Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 4 (1936)

Artikel: De l'application des équations simultanées à différences finies en statique des constructions

Autor: Wierzbicki, Witold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-5103

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DE L'APPLICATION DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES À DIFFÉRENCES FINIES EN STATIQUE DES CONSTRUCTIONS.

ANWENDUNG DER DIFFERENZENRECHNUNG IN DER BAUSTATIK.

THE APPLICATION OF SIMULTANEOUS EQUATIONS OF DIFFERENCES IN STATICS.

Prof. Dr. WITOLD WIERZBICKI, Varsovie.

Durant les vingt dernières années on peut constater une large application des équations à différences finies à la solution de nombreux problèmes de la Statique des Constructions. Les équations à différences finies étaient déjà étudiées systématiquement par Lagrange et Laplace, mais un développement plus fertile de la théorie de ces équations ne se rapporte qu'à la fin du XIXème et au commencement du XXème siècle. Les publications qui ont paru à cette époque sur les équations à différences finies considèrent ces équations non seulement au point de vue formel, mais également au point de vue de la théorie générale des fonctions.

A mesure que la théorie des équations à différences finies se développe, les ingénieurs s'y intéressent de plus en plus et appliquent ce nouveau moyen d'études à de nombreuses questions techniques.

Dans la Statique des Constructions les équations à différences finies trouvent leur application pour l'étude de deux groupes de problèmes:

Le premier groupe est celui des phénomènes au caractère discontinu, dont nous tâchons de trouver la solution en formules fermées, pouvant servir à un usage immédiat.

Le second groupe contient les phénomènes qui en réalité sont continus, mais que nous considérons comme discontinus, pour pouvoir les résoudre au moyen d'équations à différences finies au lieu d'équations différentielles.

Au point de vue formel nous distinguons dans la Statique des Constructions les cas d'application des équations à différences finies simples, des équations à différences finies partielles et des équations simultanées.

Les publications concernant le premier groupe des problèmes mentionnés ci-dessus sont consacrées pour la plupart à la théorie des poutres continues, à la théorie du flambage, à la théorie des portiques etc. Tels sont p. ex. les ouvrages du Prof. Müller-Breslau, du Prof. Bleich, du Prof. Melan etc. Ces publications sont basées pour la plupart sur la théorie des équations à différences finies simples.

Les problèmes du second groupe sont étudiés principalement dans les publications du Dr. H. Marcus et du Prof. J. Nielsen, concernant la théorie de la plaque élastique. Les solutions approximatives du problème de la plaque élastique sont basées dans ces ouvrages sur les équations à différences finies partielles.

Nous appelons équations simultanées à différences finies un système d'équations:

$$\Phi_1(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x \ldots z_x, \Delta z_x, \Delta^2 z_x \ldots) = 0$$
$$\Phi_2(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x \ldots z_x, \Delta z_x, \Delta^2 z_x \ldots) = 0 \qquad (1)$$

où y_x, z_x désignent des fonctions de la même variable indépendante x et Δy_x, Δz_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^2 z_x$ ... des différences finies du premier ou du second ordre de ces fonctions.

Les équations simultanées à différences finies trouvent quelquefois application à certaines solutions des équations simples ou partielles de la Statique des Constructions.

Dans le présent ouvrage nous traiterons plusieurs problèmes pratiques d'application directe des équations simultanées à différences finies. Nous allons étudier notamment les poutres à axe brisé, dont l'angle de brisure est constant ou variable et les poutres continues à axe brisé.

On appelle poutre à axe brisé une poutre dont l'axe longitudinal est une ligne brisée plane qui est chargée dans la direction perpendiculaire au plan de cet axe.

Le schéma d'une poutre à axe brisé est représenté sur la figure 1.

La poutre On encastrée à l'extrémité O est chargée à l'autre extrémité du poids P.

Soient:

$\bar{\varphi}_x$ l'angle d'inclinaison du plan de la section transversale mené par le noeud x et normal à l'axe du panneau $x-1$, x par rapport au plan vertical, c'est à dire perpendiculaire au plan de l'axe de la poutre.

φ_x l'angle d'inclinaison de la section transversale x du panneau $x-1$, x par rapport au plan de la section $x-1$ du même panneau.

φ_x' l'angle d'inclinaison du plan de la section transversale $x-1$, normal à l'axe du panneau $x-1$, x par rapport au plan vertical.

$\bar{\Theta}_x$ l'angle de rotation du plan de la section transversale x normal à l'axe du panneau $x-1$, x par rapport à cet axe.

Θ_x l'angle de torsion du panneau $x-1$, x.

v_x le déplacement vertical du noeud x par rapport au plan de l'axe de la poutre.

y^0_x le déplacement vertical du noeud x par rapport au noeud $x-1$.

β l'angle de brisure de la poutre.

