Théorie exacte des enveloppes cylindriques épaisses

Autor(en): **Bažant, ZD.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **4 (1936)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5077

THÉORIE EXACTE DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES ÉPAISSES.

GENAUE BERECHNUNG VON DICKWANDIGEN ROHREN.

EXACT THEORY OF THICK CYLINDRICAL SHELLS.

Prof. Dr. ZD. BAŽANT, Prague.

Pour le calcul des enveloppes cylindriques é p a i s s e s, les méthodes approximatives de la résistance des matériaux sont parfois insuffisantes. On doit alors appliquer la théorie de l'élasticité. Les solutions exactes pour quelques cas simples sont connues.

La théorie exacte est basée sur les équations d'équilibre et de déformation d'un élément infiniment petit (fig. 1), pris dans l'e n v e l o p p e c y l i n d r i q u e c i r c u l a i r e et limité par: deux plans radiaux formant un angle $d\varphi$, deux plans perpendiculaires à l'axe du cylindre X et distantes de dx, et deux surfaces cylindriques à axe X, avec des rayons r et $r+dr$. Les dimensions de l'élément sont dx, dr et $ds = r\,d\varphi$. Les points dans l'intérieur de l'enveloppe sont déterminés par des c o o r d o n n é e s c y l i n d r i q u e s x, r, φ; l'angle φ est mesuré de l'axe Y dans un plan perpendiculaire à l'axe X. L'élément est sollicité par des forces intérieures, positives dans la direction de l'axe parallèle positif (négatif), si elles remplacent la matière située au côté positif (négatif) de l'axe perpendiculaire à la surface envisagée de l'élément.

Le plan radial $add'a'$ est sollicité par un effort normal n_s et deux efforts tangentiels t_{sr}, t_{sx}. Le plan $bcc'b'$ est sollicité par des efforts qui diffèrent des précédents par les différentielles partielles par rapport à l'angle φ; ce sont les efforts

$$n_s' = n_s + \frac{\partial n_s}{\partial \varphi} d\varphi, \quad t_{sr}' = t_{sr} + \frac{\partial t_{sr}}{\partial \varphi} d\varphi, \quad t_{sx}' = t_{sx} + \frac{\partial t_{sx}}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Le plan $abcd$ est sollicité par l'effort normal n_x et les efforts tangentiels t_{xr}, t_{xs}; pour le plan $a'b'c'd'$ on a les efforts

$$n_x' = n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx, \quad t_{xr}' = t_{xr} + \frac{\partial t_{xr}}{\partial x} dx, \quad t_{xs}' = t_{xs} + \frac{\partial t_{xs}}{\partial x} dx.$$

La surface cylindrique $abb'a'$ de rayon r est sollicitée par l'effort normal n_r et les efforts tangentiels t_{rs}, t_{rx}; pour la surface $cdd'c'$ de rayon $r+dr$ on a les efforts

$$n_r' = n_r + \frac{\partial n_r}{\partial r} dr, \quad t_{rs}' = t_{rs} + \frac{\partial t_{rs}}{\partial r} dr, \quad t_{rx}' = t_{rx} + \frac{\partial t_{rx}}{\partial r} dr.$$

Au centre de gravité de l'élément on a en général trois composantes de la force extérieure (poids propre de l'élément): $\mathfrak{x}\, dr\, ds\, dx$ dans la direction X, $\mathfrak{r}\, dr\, ds\, dx$ dans la direction du rayon et $\mathfrak{s}\, dr\, ds\, dx$ perpendiculairement au rayon; $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ sont les forces extérieures pour unité de volume.

Les efforts n, t sont égaux aux tensions ν, τ multipliées par l'aire de la surface de l'élément d'après les équations:

$$n_x = \nu_x\, dr\, ds = \nu_x r\, dr\, d\varphi\,, \quad n_r = \nu_r\, ds\, dx = \nu_r r\, d\varphi\, dx\,, \quad n_s = \nu_s\, dr\, dx\,;$$
$$t_{xs} = \tau_{xs}\, dr\, ds = \tau_{xs} r\, dr\, d\varphi\,, \quad t_{xr} = \tau_{xr}\, dr\, ds = \tau_{xr} r\, dr\, d\varphi\,, \quad t_{rx} = \tau_{rx}\, ds\, dx = \tau_{rx} r\, d\varphi\, dx,$$
$$t_{rs} = \tau_{rs}\, ds\, dx = \tau_{rs} r\, d\varphi\, dx\,, \quad t_{sx} = \tau_{sx}\, dr\, dx\,, \qquad t_{sr} = \tau_{sr}\, dr\, dx\,.$$

