &= 0 \\ + a'_1 M'_1 - b'_2 M'_2 + b''_3 M'_3 - a''_4 M'_4 + \alpha_2 \nu_2 + \varepsilon_3 \nu_3 + \beta'_4 \nu_4 &= 0 \\ + a'_2 M'_2 - (b'_3 + a'_3) M'_3 + b''_4 M'_4 - 0 + \alpha_3 \nu_3 + (\varepsilon_4 - \alpha_4) \nu_4 + 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIb})$$

b) Polarsymmetrischer Knickfall  $8c/2$ :

In diesem Falle ist in der letzten Gleichung die Differenz der Beiwerte bzw. Summe durch  $(b'_3 - a'_3)$  bzw.  $(\varepsilon_4 + a_4)$  zu ersetzen. Wegen  $M'_4 = 0$  entfallen überdies die entsprechenden Glieder in den zwei letzten Gleichungen.

### Die Knickdeterminante $\Delta i'$ des symmetrischen Knickfalles $8c/1$ .

Aus den Stetigkeitsbedingungen (Ib) lassen sich die Momente  $M'_r$  als Funktionen der Neigungswinkel  $\nu_r$  errechnen und in der Form

$$M'_r = A'_r \nu_1 + B'_r \nu_2 + C'_r \nu_3 + D'_r \nu_4 \Big|_{r=1,2,3,4=\frac{n}{2}} \quad (6)$$

darstellen. Führt man diese Gleichungen in die Lagerbedingungen (IIb) ein, so erhält man in abgekürzter Schreibweise die folgende Gruppe von homogenen Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (+i'_{11} + \varepsilon_1) v_1 + (-i'_{12} + \beta_2) v_2 + (+i'_{13}) v_3 + (-i'_{14}) v_4 &= 0 \\ (-i'_{21} + \alpha_1) v_1 + (+i'_{22} + \varepsilon_2) v_2 + (-i'_{23} + \beta_3) v_3 + (+i'_{24}) v_4 &= 0 \\ (+i'_{31}) v_1 + (-i'_{32} + \alpha_2) v_2 + (+i'_{33} + \varepsilon_3) v_3 + (-i'_{34} + \beta_4) v_4 &= 0 \\ (-i'_{41}) v_1 + (+i'_{42}) v_2 + (-i'_{43} + \alpha_3) v_3 + (+i'_{44} + \varepsilon_4 - \alpha_4) v_4 &= 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

Hierin sind die Größen  $i'_{r,k}$ , wobei der Zeiger  $r$  die horizontale Reihe,  $k$  die vertikale Kolonne anzeigt, Absolutwerte, die, wie leicht festzustellen ist, aus den untenstehenden Gleichungen zu ermitteln sind und zwar ist für die Reihen

$$\left. \begin{aligned} r \leq \frac{n}{2} \cdots i'_{rk} &= a'_{r-2} K_{r-2} + b'_{r-1} K_{r-1} + b''_r K_r + a''_{r+1} K_{r+1} \\ r = \frac{n}{2} \cdots i'_{rk} &= a_{\frac{n}{2}-2} K_{\frac{n}{2}-2} + (b'_{\frac{n}{2}-1} \pm a'_{\frac{n}{2}-1}) K_{\frac{n}{2}-1} + b''_{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}} \end{aligned} \right\} (8)$$

wobei im Klammerausdruck der zweiten Gleichung das positive Vorzeichen für den symmetrischen, das negative Vorzeichen für den polarsymmetrischen Knickfall gilt.

In (8) ist für  $k = 1$ , also für alle in der ersten Kolonne auftretenden Werte  $i'_{r,1}$  der Buchstabe  $K_r$  durch  $A'_r$  zu ersetzen, während den Kolonnen  $k = 2, 3, 4$  die Buchstaben  $B'_r, C'_r, D'_r$  zugeordnet sind. Aus diesem Grunde werden die durch diese Buchstaben bezeichneten Größen, die, wie sich zeigen läßt, mit den in (6) auftretenden Absolutwerten der Koeffizienten  $A'_r, A'_r, C'_r, D'_r$  identisch sind, kurz als Kolonnenbuchstaben oder Kolonnenwerte der Knickdeterminante  $\Delta i'$  bezeichnet. Nach (6) existieren in jeder Kolonne  $\frac{n}{2}$  Kolonnenbuchstaben.

Aus (7) folgen nur dann endliche, dem Knickzustand entsprechende Werte der Neigungswinkel  $v_r$ , wenn die Determinante  $\Delta i'$  aus den Beiwerten der  $v_r$  verschwindet. Die Knickbedingung für die symmetrischen Knickformen ist daher gegeben durch

$$\Delta i' = \begin{vmatrix} +i'_{11} + \varepsilon_1 & -i'_{12} + \beta_2 & +i'_{13} & -i'_{14} \\ -i'_{21} + \alpha_1 & +i'_{22} + \varepsilon_2 & -i'_{23} + \beta_3 & +i'_{24} \\ +i'_{31} & -i'_{32} + \alpha_2 & +i'_{33} + \varepsilon_3 & -i'_{34} + \beta_4 \\ -i'_{41} & +i'_{42} & -i'_{43} + \alpha_3 & +i'_{44} + (\varepsilon_4 - \alpha_4) \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Die (+) und (-) Vorzeichen der Absolutwerte  $i'_{r,k}$  sind schachbrettartig verteilt.

### Die Knickdeterminante $\Delta i''$ des polarsymmetrischen Knickfalles 8 c/1.

Führt man die aus den Stetigkeitsbedingungen in der Form

$$M'_r = A''_r v_1 + B''_r v_2 + C''_r v_3 + D''_r v_4 \Big|_{r=1,2,3=\frac{n}{2}-1} \quad (10)$$

errechneten Momente in die Lagerbedingung ein, so erhält man hieraus in Analogie zum Knickfall 8 c/1 die Knickbedingung

$$\Delta i'' = \begin{vmatrix} +i''_{11} + \varepsilon_1 & -i''_{12} + \beta_2 & +i''_{13} & -i''_{14} \\ -i''_{21} + \alpha_1 & +i''_{22} + \varepsilon_2 & -i''_{23} + \beta_3 & +i''_{24} \\ +i''_{31} & -i''_{32} + \alpha_2 & +i''_{33} + \varepsilon_3 & -i''_{34} + \beta_4 \\ -i''_{41} & +i''_{42} & -i''_{43} + \alpha_3 & +i''_{44} + (\varepsilon_4 + \alpha_4) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

Die Absolutwerte  $i''_{r,k}$  gewinnt man ebenfalls mit Hilfe der Gleichungen (8), wobei im Klammerausdruck der zweiten Gleichung das negative Zeichen gilt, im übrigen in den Kolonnen  $k = 1, 2, 3, 4$  der Kolonnenbuchstabe  $K_r$  durch die Absolutwerte der in (10) auftretenden Koeffizienten  $A_r'', B_r'', C_r'', D_r''$  zu ersetzen ist. In jeder Kolonne existieren jetzt nur  $\binom{n}{2} - 1$  Kolonnenwerte, in Übereinstimmung mit der Zahl der in der Stabhälfte auftretenden, von Null verschiedenen Momente  $M_r'$ . Wegen  $M_n = 0$  sind daher für alle Kolonnen die in (8) auftretenden Werte  $K_n = 0$ .

Mit Rücksicht auf die aus (9) bzw. (11) ersichtliche Form der Knickdeterminanten  $\Delta i'$  und  $\Delta i''$  lassen sich nun diese Determinanten ganz allgemein für jeden  $n$ -feldrigen Träger mit gerader Felderzahl in formal analoger Weise anschreiben und die hierin auftretenden Koeffizienten nach den Gleichungen (3) errechnen, vorläufig noch unbekannt sind nur die in (6), (10) bzw. (8) auftretenden Kolonnenwerte  $A \dots D$ .

### 3. Die Ermittlung der Kolonnenwerte.

Die in einer vertikalen Spalte in den Knickdeterminanten  $\Delta i'$  bzw.  $\Delta i''$  auftretenden und auch in den Gleichungsgruppen (6) bzw. (10) erscheinenden Kolonnenwerte sollen vorübergehend, ganz allgemein durch die Bezeichnung  $K_r'$  bzw.  $K_r''$  angedeutet werden. Führt man die Gruppen (6) bzw. (10) in die Stetigkeitsbedingungen (I b) ein, so erhält man auf Grund von Koeffizientenvergleich die folgenden Gleichungen zur Ermittlung der Kolonnenwerte:

$+ t'_{12} K'_1 + s'_2 K'_2 =$	A'	B'	C'	D'	}	(12)
$s'_2 K'_1 + t'_{23} K'_2 + s'_3 K'_3 =$	0	+1	-1	0		
$s'_3 K'_2 + t'_{34} K'_3 + s'_4 K'_4 =$	0	0	+1	-1		
$s'_4 K'_3 + t'_4 K'_4 =$	0	0	0	+1		
	A''	B''	C''	D''	}	(13)
$+ t'_{12} K''_1 + s'_2 K''_2 =$	+1	-1	0	0		
$s'_2 K''_1 + t'_{23} K''_2 + s'_3 K''_3 =$	0	+1	-1	0		
$s'_3 K''_2 + t'_{34} K''_3 +$	0	0	+1	-1		

Aus den  $(n - 1)$  Stetigkeitsbedingungen erhält man nun nach (12), (13)  $\frac{n}{2} (n - 1)$  Clapeyron'sche Gleichungen zur Ermittlung der Kolonnenwerte. In diesen Gleichungen sind die Größen  $K'$  bzw.  $K''$  jeweils durch die Kolonnenwerte  $A'$  bis  $D'$  bzw. durch  $A''$  bis  $D''$  zu ersetzen und die rechts unter den Kolonnenbuchstaben stehenden Werte als rechte Gleichungsseiten zuzuordnen.