Dans la suite nous allons considérer les angles $\bar{\varphi}_x$, φ_x, φ'_x, $\bar{\Theta}_x$ et Θ_x comme vecteurs. Entre ces vecteurs existent des relations suivantes [1]):

$$\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_{x-1} \cos\beta_{x-1} - \bar{\Theta}_{x-1} \sin\beta_{x-1} + \varphi_x \qquad (2)$$
$$\bar{\Theta}_x = \bar{\varphi}_{x-1} \sin\beta_{x-1} + \bar{\Theta}_{x-1} \cos\beta_{x-1} + \Theta_x \qquad (3)$$
$$\varphi'_x = \bar{\varphi}_{x-1} \cos\beta_{x-1} - \bar{\Theta}_{x-1} \sin\beta_{x-1} \qquad (4)$$

où les points $x-1$, x, $x+1$ etc. sont des points congruents.

Pour le déplacement vertical d'un noeud nous pouvons donc écrire la formule suivante:

$$v_m = v_x = \sum_1^m y_x^0 + \sum_1^m l_x \varphi'_x \qquad (5)$$

---

[1]) W. Wierzbicki: „Sur le calcul des poutres à axe brisé". Mémoires et Comptes Rendus des Travaux de la Société des Ingénieurs Civils de France 1927, p. 1012. W. Wierzbicki: „Teorja dźwigarów załamanych w planie". Varsovie 1926.

Supposons d'abord que l'angle de brisure β_x et la longueur l_x d'un panneau de la poutre soient d'une grandeur constante; on a alors:

$$\beta_x = \beta = \text{const} \qquad l_x = l = \text{const.}$$

Ceci posé, nous devons considérer les angles $\bar{\varphi}_x$ et $\bar{\Theta}_x$ comme des fonctions de la même variable indépendante x et les deux équations (2) et (3), comme des équations simultanées à différences finies.

Nous tâcherons maintenant de remplacer les deux équations (2) et (3) par une seule équation à différences finies d'ordre supérieur.

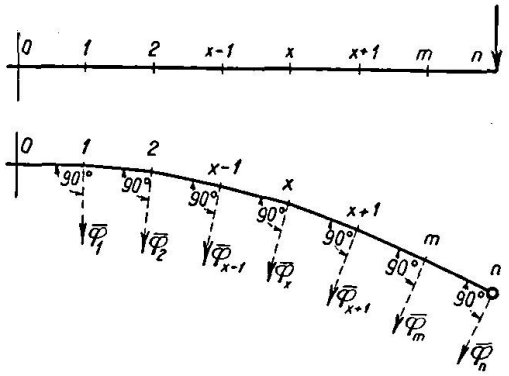

Fig. 1.

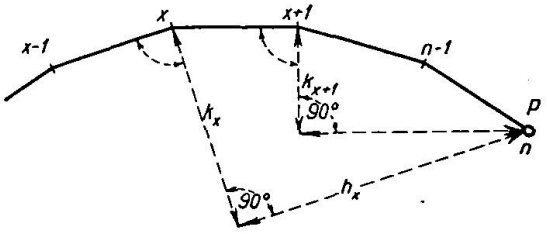

Fig. 2.

Il résulte de la première des équations mentionnées:

$$\bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos\beta - \bar{\Theta}_x \sin\beta + \varphi_{x+1} \tag{6}$$

En portant l'expression (3) de $\bar{\Theta}_x$ dans (6) on a:

$$\bar{\varphi}_{x+1} = \bar{\varphi}_x \cos\beta - \bar{\varphi}_{x-1} \sin^2\beta - \bar{\Theta}_{x-1} \cos\beta \sin\beta - \Theta_x \sin\beta + \varphi_{x+1} \tag{7}$$

D'autre part nous résolvons l'équation (2) par rapport à $\bar{\Theta}_{x-1}$:

$$\bar{\Theta}_{x+1} \sin\beta = -\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} \cos\beta + \varphi_x \tag{8}$$

En substituant dans l'équation (7) l'expression (8), nous obtiendrons:

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2\,\bar{\varphi}_x \cos\beta + \bar{\varphi}_{x-1} = Q_x \tag{9}$$

où Q_x désigne la somme suivante:

$$Q_x = \varphi_{x+1} - \varphi_x \cos\beta - \Theta_x \sin\beta \tag{10}$$

Pour déterminer les angles φ_x et Θ_x il est nécessaire de considérer chaque panneau de la poutre à axe brisé, comme une poutre $(x-1)$, x de portée l, encastrée au point $(x-1)$ et chargée au point x de la force $T = P$ du moment de flexion M_x et du moment de torsion $\mathfrak{M}_x$.

