

Die Methode der sukzessiven Annäherung bei der Berechnung von vielfach statisch unbestimmten Systemen

Autor(en): **ališev, K.A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **4 (1936)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-5080>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DIE METHODE DER SUKZESSIONEN ANNÄHERUNG BEI DER BERECHNUNG VON VIELFACH STATISCH UNBESTIMMTEN SYSTEMEN.

LA MÉTHODE D'ITÉRATION POUR LE CALCUL SYSTÈMES
HYPERSTATIQUES.

THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATION FOR THE
ANALYSIS OF STATICALLY UNDETERMINED SYSTEMS.

Prof. Dr. K. A. ČALIŠEV, Zagreb.

Vorrede.

Ing. M. F. Fornerod (Schweiz. Bauzeitung No. 19, 4. November 1933) erklärt eine Methode der algebraischen Momentenverteilung von Prof. Hardy Cross¹⁾ auf Grund einer Arbeit von Prof. L. E. Grinter²⁾. Diese Methode hat große Ähnlichkeit mit der von den Amerikanern bei der Berechnung der Nebenspannungen infolge steifer Knoten längst gebrauchten Methoden³⁾. Ich benütze sie für die Berechnung der Rahmenträger schon seit 1922⁴⁾ und will sie hier kurz beschreiben. Zunächst wird die Verwendung der Methode der sukzessiven Annäherung zur Berechnung der Nebenspannungen gezeigt und zwar zur Klärung der Frage des Einflusses der Verstärkung der Stäbe durch die Knotenbleche. Ferner wird die Berechnung der Rahmenträger betrachtet.

Einleitung.

Über die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme besteht eine sehr umfangreiche Literatur. Eine genaue Berechnung solcher Systeme ist tatsächlich sehr wichtig, sie erfordert jedoch eingehende statische Kenntnisse. Viele theoretisch sehr gute Lösungen sind indessen für die Anwendung zu kompliziert. Vereinfachte angenäherte Lösungen sind andererseits nicht immer zuverlässig. Als erste Stufe einer Annäherung an eine genauere Lösung können aber angenäherte Lösungen oft mit Vorteil verwendet werden. Die Methode der sukzessiven Annäherung gestattet bei minimalem Zeitaufwand die Entwicklung einer Berechnung bis zu jedem gewünschten Grad der Genauigkeit.

Die Berechnung der Nebenspannungen bei Berücksichtigung der Einspannung der Stäbe durch die Knotenbleche.

Die übliche Berechnung der Stabkräfte in Fachwerken ist nur eine angenäherte. Sie kann als erste Stufe der Annäherung an die genauere Lösung dienen, wie in den bekannten Methoden von Engesser-Manderla und Mohr.

1) Transaction Am. Soc. C. E. Vol. 96 (1932).

2) Proceeding Am. Soc. of C. E. Vol. 59 (1933).

3) J. A. L. Waddell, Bridge Engineering, 1916.

4) Tehnički List N. 1, 2, 1922, T. L. N. 17 bis 21, 1923.

(Ing. N. Nekrasoff vergleicht in seiner Arbeit vom Jahre 1904 die direkte Lösung der Aufgabe mit den Lösungen verschiedener angenäherter Methoden; er wählt aber dabei Fachwerke mit einer reduzierten Zahl von Knotenpunkten.)

Der Gang der Arbeit zur Berechnung eines vielfach statisch unbestimmten Systems nach der Methode der sukzessiven Annäherung ist folgender: Man berechnet die Stabkräfte nach den üblichen Verfahren. Dann ermittelt man die Längenänderungen der Stäbe und die dadurch verursachten Winkeländerungen zwischen je zwei Nachbarstäben in jedem Knotenpunkte unter Voraussetzung von reibungslosen Gelenken. Da sich die Winkel zwischen den Tangenten an den Enden der zusammenlaufenden Stäbe bei starren Knoten nicht ändern dürfen, müssen sich die Stäbe verbiegen. Auf jeden Stab wirken an den Enden Einspannmomente, die sich durch die Neigungsänderung der Tangenten an den Stabenden ausdrücken lassen. Die letzteren kann man nach Mohr durch den Knotendrehwinkel und durch die gegebene Winkeländerung zwischen den Stabrichtungen ausdrücken. Manderla verwendet hierzu den Neigungswinkel der Tangente irgend eines Stabes und die gegebenen Winkeländerungen.

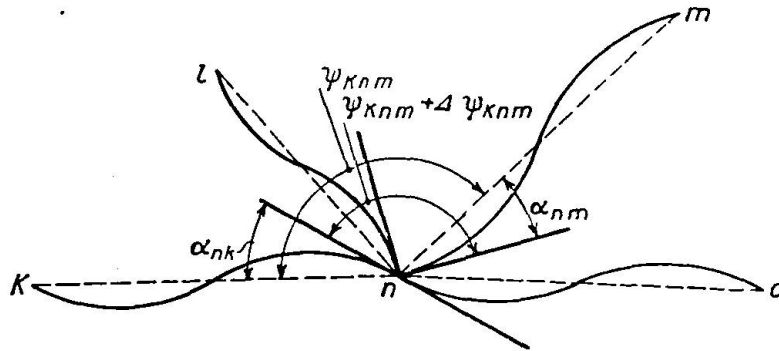


Fig. 1.

Wir bezeichnen nach Fig 1:

Die Winkeländerung zwischen den Stäben nk und nm mit $\Delta \psi_{knm}$,
den Neigungswinkel der Tangente am Ende des Stabes nm mit α_{nm} ,
den Elastizitätsmodul mit E ,
die Stablänge mit l ,
das Einspannmoment am Ende n des Stabes nm mit M_{nm} .