Die Lösung dieser Gleichungsgruppen, die hier nicht hergeleitet wird, läßt sich sehr einfach nach einem vom Verfasser ausgearbeiteten Verfahren <sup>7)</sup> für jede beliebige Felderzahl einheitlich nach einem tabellarischen Schema durchführen, das nun für den vorliegenden Fall eines 8-feldrigen Trägers angeschrieben wird und für jede andere Felderzahl  $n \geq 8$  wie aus dem Schema zu ersehen, sehr leicht erweitert, bzw. eingengt werden kann.

<sup>7)</sup> K. KRISO, Statik der Vierendeelträger. Springer, Berlin 1922. K. KRISO, Stabilité des poutres Vierendeel. Beranger, Paris 1926.

Tabelle I für den Knickfall 8c/1 und 8c/2.

$S = \dots; c = \dots;$

$r$	$S_r$	$c_r$	$\bar{\sigma}_r = \frac{S_{r-1}}{S_r}$	$\bar{c}_r = \frac{c_{r-1}}{c_r}$	$\sigma_r = \bar{\sigma}_r \bar{c}_r$	$s_r$	$\bar{s}_r = \sigma_r s_r$	$t_r$	$\bar{t}_r = \sigma_r t_r$	$\tau_r = t_r + \bar{t}_{r+1}$	$\bar{s}'_r = \frac{S_r}{S}$	$c'_r = \frac{c_r}{c}$	$k_r = c'_r \frac{S'_r}{\tau_r}$
1	$S_1$	$c_1$	—	—	—	$s_1$	—	$t_1$	—	$\tau_1 = t_1 + \bar{t}_2$	$S'_1 = \frac{S_1}{S}$	$c'_1 = \frac{c_1}{c}$	$k_1 = c'_1 \frac{S'_1}{\tau_1}$
2	$S_2$	$c_2$	$\bar{\sigma}_2 = \frac{S_1}{S_2}$	$\bar{c}_2 = \frac{c_1}{c_2}$	$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \bar{c}_2$	$s_2$	$\bar{s}_2 = \sigma_2 s_2$	$t_2$	$\bar{t}_2 = \sigma_2 t_2$	$\tau_2 = t_2 + \bar{t}_3$	$S'_2 = \frac{S_2}{S}$	$c'_2 = \frac{c_2}{c}$	$k_2 = c'_2 \frac{S'_2}{\tau_2}$
3	$S_3$	$c_3$	$\bar{\sigma}_3 = \frac{S_2}{S_3}$	$\bar{c}_3 = \frac{c_2}{c_3}$	$\sigma_3 = \bar{\sigma}_3 \bar{c}_3$	$s_3$	$\bar{s}_3 = \sigma_3 s_3$	$t_3$	$\bar{t}_3 = \sigma_3 t_3$	$\tau_3 = t_3 + \bar{t}_4$	$S'_3 = \frac{S_3}{S}$	$c'_3 = \frac{c_3}{c}$	$k_3 = c'_3 \frac{S'_3}{\tau_3}$
$\frac{n}{2} = 4$	$S_4$	$c_4$	$\bar{\sigma}_4 = \frac{S_3}{S_4}$	$\bar{c}_4 = \frac{c_3}{c_4}$	$\sigma_4 = \bar{\sigma}_4 \bar{c}_4$	$s_4$	$\bar{s}_4 = \sigma_4 s_4$	$t_4$	$\bar{t}_4 = \sigma_4 t_4$	$\tau_4 = t_4 + 0$	$S'_4 = \frac{S_4}{S}$	$c'_4 = \frac{c_4}{c}$	$k_4 = c'_4 \frac{S'_4}{\tau_4}$

In dieser Tabelle sind die Größen  $s_r$  und  $t_r$  nach 1) zu berechnen, die Stabkräfte werden durch  $S_r$ , die Feldweiten durch  $c_r$  bezeichnet, während  $S$  und  $c$  beliebige zu wählende konstante Mittelwerte von der Größenordnung der  $S_r$  bzw.  $c_r$  darstellen. Am besten setzt man  $S = S_{n/2}$  und  $c = c_{n/2}$ .

Tabelle II/1 für 8c/1.

$a$ - und  $b$ -Werte:

$r$	$S_{r+1}$	$\tau_{r+1}$	$a_r = \frac{S_{r+1}}{\tau_{r+1}}$ $a_{n/2} = 1$	$\bar{s}_r$	$\tau_{r-1}$	$b_1 = 1$ $b_r = \frac{\bar{s}_r}{\tau_{r-1}}$
1	$S_2$	$\tau_2$	$a_1 = \frac{S_2}{\tau_2}$	—	—	$b_1 = 1$
2	$S_3$	$\tau_3$	$a_2 = \frac{S_3}{\tau_3}$	$\bar{s}_2$	$\tau_1$	$b_2 = \frac{\bar{s}_2}{\tau_1}$
3	$S_4$	$\tau_4$	$a_3 = \frac{S_4}{\tau_4}$	$\bar{s}_3$	$\tau_2$	$b_3 = \frac{\bar{s}_3}{\tau_2}$
$\frac{n}{2} = 4$	—	—	$a_4 = 1$	$\bar{s}_4$	$\tau_3$	$b_4 = \frac{\bar{s}_4}{\tau_3}$

Tabelle II/2 für 8c/2.

$a$ - und  $b$ -Werte:

$r$	$S_{r+1}$	$\tau_{r+1}$	$a_r = \frac{S_{r+1}}{\tau_{r+1}}$ $a_{n/2-1} = 1$	$\bar{s}_r$	$\tau_{r-1}$	$b_1 = 1$ $b_r = \frac{\bar{s}_r}{\tau_{r-1}}$
1						
2						
$\frac{n}{2}-1 = 3$	—	—	$a_3 = 1$			

Die Werte in den umrahmten Teilen der beiden Tabellen stimmen überein.

Tabelle III/1 für 8c/1.

Koeffizienten  $c$ .

$r$	$b_r$	$c_{r-1} b_r$	$f_r = 1 - c_{r-1} b_r$	$a_r$	$c_r = \frac{a_r}{f_r}$
1	$b_1$	0	$f_1 = 1 - 0$	$a_1$	$c_1 = \frac{a_1}{f_1} = a_1$
2	$b_2$	$c_1 b_2$	$f_2 = 1 - c_1 b_2$	$a_2$	$c_2 = \frac{a_2}{f_2}$
3	$b_3$	$c_2 b_3$	$f_3 = 1 - c_2 b_3$	$a_3$	$c_3 = \frac{a_3}{f_3}$
$\frac{n}{2} = 4$	$b_4$	$c_3 b_4$	$f_4 = 1 - c_3 b_4$	$a_4$	$c_4 = \frac{a_4}{f_4}$

Tabelle III/2 für 8c/2.

Koeffizienten  $c$ .

$r$	$b_r$	$c_{r-1} b_r$	$f_r = 1 - c_{r-1} b_r$	$a_r$	$c_r = \frac{a_r}{f_r}$
1					
2					
$\frac{n}{2}-1 = 3$				$a_3 = 1$	$c_3 = \frac{a_3}{f_3}$

Die Werte in den umrahmten Teilen der beiden Tabellen stimmen überein.



Tabelle IV/1 für 8c/1.

Koeffizienten  $d$ .

$r$	$a_r$	$d_{r+1} a_r$	$g_r = 1 - d_{r+1} a_r$	$b_r$	$d_r = \frac{b_r}{g_r}$
1	$a_1$	$d_2 a_1$	$g_1 = 1 - d_2 a_1$	$b_1$	$d_1 = \frac{b_1}{g_1}$
2	$a_2$	$d_3 a_2$	$g_2 = 1 - d_3 a_2$	$b_2$	$d_2 = \frac{b_2}{g_2}$
3	$a_3$	$d_4 a_3$	$g_3 = 1 - d_4 a_3$	$b_3$	$d_3 = \frac{b_3}{g_3}$
$\frac{n}{2} = 4$	$a_4$	0	$g_4 = 1 - 0$	$b_4$	$d_4 = \frac{b_4}{g_4} = b_4$

Tabelle IV/2 für 8c/2.

Koeffizienten  $d$ .

$r$	$a_r$	$d_{r+1} a_r$	$g_r = 1 - d_{r+1} a_r$	$b_r$	$d_r = \frac{b_r}{g_r}$
1	$a_1$	$d_2 a_1$	$g_1 = 1 - d_2 a_1$	$b_1$	$d_1 = \frac{b_1}{g_1}$
2	$a_2$	$d_3 a_2$	$g_2 = 1 - d_3 a_2$	$b_2$	$d_2 = \frac{b_2}{g_2}$
$\frac{n}{2}-1 = 3$	$a_3$	0	$g_3 = 1 - 0$	$b_3$	$d_3 = \frac{b_3}{g_3} = b_3$

Die Tabellen IV sind von unten nach oben zu entwickeln.

Tabelle V/1 für 8c/1.

Multiplikatoren  $m$ .

$r$	$c_{r-1}$	$d_r$	$c_{r-1} d_r$	$h_r = 1 - c_{r-1} d_r$	$g_r$	$m_r = \frac{1}{g_r h_r}$ *)
1	—	—	—	—	—	$m_1 = d_1$
2	$c_1$	$d_2$	$c_1 d_2$	$h_2 = 1 - c_1 d_2$	$g_2$	$m_2 = \frac{1}{g_2 h_2}$
3	$c_2$	$d_3$	$c_2 d_3$	$h_3 = 1 - c_2 d_3$	$g_3$	$m_3 = \frac{1}{g_3 h_3}$
$\frac{n}{2} = 4$	—	—	—	—	—	$m_4 = c_4$

Tabelle V/2 für 8c/2.

Multiplikatoren  $m$ .