D'après la figure 2 on a:

$$\begin{aligned} M_x &= Ph_x = l[\cos\beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos(n-1)\beta] \\ \mathfrak{M}_x &= Pk_x = l[\sin\beta + \sin 2\beta + \ldots + \sin(n-1)\beta] \end{aligned} \tag{11}$$

En introduisant des notations:

J moment d'inertie de la section transversale de la poutre,
J_0 moment d'inertie plane de la même section,
E module d'élasticité longitudinale,
G module d'élasticité transversale,

$$\frac{Pl}{EJ} = 2f \qquad \frac{Pl}{GJ_0} = 2e \tag{12}$$

nous exprimons les angles φ_x et Θ_x provenant de la déformation du panneau $(x-1)$, x par les formules suivantes:

$$\varphi_x = fl + 2fh_x \tag{13}$$

$$\Theta_x = -2ek_x \tag{14}$$

Pour simplifier les formules qui suivent, posons: $f = e$, ce qui ne diminue en rien la généralité du procédé concernant les équations simultanées à différences finies des poutres à axe brisé. Ceci posé, nous substituons les valeurs (13) et (14) des angles φ_x et Θ_x dans l'expression (10) et nous obtenons alors:

$$Q_x = a\cos x\beta + b\sin x\beta + c \tag{15}$$

où [2])

$$a = -\frac{2fl\sin\beta\cos\frac{2n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \tag{16}$$

$$b = -\frac{2fl\sin\beta\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \tag{17}$$

$$c = 2fl\cos^2\frac{\beta}{2} \tag{18}$$

Ainsi l'équation (9) prend la forme:

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2\bar{\varphi}_x\cos\beta + \bar{\varphi}_{x-1} = a\cos\beta + b\sin\beta + c \tag{19}$$

L'équation (19) est donc une équation à différences finies du second ordre à coefficients constants. La solution de cette équation peut être représentée sous la forme d'une somme:

$$\bar{\varphi}_x = z_x^0 + z_x \tag{20}$$

où z^0_x désigne une certaine solution singulière de l'équation (19) et z_x la solution générale de l'équation:

$$\bar{\varphi}_{x+1} - 2\bar{\varphi}_x\cos\beta + \bar{\varphi}_{x+1} = 0 \tag{21}$$

c'est à dire, de l'équation (19) sans second membre.

Nous allons chercher la solution z^0_x sous la forme:

$$z_x^0 = Ax\sin x\beta + Bx\cos x\beta + C \tag{22}$$

A, B, C désignant des coefficients inconnus.

En substituant dans l'équation (19) la solution (22), on obtient:

$$2A\sin\beta\cos x\beta - 2B\sin\beta\sin x\beta + 4C\sin^2\frac{\beta}{2} = a\cos x\beta + b\sin x\beta + c \tag{23}$$

Afin que les deux membres de l'équation (23) soient identiques, il est nécessaire que les coefficients de $\cos x\beta$ et de $\sin x\beta$ et le terme $4C\sin^2\frac{\beta}{2}$ dans le premier membre de cette équation soient respectivement égaux aux coefficients de $\cos x\beta$ et de $\sin x\beta$ et au terme c dans le second membre. Ainsi on a:

---

[2]) W. Wierzbicki: „Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia dźwigarów załamanych w planie". Warszawa 1930.

$$A = -\frac{fl\cos\frac{2n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad B = \frac{fl\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad C = \frac{fl}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}} \tag{24}$$

Nous allons maintenant chercher la solution z_x de l'équation (21). On a donc l'équation caractéristique:

$$\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}\cos\beta + 1 = 0 \tag{25}$$

Les racines de l'équation précédente ont la forme:

$$\mathfrak{z} = \cos\psi \pm i\sin\psi \tag{26}$$

où dans le cas considéré $\cos\psi = \cos\beta$.

On peut alors exprimer la solution de l'équation (21) sous la forme:

$$z_x = A(\cos\psi + i\sin\psi)^x + B(\cos\psi - i\sin\psi)^x \tag{27}$$

ou bien sous la forme:

$$z_x = D_1\sin x\beta + D_2\cos x\beta \tag{28}$$

D_1 et D_2 désignant deux constantes arbitraires.

D'après ce qui précède, on parviendra à la solution suivante de l'équation (19):

$$\bar{\varphi}_x = D_1\sin x\beta + D_2\cos x\beta + \frac{ax\sin x\beta}{2\sin\beta} - \frac{bx\cos xb}{2\sin\beta} + \frac{c}{4\sin^2\frac{\beta}{2}} \tag{29}$$

Pour déterminer les constantes D_1 et D_2 nous considérerons le panneau 0,1 de la poutre à axe brisé comme une poutre droite, encastrée au point 0 et chargée au point 1 de la force $T = P$ et du moment $M_1 = Ph_1$. On obtiendra alors:

$$\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_1 = \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{M_1 l}{EJ}. \tag{30}$$

D'autre part, il résulte de la condition même de l'encastrement de la poutre 0,1, que $\bar{\varphi}_x = \bar{\varphi}_0 = 0$.

Dès lors, en faisant dans l'équation (29) successivement $x = 0$ et $x = 1$ nous aurons:

$$D_1 = -\frac{fl}{2\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} \qquad D_2 = -\frac{fl}{2\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}} \tag{31}$$

Pour $n = 10$ et $\beta = 9^0$ on trouve d'après les formules (24) et (31):

$$A = fl \quad B = 12{,}70\,fl \quad C = 80{,}84\,fl \quad D_1 = -6{,}44\,fl \quad D_2 = -80{,}84\,fl$$

et
$$\bar{\varphi}_x = -6{,}44\,fl\sin x\beta - 80{,}84\,fl\cos x\beta + flx\sin x\beta + \\ + 12{,}70\,flx\cos x\beta + 80{,}84\,fl$$

d'où: $\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi}_{10} = 84{,}40\,fl.$

D'après la formule (29) nous pouvons aussi déterminer l'angle $\bar{\varphi}_n$ dans le cas d'une poutre en forme d'arc de cercle dont l'angle au centre est ω. Nous posons alors dans l'expression (29) $l = r\beta$ et $x = \frac{\omega}{\beta}$ et nous cherchons les limites des termes particuliers de cette expression.

