Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 3 (1935)

Artikel: Die Beanspruchung durchlaufender Tragwände durch Massenkräfte, besonders Reibung

Autor: Craemer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4142

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DIE BEANSPRUCHUNG DURCHLAUFENDER TRAGWÄNDE DURCH MASSENKRÄFTE, BESONDERS REIBUNG

LES PAROIS PORTANTES SOLLICITÉES PAR DES FORCES DUES À LA MASSE, ET PARTICULIÈREMENT PAR LE FROTTEMENT

CONTINUOUS SUPPORTING-SLABS SUBJECT TO FORCES DUE TO MASS, ESPECIALLY TO FRICTION

Dr. Ing. habil. H. CRAEMER, München (Deutschland).

In einer früheren Abhandlung [1]) hat der Verfasser u. a. auf die Zweckmäßigkeit einer konstruktiven Ausnutzung der Balkenwirkung von Silowänden hingewiesen, die es möglich macht, die unter letzteren leider immer wieder angeordneten und z. B. in den Abbildungen des Betonkalenders 1930 dargestellten zwecklosen Balken fortzulassen und die Wände selbst als tragend auszubilden. Da die Höhe solcher Tragwände in der gleichen Größenordnung liegt, wie ihre Spannweite, ist das Navier'sche Biegungsgesetz durch ein allgemeineres Gesetz zu erweitern. Zu dieser Frage sind inzwischen eine Reihe von Arbeiten erschienen [2])-[6]), die sich vor allem mit den Beanspruchungen befassen, die durch Belastung der Scheibenränder — also besonders des unteren Randes durch die dort angehängte Bodenlast — hervorgerufen werden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich im Gegensatz hierzu mit den innerhalb der Scheibenfläche in dieselbe eingetragenen Lasten. Zu diesen gehört insbesondere das Eigengewicht und die vom Füllgut auf die Wandoberfläche ausgeübte Reibung. Letztere kann selbstverständlich mit genügender Genauigkeit als in der Mitte der Wanddicke angreifend angenommen werden. Sie spielt besonders bei engen, sog. Schachtsilos, eine große Rolle, da dort ein beträchtlicher Teil des Füllgutgewichts gar nicht auf dem Siloboden lastet, sondern durch Reibung unmittelbar von den Wänden getragen wird.

Wir legen hierbei, wie dies auch in den in Fußnote 2, 4, 5 und 6 genannten Arbeiten geschehen ist, eine über viele Felder durchgehende Tragwand konstanter Dicke zu Grunde, deren Baustoff dem Hooke'schen Gesetz gehorcht. Die Spannweiten l seien unter sich gleich, doch stehen einer Er-

---

[1]) CRAEMER, Scheiben und Faltwerke als neue Konstruktionselemente des Eisenbetonbaus. Beton und Eisen, 1929, Hefte 13, 14.

[2]) CRAEMER, Spannungen in wandartigen Balken bei feldweise wechselnder Belastung. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech., 1930, Heft 3.

[3]) BAY, Über den Spannungszustand in hohen Trägern. Diss. Stuttgart, 1931.

[4]) DISCHINGER, Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens. Zürich, 1932.

[5]) BAY, Der wandartige Träger auf unendlich vielen Stützen. Ingenieurarchiv 1932.

[6]) CRAEMER, Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder. Beton und Eisen, 1933, Heft 15.

weiterung der späteren Ansätze auf abwechselnd verschieden große Spannweiten l_1 und l_2 keine grundsätzlichen Schwierigkeiten entgegen. Die Wirkung einer auf die Raumeinheit bezogenen Eigengewichtslast γ in sämtlichen Feldern unterscheidet sich von der Wirkung einer am unteren Rande hängenden Belastung $p_r = \gamma \cdot h$, wo h die Scheibenhöhe, nur durch das Hinzutreten von zusätzlichen lotrechten Spannungen σ_y, die über die Balkenlänge konstant sind und deren Betrag im Abstand y vom Rande sich auf Grund des Gleichgewichts in lotrechter Richtung zu $\sigma_y = -p_r + \int_0^y \gamma\, dy$ ergibt; die Scheibe wird also hierdurch als Ganzes in lotrechter Richtung zusammengedrückt, andere zusätzliche Wirkungen entstehen nicht. Hierauf wurde schon in den in Fußnote 5 und 6 genannten Abhandlungen hingewiesen. Da eine andere als über sämtliche Felder gleichmäßige Verteilung des Eigengewichts praktisch nicht in Frage kommt, sind dessen Wirkungen somit in gleicher Weise wie die einer durchgehenden unteren oder auch oberen Randbelastung erfaßbar.