$r$	$c_{r-1}$	$d_r$	$c_{r-1} d_r$	$h_r = 1 - c_{r-1} d_r$	$g_r$	$m_r = \frac{1}{g_r h_r}$ *)
1	—	—	—	—	—	$m_1 = d_1$
2	$c_1$	$d_2$	$c_1 d_2$	$h_2 = 1 - c_1 d_2$	$g_2$	$m_2 = \frac{1}{g_2 h_2}$
$\frac{n}{2}-1 = 3$	—	—	—	—	—	$m_3 = c_3$

\*) In beiden Tabellen ist der Multiplikator in der ersten und letzten Zeile nicht nach der im Tabellenkopf angegebenen Formel zu entwickeln; es ist immer  $m_1 = d_1$  und in der letzten Zeile  $m_r = c_r$ , wobei  $r = \frac{n}{2}$  bzw.  $\frac{n}{2} - 1$ .

Tabelle VI/1 für 8c/1.

$ck$ - und  $dk$ -Werte.

$r \backslash k$	I	II	III	IV
1	$k_1$	$c_1 k_1$	$c_2 (c_1 k_1)$	$c_3 (c_2 c_1 k_1)$
2	$d_2 k_2$	$k_2$	$c_2 k_2$	$c_3 (c_2 k_2)$
3	$d_2 (d_3 k_3)$	$d_3 k_3$	$k_3$	$c_3 k_3$
$\frac{n}{2} = 4$	$d_2 (d_3 d_4 k_4)$	$d_3 (d_4 k_4)$	$d_4 k_4$	$k_4$

Tabelle VI/2 für 8c/2.

$ck$ - und  $dk$ -Werte.

$r \backslash k$	I	II	III
1			
2	$d_2 k_2$		
$\frac{n}{2}-1 = 3$	$d_2 (d_3 k_3)$	$d_3 k_3$	

Die Werte in den umrahmten Teilen der beiden Tabellen stimmen überein.

Tabelle VII/1 für 8c/1.

$\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -,  $\delta$ -Werte.

1	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$
2	$\beta_1 = m_1$ I	$\beta_2 = m_2$ II	$\beta_3 = m_3$ III	$\beta_4 = m_4$ IV
3	$\gamma_1 =$	$\gamma_2 =$	$\gamma_3 =$	$\gamma_4 =$
$\frac{u}{2} = 4$	$\delta_1 =$	$\delta_2 =$	$\delta_3 =$	$\delta_4 =$

Tabelle VII/2 für 8c/2.

$\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -Werte.

1	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$
2	$\beta_1 = m_1$ I	$\beta_2 = m_2$ II	$\beta_3 = m_3$ III
$\frac{n}{2}-1 = 3$	$\gamma_1 =$	$\gamma_2 =$	$\gamma_3 =$

In die Tabellen VII sind die mit den entsprechenden Multiplikatoren vervielfältigten vertikalen Kolonnen der Tabellen VI einzutragen.

Tabelle VIII/1 für 8c/1.

Kolonnenwerte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ .

$A'_1 = \alpha_1$	$A'_2 = \alpha_2$	$A'_3 = \alpha_3$	$A'_4 = \alpha_4$
$B'_1 = \alpha_1 + \beta_1$	$B'_2 = \alpha_2 + \beta_2$	$B'_3 = \alpha_3 + \beta_3$	$B'_4 = \alpha_4 + \beta_4$
$C'_1 = \beta_1 + \gamma_1$	$C'_2 = \beta_2 + \gamma_2$	$C'_3 = \beta_3 + \gamma_3$	$C'_4 = \beta_4 + \gamma_4$
$D'_1 = \gamma_1 + \delta_1$	$D'_2 = \gamma_2 + \delta_2$	$D'_3 = \gamma_3 + \delta_3$	$D'_4 = \gamma_4 + \delta_4$

Tabelle VIII/2 für 8c/2.

Kolonnenwerte  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ .

$A''_1 = \alpha_1$	$A''_2 = \alpha_2$	$A''_3 = \alpha_3$
$B''_1 = \alpha_1 + \beta_1$	$B''_2 = \alpha_2 + \beta_2$	$B''_3 = \alpha_3 + \beta_3$
$C''_1 = \beta_1 + \gamma_1$	$C''_2 = \beta_2 + \gamma_2$	$C''_3 = \beta_3 + \gamma_3$
$D''_1 = \gamma_1$	$D''_2 = \gamma_2$	$D''_3 = \gamma_3$

In den Tabellen VIII erscheinen die in die Gleichungen 8) einzuführenden Absolutwerte.

Bei der Durchrechnung eines speziellen Falles treten in allen Tabellen infolge der getroffenen Anordnung in der Herleitung des Verfahrens stets sehr kleine, dimensionslose Zahlen auf, die bei der zahlenmäßigen Durchführung den Gebrauch eines gewöhnlichen Rechenschiebers gestatten. Die schematische Durchführungsmöglichkeit, immer gleich für jede beliebige Felderzahl, die Übersichtlichkeit des ganzen Verfahrens, das Arbeiten mit dimensionslosen Größen und die leichte Kontrolle machen diese Methode der Durchführung auch wegen des damit verbundenen großen Zeitgewinnes für die Praxis besonders geeignet und bürgen für ein Minimum an Fehlerquellen.

#### 4. Die zwei Hauptaufgaben der Knickuntersuchung.

##### A. Überprüfung einer bestehenden Konstruktion.

In diesem Falle sind alle Abmessungen der Konstruktion und die maximalen Stabkräfte  $O_r$  bekannt, die Knickkräfte  $S_r = \nu \max O_r$  bzw. die Knicksicherheit  $\nu$  sind zu ermitteln. Eine direkte Lösung ist nicht möglich, doch sind die Knickdeterminanten  $\Delta i'$  und  $\Delta i''$  für jede beliebige  $q$ -fach erhöhte Belastung berechenbar. Bestimmt man nun für mehrere solcher Belastungen die zugehörigen Determinanten, und konstruiert die Kurven  $\Delta i' = f(q)$  bzw.  $\Delta i'' = F(q)$ , so gewinnt man die zwei, den Knickbedingungen  $\Delta i' = 0$  bzw.  $\Delta i'' = 0$  zugeordneten Werte  $q'_0$  bzw.  $q''_0$ ; der kleinere von beiden liefert die Knicksicherheit  $\nu$  der Konstruktion.

##### B. Entwurf einer Neukonstruktion.

Bei gegebenem Brückensystem sind die durch die Gebrauchslast erzeugten maximalen Gurtkräfte  $O_r$ , sowie die auf Grund der Dimensionierung

mit Rücksicht auf das Knicken in der Tragwandebene ermittelten Querschnitte und Trägheitsmomente der Gurtstäbe als bekannt anzusehen. Die Knicksicherheit  $\nu$  für Knicken aus der Tragwandebene ist vorgeschrieben und daher sind auch die Knickkräfte  $S_r = \nu \max O_r$  als gegeben zu betrachten. Als Fragegrößen erscheinen demnach die spezifischen Rahmenwiderstände  $A_r$ , die so zu bestimmen sind, daß die verlangte Knicksicherheit gewährleistet ist. Da aus der Bedingung  $\Delta i' = 0$ ,  $\Delta i'' = 0$  nur eine einzige Unbekannte ermittelt werden kann, so ist das Problem so zu stellen, daß nur ein einziger, aus der Knickbedingung zu errechnender Rahmenwiderstand offen bleibt. Hiefür wählt man zumeist den Endrahmenwiderstand  $A_0$ , wobei die folgenden Fälle zu beachten sind.

1. Die Vertikalstäbe der Querrahmen sind Stäbe des Hauptsystems der Brücke, wie z. B. beim System c) der Figur 3. In diesem Falle werden die Vertikalen der Zwischenrahmen unter Zugrundelegung der sie beanspruchenden maximalen Druckkräfte dimensioniert, ihr spezifischer Rahmenwiderstand  $A_r$  ist daher als bekannt anzusehen, während der Rahmenwiderstand  $A_0$  des Endrahmens frei gehalten und aus der Knickbedingung unter Zugrundelegung einer  $\nu$ -fachen Knicksicherheit des Gurtes errechnet wird. Wählt man in Gleichung (2) für die Konstante  $A$  den Wert  $A = \frac{\sum_1^{n-1} A_r}{n-1} = \frac{1}{\delta}$ , so sind in (3) alle  $\delta_r$  mit Ausnahme von  $\delta'_0$  bekannt, das in den Knickdeterminanten  $\Delta i'$  und  $\Delta i''$  nur in der ersten Zeile einer jeden Kolonne erscheint. Die Ausrechnung der Determinanten führt daher zu zwei linearen Gleichungen nach  $\delta'_0$ , der kleinere sich hieraus ergebende Wert liefert den erforderlichen Endrahmenwiderstand

$$A_{0, \text{erf}} \equiv \max A_0 = \frac{A}{\min \delta'_0}.$$

2. Die Vertikalstäbe der Querrahmen gehören nicht zu den Hauptsystemstäben der Brücke, wie z. B. beim System a) und b) der Figur 3. Solche Systeme eignen sich besonders gut zur Konstruktion von offenen Brücken, weil die Vertikalen gar nicht oder nur durch sekundäre Belastung verhältnismäßig wenig auf Zug beansprucht sind, ihre Steifigkeit daher zur elastischen Querstützung des Gurtes voll ausgenützt werden kann. In diesen Fällen wird man, bei Beachtung der unten angeführten Grenzfälle, für alle Zwischenrahmen ein und denselben Rahmenwiderstand  $A$  frei wählen und den zugehörigen erforderlichen Endrahmenwiderstand  $A_0$  wie oben unter 1. errechnen.