Après avoir calculé les angles $\bar{\varphi}_x$ on calcule les angles φ'_x par la formule:

$$\varphi'_x = \bar{\varphi}_x - \varphi_x \tag{32}$$

ce qui résulte de la définition même des angles $\bar{\varphi}_x$, φ'_x et φ_x. En tenant compte de la formule qui précède, nous mettons l'expression (5) sous la forme:

$$v_m = \sum_1^m y_x^0 + l \sum_1^m \bar{\varphi}_x - l \sum_1^m \varphi_x \tag{33}$$

où dans le cas considéré:

$$y_x^0 = \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{M_x l^2}{2EJ} \tag{34}$$

Le calcul des termes particuliers de la formule (33) se ramène à l'addition de séries trigonométriques.

Les angles $\bar{\varphi}_x$ et les déplacements v_m déterminés, nous pouvons les appliquer au calcul des poutres à axe brisé appuyées d'une manière quelconque, ce qui a été démontré dans les ouvrages cités plus haut.

Si l'angle de brisure de la poutre à axe brisé est une fonction de x, nous aurons de nouveau affaire à des équations simultanées à différences finies (2) et (3).

En procédant de la même manière pour une poutre dont l'angle de brisure est constant, nous remplaçons le système de deux équations (2) et (3) du premier ordre par une seule équation du second ordre. La dite équation prend la forme [3]):

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \bar{\varphi}_x \sin(\beta_x + \beta_{x-1}) + \bar{\varphi}_{x-1} \sin \beta x = \\ &= \varphi_{x+1} \sin \beta_{x-1} - \varphi_x \sin \beta_x \cos \beta_{x-1} - \Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1} \end{aligned} \tag{35}$$

L'équation (35) est donc une équation à différences finies dont les coefficients variables entre les angles $\bar{\varphi}_x$ sont des fonctions de x.

Pour mettre les coefficients de l'équation (35) sous la forme de fonctions explicites de x, nous supposons que les angles de brisure β_x soient soumis à la règle suivante:

$$\frac{\sin \beta_x}{\sin \beta_{x-1}} = q \tag{36}$$

où q est une constante et où les valeurs des angles β_x sont assez petites pour qu'on puisse faire $\cos \beta_x = 1$. Les $\sin \beta_x$ changent donc d'après une progression géométrique, c. à d.:

$$\sin \beta_x = q^x \sin \beta_0 \tag{37}$$

où β_0 désigne l'angle d'inclinaison d'un côté de l'axe horizontal de la poutre par rapport à un certain axe.

En tenant compte de la relation (36), mettons l'équation (35) sous la forme:

$$(\bar{\varphi}_{x+1} - \bar{\varphi}_x - \varphi_{x+1}) \sin \beta_{x-1} - (\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} - \varphi_x) \sin \beta_x = - \Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1} \tag{38}$$

En désignant

$$y_x = \bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} - \varphi_x \tag{39}$$

on trouve:

$$y_{x+1} \sin \beta_{x-1} - y_x \sin \beta_x = - \Theta_x \sin \beta_x \sin \beta_{x-1} \tag{40}$$

où

$$y_{x+1} - q y_x = - \Theta_x q^x \sin \beta_0 \tag{41}$$

Supposons que la fonction:

$$y_x = F(x)$$

soit une solution de l'équation (41).

---

[3]) W. Wierzbicki: „Dźwigary załamane w planie o zmiennym kącie załamania". Varsovie, „Przeglad Techniczny", 1931.

D'après la relation (39), nous aurons l'équation:

$$\bar{\varphi}_x - \bar{\varphi}_{x-1} = \varphi_x + F(x) \tag{42}$$

d'où on trouvera une expression pour l'angle $\bar{\varphi}_x$.

Ainsi on a réussi à remplacer la solution de l'équation (35) à différences finies du second ordre à coefficients variables par une solution de deux équations différentes (41) et (42) du premier ordre à coefficients constants. Les solutions générales de ces équations prennent la forme:

$$y_x = z_x^0 + z_x \tag{43}$$

déjà utilisées plus haut (expression 20).

Les solutions z_x des équations privées de seconds membres seront obtenues respectivement pour (41) et (42) sous la forme:

$$z_1 = C_1 q^x \tag{44}$$

$$z_2 = C_2 \tag{45}$$

C_1 et C_2 désignant des constantes.