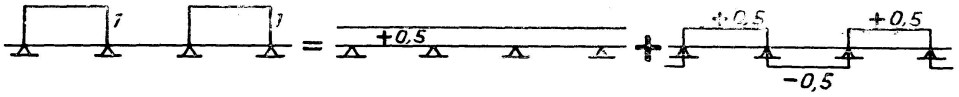

Fig. 1.

Das Gleiche gilt für eine über sämtliche Felder gleichmäßig durchgehende Belastung durch Reibungskräfte, d. h. wenn sämtliche Zellen des Bunkers gefüllt sind. Die auf die Flächeneinheit bezogene Reibungsbelastung γ_r ist dann der Balkenlänge nach konstant, der Höhe nach dagegen in irgend einer Weise verteilt. Die für das Eigengewicht gemachten Angaben gelten auch in diesem Falle, wenn man in diesen γ durch γ_r/d ersetzt. Sind dagegen die Zellen abwechselnd voll und leer, so lassen sich die Wirkungen der nunmehr feldweise verschiedenen Reibungslasten nicht mehr auf diejenige von Randlasten zurückführen, da die zusätzliche Zusammenpressung σ_y ebenfalls feldweise verschieden sein und dadurch ihrerseits weitere Schub- und Biegespannungen verursachen würde. Dieser Fall, der in der Praxis häufig vorkommt, fordert also eine besondere Untersuchung.

Es ist hierbei zweckmäßig, die Belastung jedes zweiten Feldes mit der vollen Nutzlast dadurch zu erfassen, daß man sie nach Fig. 1 zerlegt in eine Belastung sämtlicher Felder mit halber Nutzlast einerseits und eine abwechselnd ab- und aufwärts gerichtete Belastung mit ebenfalls halber Nutzlast andererseits, wie dies auch in den Arbeiten [2]) und [6]) für die Randlasten geschehen ist. Der erste Teilbetrag ist wieder in der oben für Eigengewicht dargestellten Weise erfaßbar, mit den Wirkungen des zweiten befassen wir uns im Folgenden.

Wir bezeichnen mit σ_x, σ_y, τ die für die Einheit der Scheibenstärke berechneten Spannungen, siehe Fig. 2. $\varrho = \gamma_r/d$ sei die auf die Flächeneinheit bezogene und über die Dicke der Scheibe gleichmäßig verteilte Reibungskraft. Die Gleichgewichtsbedingungen am Element, siehe Fig. 2, lauten dann

$$\partial\tau/\partial x = \partial\sigma_y/\partial y - \varrho; \quad \partial\tau/\partial y = \partial\sigma_x/\partial x. \tag{1}$$

Setzt man

$$\int \varrho\, \partial y = R, \tag{2}$$

wobei die Konstante gleichgültig ist, da in den späteren Ergebnissen doch nur die Ableitungen von R vorkommen, so läßt sich den Gleichgewichts-

bedingungen (1) durch Einführung einer Spannungsfunktion F Rechnung tragen, die durch

$$\sigma_x = \partial^2 F/\partial y^2, \quad \tau = \partial^2 F/\partial x\,\partial y, \quad \sigma_y = \partial^2 F/\partial x^2 + R \tag{3}$$

definiert ist, sich also durch das Hinzutreten des Gliedes R von der Spannungsfunktion nur randbelasteter Scheiben unterscheidet. Andererseits liefert die geometrische Verträglichkeit der bezogenen Dehnungen ε_x und ε_y und der Schiebung γ die bekannte und unabhängig von der Art der Belastung gültige Bedingung

$$\partial^2 \varepsilon_x/\partial y^2 + \partial^2 \varepsilon_y/\partial x^2 + \partial^2 \gamma/\partial x\,\partial y = 0.$$

Bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes ist nun, wenn E der Elastizitätsmodul und μ die reziproke Querdehnungszahl,

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)E, \quad \varepsilon_y = (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)/E, \quad \gamma = 2(1+\mu)\tau/E.$$

Drückt man hierin die Spannungen durch (3) aus und setzt sie in die Verträglichkeitsgleichung ein, so erhält man nach kurzer Umformung

$$\Delta\Delta F + \partial^2 R/\partial x^2 - \mu \cdot \partial^2 R/\partial y^2 = 0 \tag{4}$$

als Differentialgleichung der Spannungsfunktion. Für $R = 0$ geht sie in die bekannte Bedingung

$$\Delta\Delta F = 0 \tag{4a}$$

für randbelastete Scheiben über.

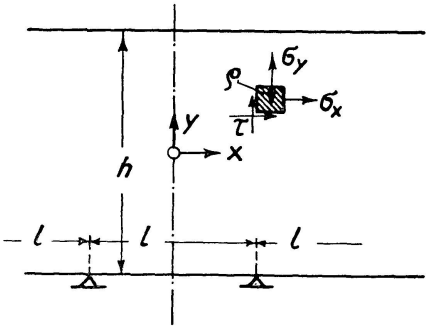

Fig. 2.

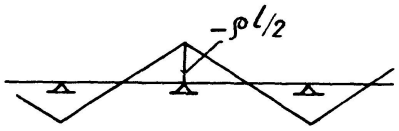

Fig. 3.

Wir nehmen nun an, daß die Reibung über die Höhe der Tragwand gleichmäßig verteilt sei, d. h. $\delta\varrho/\delta y = 0$. Zwar nimmt bei großräumigen Silos die Reibung nach dem Erddruckgesetze von null am oberen Rande geradlinig bis zum Boden zu, doch spielt gerade für diese Art Silos die Reibung nur eine ganz geringe Rolle, sodaß der größte Teil des Füllgutgewichts vom Boden und nicht von den Wänden getragen wird. Bei engen Silos dagegen strebt der Seitendruck und damit auch die Wandreibung nach unten hin sehr rasch einem unveränderlichen Werte zu, sodaß mit obiger Festsetzung den tatsächlichen Verhältnissen genügend Rechnung getragen ist. Da die Verteilung der Länge nach sich nach Fig. 1 richten soll, haben wir

$$\varrho(x,y) = +\varrho \text{ für } -l/2 < x < +l/2 \text{ usw.},$$
$$\varrho(x,y) = -\varrho \text{ „ } +l/2 < x < +3 \cdot l/2 \text{ usw.}$$

Diese periodische Belastung läßt sich als Fourier'sche Reihe

$$\varrho(x,y) = \frac{4}{\pi}\,\varrho \sum_{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{5}$$

darstellen, wovon man sich ohne Schwierigkeiten durch Ableitung der Fourier-Koeffizienten oder auch anschaulich durch zeichnerische Auftragung der einzelnen Wellen überzeugen kann. Mit den Abkürzungen

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)_n \quad \text{und} \quad \xi_n = \frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

findet man hieraus für die Hilfsgröße R die Darstellung

$$R = \frac{4}{\pi} \cdot \varrho \cdot y \sum_{1,3,5} \frac{(-1)_n}{n} \cos \xi_n . \tag{7}$$

Wegen $\delta^2 R/\delta y^2 = 0$ geht somit (4) über in

$$\Delta\Delta F = \frac{4\pi\varrho y}{l^2} \sum n \cdot (-1)_n \cos \xi_n .$$

Dieser Bedingung genügt die Spannungsfunktion

$$F_1 = \frac{4 l^2}{\pi^3} \varrho y \sum \frac{(-1)_n}{n^3} \cos \xi_n , \tag{8}$$

wie durch Ausführung der vorgeschriebenen Differentialoperationen leicht nachweisbar. Die zugehörigen Spannungen finden sich nach (3) zu

$$\sigma_{1x} = \sigma_{1y} = 0, \quad \tau_1 = -\frac{4}{\pi^2} \varrho l \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \sin \xi_n . \tag{9}$$