Grenzfall a). Mit abnehmender Steifigkeit der Zwischenrahmen wächst die Steifigkeit des Endrahmens; dem theoretischen Grenzwert des unendlich steifen, starren Endrahmens mit  $A_0 = \infty$  entspricht der kleinstmögliche Zwischenrahmenwiderstand  $A_{\min} = A_s$ .

Grenzfall b). Der obere theoretische Grenzwert  $A_{\max}$  der Zwischenrahmen entspräche dem Endrahmenwiderstand  $A_0 = 0$ , praktisch hingegen ist ein oberer Grenzwert  $A_{\max} = A_e$  dadurch gegeben, daß man die Endrahmen nicht schwächer konstruiert wie die Zwischenrahmen, im Grenzfalle alle Rahmen gleich mit ein und demselben elastischen Rahmenwiderstand  $A_e$  ausführen wird.

Um nun eine mehrmalige, durch unpassende Wahl des Zwischenrahmenwiderstandes  $A$  verursachte Berechnung von  $A_0$  zu ersparen, ist die Kenntnis von guten Näherungswerten der jeweilig in Betracht kommenden Rahmenwiderstände  $A_e$  und  $A_s$  notwendig, im besonderen die Kenntnis von  $A_e$ , da

oft schon geringe Unterschreitungen dieses Wertes sehr steife Endrahmen erfordern.

### 5. Näherungsverfahren bei durchgehends gleichem spezifischen Rahmenwiderstand $A$ .

Bei Brückensystemen nach Fig. 3 a bzw. 3 b ist die Ausführung gleicher Querrahmen zweckmäßig. Alle Rahmen besitzen dann dasselbe  $A$  bzw.  $\delta$ , alle Felder die gleiche Länge  $c$ , das gegenseitige Verhältnis der maximalen aus der Verordnungsparabel zu errechnenden Gurtkräfte ist nur vom Brückensystem abhängig und durch dasselbe gegeben. Wählt man diese Werte  $\delta$

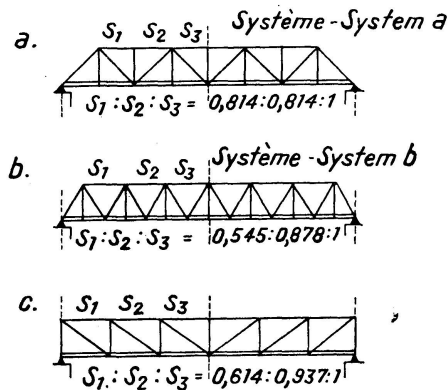


Fig. 3.  $m$ - $y$ -Kurven — courbes  $m$ - $y$  — “ $m$ - $y$ ” curves.

und  $c$  auch als Konstantwerte der Gleichungen (2) und setzt hierin überdies noch für  $S = \frac{S_n}{2}$ , das ist die Gurtkraft des mittelsten Feldes, so sind bei durchwegs gleichem Rahmenwiderstand  $A$  die Glieder  $i_{r,k}$  der Knickdeterminanten mit Rücksicht auf (3) zu ermitteln aus:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } nc/1 \text{ und } nc/2 \dots i_{r,k} &= K_{r-2} + 3K_{r-1} - 3K_r + K_{r+1} \Big|_{r=1,2,\dots,\frac{n}{2}-1} \\ \text{für } nc/1 \dots i_{\frac{n}{2},k} &= K_{\frac{n}{2}-2} + 4K_{\frac{n}{2}-1} + 3K_{\frac{n}{2}} \\ \text{für } nc/2 \dots i_{\frac{n}{2},k} &= K_{\frac{n}{2}-2} + 2K_{\frac{n}{2}-1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ferner nehmen die in  $\Delta i'$ ,  $\Delta i''$  noch auftretenden Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$  mit  $\frac{S_r}{S_n} = S'_r$  die Werte

$$\alpha_r = \beta_r = S'_r \quad \text{und} \quad \epsilon_r = y - 2S'_r \quad (15)$$

an, wobei

$$y = \frac{Ac}{\frac{S_n}{2}} \quad (16)$$

Ist umgekehrt  $y$  errechnet und daher bekannt, so folgt aus (16) der Rahmenwiderstand

$$A = y \frac{\frac{S_n}{2}}{c} \quad (17)$$

In den Determinanten  $\Delta i'$  und  $\Delta i''$  steckt die einzige, hier auftretende Unbekannte des Problems, der Rahmenwiderstand  $A$ , im  $y$  der in der Diagonale erscheinenden Werte  $\varepsilon_r$ . Die Ausrechnung der Determinanten liefert demnach zwei Gleichungen vom  $\frac{n}{2}$ ten Grade nach  $y$ . Die Gesamtheit der hieraus zu errechnenden  $n$  Werte  $y$  entspricht den  $n$  möglichen Knickformen, praktisch brauchbar ist nur der Wert  $y_{max}$ , der nach (17) den erforderlichen Rahmenwiderstand  $A$  liefert.

Die Glieder der Determinanten  $\Delta i'$ ,  $\Delta i''$  hängen nach (14), (15) einerseits von den Kolonnenwerten  $K$ , andererseits vom Gurtkräfteverhältnis  $S_r$  ab. Weil bei einem bestimmten System mit vorgegebener Felderzahl die  $S_r$  als bekannt anzusehen sind, so werden die  $\Delta i'$ ,  $\Delta i''$  nur mehr von den Kolonnenwerten  $K$  allein abhängig sein, die ihrerseits wieder nach (12), (13) und mit Rücksicht auf (1) letzten Endes durch die, den Gurtstäben zugeordneten Größen

$$\varphi_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}} \quad (18)$$

bestimmt werden.

Die dem Knickzustand entsprechende elastische Linie bildet, wie sich leicht zeigen läßt, in jedem Felde einen Teil einer Sinuslinie, deren Achse in die Drucklinie des Feldes fällt und deren Halbwellenlänge  $l_r$  mit der freien oder virtuellen Knicklänge des Feldstabes  $r$  identisch ist. Setzt man  $l_r = m_r c_r$ , wobei stets  $m_r \geq 1$ , so kann die Knickkraft im Felde  $r$  dargestellt werden durch

$$S_r = \frac{\pi^2 T_r J_r}{l_r^2} = \frac{\pi^2 T_r J_r}{m_r^2 c_r^2} \quad (19)$$

Aus (18), (19) gewinnt man

$$m_r = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}} = \frac{\pi}{\varphi_r} \quad (20)$$

und erkennt nun nach dem oben Gesagten, daß die Kolonnenwerte, sowie die Knickbedingung und der hieraus zu errechnende Wert  $y$  auch als alleinige Funktion der  $m_r$  dargestellt werden können. Nicht die Größe der einzelnen Werte  $S_r$ ,  $T_r$ ,  $J_r$ ,  $c_r$  ist für das Resultat  $y$  maßgebend, sondern ihre die Größen  $m_r$  bildende Verbindung nach (20). Wie immer auch die hierin auftretenden Größen im einzelnen beschaffen sind, Gurte mit gleichen  $m_r$  führen beiein und demselben System, unabhängig von dessen Ausmaßen, zum gleichen Wert  $y$ .

Es sei nun vorausgesetzt, daß in einem vorgegebenen System alle Stäbe des Gurtes ein und denselben Wert  $m$  besitzen mögen. Errechnet man für eine Reihe von  $m$ -Werten, — im Brückenbau kommt das Gebiet  $m = 1$  bis  $m = 3$  in Betracht —, die zugehörigen  $y$ -Werte und konstruiert die Kurve  $y = f(m)$ , so bringt dieselbe die strenge Lösung des Knickproblems in dem betrachteten Bereich von  $m$  graphisch zur Darstellung und gestattet die rasche Ermittlung des einem bestimmten  $m$  zugeordneten  $y$ , womit der erforderliche Rahmenwiderstand nach (17) zu berechnen ist.

Diese Lösungskurve wird im weiteren auch als die  $m$ - $y$ -Kurve des Systems bezeichnet.

In praktischen Fällen sind die  $m$ -Werte des Gurtes im allgemeinen nicht gleich, doch liegen sie, bei mit Rücksicht auf das seitliche Ausknicken gut

durchkonstruierten Gurten, nicht allzu weit voneinander entfernt. Beim Entwurf ist darauf gehörig Rücksicht zu nehmen, weil oft schon ein einziger besonders kleiner Wert  $m$  das Resultat ungünstigst beeinflusst und zu relativ schweren Querrahmen führen kann. Konstruktionserfahrung und mehrmalige Überslagsberechnungen nach einem einfachen, rasch durchzuführenden und zuverlässigen Näherungsverfahren können allein über das beim Entwurf zu wählende wirtschaftlich und konstruktiv günstigste Verhältnis der Gurt- und Rahmenquerschnitte Aufschluß geben<sup>8)</sup>, das wohl immer zu Gurtstäben mit  $m > 1,2$  führen wird.