Pour trouver les solutions particulières $z^0{}_x$ nous devons nous servir dans ce cas d'approximations, la solution précise étant la cause de grandes difficultés. Ces approximations concernent les expressions pour k_x et h_x qui ont ici la forme de séries suivantes:

$$k_x = l[\sin\beta_x + \sin(\beta_x + \beta_{x+1}) + \ldots + \sin(\beta_x + \beta_{x+1} + \ldots + \beta_{n-1})] \tag{46}$$

$$h_x = l[\cos\beta_x + \cos(\beta_x + \beta_{x+1}) + \ldots + \cos(\beta_x + \beta_{x+1} + \ldots + \beta_{n-1})] \tag{47}$$

Nous remplaçons alors les séries (46) et (47), dont l'addition est impossible, par des courbes d'interpolation:

$$k_x = \sum_0^n A_i x^i \qquad h_x = \sum_0^n A_i x^i \tag{48}$$

Pour déterminer les coefficients A_i des équations (48) nous construisons d'abord des diagrammes des fonctions (46) et (47) et nous y trouvons les points caractéristiques. En égalant les ordonnées de ces diagrammes aux ordonnées des courbes (48) on trouvera donc les coefficients cherchés. Les fonctions (46) et (47) ayant la forme rapprochée d'une parabole, on peut se servir dans ce cas des courbes (48) du second ou du troisième degré.

On obtiendra alors pour l'angle $\bar{\varphi}_x$ une solution du type:

$$\bar{\varphi}_x = C + \sum g_x r^x \tag{49}$$

C et r désignant des constantes et g_x une certaine fonction de x. On calcule les constantes de l'expression (49) de la même manière que dans le cas d'une poutre dont l'angle de brisure est constant, mais nous ne développerons pas ici ces calculs.

Une poutre continue à axe brisé est représentée sur les figures 3 a et 3 b. Les appuis de 1 à $n - 1$ sont mobiles dans un plan parallèle au plan de l'axe de la poutre, l'appui n est mobile dans une certaine direction parallèle au plan de l'axe, l'appui 0 est immobile.

Par les appuis $x - 1$ et x menons des sections verticales planes α_{x-1} et α_x normales aux axes non déformés des travées $x - 1$, x ou x, $x + 1$ de la poutre.

Introduisons les notations suivantes:

φ_x l'angle d'inclinaison du plan de la section transversale α_x par rapport à un axe passant par les points x et normal à la droite $x - 1$, x.

φ^0_x l'angle d'inclinaison de la section transversale α_x par rapport à un axe passant par le point x et normal à la droite x, $x+1$.

φ'_x l'angle d'inclinaison de la section α_{x-1} par rapport à un axe passant par le point $x-1$ et normal à la droite $x-1$, x.

ψ_x la partie de l'angle φ_x produite par la charge immédiate de la travée $x-1$, x.

ψ'_x la partie de l'angle φ'_x produite par la charge immédiate de la travée $x-1$, x.

Θ_x l'angle de torsion de la travée $x-1$, x.

Θ^0_{x-1} l'angle de rotation de la section α_{x-1} par rapport à l'axe de la travée $x-1$, x.

Θ'_x l'angle de rotation de la section α_x par rapport à l'axe de la travée $x-1$, x.

Nous considérons les différents angles φ et Θ comme des vecteurs représentés sur la figure 4.

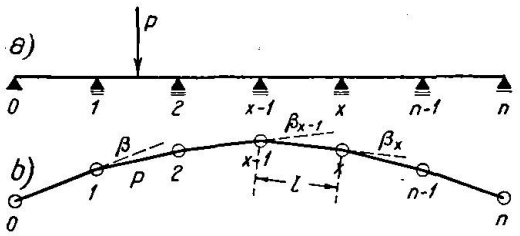

Fig. 3.

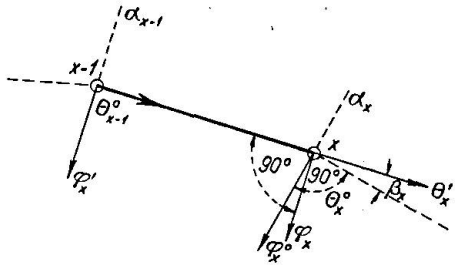

Fig. 4.

La poutre continue à axe brisé n'étant pas réellement coupée au point x, on peut égaler à 0 l'angle entre la section α_x de la travée $x-1$, x et de la section α_x de la travée x, $x+1$, provenant de la déformation de ces travées, considérées comme des poutres à deux appuis. On a alors:

$$\varphi^0_x + \varphi'_{x+1} = 0 \tag{50}$$

Les angles φ'_x, φ_x et Θ_x de la travée $x-1$, x de la poutre continue proviennent d'une part, des charges immédiates de cette travée et d'autre part, des moments agissant sur les appuis $x-1$ et x. Sur la fig. 5 nous représentons ces moments comme des vecteurs et nous les décomposons en moments de flexion et moments de torsion. Savoir:

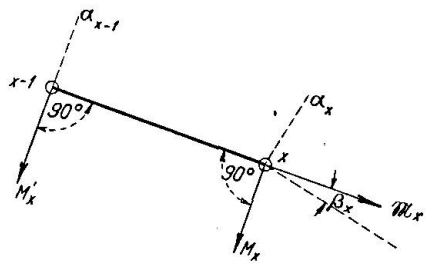

Fig. 5

M_x la composante normale à la droite $x-1$, x du moment exprimant l'influence de la travée x, $x+1$ sur la section α_x de la travée $x-1$, x.