Der Ausdruck für die Schubspannungen ist aber nichts anderes als die Fourier-Entwicklung einer der Höhe nach konstanten, der Länge nach wie beim Navier'schen Gesetz geradlinigen Verteilung:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\varrho \cdot x \quad \text{für } -l/2 < x < +l/2 \text{ usw.,} \\ \tau_1 &= -\varrho (l-x) \quad \text{„} \quad +l/2 < x < +3 \cdot l/2 \text{ usw., siehe Fig. 3.} \end{aligned} \tag{9a}$$

Die Form (9 a) ergibt sich infolge der Abwesenheit von Normalspannungen σ_x und σ_y überdies in einfachster Weise aus den Gleichgewichtsbedingungen.

Diese Schubspannungen treten nun auch in den beiden Rändern auf, sodaß die Lösung (8) einer Ergänzung bezüglich der Randbedingungen bedarf. Da aber die an den Rändern wirkenden τ_1 je unter sich eine Gleichgewichtsgruppe bilden, so läßt sich schon jetzt auf Grund des de St. Venant'schen Prinzips voraussagen, daß im Innern der Scheibe, also in genügendem Abstand von den Rändern, die Spannungen genügend genau durch (9) wiedergegeben werden. Das Gleichgewicht wird dort also unter Ausschluß von Biegungs- und lotrechten Normalspannungen ausschließlich durch Schubspannungen hergestellt, die Spannungstrajektorien verlaufen demnach unter $\pm 45^0$.

Um nun die an den Rändern verbleibenden τ_1 zu beseitigen, überlagern wir der ersten eine zweite Spannungsfunktion F_2, die an den Rändern $y = \pm h/2$ die Spannungen

$$\sigma_{2y}(x, \pm h/2) = 0, \tag{10a}$$

$$\tau_2 (x, \pm h/2) = + \frac{4}{\pi^2} \varrho l \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \sin \xi_n \tag{10b}$$

liefert; sie hat der Bedingung (4 a) für nur am Rande belastete Scheiben zu genügen und ihre Spannungen sind durch die Anweisung (3) gegeben, sofern dort $R = 0$ gesetzt wird. Mit den Abkürzungen

$$\eta_n = \frac{n\pi y}{l} \quad \text{und} \quad \gamma_n = \frac{n\pi h}{2l} \tag{11}$$

lautet die Lösung

$$F_2 = \frac{8\varrho l^3}{\pi^4} \sum \frac{(-1)_n}{n^4} \cos \xi_n \cdot \frac{-\gamma_n \operatorname{Cof} \gamma_n \operatorname{Sin} \eta_n + \operatorname{Sin} \gamma_n \eta_n \cdot \operatorname{Cof} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n}; \tag{12}$$

die zugehörigen Spannungen sind also

$$\sigma_{2x} = \frac{8\varrho l}{\pi^2} \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \cos \xi_n \cdot \frac{(2 \operatorname{Sin} \gamma_n - \gamma_n \operatorname{Cof} \gamma_n) \operatorname{Sin} \eta_n + \operatorname{Sin} \gamma_n \eta_n \operatorname{Cof} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n}, \tag{13a}$$

$$\tau_2 = -\frac{8\varrho l}{\pi^2} \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \sin \xi_n \cdot \frac{(\operatorname{Sin} \gamma_n - \gamma_n \operatorname{Cof} \gamma_n) \operatorname{Cof} \eta_n + \operatorname{Sin} \gamma_n \eta_n \operatorname{Sin} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n}, \tag{13b}$$

$$\sigma_{2y} = +\frac{8\varrho l}{\pi^2} \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \cos \xi_n \cdot \frac{+\gamma_n \operatorname{Cof} \gamma_n \operatorname{Sin} \eta_n - \operatorname{Sin} \gamma_n \eta_n \operatorname{Cof} \eta_n}{2\gamma_n - \operatorname{Sin} 2\gamma_n}. \tag{13c}$$