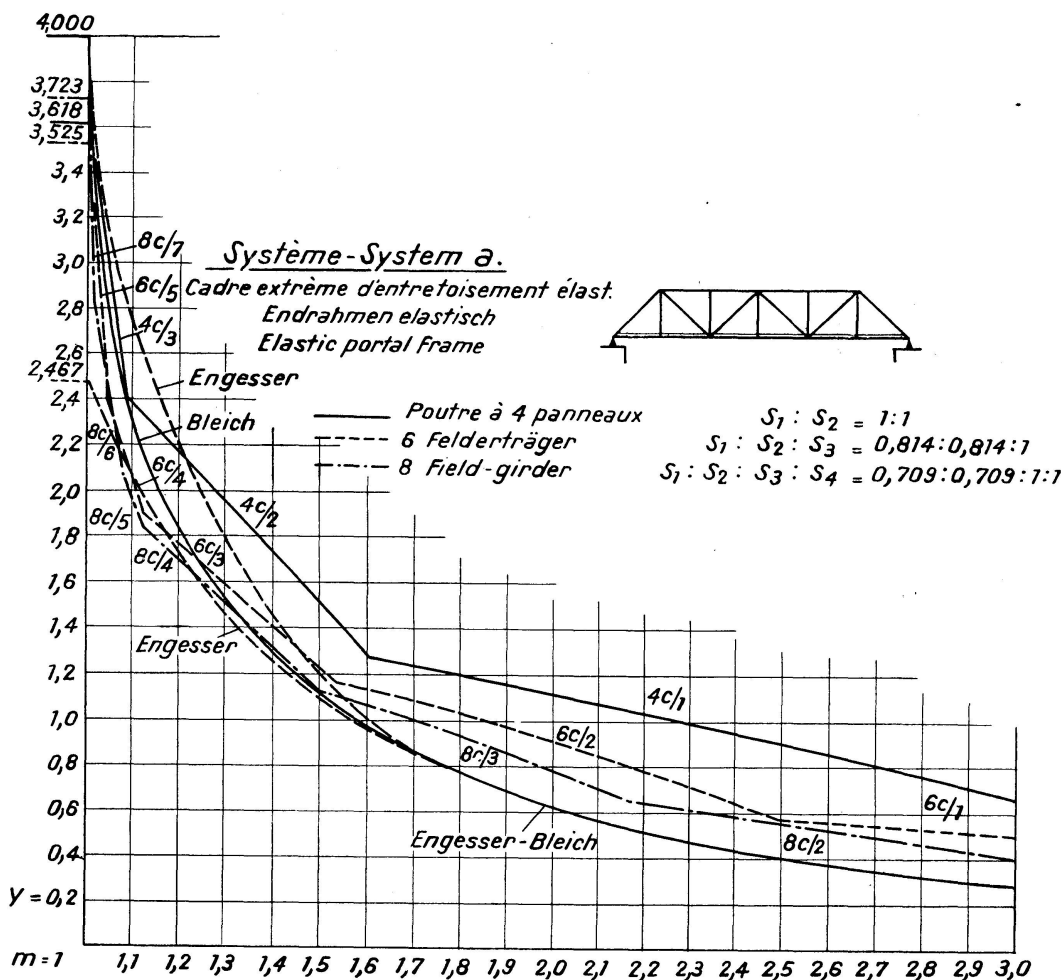


Fig. 4.  $m$ - $y$ -Kurven — courbes  $m$ - $y$  — “ $m$ - $y$ ” curves

Die Tatsache, daß sich die  $m$ -Werte eines Systems in enger Nachbarschaft befinden bzw. befinden sollten, legte nun den Gedanken nahe, die  $m$ - $y$ -Kurven der Systeme zur jeweiligen Grundlage eines dem System angepaßten Näherungsverfahrens für die Berechnung des Rahmenwiderstandes  $A$  zu machen. In diesen Kurven ist das Brückensystem, die Felderzahl, der sehr bedeutende Einfluß der verschieden großen Gurtkräfte, ferner der von Feld zu Feld veränderliche Elastizitätsmodulus, die Verschiedenheit der Gurtträgheitsmomente, sowie die elastische, in jedem Stützpunkte gleich starke

<sup>8)</sup> HARTMANN, Knicksicherheit der Druckgurte offener Fachwerkbrücken. Z. Ö. I. A. V. 1925, S. 381.

Einzelstützung der Rahmen berücksichtigt und daher der Schluß berechtigt, daß mit Hilfe der  $m$ - $y$ -Kurven, auch bei nicht gleichen  $m$ -Werten, durch passende Interpolationsverfahren gute Näherungsergebnisse für  $A$  zu erhalten sein müßten. Da eine so aufgebaute Näherungslösung bei durchwegs konstanten  $m$ -Werten in die strenge Lösung übergeht, so erklärt es sich von selbst, daß der Fehler in der Berechnung des Rahmenwiderstandes  $A$  bei enger Nachbarschaft der  $m$ -Werte nur klein sein kann, doch wurde durch viele Vergleiche mit den Ergebnissen der strengen Berechnung erwiesen, daß dieser Fehler, selbst bei weitgespannten Grenzen der  $m$ , im Durchschnitt nur wenige Prozente beträgt.

Für die Systeme der Figur 3 wurden die  $m$ - $y$ -Kurven und zwar für den 4-, 6- und 8-feldrigen Gurt errechnet, in Figur 4 und 5 sind jene des Systems a) bzw. c) dargestellt. Jede solche Kurve eines  $n$ -feldrigen Trägers besteht aus  $n$  sich überschneidenden Teilkurven, die im maßgebenden dargestellten Gebiet außerordentlich flach verlaufen und daher der ganzen  $m$ - $y$ -Kurve ein polygonales Aussehen verleihen. Von den  $n$  aus der Knickbedingung ermittelten  $y$ -Kurven sind im Gebiete  $m < 3$  im allgemeinen nur  $(n - 1)$  Kurvenstücke praktisch verwertbar, die als höchstgelegene Teilstücke nach oben die Berandung der Kurvenschar bilden und den Linienzug der  $m$ - $y$ -Kurve liefern.

Um eine Orientierung über die Lage dieser Kurven im  $m$ - $y$ -Felde zu gewinnen und zwar im Vergleich zur Lage der analogen Kurven, welche die bekannten Verfahren von Engesser<sup>9)</sup> und Bleich<sup>10)</sup> liefern, wurden diese letzteren Kurven noch in die Figuren 4, 5 eingezeichnet. Rechts von  $m = 1,7$  fallen diese beiden Linien völlig zusammen, links hievon stellt die oberste Linie eine im Jahre 1918 von Engesser auf Grund von Versuchen vorgenommene Verbesserung der alten, zuunterst gelegenen Engesserlinie vor, die allerdings von Engesser selbst nie benützt wurde, da er bereits in seiner ersten Arbeit (1884) richtig erkannte, daß im Gebiete  $m < 1,7$  nach einem anderen von ihm angegebenen Verfahren zu arbeiten ist. Hier sollen und können wegen des geringen verfügbaren Platzes keinerlei ausgreifende Vergleiche angestellt werden, doch ist aus den Figuren ohne weiteres zu erkennen, daß auf die Gestaltung der  $m$ - $y$ -Kurven nicht nur die Felderzahl, sondern in noch größerem Maße das Brückensystem, d. h. das Gurtkräfteverhältnis, von Einfluß ist. So liegen z. B. die  $m$ - $y$ -Kurven des Systems a) in Figur 4 in dem praktisch bedeutsamen Gebiet  $m > 1,2$  fast zur Gänze über der Bleich'schen Kurve, beim System c) in Figur 5 hingegen wird dieselbe von der 8-Felderkurve fast ganz unterschritten, während die 6-Felderkurve links  $m = 1,8$  unter- und rechts davon oberhalb von ihr liegt.

Die hier nicht dargestellten  $m$ - $y$ -Kurven des Systems b) verhalten sich ähnlich wie jene des Systems c).

Aus den Figuren 4, 5 ist weiters zu ersehen, daß sich die den verschiedenen Felderzahlen eines Systems zugeordneten  $m$ - $y$ -Kurven rechts von  $m = 1,1$  nicht überschneiden, die Kurven höherer Felderzahl immer tiefer liegen und die Ordinatendifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kurven mit steigender Felderzahl abnimmt. Diese augenscheinliche Tatsache wurde auch durch einige Stichproben, — Berechnung

<sup>9)</sup> S. S. 271 oder in ENGESSER; Nebenspannungen, S. 150.

<sup>10)</sup> Eisenbau 1919, S. 123 oder in F. BLEICH, Theorie und Berechnung eiserner Brücken. Berlin 1924. Verlag Springer.



und Vergleich mehrerer  $y$ -Werte eines 10-Felderträgers, — erwiesen. Aus diesem Grunde wurden die  $m$ - $y$ -Kurven eines Systems von 10 und mehr Feldern nicht mehr errechnet, da dieselben einerseits praktisch genau genug durch die Kurven des 8-Felderträgers ersetzt werden dürfen und andererseits 10- und mehrfeldrige Träger bei Entwürfen von untergeordneter Bedeutung sind, da die größten für offene Brücken noch in Betracht kommenden Spannweiten im allgemeinen durch 8-Felderträger zu überbrücken sein dürften und dies umso mehr, da es wegen  $A = y \frac{S}{c}$  nur günstig ist, Konstruktionen mit steifen Gurten und großer Feldweite  $c$  in Anwendung zu bringen, falls man kleine spezifische Rahmenwiderstände zu erzielen wünscht.