$\mathfrak{M}_x$ la composante du même moment suivant la direction de l'axe longitudinal de la travée $x-1$, x.

M'_x la composante normale à la droite $x-1$, x du moment exprimant l'influence de la travée $x-2$, $x-1$ sur la section α_x de la travée $x-1$, x.

En projetant les vecteurs φ_x et Θ'_x sur les directions φ^0_x et Θ^0_x, on parvient à des équations suivantes[4]):

[4]) W. Wierzbicki: „Belki ciągłe załamane w planie". Lwów, Czasopismo Techniczne, 1931.

$$\varphi^0 = \varphi_x \cos\beta_x - \Theta'_x \sin\beta_x \tag{51}$$

$$\Theta^0_x = \varphi_x \sin\beta_x + \Theta'_x \cos\beta_x \tag{52}$$

D'autre part, les conditions de l'équilibre du noeud x, considéré comme un corps rigide, nous donnent des relations:

$$M_x = \mathfrak{M}_{x+1} \sin\beta_x + M'_{x+1} \cos\beta_x \tag{53}$$

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x+1} \cos\beta_x - M'_{x+1} \sin\beta_x \tag{54}$$

Suivant les définitions données plus haut, on obtiendra:

$$\Theta'_x = \Theta^0_{x-1} + \Theta_x \tag{55}$$

En tenant compte des relations (55) et (50) nous mettons les équations (51) et (52) sous la forme:

$$\varphi_x \cos\beta_x - (\Theta^0_x + \Theta_x) \sin\beta_x = -\varphi'_{x+1} \tag{56}$$

$$\Theta^0_x = \varphi_x \sin\beta_x + (\Theta^0_{x-1} + \Theta_x) \cos\beta_x \tag{57}$$

Les angles φ et Θ étant des fonctions de x, nous devons considérer les équations (56) et (57) comme un système de deux équations simultanées à différences finies. Nous tâcherons de remplacer ces équations par une seule équation de l'ordre supérieur.

Dans le cas $\beta_x = \beta =$ const on ramène les équations (56) et (57) à l'équation suivante:

$$\varphi_x \cos\beta - \varphi_{x-1} - \varphi'_x \cos\beta - \Theta_x \sin\beta = -\varphi'_{x+1} \tag{58}$$

Nous posons plus loin (pour $l_x = l =$ const):

$$\frac{l}{3EJ} = 2f \tag{59}$$

$$\frac{l}{EJ_0} = 2f \tag{60}$$

ce qui ne change en rien la forme de l'équation générale à différences finies de la poutre continue à axe brisé.

En tenant compte des rotations (59) et (60) on obtiendra:

$$\varphi_x = M_x \cdot 2f + M'_x f + \psi_x \tag{61}$$

$$\varphi'_x = M'_x \cdot 2f + M_x f + \psi'_x \tag{62}$$

$$\Theta_x = \frac{\mathfrak{M}_x l}{GJ_0} \tag{63}$$

Les équations (53) et (54) nous donnent un autre système d'équations simultanées à différences finies. En résolvant ces équations par rapport à M_x et M'_x nous aurons:

$$M_x = \mathfrak{M}_{x+1} \cdot \frac{1}{\sin\beta} - \mathfrak{M}_x \operatorname{ctg}\beta \tag{64}$$

$$M'_x = \mathfrak{M}_x \operatorname{ctg}\beta - \mathfrak{M}_{x-1} \cdot \frac{1}{\sin\beta} \tag{65}$$

En introduisant les expressions (64) et (65) dans les expressions (61) et (62) on a:

$$\varphi_x = \mathfrak{M}_{x+1} \cdot \frac{2f}{\sin\beta} - \mathfrak{M}_x \cdot 2f \operatorname{ctg}\beta - \mathfrak{M}_{x-1} \frac{f}{\sin\beta} + \psi_x \tag{66}$$

$$\varphi'_x = \mathfrak{M}_{x+1} \cdot \frac{f}{\sin\beta} + \mathfrak{M}_x f \operatorname{ctg}\beta - \mathfrak{M}_{x-1} \cdot \frac{2f}{\sin\beta} + \psi'_x \tag{67}$$

En substituant les expressions (66) et (67) dans l'équation (58), nous parvenons à l'équation suivante à différences finies par rapport au moment de torsion $\mathfrak{M}_x$:

$$\mathfrak{M}_{x+2} + 2\cos\beta \cdot \mathfrak{M}_{x+1} - 6\,\mathfrak{M}_x + 2\cos\beta \cdot \mathfrak{M}_{x-1} + \mathfrak{M}_{x-2} = Q_x \tag{68}$$

où

$$Q_x = \frac{\sin\beta}{f}\left[-\psi_x \cos\beta + \psi_{x-1} + \psi'_x \cos\beta - \psi'_{x+1}\right] \tag{69}$$