Daß F_2 der Bedingung (4 a) genügt, läßt sich durch Ausführung der betreffenden Rechenoperationen ohne Schwierigkeiten nachweisen. Ebenso ist das durch (10 a) geforderte Verschwinden von σ_{2y} für $\eta_n = \pm \gamma_n$ aus (13 c) klar ersichtlich. Setzt man ferner in (13 b) $\eta_n = \pm \gamma_n$ und beachtet, daß

$$2 \operatorname{Sin} \gamma \cdot \operatorname{Cof} \gamma = \operatorname{Sin} 2\gamma \quad \text{und} \quad \operatorname{Cof}^2 \gamma - \operatorname{Sin}^2 \gamma = 1,$$

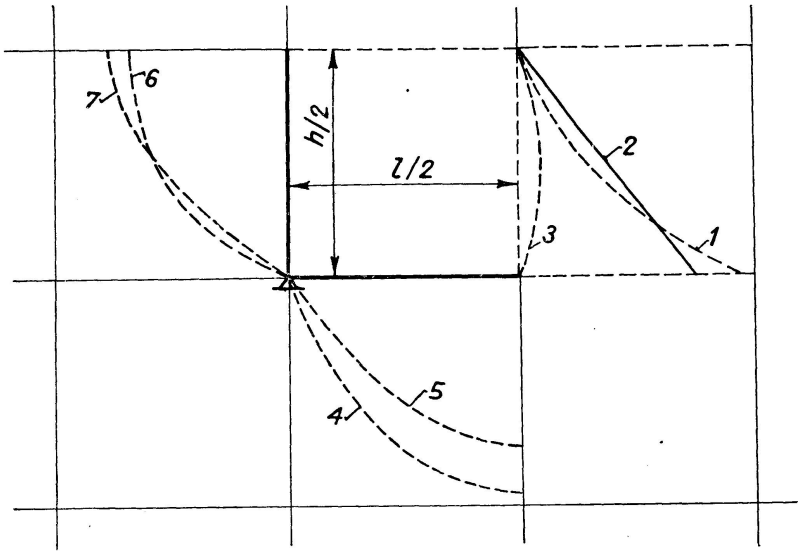

Fig. 4.

so erkennt man ebenfalls das Übergehen dieser Gleichung in die Bedingung (10 b). Obwohl also die Lösung (12) nur aus 2 statt im allgemeinen Falle 4 Gliedern besteht, ist infolge der Symmetrie den 4 in (10) enthaltenen Randbedingungen Genüge getan. Die Lösung ist somit richtig und vollständig. Als endgültige Spannungen haben wir die Summe derjenigen in (9) und (13).

In Fig. 4 sind nun die Spannungen in verschiedenen Schnitten für das Seitenverhältnis $h : l = 1$, also eine quadratische Tragwand, dargestellt. Bei 1 ist der Verlauf der Biegespannungen in Feldmitte aufgetragen, Linie 2 stellt zum Vergleich das Navier'sche Gesetz $[\sigma_x(0, -h/2) = \varrho h \cdot l^2/8 : h^2/6]$ dar. Linie 1 ähnelt übrigens stark der Linie 11 der unter [1]) genannten Ab-

handlung für die Biegespannungen infolge einer Druckbelastung des oberen und einer gleich großen Zugbelastung des unteren Randes. Linie 3 gibt die lotrechten Zugspannungen an, die in der unteren Hälfte der Scheibe entstehen.

Kurve 4 stellt den Verlauf der Biegespannungen am unteren oder oberen Rande, Linie 5 die Navier'sche Parabel dar. Bei 6 endlich sind die Schubspannungen im Auflagerquerschnitt und bei 7 die zugehörige Navier'sche Parabel ($\frac{1}{2}\,\varrho h l : \frac{2}{3} h$) aufgetragen. Der Vergleich der auf Grund der strengen Lösungen (9) und (13) errechneten Linien 1,4 und 6 mit den nach der Navier'schen Theorie sich ergebenden 2,5 und 7 zeigt, daß für das untersuchte Seitenverhältnis die letztere noch einigermaßen brauchbare Ergebnisse liefert. Die größere Völligkeit der Linie 6 im Vergleich zur Parabel 7, d. h. die gleichmäßigere Verteilung der Schubspannungen in der strengen Lösung deutet aber schon auf die vollkommen gleichmäßige Verteilung derselben hin, die im Innern genügend hoher Wände auf Grund von (9) in Verbindung mit dem de St. Venant'schen Gesetz erwartet werden muß.