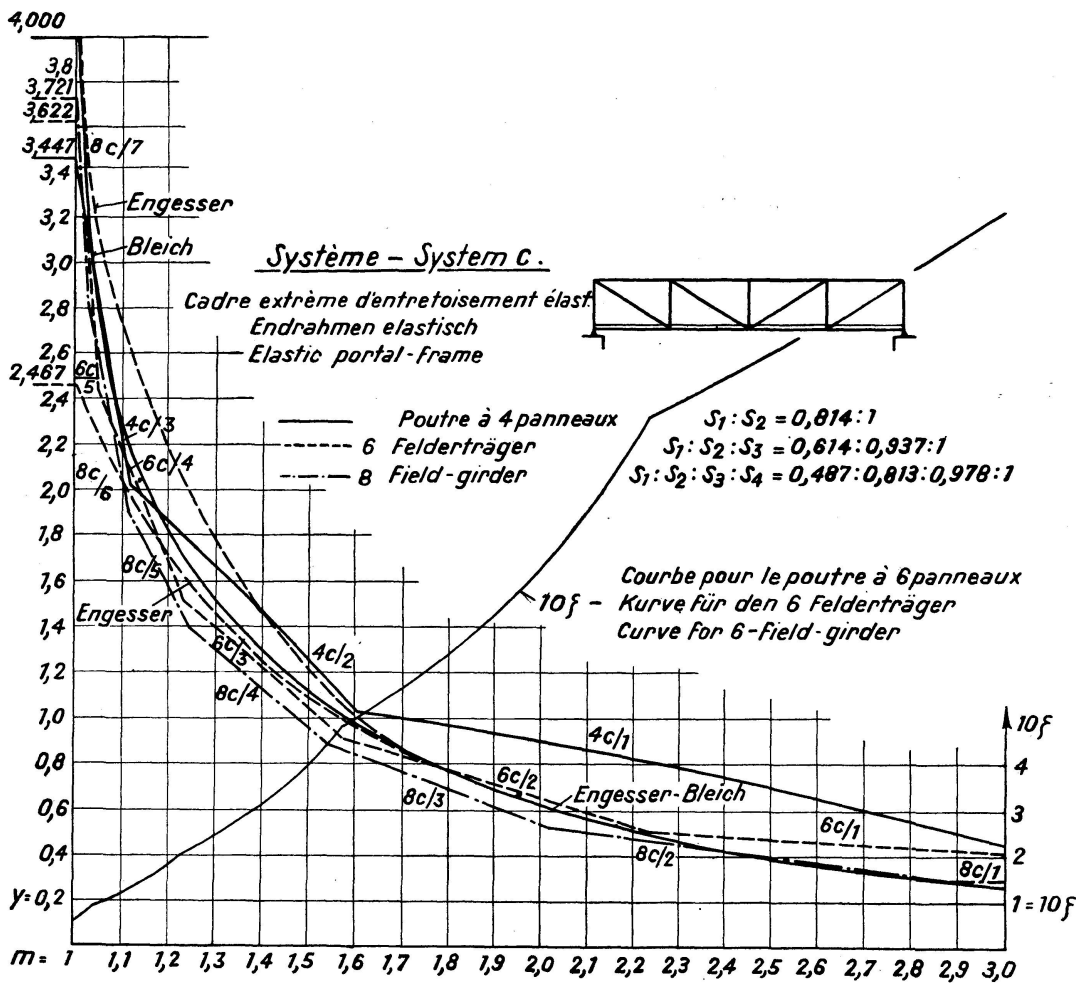


Fig. 5.  $m$ - $y$ -Kurven — courbes  $m$ - $y$  — “ $m$ - $y$ ” curves

Die vorhin erwähnte, so sehr verschiedene von der Felderzahl und dem System abhängige Höhenlage der  $m$ - $y$ -Kurve läßt wohl erkennen, daß es nicht angängig erscheint, alle diese Kurven durch irgend eine einzige Kurve zu ersetzen, um aus derselben, falls  $m$  nicht für alle Gurtstäbe konstant ist, mit Hilfe irgend eines Interpolationsverfahrens Näherungswerte für einen Mittelwert  $y$  zur Berechnung von  $A_{ert} = y \frac{S_{n/2}}{c}$  ableiten zu wollen. Einige Aussicht auf Erfolg bei Ermittlung eines Näherungsverfahrens im Falle von verschieden großen  $m$ -Werten ist nur dann zu er-



warten, wenn die Brückensysteme von Haus aus getrennt und bei Berücksichtigung der Felderzahl die jedem System eigene  $m$ - $y$ -Kurve zur Grundlage des Verfahrens gemacht wird.

Das Verfahren der Mittelwertbildung muß, um dem praktischen Bedürfnis zu genügen, in erster Linie der Forderung nach Einfachheit in der Handhabung entsprechen, hat ferner von theoretischen Überlegungen auszugehen und die Ergebnisse der Erfahrung entsprechend zu verwerten. Erfahrungsergebnisse können aus sorgfältig zusammengestellten Modellversuchen oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus entsprechenden strengen Berechnungen gewonnen werden. Aus diesem Grunde wurde eine große Reihe von in Hinsicht auf das zu ermittelnde Interpolationsverfahren aufschlußreichen Beispielen streng gerechnet, die zum Teil vollkommen durchdimensionierte offene Brücken behandeln, vielfach aber auch von entsprechend ausgewählten  $m$ -Werten ihren Ausgang nehmen, deren verschiedene Größe und Reihenfolge im System von ganz besonderem Interesse ist.

So sind beispielsweise bei einem 6-Felderträger für die drei Stäbe der Brückenhälfte die Werte  $m_1, m_2, m_3$  nach (20) zu errechnen und aus der  $m$ - $y$ -Kurve des Systems die zugehörigen  $y_1, y_2, y_3$  zu entnehmen, welche Werte nun die Grundlage zur Bildung des Mittelwertes  $y$  abgeben.

Hätten die Gurtstäbe durchgehends dasselbe  $m_1$ , bzw.  $m_2$  oder  $m_3$ , so wären die entsprechenden, streng richtigen Rahmenwiderstände  $A = y_1 \frac{S_3}{c}$  bzw.  $y_2 \frac{S_3}{c}$  oder  $y_3 \frac{S_3}{c}$  erforderlich. Da nun keiner der drei Fälle tatsächlich zutrifft, so könnte man, wie dies auch bei anderen Verfahren gelegentlich geschieht, an die Bildung des arithmetischen Mittelwertes denken und den erforderlichen Rahmenwiderstand aus

$$A = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \frac{S_3}{c} = y \frac{S_3}{c} \quad (21)$$

berechnen, wobei jedes  $y$ , d. h. jeder Stab denselben prozentuellen Beitrag zum Mittelwert  $y$  liefert.

Einschlägige Untersuchungen, bei welchen zwei  $m$ -Werte konstant gehalten, der dritte jedoch nach oben und unten verändert wurde, haben gezeigt, daß schwache Stäbe, mit kleinem  $m$  und großem  $y$ , bei der Mittelwertbildung mit viel größerem Gewicht in die Wagschale fallen als starke steife Stäbe, mit großem  $m$  und kleinem  $y$ .

Neben dieser ersten grundlegenden Tatsache hat sich bei den umfangreichen Untersuchungen aber noch weiter gezeigt, daß die durch einen schwachen Stab bedingte Verschwächung des ganzen Gurtes nicht nur von seinem die Stärke des Stabes charakterisierenden  $m$ -Wert allein abhängt, sondern daß das Maß der Verschwächung vor allem auch beeinflußt wird von den angrenzenden Nachbarstäben, indem sich relativ große Unterschiede im Stärkeverhältnis besonders ungünstig auswirken. Hieraus folgt die zweite grundlegende Erkenntnis, daß nämlich bei der Mittelwertbildung von  $y$  nicht nur die Größe der  $m$ - bzw.  $y$ -Werte, sondern auch ihre Reihenfolge im Stabzug mit Rücksicht auf die angrenzenden Nachbarstäbe gehörig zu berücksichtigen ist.

Diese Erfahrungstatsachen legten den Gedanken nahe, jedes  $y$  mit einem  $\psi$ -fachen Wert in die Mittelwertbildung einzuführen und diese „Gewichte  $\psi$ “ so festzulegen, daß sie die obigen Erkenntnisse annähernd

erfassen. Andererseits soll nun verlangt werden, daß für alle Gurtanordnungen, die bei beliebigen  $m$ -Werten der Stäbe ein und denselben Rahmenwiderstand  $A$  erfordern, die Summe  $\sum \psi_r y_r = \text{konstant}$  sei. Unter diesen möglichen Stabanordnungen befindet sich auch jener der  $m$ - $y$ -Kurve des Systems zugrunde liegende Grenzfall eines Idealgurtes, dessen Stäbe ein und denselben  $m$ -Wert besitzen, der in der  $m$ - $y$ -Kurve den gesuchten Mittelwert  $y$  bestimmt. Aus der Bedingung

$$\sum \psi_r y_r = y \sum \psi_{r,g}, \tag{22}$$

wobei die Gewichte  $\psi_{r,g}$  dem Grenzfall des Idealgurtes zugeordnet sind, hat man nun die beiden zusammengehörigen Mittelwerte  $m$  und  $y$  zu bestimmen.

Bei Festlegung des einem Gurtstabe  $r$  zugeordneten Gewichtes

$$\psi_r = \psi'_r + \psi''_r$$

soll  $\psi'_r$  den vorhin ersterwähnten Einfluß berücksichtigen und demnach nur eine Funktion von  $m_r$  allein sein, während  $\psi''_r$  den zweiterwähnten Einfluß zur Darstellung bringen möge und daher als Funktion der drei Werte  $m_{r-1}, m_r, m_{r+1}$  erscheinen muß.

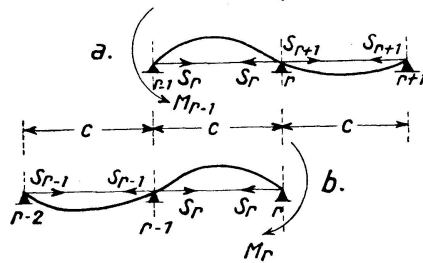


Fig. 6.