Pour trouver la solution:

$$\mathfrak{M}_x = z_x^0 + z_x \tag{70}$$

de l'équation (68) nous résolvons d'abord l'équation sans second membre:

$$\mathfrak{M}_{x+2} + 2\cos\beta\,\mathfrak{M}_{x+1} - 6\,\mathfrak{M}_x + 2\cos\beta \cdot \mathfrak{M}_{x-1} + \mathfrak{M}_{x+2} = 0 \tag{71}$$

L'équation caractéristique prend alors la forme:

$$2\,\mathrm{Ch}\,2\alpha + 4\,\mathrm{Ch}\,\alpha\cos\beta - 6 = 0 \tag{72}$$

d'où

$$\mathrm{Ch}\,\alpha = -\frac{\cos\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{4} + 2} \tag{73}$$

$$\alpha = \alpha_1 \qquad \alpha = -\alpha_1 \qquad \alpha = \alpha_2 - i\pi \qquad \alpha = -(\alpha_2 - i\pi) \tag{74}$$

étant un nombre entier arbitraire.

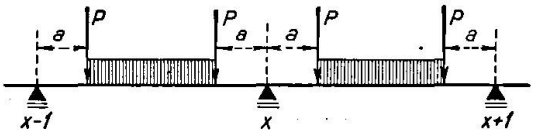

Fig. 6.

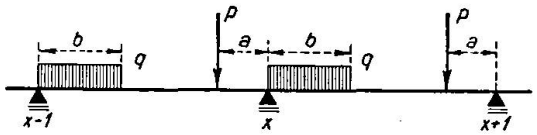

Fig. 7.

Comme

$$e^{\alpha_2 - i\pi} = e^{\alpha_2} \tag{75}$$

nous trouverons les racines suivantes de l'équation (72):

$$\alpha = \alpha_1 \qquad \alpha = -\alpha_1 \qquad \alpha = \alpha_2 \qquad \alpha = -\alpha_2 \tag{76}$$

On obtiendra donc la solution générale de l'équation (71) sous la forme:

$$z_x = C_1 e^{x\alpha_1} + C_2 e^{-x\alpha_2} + C_3 e^{x\alpha_2} + C_4 e^{-x\alpha_2} \tag{77}$$

C_1 C_2 C_3 C_4 désignant des constantes arbitraires.

La forme du membre Q_x dépend de la charge des travées particulières de la poutre à axe brisé.

Quand toutes les travées de la poutre continue sont chargées de la même manière et quand la charge de chaque travée est symétrique par rapport au milieu de cette travée, on a: $\psi_x = \psi_{x-1} = \psi'_x = \psi'_{x+1}$ et alors $Q_x = 0$ (fig. 6).

Si dans le cas précédent la charge n'est pas symétrique au milieu d'une travée, on a: $Q_x = a$, a étant indépendant de x.

Dans le cas d'une charge continue, variant d'après la loi d'une droite, nous avons aussi $Q_x = a$.

Quand la charge change d'après la loi

$$S_{x-1,x} = \frac{ql}{2}x + ql\frac{(x-1)x}{2} \tag{78}$$

on trouve:

$$Q_x = ax + b$$

a et b désignant des constantes.

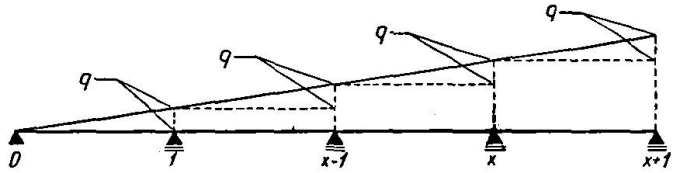

Fig. 8.

Nous mettons alors l'équation (68) sous la forme:

$$\mathfrak{M}_{x+2} + 2\cos\beta \cdot \mathfrak{M}_{x+1} - 6\,\mathfrak{M}_x + 2\cos\beta \cdot \mathfrak{M}_{x-1} + \mathfrak{M}_{x-2} = ax + b \tag{79}$$

Pour trouver une certaine solution particulière z^0_x de cette équation, nous posons:

$$\mathfrak{M}_x = z^0_x = Ax + B \tag{80}$$

A et B étant des constantes inconnues.

En introduisant l'expression (80) dans l'équation (79) on obtiendra:

$$A(x+2) + B + A(x+1)\cdot 2\cos\beta + B\cdot 2\cos\beta - 6Ax - 6B + \\ + A(x-1)\cdot 2\cos\beta + B\cdot 2\cos\beta + A(x-2) + B = ax + b \tag{81}$$

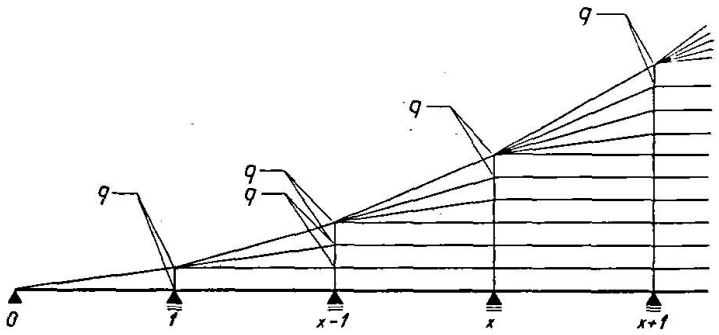

Fig. 9.