Praktisch wichtiger als das eben behandelte sind indessen die größeren Seitenverhältnisse $h:l$, da nur bei solchen, wie oben erläutert, ein wesentlicher Teil des Füllgutgewichts durch Reibung übertragen wird. Zur Beschreibung des Spannungszustandes in diesen stärker gedrungenen Scheiben ist es zweckmäßig, den Koordinaten-Nullpunkt in die Mitte des unteren Randes zu verlegen; wir setzen deshalb

$$y' = h/2 + y, \quad \eta_n' = \frac{n\pi y'}{l} = \eta_n + \gamma_n, \tag{14}$$

sodaß also

$$\mathfrak{Sin}\,\eta_n = \mathfrak{Sin}\,\eta_n'\,\mathfrak{Cos}\,\gamma_n - \mathfrak{Cos}\,\eta_n' \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma_n$$

und

$$\mathfrak{Cos}\,\eta_n = \mathfrak{Cos}\,\eta_n'\,\mathfrak{Cos}\,\gamma_n - \mathfrak{Sin}\,\eta_n' \cdot \mathfrak{Sin}\,\gamma_n.$$

Für genügend hohe Wände, d. h. $\gamma_n \to \infty$ kann dann überdies $\mathfrak{Sin}\,\gamma = \mathfrak{Cos}\,\gamma = \frac{1}{2} \cdot e^{\gamma}$ gesetzt und γ gegenüber $\mathfrak{Sin}\,\gamma$ vernachlässigt werden; ferner ersetzt man zweckmäßig $2\,\mathfrak{Sin}\,\eta'$ durch $e^{\eta'} - e^{-\eta'}$ und $2\,\mathfrak{Cos}\,\eta'$ durch $e^{\eta'} + e^{-\eta'}$. Die einfachste der Gleichungen (13), nämlich (13 c), in dieser Weise umgerechnet, liefert dann

$$\sigma_{2y} = \frac{4}{\pi^2}\,\varrho\, l \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \cos \xi_n \cdot \eta_n' \cdot e^{-\eta_n'}. \tag{15c}$$

Die Gleichungen (13 a) und (13 b) lassen sich in gleicher Weise umrechnen, einfacher ist es aber, σ_{2x} und τ_2 aus (15 c) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (3) unter Fortlassung von R unmittelbar zu errechnen; man erhält so

$$\sigma_{2x} = \frac{4}{\pi^2}\,\varrho\, l \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \cos \xi_n (2 - \eta_n') \cdot e^{-\eta_n'} \tag{15a}$$

und

$$\tau_2 = \frac{4}{\pi^2}\,\varrho\, l \sum \frac{(-1)_n}{n^2} \sin \xi_n (1 - \eta_n') \cdot e^{-\eta_n'}. \tag{15b}$$

Entsprechende Formeln würde man bei Verlegung des Koordinaten-Anfangspunkts in den oberen Rand erhalten haben.

Die in den Gleichungen (15) als Faktor auftretende, rasch abklingende Funktion $e^{-\eta}$ zeigt deutlich, daß bei stärker gedrungenen Scheiben, wie erwartet, in einem gewissen Abstand vom Rande die aus der Befriedigung der

Randbedingungen entstehenden Spannungen σ_{2x}, τ_2, σ_{2y} belanglos werden, sodaß nur der in (9) dargestellte Zustand übrig bleibt.

In Fig. 5 ist für den unteren Teil einer sehr hohen Tragwand durch t die Biegungsspannung des Mittelschnitts dargestellt, wie sie sich nach (15 a) ergibt; das gleiche Spannungsbild mit umgekehrtem Vorzeichen erhält man im oberen Teil der Wand, wenn man die Koordinaten von dort aus rechnet. Die größte Biegungsspannung am unteren Rand findet sich bei der Auswertung genau genug zu

$$\sigma_x = +\,0{,}750\,\varrho\,l; \tag{16}$$

die Navier'sche Theorie würde dagegen $\varrho h \cdot l^2/8 : h^2/6 = 0{,}750\ \varrho l^2/h$ liefern, für große Seitenverhältnisse $h:l$ also praktisch null; diese Theorie verliert demnach hier, wie überhaupt bei sehr hohen Scheiben, jeden Sinn.