Der Einspannungsgrad des nach Figur 6 a, b in die Nachbarstäbe  $(r-1)$  und  $(r+1)$  elastisch eingespannten Stabes  $r$  kann zweifelsohne als ein ungefähres Maß für  $\psi''_r$  gelten. Für eine Belastung nach Figur 6 a wird an der Stütze  $r$  das Moment

$$M_r = - \frac{s_r}{t_r + \frac{s_r}{S_{r+1}} t_{r+1}} M_{r-1} = - \frac{s_r}{t_r} \frac{1}{1 + \frac{S_r}{S_{r+1}} \frac{t_{r+1}}{t_r}} M_{r-1} \tag{23}$$

erzeugt. Mit Rücksicht auf Tabelle II ist der Koeffizient von  $M_{r-1}$  mit dem Werte  $a_{r-1}$  identisch, daher

$$M_r = - a_{r-1} M_{r-1} \quad \text{und nach Figur 6 b analog} \quad M_{r-1} = - b_r M_r, \tag{24}$$

wobei

$$b_r = \frac{\frac{S_{r-1}}{S_r} s_r}{t_{r-1} + \frac{S_{r-1}}{S_r} t_r} = \frac{s_r}{t_r} \frac{1}{\frac{S_{r-1}}{S_r} \frac{t_{r-1}}{t_r} + 1} \tag{25}$$

Für  $m = 1$  ist  $s = t = \infty$ , mit wachsendem  $m$  fallen diese Werte zunächst rasch ab, erreichen bei  $m = 3$  die Größen  $s = 0,209, t = 0,395$ , um erst bei  $m = \infty$  zu verschwinden. Hingegen besitzt der Quotient  $\frac{s}{t}$  bei  $m = 1$  den Wert 1, fällt bei  $m = 3$  bis auf  $\frac{s}{t} = 0,529$  ab und nähert sich asymptotisch dem Grenzwert 0,5 bei  $m = \infty$ .

Die Summe der den Einspannungsgrad kennzeichnenden Größen  $a_{r-1}$  und  $b_r$  wurde nun zum Gewicht

$$\psi_r'' = b_r + a_{r-1} = \frac{s_r}{t_r} \left[ \frac{1}{\frac{s_r}{s_{r-1}} \frac{t_{r-1}}{t_r} + 1} + \frac{1}{1 + \frac{s_r}{s_{r+1}} \frac{t_{r+1}}{t_r}} \right] \quad (26)$$

des Stabes  $r$  zusammengesetzt und man erkennt, daß dieses Gewicht mit wachsender Steifigkeit der Nachbarstäbe zunimmt, bei vollkommen starren Stäben mit  $m_{r-1} = m_{r+1} = \infty$  den Grenzwert  $\psi_r'' = 2 \frac{s_r}{t_r}$  erreicht, der selbst wieder den Maximalwert  $\psi_r'' = 2$  annimmt, wenn  $m_r$  seinen kleinsten Wert von  $m_r = 1$  besitzt. Es sei hier wohl hervorgehoben, daß das Gewicht  $\psi_r''$  mit den tatsächlichen Einspannungsverhältnissen des Stabes im ausgeknickten Gurt nichts gemein hat, die Zahl  $\psi_r''$  stellt nur ein Maß dar, welches das relative Stärkeverhältnis des  $r$ ten Stabes zu seinen Nachbarstäben kennzeichnet und dessen Einführung im Interpolationsverfahren sich praktisch bewährt hat. Da überdies die Größen  $a_r$  und  $b_r$  auch in den Ansatzgleichungen zur Berechnung der Kolonnenwerte erscheinen, die ihrerseits wieder zur Bildung der Knickdeterminante verwendet werden und daher auf das Ergebnis  $y$  von Einfluß sind, so mag auch diese Tatsache vielleicht den hier vorgenommenen Aufbau der Gewichte  $\psi_r''$  bis zu einem gewissen Grade rechtfertigen.

Während das Gewicht  $\psi_r''$  bei allen Systemen durch die immer gültige Gleichung (26) bestimmt wird, ist hingegen das Gewicht  $\psi_r'$ , auf Grund der sich aus den vielen streng gerechneten Beispielen ergebenden Erfahrung, vom System und gelegentlich auch von der Felderzahl abhängig. Nach vielen Versuchen hat sich die Form

$$\psi_r' = \frac{s_r}{t_r} f(m_r) \quad (27)$$

als geeignet erwiesen, wobei  $f(m_r)$  eine vom System abhängige Funktion darstellt. Beim System b) hat sich die Form  $f(m_r) = \frac{m_r + 1}{m_r^2}$ , beim System c) die Form  $f(m_r) = \frac{1}{m_r^2}$  bewährt, hingegen wurde beim System a) für die beiden ersten Stäbe die Form  $f(m_r) = 3 \frac{1}{m_r}$ , für den dritten bzw. dritten und vierten Stab die Form  $f(m_r) = \frac{1}{3} \frac{1}{m_r}$  als im Durchschnitt zutreffend erkannt. Umfangreiche Untersuchungen haben gezeigt, daß der Einfluß, von im Prinzip richtig gewählten, wenn auch weiter voneinander liegenden Funktionen  $f(m_r)$ , auf den zu rechnenden Mittelwert  $y$  verhältnismäßig gering ist, wenn nur in der Mittelwertbildung nach (22) der Übergang zum Grenzfall des idealen Gurtes richtig durchgeführt wird. Aus den vielen Versuchsfunktionen haben sich die oben angegebenen im Durchschnitt als am besten geeignet gezeigt.

Für das Gesamtgewicht  $\psi_r$  erhält man daher nach (26), (27) den Ausdruck

$$\psi_r = (b_r + a_{r-1}) + \frac{s_r}{t_r} f(m_r) = \frac{s_r}{t_r} \left[ \frac{1}{\frac{s_r}{s_{r-1}} \frac{t_{r-1}}{t_r} + 1} + \frac{1}{1 + \frac{s_r}{s_{r+1}} \frac{t_{r+1}}{t_r}} + f(m_r) \right], \quad (28)$$

der für den Grenzfall des Idealgurtes mit durchwegs konstantem  $m$  übergeht in

$$\psi_{r,g} = \frac{s}{t} \left[ \frac{1}{\frac{S_r}{S_{r-1}} + 1} + \frac{1}{1 + \frac{S_r}{S_{r+1}}} + f(m) \right], \quad (29)$$

wobei  $s$  und  $t$  dem Mittelwerte  $m$  zugeordnet sind.

Die Mittelwertbildung nach (22) ist nun z. B. für den 6-Felderträger des Systems c) mit  $f(m_r) = \frac{1}{m_r^2}$  in folgender Weise durchzuführen:

$$\sum \psi_r y = y \sum \psi_{r,g}$$

daher

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{s_1}{t_1} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & + & \frac{1}{1 + \frac{S_1 t_2}{S_2 t_1}} + \frac{1}{m_1^2} \end{array} \right] y_1 \\ + \frac{s_2}{t_2} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\frac{S_2 t_1}{S_1 t_2} + 1} & + & \frac{1}{1 + \frac{S_2 t_3}{S_3 t_2}} + \frac{1}{m_2^2} \end{array} \right] y_2 \\ + \frac{s_3}{t_3} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\frac{S_3 t_2}{S_2 t_3} + 1} & + & 0,5 + \frac{1}{m_3^2} \end{array} \right] y_3 \end{array} \right\} = y \frac{s}{t} \left[ 2,5 + 3 \frac{1}{m^2} \right] \quad (30)$$

Auf der rechten Seite erscheinen die drei zusammengehörigen Größen  $m$ ,  $y$  und  $\frac{s}{t}$ , die aus dieser Gleichung nur durch Probieren ermittelt werden können. Hingegen läßt sich graphisch der Mittelwert  $m$  und das zugehörige  $y$  sehr einfach direkt bestimmen, indem man eine „Interpolationskurve“

$$y = y \frac{s}{t} \left[ 2,5 + 3 \frac{1}{m^2} \right]$$

errechnet und in das Feld der  $m$ - $y$ -Kurve einzeichnet. Geht man nun mit einem speziellen, durch die linke Seite von (30) bestimmten  $\eta$ -Wert in diese Kurve, so gewinnt man mit einem Schlage den fraglichen  $m$ - und  $y$ -Wert.

Da der im größten Teil des Gebietes ziemlich flache Verlauf der  $\eta$ -Kurve eine scharfe Ermittlung der  $m$ -Werte vielfach erschwert, so empfiehlt sich aus praktischen Gründen die Verwendung der, die Reziprokwerte  $\frac{1}{\eta} = \zeta$  darstellenden Kurve, als Interpolationskurve. Diese  $\zeta$ -Kurve wurde für den 6-Felderträger des Systems c) in Figur 5 eingezeichnet.

Wenn schließlich die hier vorgeschlagene Mittelwertbildung theoretisch auch nicht ganz zu befriedigen vermag, so ist sie doch aus der Erfahrung hervorgegangen und hat sich, wie die unten aus den zahlreichen Untersuchungen herausgegriffenen Ergebnisse zeigen, im großen Durchschnitt bestenfalls bewährt. Andererseits ist eine einfache arithmetische Mittelwertbildung, wie dieselbe in bestehenden Näherungsverfahren zur Gewinnung des Rahmenwiderstandes gelegentlich verwendet wird, allerdings gewohnter, letzten Endes aber noch viel weniger zusagend und auch unbegründet, besonders

dann, wenn wie bisher, jeglicher Vergleich mit streng gerechneten Beispielen fehlt, der allein Aufklärung über den erreichten Nährungsgrad eines Verfahrens geben kann und damit die Güte desselben zu beurteilen gestattet.