Als positiver Drehsinn gilt der Uhrzeigersinn. Dann ist

$$M_{nm} = \frac{2EJ}{l} (2\alpha_{nm} + \alpha_{mn}) \quad (1)$$

und nach Manderla

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nk} - \Delta \psi_{knm} \quad (2)$$

Für jeden Knotenpunkt läßt sich die Unbekannte α_{nk} so bestimmen, daß die Gleichgewichtsbedingung für jeden Knoten erfüllt wird, d. h.

$$\sum M_{nm} = 0 \quad (3)$$

Man erhält also als Lösung soviele Gleichungen, als Knotenpunkte vorliegen. Nachdem die Gleichungen (3) gelöst sind, berechnet man die Querkräfte der Stäbe und läßt diese als Belastung in den Knoten wirken. Es folgen daraus für die Stabkräfte erste Korrekturwerte, die die angenäheren Stabkräfte verbessern. Mit den verbesserten Werten berechnet man erneut die Deformationen des Fachwerkes. Diese Rechnungsfolge kann bis zur Erreichung einer

beliebigen Genauigkeit fortgesetzt werden. Dabei ist die Auflösung der Gleichungen (3), d. h. die Berechnung der Einspannmomente der Stäbe in den Knoten bei gegebenen Winkeländerungen zwischen den Stabrichtungen das zeitraubendste. Gerade diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe der Methode der sukzessiven Annäherung ganz einfach lösen (vergl. das oben zitierte Handbuch von Waddell).

Wir untersuchen jetzt die Versteifung der Stäbe durch die Knotenbleche. Die Stabenden seien auf die Länge kl unendlich steif. Anstelle der Gleichung (1) erhalten wir:

$$M_{nm} = \frac{2aEJ}{l} (b \alpha_{nm} + \alpha_{mn}) \quad (4)$$

wo $a = \frac{1 - 6k^2}{1 - 8k + 24k^2}$ und $b = \frac{2(1 - 3k - 3k^2)}{1 - 6k^2}$.

Da a und $\Delta\psi$ sehr kleine Größen sind, führen wir der Einfachheit halber die Größen

$$N = 2aE10^{-3} \alpha$$

und $K = 2aE10^{-3} \Delta\psi$ ein.

Die obigen Gleichungen lauten dann:

$$N_{nm} = N_{nk} - K_{knm} \quad (5)$$

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (b N_{nm} + N_{mn}) \cdot 10^3 \quad (6)$$

$$\sum \frac{J}{l} (b N_{nm} + N_{mn}) = 0 \quad (7)$$

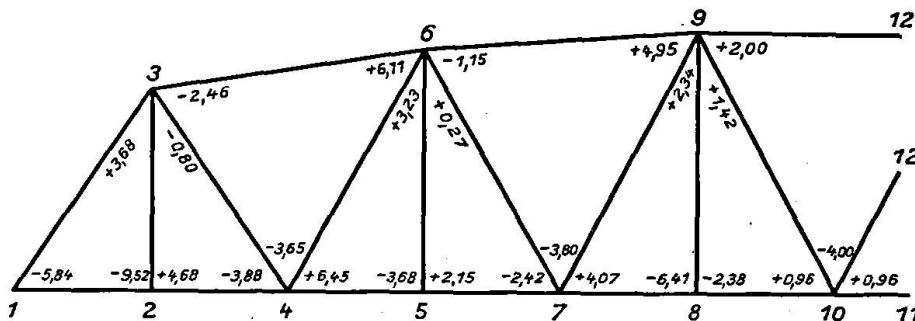


Fig. 2.

Die Summe erstreckt sich über alle Stäbe am n -ten Knoten. Die Berechnung der Unbekannten N und damit nach Gl. (6) der Momente an den Stabenden erfolgt mit sukzessiver Annäherung nach dem bei Waddell beschriebenen Schema. Der Rechnungsgang wird am Beispiel der Elbbrücke bei Torgau gezeigt.

Auf Grund dieses Beispiels äußert Dr. Leitz⁵⁾ die Meinung, daß die Versteifung der Stäbe durch Knotenbleche die Momente und Nebenspannungen im Verhältnis der theoretischen Länge zur freien Stablänge vergrößert. Im erwähnten Beispiel ist das Verhältnis 1,2; somit ist $k = \frac{1}{12}$, $b = 1,6$ und $a = 1,92$.

Wir berechnen die Größe $K = E \Delta\psi \cdot 10^{-3}$ und multiplizieren sie mit $2a = 3,84$. (In Fig. 2 in den Ecken des Fachwerkes eingetragen.) Die An-

⁵⁾ Der Eisenbau 1917, S. 131.

fangswerte für N werden grob geschätzt, indem die K -Werte auf die beiden stärkeren Stäbe jedes Knotens im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Steifigkeit $\left(\frac{J}{l}\right)$ verteilt werden.

$$N'_{nk} = K_{kno} \frac{\left(\frac{J}{l}\right)_{no}}{\left(\frac{J}{l}\right)_{no} + \left(\frac{J}{l}\right)_{nk}} \quad (8)$$

So erhält man zum Beispiel für den 4. Knoten:

$$K_{245} = -3,88 - 3,65 + 6,45 = -1,08$$

$$N'_{42} = -1,08 \frac{101}{101 + 76} = -0,6$$

Nach Gl. (5) ist

$$N'_{43} = -0,6 - (-3,88) = 3,28$$

$$N'_{46} = 3,28 - (-3,65) = 6,93$$

$$N'_{45} = 6,93 - 6,45 = 0,48.$$

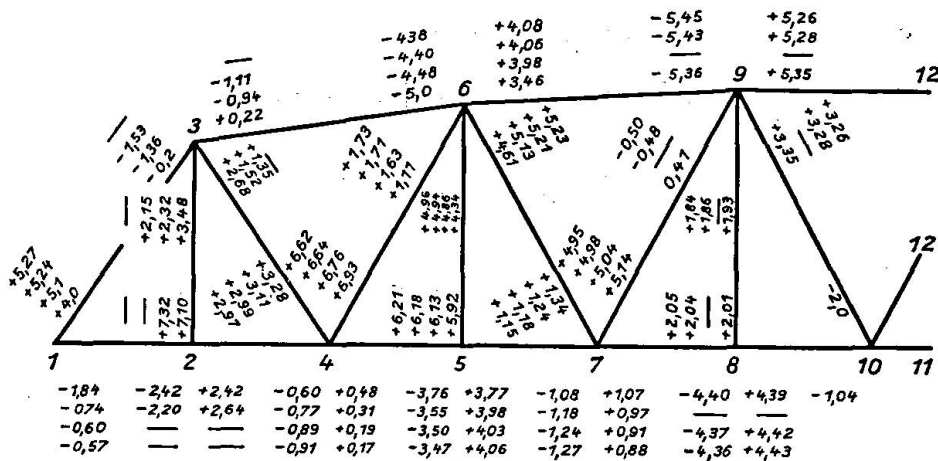


Fig. 3.