On détermine les constantes A et B en égalant les coefficients de x dans le premier membre de l'équation (81) au coefficient de x dans le second membre de la même équation. On trouve donc:

$$z^0_x = -\frac{a+b}{8\sin^2\frac{\beta}{2}} \tag{82}$$

La solution générale (70) de l'équation (68) contient quatre constantes arbitraires. Nous déterminons ces constantes en tenant compte des conditions de l'appui des extrémités de la poutre continue.

Après avoir déterminé les moments de torsion $\mathfrak{M}_x$ nous pouvons calculer les moments de flexion M_x et M'_x en faisant usage des formules (64) et (65).

Résumé.

Nous appelons équations simultanées à différences finies un système d'équation (1). Dans le présent ouvrage nous étudions l'application de ces équations à la solution du problème des poutres à axe brisé.

On appelle poutre à axe brisé une poutre dont l'axe longitudinal est une ligne brisée plane et qui est chargée dans la direction perpendiculaire au plan de cet axe (fig. 1). Les relations (2)—(3) représente les équations fondamentaux du problème. En les considérant comme équations simultanées à différences finies, nous parvenons à l'équation (19), où $\bar{\varphi}_x$ désigne l'angle d'inclinaison du plan de la section transversale mené par le noeud x et normal à l'axe du panneau $x-1$, x par rapport au plan vertical. Les angles $\bar{\varphi}_x$ déterminés: nous pouvons les appliquer au calcul des déplacements v de la poutre.

Si l'angle de brisure β de la poutre est une fonction de x, nous avons affaire à des équations à différences finies à coefficients variables. Cela nous amène à des équations (38), (41) et (42).

Une poutre continue à axe brisé est représentée sur les figures 3 a et 3 b. Les équations fondamentaux de cette poutre ont la forme des relations (51)—(55). Ces équations simultanées à différences finies nous amène à l'équation (68), où $\mathfrak{M}_x$ désigne le moment de torsion de la travée $x-1$, x. Après avoir déterminé les moments $\mathfrak{M}_x$ nous pouvons calculer les moments de flexion de la poutre continue en faisant usage des formules (64) et (65).

Zusammenfassung.

Wir nennen ein Gleichungssystem (1) simultane Differenzen-Gleichungen.

Im vorliegenden Aufsatz untersuchen wir die Anwendung dieser Gleichungen auf das Problem des Balkens mit geknickter Achse.

Als Balken mit geknickter Achse wird ein Balken bezeichnet, dessen Längsachse eine gebrochene ebene Linie ist und der senkrecht zu seiner Achsenebene belastet ist (Fig. 1). Die Gleichungen (2) und (3) stellen die Grundgleichungen des Problems dar. Wenn sie als simultane Differenzengleichungen betrachtet werden, erhalten wir die Gleichung (19); $\bar{\varphi}_x$ bedeutet den Neigungswinkel der Querschnittebene durch den Knoten x, die senkrecht zur Vertikalebene durch den Abschnitt $x-1, x$ steht. Nachdem diese Winkel bestimmt sind, können sie auf die Verschiebungen v des Balkens angewendet werden. Wenn die Brechwinkel β des Balkens von x abhängen, haben wir es mit Differenzengleichungen mit veränderlichen Beiwerten zu tun. Das ergibt die Gleichungen (38), (41) und (42).

Ein durchlaufender geknickter Balken ist in den Fig. 3 a und 3 b dargestellt. Die Grundgleichungen dieses Trägers haben die Form der Beziehungen (51)—(55). Dadurch erhalten wir die Gleichung (68), wo $\mathfrak{M}_x$ das Torsionsmoment der Öffnung $x-1, x$ bedeutet. Nach Bestimmung der letztern können wir die Biegemomente des Durchlaufbalkens mit Hilfe der Formeln (64) und (65) berechnen.

Summary.

A system of equation of the form (1) is called an equation system of simultaneous finite differences.

The report shows an application of these equations to the problem of a beam with a broken line axis.

A beam with broken axis is one in which the axis follows a broken line and which is subjected to loads acting in the plane of the axis (Fig. 1). The

équations (2) and (3) form the basic equations of the problem. If these equations are applied as equations of differences they take the form of the equations (19). The angle $\bar{\varphi}_x$ represents the angle of inclination of the cross sectional plane through x, which stands at right angles to the perpendicular plane passing through the section $x - 1$, x. After these angles are determined they can be used to calculate the displacements v of the beam. If the angle at the breaking point β is dependent on x, then the equations of differences contain coefficients of variable value. This is expressed by the equations (38), (41) and (42).

A continuous beam with broken axis is shown in Figs. 3 a and 3 b. The fundamental equations for this beam have the same form as equations (51) to (55), from which we derive equation (68) where $\mathfrak{M}_x$ represents a torsion moment for opening $x - 1$, x. After determination of $\mathfrak{M}_x$ the bending moments of the continuous beam can be calculated by employing the equations (64) and (65).

Leere Seite
Blank page
Page vide