### Ergebnisse von Beispielen.

System (Figur 3)	Felder- zahl	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	streng	angenähert	Fehler in %	
						$y$	$y$		
a	6	1,3	1,3	1,8	—	1,362	1,533	+12,5	
		1,8	1,8	1,3	—	1,092	1,155	+ 1,2	
		1,9	1,9	2,4	—	0,934	0,920	- 1,5	
		2,4	2,4	1,9	—	0,712	0,703	- 1,3	
	8	1,6	1,6	2,0	2,0	0,997	1,010	+ 1,3	
		2,0	2,0	1,6	1,6	0,900	0,888	- 2,2	
		1,9	1,9	2,3	2,3	0,776	0,788	+ 1,5	
		2,3	2,3	1,9	1,9	0,656	0,680	+ 3,7	
b	6	2,2	2,2	1,1	—	1,232	1,330	+ 7,9	
		2,2	2,2	1,2	—	1,012	1,072	+ 5,9	
		2,2	2,2	1,3	—	0,865	0,898	+ 3,8	
		2,2	2,2	1,4	—	0,763	0,802	+ 5,1	
		2,2	1,4	2,2	—	0,855	0,822	- 3,8	
		1,4	2,2	2,2	—	0,745	0,775	+ 4,0	
		2,25	1,35	1,75	—	0,908	0,924	+ 1,8	
		2,12	1,97	1,56	—	0,717	0,730	+ 1,8	
	8	2,02	1,65	1,57	1,64	0,772	0,750	- 2,8	
		2,8	1,6	2,0	1,7	0,721	0,670	- 7,1	
	c	6	1,55	1,40	1,25	—	1,238	1,277	+ 3,2
			2,23	1,51	2,13	—	0,851	0,802	- 5,7
			1,51	2,23	2,13	—	0,733	0,740	+ 1,0
		8	2,2	1,8	1,35	1,5	0,915	0,912	- 0,3
1,2			1,8	1,35	1,5	1,200	1,220	+ 1,7	
1,8			1,2	1,35	1,5	1,165	1,228	+ 5,5	

Auch beim 4-Felderträger liefert das Näherungsverfahren sehr gute Ergebnisse, doch ist es in diesem Falle nahezu entbehrlich, da die strenge Berechnung nach dem hier mitgeteilten Verfahren in jedem Falle nur wenig Mühe und Zeit erfordert.

### 6. Näherungsverfahren bei starren Endrahmen und durchwegs gleichen Zwischenrahmen.

Auch in diesem Falle ist das auf den  $m$ - $y$ -Kurven aufgebaute Näherungsverfahren analog nach dem in 5. beschriebenen Vorgang durchzuführen und liefert gleich wie dort auch hier im Durchschnitt recht gute Resultate.

Um bei starren Endrahmen einige Einsicht in das System der  $m$ - $y$ -Kurven zu bekommen, wurden dieselben in Figur 7 beispielsweise für den 4-, 6- und 8-Felderträger des Systems c), bei welchem der Grenzfall starrer Endrahmen noch am ehesten als erfüllt angesehen werden kann, dargestellt. Sämtliche Kurven liegen, wie es sein muß, unterhalb der Bleichschen Kurve und man bemerkt die interessante Tatsache, daß sie sich in dem ganzen Gebiet bis  $m = 3$ , im Gegensatz zu den analogen Kurven in Figur 4 und 5, mehrmals gegenseitig überschneiden und daß ferner die der

8-Felderkurve angehörigen Teilstücke  $8c/6$ ,  $8c/4$  und  $8c/2$  in enger Nachbarschaft mit den Kurvenstücken  $4c/3$ ,  $4c/2$  und  $4c/1$  nahezu parallel laufen, in Übereinstimmung damit, daß sich die entsprechenden Kurvenstücke bei durchwegs gleichen Gurtkräften vollkommen überdecken müssen. Hier könnten die  $m$ - $y$ -Kurven, im Gegensatz zu den Trägern mit elastischen Endrahmen, mit grober Annäherung ersetzt werden durch eine, die zu oberst gelegenen Polygonseiten berührende stetige Kurve, die ohne Rücksicht auf die Felderzahl beim Näherungsverfahren verwendet, wohl immer sichere, aber gewiß nicht besonders gute Näherungswerte liefern würde.

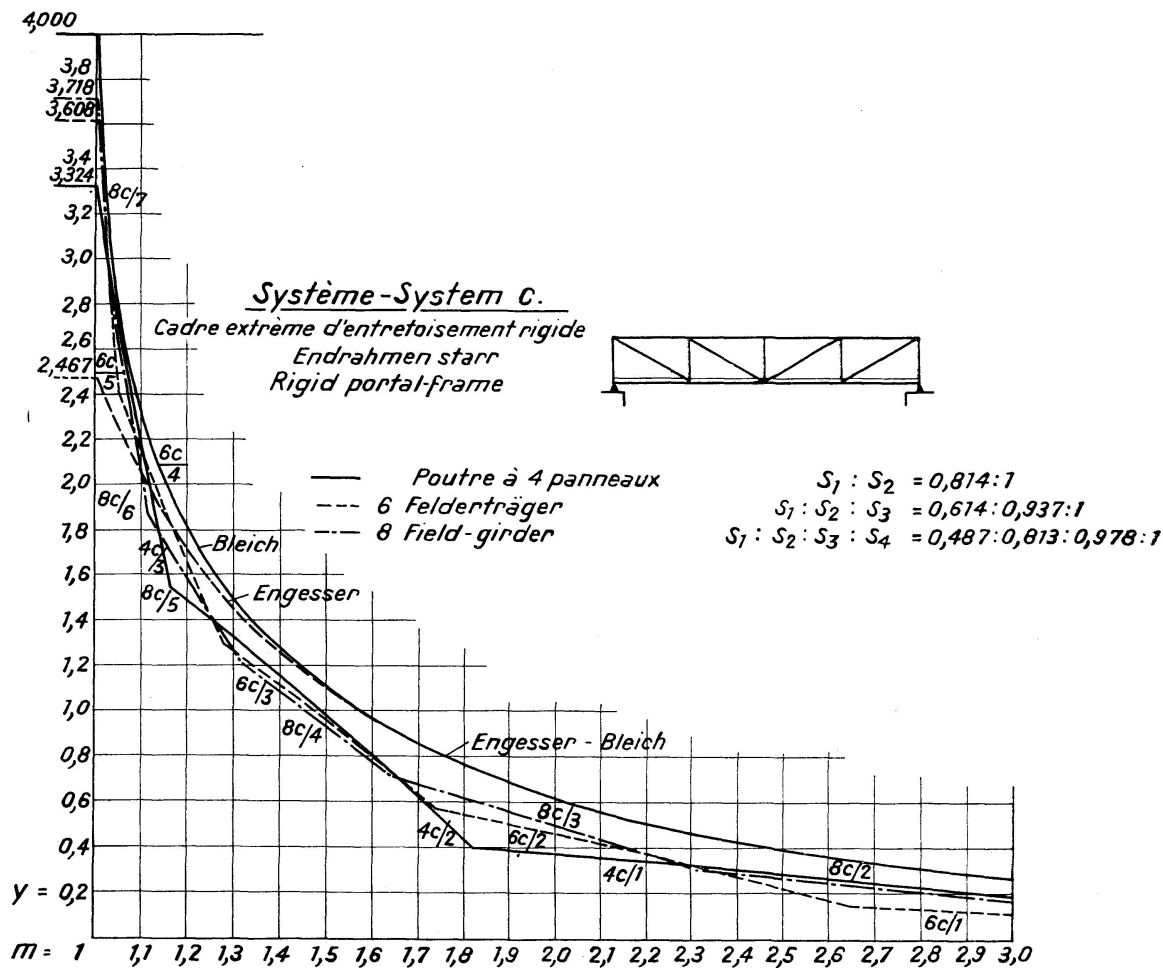


Fig. 7.  $m$ - $y$ -Kurven — courbes  $m$ - $y$  — “ $m$ - $y$ ” curves

Der Einfluß einer Veränderung des Endrahmenwiderstandes  $A_0$  auf die Stärke des Rahmenwiderstandes  $A$  der Zwischenstützen wurde ebenfalls untersucht, doch können die Ergebnisse wegen Mangel an verfügbarem Platz nicht mehr mitgeteilt werden.

### 7. Schlußwort.

Offene Brücken sind am zweckmäßigsten als Strebensysteme z. B. nach Figur 3 a bzw. 3 b auszuführen. Die Gurte werden mit Rücksicht auf Knicken in der Tragwandebene dimensioniert, sie sind daher hinsichtlich ihrer Querschnitte und Trägheitsmomente stets als gegeben zu betrachten. Die Knick-

belastung  $S_r = \nu \max O_r$  ist bekannt, die Knickspannung und der zugehörige Knickmodul der Gurtstäbe daher gegeben. Ein die seitliche Knicksicherheit  $\nu$  gewährleistender, für alle Rahmen gleich starker spezifischer Rahmenwiderstand  $A$  wird nun mit dem in 5. erläuterten Näherungsverfahren bestimmt und der Dimensionierung der Querrahmen zugrunde gelegt.

Wird eine strenge Berechnung verlangt, so ist dieser mit dem Näherungsverfahren errechnete und mit einem geringen Fehler behaftete Näherungswert  $A$  den Zwischenrahmen des Systems zuzuordnen und nach Abschnitt 3 und 4 der erforderliche zugehörige Endrahmenwiderstand  $A_0$  aus linearen Gleichungen zu ermitteln. Nach dem hier entwickelten strengen Verfahren ist diese Berechnung auch für Träger mit größerer Felderzahl ziemlich mühelos und rasch durchzuführen, mit einem Zeitaufwand, der auch jedem praktisch tätigen Ingenieur beim Entwurf von offenen Brücken zur Verfügung steht.

### Zusammenfassung.

Der Autor gibt eine strenge und eine angenäherte Methode an für die Berechnung der Knickfestigkeit der Druckgurte von offenen Fachwerksbrücken. Die Tabelle auf S. 292 liefert für die in Fig. 3 gezeigten Brücken die Resultate nach den genannten beiden Methoden und die Fehler der Näherungswerte in % von den Ergebnissen der strengen Berechnung.

### Résumé.

Dans ce travail sont exposées une méthode exacte et une méthode approximative pour le calcul des membrures comprimées de ponts sans contreventement supérieur. Le tableau (page 292) indique pour les systèmes des ponts représentés par la fig. 3 les valeurs finales, calculées d'après les deux méthodes et les erreurs en %.

### Summary.

In the work submitted an exact method and a method of approach are given for the calculation of the security against buckling of the compression chord of open through-truss bridges. The table on page 292 gives for the bridges shown in fig. 3 the results calculated both exactly and approximately and moreover the errors in % incurred.