Die so berechneten N -Werte sind in Fig. 3 eingeschrieben. Mit Hilfe der Gl. (6) berechnet man die Momente M'_{nm} an den Stabenden. Diese Momente (in mt), die den grob gewählten Winkeln N entsprechen, finden sich in Tabelle I, 3. Spalte. In der gleichen Spalte ist die Summe der Momente für einen Knoten ausgerechnet, die natürlich von 0 verschieden sein wird. Der Unterschied zwischen den Werten N und N' sei mit ΔN bezeichnet. Aus Gl. (7) erhält man alsdann:

$$\Delta N_n b \sum \frac{J}{l} + \sum \Delta N_m \frac{J}{l} + \sum M'_{nm} = 0. \quad (8a)$$

Da der Koeffizient der Unbekannten ΔN_n bedeutend größer ist als bei den andern Unbekannten ΔN , werden diese Gleichungen gut konvergieren.

Die Werte $\frac{J}{l}$ und $b \sum \frac{J}{l}$ finden sich in Tabelle I, Spalte 2. Es empfiehlt sich, in jenem Knoten zu beginnen, für den größere Korrekturen zu erwarten sind. In unserem Falle ist es Knoten 1, für den

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l}$ $1,6 \sum \frac{J}{l}$	1. Annäherung			2. Annäherung			3. Annäherung			$M_{nm}^{IV} = \frac{J}{l} (1,6 N_{nm}^{IV} + N_{mn}^{IV})$	$M_{nm}^0 \quad k=0$	$\frac{M_{mn}^{IV}}{M_{mn}^0}$
		$M_{nm}' = \frac{J}{l} (1,6 N_{nm}' + N_{mn}')$	$\Delta M_{mn}' = \frac{J}{l} \Delta N_{mn}'$	Verbesserung $\Delta N'$	$M_{nm}'' = \frac{J}{l} (1,6 N_{nm}'' + N_{mn}'')$	$\Delta M_{mn}'' = \frac{J}{l} \Delta N_{mn}''$	Verbesserung $\Delta N''$	$M_{nm}''' = \frac{J}{l} (1,6 N_{nm}''' + N_{mn}''')$	$\Delta M_{mn}''' = \frac{J}{l} \Delta N_{mn}'''$	Verbesserung $\Delta N'''$			
1-2	76,4	-410	—	—	-258	—	—	-241	—	—	-238	156	1,51
1-3	34,4	+213	—	+1,1	+230	—	+0,14	+236	—	+0,03	+238	156	1,51
	177	-197	—	—	-28	—	—	-5	—	—	0	—	—
2-4	76,2	+250	-13	—	+264	-8	—	+255	-2	—	+252	171	1,47
2-3	4,35	+65	-5	+0,22	+60	-1	—	+60	—	—	+60	38	1,58
2-1	76,4	-436	+84	—	-326	+11	—	-315	+2	—	-313	210	1,49
	251	-121	-55	—	-2	0	—	0	0	—	-1	—	—
3-1	34,4	+127	+38	—	+101	+5	—	+96	-1	—	+97	44	2,20
3-2	4,35	+55	—	—	+48	—	—	+47	—	—	+47	27	1,74
3-4	7,56	+57	—	-1,16	+42	—	-0,17	+39	0	—	+39	24	1,62
3-6	29,4	-137	—	—	-176	—	—	-182	—	—	-182	96	1,90
	121	+102	+140	—	+15	+20	—	0	-1	—	+1	—	—
4-5	101,0	-303	—	—	-308	—	—	-323	—	—	-323	174	1,85
4-6	15,4	+188	+8	—	+191	—	—	+190	—	—	+189	117	1,61
4-3	7,56	+60	-8	-0,17	+49	-1	-0,12	+46	—	-0,02	+46	29	1,58
4-2	76,2	+111	—	—	+107	—	—	+93	—	—	+90	27	3,33
	320	+56	+56	—	+39	+38	—	+6	—	—	+2	—	—
5-7	101,0	+500	-10	—	+525	-6	—	+526	-3	—	+528	355	1,45
5-6	1,18	+16	0	+0,21	+17	0	+0,05	+17	—	+0,03	+17	10	1,70
5-4	101,0	-558	-17	—	-542	-11	—	-546	-2	—	-543	364	1,49
	325	-42	-69	—	0	-17	—	-3	-8	—	+2	—	—
6-3	29,4	-229	-34	—	-239	-5	—	-240	—	—	-239	155	1,54
6-4	15,4	+132	—	—	+144	-2	—	+144	0	—	+144	76	1,9
6-5	1,18	+15	—	+0,52	+14	—	+0,08	+14	0	-0,02	+14	9	1,5
6-7	3,7	+32	—	—	+35	—	—	+35	—	—	+35	21	1,66
6-9	41,9	+8	—	—	+42	—	—	+44	-1	—	+45	49	0,92
	147	-42	-76	—	-4	-11	—	-3	-4	—	-1	—	—
7-8	103,9	-276	—	—	-296	—	—	-303	—	—	-306	142	2,16
7-9	10,6	+82	—	—	+80	—	—	+80	—	—	+79	52	1,5
7-6	3,7	+25	+2	-0,1	+26	—	-0,06	+26	—	-0,03	+26	14	1,85
7-5	101,0	+206	—	—	+211	—	—	+207	—	—	+205	76	2,7
	350	+34	+36	—	+21	—	—	+10	—	—	+4	—	—
8-10	103,9	+624	—	—	—	—	—	+626	-3	—	+628	422	1,48
8-9	1,12	+6	—	—	—	—	—	+5,8	—	—	+5,8	3	1,9
8-7	103,9	-624	-10	—	—	-6	+0,03	-632	—	+0,01	-634	426	1,48
	335	+6	-4	—	—	-10	—	0	-3	—	0	—	—
9-6	41,9	-215	+22	—	—	+3	—	-194	—	—	-195	151	1,29
9-7	10,6	+47	-1	—	—	—	—	+45	—	—	+44	23	1,9
9-8	1,12	+6	—	—	—	—	-0,07	+5,7	—	-0,02	+5,6	3	1,9
9-10	3,59	+12	—	—	—	—	—	+12	—	—	+11,5	7	1,5
9-12	41,9	+134	—	—	—	—	—	+133	—	—	+132	118	1,1
	117	-16	+5	—	—	+8	—	+2	—	—	-1,9	—	—
10-8	103,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+286	127	2,2
10-9	3,59	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+0,2	1,8	0,2

$$\Delta N'_1 = - \frac{-197}{177} = + 1,1$$

ist. Auf Grund der Korrektur $\Delta N'_1$ ändert die Summe der Momente bei benachbarten Knoten um Beträge $\frac{J}{l} \Delta N'_1$. Diese Änderungen werden in Spalte 5 der Tabelle eingetragen.