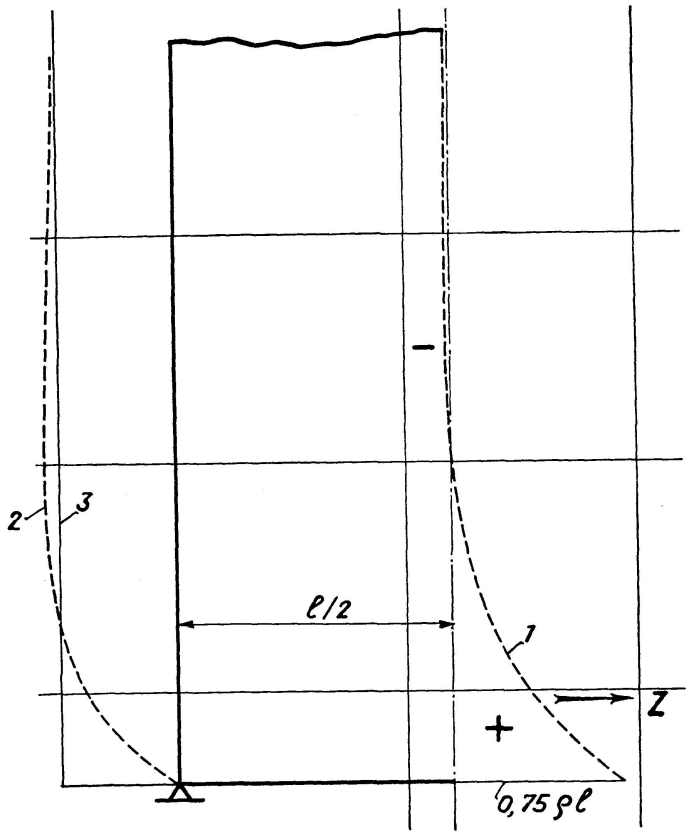

Fig. 5.

Durch Planimetrieren der Zugspannungsfläche erhält man die Grösse der unteren Zugkraft zu $Z = 0{,}1345\ \varrho l^2$, sie wirkt in einem Abstand $a = 0{,}147 \cdot l$ vom unteren Rande. Die gleiche Größe hat die in der oberen Hälfte nahe dem dortigen Rande entstehende Druckkraft. Die im unteren Teil wirkenden geringen Druckspannungen und die ihnen entsprechenden Zugspannungen im oberen Teil weiter zu betrachten, lohnt sich dagegen nicht.

Linie 2 in Fig. 5 gibt den Verlauf der Schubspannungen in den Auflagerquerschnitten nach (9) und (15 b), Linie 3 dasselbe unter Annahme gleichmäßiger Verteilung über die ganze Höhe. Der Vergleich beider Linien zeigt, daß bis zu einem Abstand vom Rande, der etwa gleich einem Viertel

der Spannweite ist, die Verteilung praktisch gleichmäßig ist, um von da dann auf null abzunehmen.

Es ist endlich noch von Interesse, die Abhängigkeit der Spannungen vom Schlankheitsgrad zu verfolgen. Fig. 6 stellt diese Abhängigkeit für die Biegungsspannungen in der Mitte eines der beiden Ränder dar. Wir sahen vorhin,

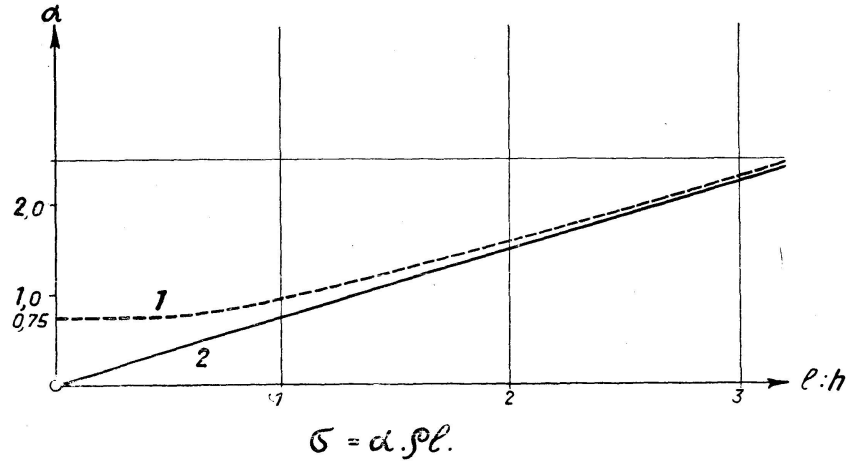

Fig. 6.