Auf diese Weise gehen wir von Knoten zu Knoten und berechnen die erste Korrektur $\Delta N'$. Die neuen Werte von N erhält man zu $N'' = N' + \Delta N'$, die in Fig. 3 eingetragen sind. Die entsprechenden Momente bestimmen sich nach Gl. (6) zu

$$M''_{nm} = \frac{J}{l} (1,6 N''_{nm} + N''_{mn})$$

und sind in Tabelle I, Spalte 6, eingetragen. Die Summe der Momente wird wieder von 0 verschieden sein, jedoch sind die Differenzen bedeutend kleiner geworden. In ähnlicher Weise berechnen wir die zweite Korrektur $\Delta N''$ usw. Die Berechnung kann fortgesetzt werden, bis die Forderung $\Sigma M = 0$ erfüllt

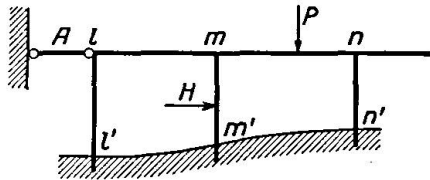


Fig. 4 a.

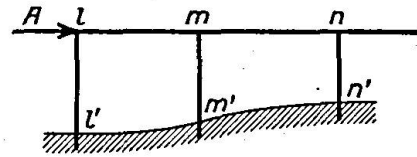


Fig. 4 b.

ist, oder bis die Änderung der Momente zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berechnungen ein zulässig kleines Maß erreicht hat. Für praktische Bedürfnisse genügt in der Regel schon die erste Korrektur. Wir haben die Berechnung bis zur 4. Näherung durchgeführt, also drei Korrekturen berechnet. Der größte Fehler des Momentes für eine Korrektur beträgt ca. 8 %, d. h. ca. 20 mt, was einer Spannung von $\sigma = 12 \text{ kg/cm}^2$, d. h. ca. 1,5 % der zulässigen Spannung (870 kg/cm^2) entspricht. Der Fehler wird noch kleiner, wenn man die letzte Summe der Momente proportional zu den Größen der Momente verteilt.

In Spalte 13 sind die Momente eingetragen, die sich bei Vernachlässigung der Verstärkung der Stäbe durch Knotenbleche ergeben, d. h. $k = 0$ gesetzt wird. Dann wird $b = 2$ und $a = 1$. In diesem Falle ist die Konvergenz noch besser, da der Koeffizient b größer ist.

Berechnung der mehrstieligen Rahmen.

Im allgemeinen erleiden die Knoten von Rahmenkonstruktionen bei der Deformation infolge der äußeren Lasten nicht nur Drehungen, sondern auch Verschiebungen. Das Auftreten solcher Verschiebungen kann verhindert werden, indem man einen Knoten, z. B. in Fig. 4 a den ersten Knotenpunkt, mittelst des Stabes A (ungefähr in Richtung der Verschiebungsmöglichkeit) mit einem festen Punkt verbindet. Die Stabkraft A ist gleich der Summe der Querkräfte in den Stielen. Da in Wirklichkeit der Stab A nicht existiert, so muß dem Belastungszustand der Fig. 4 a noch der Belastungszustand der Fig. 4 b überlagert werden. Wir zerlegen auf diese Weise die Berechnung in zwei Teile, nämlich erstens in die Berechnung unter gegebener Belastung für unverschiebliche Knotenpunkte und zweitens in die Berechnung für den Einfluß der Kraft A.

a) System mit unverschieblichen Knotenpunkten. Von der gewöhnlichen Voraussetzung ausgehend, daß bei der Berechnung der Rahmenkonstruktionen die Deformationen infolge der Normal- und Querkräfte gegenüber jenen infolge der Momente vernachlässigt werden können, wollen wir die Berechnung eines Systems mit unverschieblichen Knotenpunkten wieder unterteilen. Wir berechnen zuerst die durch die gegebenen äußeren Kräfte auf Biegung beanspruchten Stäbe unter der Voraussetzung vollständiger Einspannung an den Enden. Die Einspannmomente M^0 ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} M_{mn}^0 &= -\frac{2L' - L''}{3} \dots \\ M_{nm}^0 &= \frac{2L'' - L'}{3} \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wo $L' = \frac{6}{l^2} \int_0^l M_x (l-x) dx$ und $L'' = \frac{6}{l^2} \int M_x x dx$

ist. M_x bedeutet die Ordinate der Momentenfläche bei gelenkiger Lagerung der Stabenden. Die Einspannmomente werden positiv bezeichnet, wenn sie auf das Stabende im Sinne des Uhrzeigers wirken.

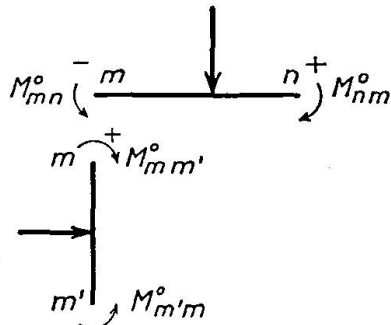


Fig. 5 a.

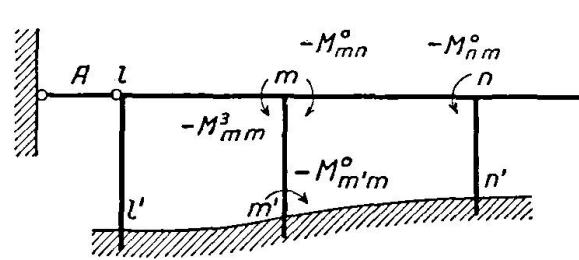


Fig. 5 b.

Im zweiten Teil der Berechnung haben wir nur die Wirkung der Momente in den Knoten zu untersuchen. Diese Momente sind den oben erwähnten Einspannmomenten entgegengesetzt gleich (Fig. 5 b). Zu dieser Belastung treten eventuelle Exzentrizitätsmomente hinzu.

Die Momentenfläche irgend eines Stabes nm setzt sich nun endgültig zusammen aus:

1. der Momentenfläche M_x infolge der gegebenen Belastung für den einfachen Balken,
2. aus der Momentenfläche infolge der Einspannmomente M_{mn}^0 und M_{nm}^0 ,
3. der Momentenfläche infolge der Momente $M_{m'n}$ und $M_{n'm}$ an den Enden des Stabes, die für den Belastungszustand der Fig. 5 b berechnet sind.

Die unter 3. genannten Momente berechnen wir nach der Methode der sukzessiven Annäherung in ähnlicher Weise wie vorher für die Berechnung der Momente an den Stabenden eines Fachwerkes mit steifen Knotenverbindungen gezeigt wurde. Da die Knotenpunkte unverschieblich sind, bleiben die Neigungswinkel der Tangente zur Stabrichtung für alle Stäbe eines Knotens gleich. Wir bezeichnen den mit $2E$ multiplizierten Neigungswinkel der Tangente am Ende n des Stabes nm mit N_n . Die gesuchten Momente lassen sich durch diese Winkel nach Gl. (1) ausdrücken.

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (2N_n + N_m) \quad (11)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für jeden Knoten fordert die Befriedigung der Gleichung

$$\sum M_{nm} + \sum M_{nm}^o = 0 \quad (12)$$

Die Summierung ist über alle Stäbe des n -ten Knotens zu erstrecken. Mit Hilfe der Gl. (11) erhält man

$$2N_n \sum \frac{J}{l} + \sum N_m \cdot \frac{J}{l} + \sum M_{nm}^o = 0 \quad (13)$$

Diese Gleichung entspricht vollständig der Gl. (8 a). Die erste Näherung für N_n bekommen wir nach Annullierung aller Werte N_m .

$$N'_n = - \frac{\sum M_{nm}^o}{2 \sum \frac{J}{l}} \quad (14)$$

Falls ein Stiel unten gelenkig gelagert ist, bestimmt sich der Wert $N_i = 0,5 N_n$. Gleichung (13) ergibt für diesen Fall

$$N'_n = - \frac{\sum M_{nm}^o}{2 \sum \frac{J}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{J}{l} \right)_{ni}} \quad (15)$$

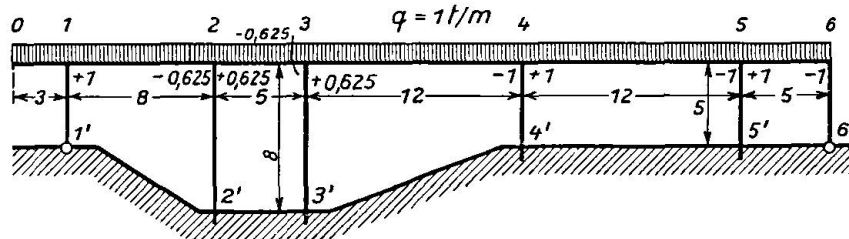


Fig. 6.

Wir wollen diese Methode auf das Beispiel der Fig. 6 anwenden. Die Werte $\frac{J}{l}$, sowie die Werte $2 \sum \frac{J}{l}$ sind in Spalte 2 der Tabelle II eingetragen. Spalte 3 enthält die Einspannmomente M^0 nach Formel: $M^0 = \pm \frac{q l^2}{8}$ für gleichmäßig verteilte Belastung. Für jeden Knotenpunkt ist in der gleichen Spalte der Wert $\sum M^0$ berechnet.

Wir fangen mit dem Knoten 3 an, für den der größte Wert N zu erwarten ist. Nach Gleichung (14) ist

$$N'_3 = - \frac{9,92}{2} = \sim 5.$$

Bei der Berechnung von N' der Nachbarknoten nehmen wir für N_3 schon den Wert N'_3 statt Null. Der Nenner der Gl. (14) ändert um den Betrag $\frac{J}{l} \cdot N'_3$; diese Änderung wird in die 4. Spalte für den Knoten eingetragen, der der $\sum M$ entspricht. Nachdem die N' -Werte für alle Knoten bestimmt sind, berechnen wir nach Gl. (11) die erste Näherung für die Momente M'

$$M'_{nm} = \frac{J}{l} (2N'_n + N'_m).$$

In gleicher Weise können weitere Verbesserungen $\Delta N'' = N - N''$ berechnet werden. Der soeben geschilderte Rechnungsgang kann bis zur gewünschten Genauigkeit der Endergebnisse fortgesetzt werden. Die endgültigen Momente an den Stabenden erhält man durch Addition der Momente M_{nm}^0 und der eben berechneten Momente M'_{nm} usw. Diese Werte sind für die 4. Annäherung in Spalte 14 und für die 2. Annäherung in Spalte 15 der Tabelle II eingetragen. Der größte Fehler des Momentes für die zweite Annäherung ist etwa 2 %.

Die Stabkraft A des Festhaltestabes zur Überführung des Systems mit verschieblichen Knotenpunkten in jenes mit unverschieblichen Knotenpunkten berechnet sich, falls der Stab horizontal angeordnet ist, zu

$$A = \Sigma H + \Sigma Q_{nn'} \quad (17)$$

wo ΣH die Summe der wagrechten Komponenten der äußeren Kräfte und $\Sigma Q_{nn'}$ die Summe der horizontalen Auflagerkräfte aller Stiele bedeutet.

$$Q_{nn'} = \frac{M_{nn'} + M_{n'n}}{l} \quad (18)$$

Wir erhalten $A = -0,281 t$.

b) Die Wirkung der wagrechten Kraft A . Unter der Wirkung der wagrechten Kraft A verschieben sich alle Knotenpunkte um eine kleine Größe δ . Infolgedessen ändern die Werte der Winkel zwischen den Richtungen der Riegel und der Stiele um die Größe $\psi_{lm m'} = -\frac{\delta}{l}$ von der linken und $\psi_{nm m'} = +\frac{\delta}{l}$ von der rechten Seite der Stiele $m m'$.