daß diese für $h:l \to \infty$ genau genug durch $\sigma_x = \pm\, 0{,}750\, \varrho l$ ausgedrückt wird, während die Navier'sche Biegungslehre für jeden beliebigen Schlankheitsgrad $\sigma_x = \pm\, 0{,}750\, \varrho l^2/h$ angibt. Wertet man die fragliche Spannung nach (13 a) aus, indem man dort $\eta_n = \pm\, \gamma_n$ setzt, wobei sich beträchtliche Vereinfachungen in der Formel ergeben, und drückt die gefundenen Ergebnisse in der Form

$$\sigma_x = \alpha \cdot \varrho l$$

aus, so lassen sich die Beiwerte α durch die Linie 1 in Fig. 6 darstellen; dem Navier'schen Gesetz dagegen entspricht die Gerade 2 mit $\alpha = 0{,}75\, l/h$. Diese Darstellung zeigt nochmals sehr deutlich, daß dieses Gesetz besonders für stark gedrungene Scheiben viel zu niedrige Randspannungen ergibt.

Zusammenfassung.

Bei Vollbelastung sämtlicher Felder erzeugt das Eigengewicht, sowie die Reibung des Füllguts auf die Silowände die gleichen Biegungs- und Schubspannungen wie eine gleich große Belastung des unteren Randes, während die lotrechten Normalspannungen von einer zusätzlichen Zusammenpressung der ganzen Wand überlagert werden. Für feldweise wechselnde Belastung, die nur infolge Reibung entstehen kann, wird ein Rechnungsverfahren angegeben, das für sehr hohe Wände bedeutende Vereinfachungen zuläßt. Schaulinien zeigen die erhaltenen Biegungs- und Schubspannungen für verschiedene Schlankheitsgrade der Tragwand. Bei sehr hohen Wänden entstehen nur nahe dem oberen Rande eine Druckkraft, nahe dem unteren eine Zugkraft, während der innere Teil praktisch biegungsfrei bleibt; die Schubspannungen verteilen sich dann fast gleichmäßig über die ganze Trägerhöhe.

Résumé.

A la pleine charge sur tous les panneaux, le poids propre et le frottement de la charge sur les parois du silo mettent en jeu les mêmes efforts de

flexion et de cisaillement qu'une charge élevée uniformément répartie à la partie inférieure, tandis qu'aux contraintes normales verticales, se superpose une contrainte additionnelle de compression sur toute la paroi. En cas de variation alternative de la charge d'un panneau à l'autre, ce qui ne peut se produire que par suite d'un frottement, l'auteur indique une méthode de calcul qui comporte des simplifications notables dans le cas des parois de très grande hauteur. Les diagrammes mettent en évidence les efforts de flexion et de cisaillement pour différents degrés de finesse de la paroi portante. Pour les parois de très grandes hauteurs, on ne constate un effort de compression qu'au voisinage du bord supérieur et un effort de traction qu'au voisinage du bord inférieur, tandis que la partie intérieure reste pratiquement exempte de flexion; les contraintes de cisaillement se répartissent alors presqu'uniformément sur toute la hauteur.

Summary.

When all fields are fully loaded, the weight as well as the friction of the contents produce the same bending and shearing stresses on the silo walls as an equally great loading of the lower edge, whilst the vertical normal stresses are supplemented by an additional pressing-together of the whole wall. For a loading varying from field to field, which can occur only in consequence of friction, a method of calculation is given that considerably simplifies the calculations for very high walls. Curves show the bending and shearing stresses obtained for various degrees of slenderness of the supporting wall. In very high walls a compression exists only near the upper edge and a tension near the lower edge, whilst the inner part remains practically free from bending; the shearing stresses are then distributed practically uniformly over the whole supporting height.