Da die Stäbe steif miteinander verbunden sind, so müssen sie sich ausbiegen. Zwischen den Neigungswinkeln α der Tangente, der Winkeländerungen ψ und der Momente an den Stabenden gelten die Verhältnisse nach Gleichungen (1), (2) und (3) wie im Falle der Berechnung der Nebenspannungen. Mit den Bezeichnungen $2E\psi = K$ und $2E\alpha = N$ erhalten wir die Gleichungen (5), (6) und (7). Demgemäß ist

$$K = \pm \frac{2E\delta}{l} \quad (19)$$

Für Stäbe konstanter Steifigkeit mit $b = 2$ und $a = 1$ schreiben sich obige Gleichungen wie folgt:

$$N_{nm} = N_{nk} - K_{knm} \quad (20)$$

$$M_{nm} = \frac{J}{l} (2N_{nm} + N_{mn}) \quad (21)$$

$$\Sigma \frac{J}{l} (2N_{nm} + N_{mn}) = 0 \quad (22)$$

In üblicher Weise wählt man für δ einen beliebigen Wert und berechnet hierfür die Momente M_{nm} nach der Methode der sukzessiven Annäherung, wie das bei der Berechnung der Nebenspannungen durchgeführt wurde. Hieraus berechnet man die wagrechte Kraft B , die die gewählte Deformation erzeugt.

$$B = -\Sigma Q_{nn'} = -\Sigma \frac{M_{nn'} + M_{n'n}}{l} \quad (23)$$

Da die Deformation der Belastung proportional ist, sind die wirklichen Mo-

mente infolge der Kraft A gleich den gewonnenen Momenten multipliziert mit dem Koeffizienten $\frac{A}{B}$.

Tabelle III.

1	2	1. Annäherung				2. Annäherung				3. Annäherung		13	14
		N'	$M'_{mn} = \frac{J}{l}(2N'_{mn} + N'_{nm})$	Änderung der Momente	$\Delta N'$	N''	$M''_{mn} = \frac{J}{l}(2N''_{mn} + N''_{nm})$	Änderung der Momente	$\Delta N''$	N'''	$M'''_{mn} = \frac{J}{l}(2N'''_{mn} + N'''_{nm})$		
1-2	0,40	0,20	0,16	0,02		0,14	0,132	0,002		0,135	0,130	-0,09	-4,95
1-1'	0,10	-0,80	-0,12	-		-0,86	-0,129	-		-0,865	-0,130	+0,09	0,45
	0,95		+0,04	+0,06	-0,06		+0,003	0,005	-0,005		0		
1'-1	0,10	+0,40				+0,43				+0,433	0	0	0
2-1	0,40	0	0,080	-		0,05	0,096	-		0,056	0,099	-0,07	3,35
2-3	0,50	0	0	-		0,05	0,065	+0,006		0,056	0,077	-0,05	-2,76
2-2'	0,10	-0,625	-0,188	-		-0,575	-0,178	-		-0,569	-0,176	+0,13	-0,59
	2,0		-0,108		+0,05		-0,017	-0,011	+0,006		0		
2'-2	0,10	-0,625								-0,625	-0,182	0,13	-0,23
3-2	0,50	0	0	+0,025		0,03	0,055	-		0,041	0,069	-0,05	6,14
3-4	0,40	0	0	+0,096		0,03	0,120	-		0,041	0,114	-0,08	-7,45
3-3'	0,10	-0,625	-0,188	-		-0,595	-0,182	-0,015		-0,584	-0,179	+0,13	1,31
	2,0		-0,188	-0,067	+0,03		-0,007	-0,022	+0,011		+0,004		
3'-3	0,10	-0,625								-0,625	-0,183	0,13	0,72
4-3	0,40	0	0	-		0,24	0,204	-		0,203	0,179	-0,12	14,15
4-5	0,40	0	0	-		0,24	0,244	-		0,203	0,226	-0,16	-14,25
4-4'	0,15	-1,0	-0,45	-		-0,76	-0,378	-		-0,797	-0,389	0,28	0,21
	1,9				+0,24		+0,070		-0,037		+0,016		
4'-4	0,15	-1,0								-1,0	-0,420	0,30	0,26
5-4	0,40	0	0	+0,096		0,13	0,200	-0,015		0,159	0,208	-0,15	7,97
5-6	0,50	0	0,08	-		0,13	0,165	-		0,159	0,189	-0,14	-6,55
5-5'	0,15	-1,0	-0,45	-		-0,87	-0,411	-		-0,841	-0,402	0,29	-1,13
	2,1		-0,37	-0,274	+0,13		-0,046	-0,061	+0,029		-0,005		
5'-5	0,15	-1,0								-1,00	-0,426	0,31	-0,40
6-5	0,50	0,16	0,160	+0,065		0,07	0,135	+0,015		0,06	0,140	-0,10	-0,14
6-6'	0,10	-0,84	-0,126	-		-0,93	-0,139	-		-0,94	-0,141	0,10	0,14
	1,15		+0,034	+0,049	-0,09		-0,004	+0,011	-0,01		-0,001		
6'-6	0,10	+0,42								+0,47	0	0	0

In unserem Beispiel (Fig. 6) nehmen wir δ so an, daß K für irgend einen Winkel, z. B. $(1' - 1 - 2) = 1$ wird. Die andern Winkel berechnen sich zu

$$K_{nn'} = \pm 1 \frac{l_{11'}}{l_{nn'}} \quad (24)$$

Diese K -Werte sind in Fig. 6 eingeschrieben. Die Anfangswerte von N berechnet man nach Gl. (8) und (20). Für den Knoten 1 ergibt sich

$$N_{12} = 1 \frac{0,10}{0,10 + 0,40} = 0,20 \quad N_{2'21} = 0,20 - 1 = -0,80.$$

Tabellarische Berechnung siehe Tabelle III. Nach Gl. (23) berechnet sich die wagrechte Kraft B zu

$$B = - \left(\frac{-0,20}{5} + \frac{-0,176 - 0,182 - 0,179 - 0,183}{8} + \frac{-0,389 - 0,402 - 0,402 - 0,426 - 0}{5} \right) = 0,392 \text{ t.}$$

Die wirklichen Momente infolge der Kraft A erhält man durch Multiplikation mit

$$\frac{A}{B} = \frac{-0,281}{0,392} = -0,72.$$

Diese Momente sind in Spalte 13 eingetragen. Die totalen Momente erhält man durch Addition der Momente beider Teile der Berechnung, d. h. der Werte in Spalte 14 der Tabelle II und der Werte in Spalte 13 der Tabelle III. Spalte 14 der Tabelle III enthält diese totalen Momente.

Die mehrstöckigen Rahmen.

Der erste Teil der Aufgabe, d. h. die Berechnung der Momente für das System mit unverschieblichen Knotenpunkten, wird in gleicher Weise gelöst wie für den oben beschriebenen mehrstieligen Rahmen.

Wir betrachten nun die Wirkung der wagrechten Kräfte $A_1, A_2 \dots A_i$, die an den verschiedenen Riegeln wirken. Die Verschiebungen entsprechender Knoten seien $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_i$, von oben nach unten gerechnet. Diese Verschiebungen können anfänglich grob geschätzt werden. Falls die Steifigkeit der Riegel bedeutend größer ist als die der Stiele, so kann als angenäherte Deformation diejenige eingesetzt werden, die einem System mit starren Riegeln entspricht. Falls umgekehrt die Steifigkeit der Stiele bedeutend größer ist als die der Riegel, so kann in erster Annäherung die letztere gleich Null gesetzt werden. Als angenäherte Verschiebungen erhält man alsdann die Durchbiegungen der eingespannten Balken mit der Steifigkeit, die der Summe der Steifigkeiten aller Stiele entspricht. Nachdem die Verschiebungen δ und dementsprechend die Werte K gewählt sind, berechnen wir die Momente an den Stabenden und damit die wagrechten Kräfte B , die der angenommenen Deformation entsprechen.

$$B_1 = - \sum Q_1 \quad B_i = - \sum Q_i - \sum_1^i B \quad (25)$$

Um zwischen den erhaltenen Kräften B und den gegebenen Kräften A einen möglichst kleinen Unterschied zu erreichen, multiplizieren wir die angenommene Deformation, ebenso die Kräfte B mit einem Koeffizienten η , der so zu bestimmen ist, daß

$$\sum (A_i - \eta B_i)^2$$

zu einem Minimum werde. Man bekommt dabei

$$\eta = \frac{\sum A_i B_i}{\sum B_i^2} \quad (26)$$

Tabelle IV.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bezeichnung des Stabes	$\frac{J}{l}$ $2 \sum \frac{J}{l}$	1. Annäherung		2. Annäherung		3. Annäherung		4. Annäherung	
		N'_{mn}	M'_{mn} tm.	N''_{mn}	M''_{mn} tm.	N'''_{mn}	M'''_{mn} tm.	N^{IV}_{mn}	M^{IV}_{mn} tm.
1—4	0,1	-1,97	-0,586	-1,88	-0,543	-1,89	-0,552	-1,89	-0,552
1—2	0,8	0,25	0,400	0,34	0,568	0,33	0,560	0,325	0,552
	1,8		-0,186		+0,025		+0,008		0
2—1	0,8	0	0,200	0,03	0,320	0,04	0,328	0,041	0,326
2—3	0,6	0	0,192	0,03	0,318	0,04	0,312	0,041	0,313
2—5	0,1	-2,22	-0,666	-2,19	-0,644	-2,18	-0,640	-2,18	-0,640
	3,0		-0,274		-0,006		0		-0,001
3—2	0,6	0,32	0,360	0,47	0,582	0,44	0,552	0,44	0,552
3—6	0,1	-1,90	-0,600	-1,75	-0,542	-1,78	-0,552	-1,78	-0,552
	1,4		-0,240		+0,040		0		0
4—1	0,1	-1,92	-0,581	-1,67	-0,522	-1,74	-0,537	-1,75	-0,538
4—5	1,5	0,30	0,900	0,55	1,890	0,48	1,710	0,473	1,694
4—8	0,2	-2,20	-1,306	-1,95	-1,106	-2,02	-1,150	-2,03	-1,156
	3,6		-0,987		+0,262		+0,023		0
5—4	1,5	0	0,450	0,16	1,305	0,18	1,260	0,183	1,259
5—2	0,1	-2,22	-0,666	-2,06	-0,631	-2,04	-0,626	-2,04	-0,626
5—6	1,2	0	0	0,16	0,744	0,18	0,744	0,183	0,751
5—9	0,2	-2,50	-1,500	-2,34	-1,400	-2,32	-1,384	-2,32	-1,382
	6,0		-1,716		+0,018		-0,006		+0,002
6—5	1,2	0	0	0,30	0,912	0,26	0,840	0,26	0,843
6—3	0,1	-2,22	-0,634	-1,92	-0,559	-1,96	-0,570	-1,96	-0,570
6—7	1,2	0	0,432	0,30	1,090	0,26	1,008	0,26	1,008
6—10	0,2	-2,50	-1,500	-2,20	-1,220	-2,24	-1,264	-2,24	-1,268
	5,4		-1,702		+0,223		+0,014		+0,013
7—6	1,2	0,36	0,864	0,31	1,10	0,32	1,08	0,32	1,08
7—11	0,2	-2,14	-1,168	-2,19	-1,10	-2,18	-1,09	-2,18	-1,09
	2,9		-0,304		0		-0,01		-0,01
8—4	0,2	-2,13	-1,292	-1,63	-1,04	-1,71	-1,09	-1,72	-1,09
8—9	1,5	0,37	1,110	0,87	2,88	0,79	2,70	0,78	2,68
8—12	0,2	-2,77	-1,736	-2,27	-1,54	-2,35	-1,57	-2,36	-1,57
	3,8		-1,918		+0,30		+0,04		+0,02
12—8	0,2	-3,14						-3,14	-1,73
9—8	1,5	0	0,555	0,18	1,85	0,22	1,85	0,23	1,86
9—5	0,2	-2,50	-1,500	-2,32	-1,40	-2,28	-1,38	-2,27	-1,38
9—10	1,2	0	0	0,18	1,39	0,22	1,32	0,23	1,32
9—13	0,2	-3,14	-1,870	-2,96	-1,81	-2,92	-1,80	2,91	-1,80
	6,2		-2,815		+0,03		-0,01		0
13—9	0,2	-3,14						-3,14	-1,84
10—9	1,2	0	0	0,80	2,13	0,66	1,85	0,64	1,81
10—6	0,2	-2,50	-1,50	-1,70	-1,12	-1,84	-1,18	-1,86	-1,19
10—11	1,2	0	1,13	0,80	3,59	0,66	3,31	0,64	3,26
10—14	0,3	-4,71	-4,23	-3,91	-3,76	-4,05	-3,84	-4,07	-3,86
	5,8		-4,60		+0,84		+0,14		+0,02
14—10	0,3	-4,71						-3,14	-4,05
11—10	1,2	0,94	2,25	1,39	4,29	1,44	4,25	1,44	4,22
11—7	0,2	-1,56	-1,05	-1,11	-0,88	-1,06	-0,86	-1,06	-0,86
11—15	0,3	-3,77	-3,68	-3,32	-3,41	-3,27	-3,38	-3,27	-3,38
	3,4		-2,48		0		+0,01		
15—11	0,3	-4,71						-4,71	-3,81

Tabelle V.

1	2	3	4	5	6	7	8
Bezeichnung des Stabes	1. Annäherung		2. Annäherung		3. Annäherung		Endgültige Momente M_{mn}
	N'_{mn}	M'_{mn}	N''_{mn}	M''_{mn}	N'''_{mn}	M'''_{mn}	
1-4	-0,120	-0,0328	-0,114	-0,0301	-0,115	-0,0302	-0,630
1-2	0,013	0,0208	0,019	0,0320	0,018	0,0312	0,631
		-0,0120		+0,0019		+0,0010	
2-1	0	0,0104	0,002	0,0184	0,003	0,0192	0,374
2-3	0	0,0120	0,002	0,0180	0,003	0,0186	0,359
2-5	-0,133	-0,0399	-0,131	-0,0370	-0,130	-0,0370	0,733
		-0,0175		-0,0006		+0,0008	
3-2	0,020	0,0240	0,026	0,0324	0,025	0,0318	0,632
3-6	-0,113	-0,0359	-0,107	-0,0311	-0,108	-0,0320	-0,632
		-0,0119		+0,0013		-0,0002	
4-1	-0,088	-0,0296	-0,073	-0,0260	-0,072	-0,0259	-0,610
4-5	0,045	0,1350	0,060	0,2175	0,061	0,2175	2,070
4-8	-0,338	-0,2028	-0,323	-0,1932	-0,322	-0,1926	-1,470
		-0,0974		-0,0017		-0,0010	
5-4	0	0,0675	0,025	0,1650	0,023	0,1605	1,540
5-2	-0,133	-0,0399	-0,108	-0,0347	-0,110	-0,0350	-0,716
5-6	0	0	0,025	0,1030	0,023	0,0900	0,910
5-9	-0,383	-0,2298	-0,358	-0,2142	-0,360	-0,2158	-1,736
		-0,2022		+0,0191		-0,0003	
6-5	0	0	0,036	0,1160	0,029	0,0970	1,02
6-3	-0,133	-0,0379	-0,097	-0,0301	-0,104	-0,0316	-0,651
6-7	0	0,0636	0,036	0,1570	0,029	0,1450	1,25
6-10	-0,383	-0,2298	-0,347	-0,2070	-0,354	-0,2110	-1,61
		-0,2041		+0,0359		-0,0006	
7-6	0,053	0,1270	0,059	0,1850	0,063	0,1860	1,38
7-11	-0,330	-0,2026	-0,324	-0,1852	-0,320	-0,1866	-1,38
		-0,0756		-0,0002			
8-4	-0,338	-0,2028	-0,320	-0,1926	-0,319	-0,192	-1,39
8-9	0,045	0,1350	-0,063	0,2310	0,064	0,228	3,16
8-12	-0,058	-0,0438	-0,040	-0,0366	-0,039	-0,036	-1,74
		-0,1116		+0,0018		0	
12-8	-0,103				-0,103	-0,049	-1,93
9-8	0	0,0675	0,028	0,1785	0,024	0,168	2,20
9-5	-0,383	-0,2298	-0,355	-0,2136	-0,359	-0,216	-1,73
9-10	0	0	0,028	0,1175	0,024	0,103	1,54
9-13	-0,103	-0,0618	-0,075	-0,0506	-0,079	-0,052	-2,00
		-0,2241		+0,0318			
13-9	-0,103				-0,103	-0,057	-2,05
10-9	0	0	0,042	0,134	0,038	0,120	2,09
10-6	-0,383	-0,2298	-0,341	-0,206	-0,345	-0,209	-1,53
10-11	0	0,0360	0,042	0,227	0,038	0,199	3,75
10-14	-0,155	-0,1395	-0,113	-0,114	-0,117	-0,117	-4,30
		-0,3333		+0,041		-0,007	
14-10	-0,155				-0,155	-0,128	-4,51
11-10	0,030	+0,0720	0,105	0,302	0,090	0,262	4,85
11-7	-0,353	-0,2072	-0,278	-0,176	-0,293	-0,181	-1,13
11-15	-0,125	-0,1215	-0,050	-0,076	-0,065	-0,076	-3,74
		-0,2567		+0,050		+0,005	
15-11	-0,155				-0,155	-0,113	-4,24

$\eta_1 = 1,13$ multiplizierten Momente der Spalte 7, Tabelle V. Diese Momente sind in Spalte 8 der Tabelle V wiedergegeben.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Zusatzmomente berechnen, die infolge Längenänderungen der einzelnen Stäbe auftreten, unabhängig davon, ob diese Änderungen eine Folge der Wirkung der Normalkräfte, der Temperaturänderungen oder der Nachgiebigkeit des Baugrundes sind.

Der Vierendeelträger.

Anstelle der oben angeführten Methode der sukzessiven Annäherung empfiehlt sich für dieses System das vom Autor in der Zeitschrift „Der Bauingenieur“ 1922, Heft 7 und 8, angegebene Berechnungsverfahren: „Die Berechnung der Rahmenträger“.

Zusammenfassung.

Der Verfasser zeigt die Anwendung des Iterationsverfahrens auf die Nebenspannungsberechnung bei Fachwerken. Das Beispiel der Elbbrücke bei Torgan wird ganz durchgerechnet. Bei mehrstieligen und mehrstöckigen Rahmen geht die Berechnung einzelner Teile ganz entsprechend vor sich, wie an Hand von zwei Beispielen ausführlich gezeigt wird.

Résumé.

L'auteur expose l'application de la méthode d'itération au calcul des tensions secondaires dans les constructions en treillis. Elle est appliquée ici au calcul complet du pont sur l'Elbe près de Torgan. Le calcul des cadres juxtaposés et à plusieurs étages s'opère exactement de la même manière, comme le montrent deux exemples détaillés.

Summary.

The author demonstrates the application of the succession re-iteration procedure for the calculation of secondary stresses in lattice structures. A fully numerical example is shown for the Torgan bridge over the River Elbe. The application of the theory to multiple-storey frames is done in the same way as for the bridge and is illustrated by two examples.

Leere Seite
Blank page
Page vide