Les dérivées partielles ont alors des valeurs:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} = \frac{\partial \nu_x}{\partial x} r\, dr\, d\varphi\,, \quad \frac{\partial n_r}{\partial r} = \frac{\partial (r \nu_r)}{\partial r} d\varphi\, dx\,, \quad \frac{\partial n_s}{\partial \varphi} = \frac{\partial \nu_s}{\partial \varphi} dr\, dx\,;$$

$$\frac{\partial t_{xs}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} r\, dr\, d\varphi\,, \quad \frac{\partial t_{xr}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} r\, dr\, d\varphi\,, \quad \frac{\partial t_{rx}}{\partial r} = \frac{\partial (r \tau_{rx})}{\partial r} d\varphi\, dx\,,$$

$$\frac{\partial t_{rs}}{\partial r} = \frac{\partial (r \tau_{rs})}{\partial r} d\varphi\, dx\,, \quad \frac{\partial t_{sx}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau_{sx}}{\partial \varphi} dr\, dx\,, \quad \frac{\partial t_{sr}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial \varphi} dr\, dx\,.$$

Appliquons d'abord les équations des moments provenant de l'équilibre des forces sollicitant l'élément. Par rapport à l'axe parallèle à X et passant par le centre de gravité de l'élément, c'est-à-dire par la ligne d'action des forces n_x, $\mathfrak{x}$, n'_x, seulement les efforts t_{sr}, t'_{sr}, t_{rs}, t'_{rs} provoquent des moments et l'on a

$$t_{rs}\, dr - t_{sr}\, ds = 0,$$

en négligeant les moments des forces $\frac{\partial t_{rs}}{\partial r} dr$ et $\frac{\partial t_{sr}}{\partial \varphi} d\varphi$, qui sont par rapport aux précédentes infiniment petites d'ordre supérieur. En substituant pour t_{rs}, t_{sr} leurs valeurs, on obtient

$$\tau_{rs}\, r\, d\varphi\, dx \cdot dr - \tau_{sr}\, dr\, dx \cdot r\, d\varphi = 0\,,$$

d'où

$$\tau_{rs} = \tau_{sr}.$$

D'une manière analogue les deux autres équations des moments (par rapport aux axes passant par les lignes d'action $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{r}$) donnent

$$\tau_{xr} = \tau_{rx}\,, \qquad \tau_{xs} = \tau_{sx}\,.$$

Les tensions tangentielles suivent alors les mêmes relations que dans le cas de coordonnées rectangulaires.

Les trois autres conditions d'équilibre concernent les sommes des composantes dans les directions de trois axes [1]). Les composantes dans la direction X donnent la somme

$$n'_x - n_x + t'_{rx} - t_{rx} + t'_{sx} - t_{sx} + \mathfrak{x}\, dr\, ds\, dx = 0$$

ou

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} dx + \frac{\partial t_{rx}}{\partial r} dr + \frac{\partial t_{sx}}{\partial \varphi} d\varphi + \mathfrak{x}\, dr\, ds\, dx = 0\,.$$

Substituant les valeurs des dérivées partielles de n et t, on a

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial x} r\, dr\, d\varphi\, dx + \frac{\partial (r \tau_{rx})}{\partial r} dr\, d\varphi\, dx + \frac{\partial \tau_{sx}}{\partial \varphi} dr\, d\varphi\, dx + \mathfrak{x}\, r\, dr\, d\varphi\, dx = 0$$

ou

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rx})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{sx}}{\partial \varphi} + \mathfrak{x} = 0\,. \qquad (1)$$

---

[1]) V. *A. E. H. Love*, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" (4. éd., Cambridge 1927), p. 90.

La somme des composantes dans la direction de l'axe perpendiculaire à X et bissectrice de l'angle $d\varphi$ est

$$n_r' - n_r + t_{xr}' - t_{xr} + (t_{sr}' - t_{sr}) \cos\frac{d\varphi}{2} - (n_s' + n_s) \sin\frac{d\varphi}{2} + \mathfrak{r}\, dr\, ds\, dx = 0.$$

Pour l'angle $d\varphi$ infiniment petit on a $\cos\frac{d\varphi}{2} = 1$, $\sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$. En négligeant la valeur infiniment petite d'ordre supérieur, on obtient $n_s + n'_s = 2 n_s$. La dernière équation donne alors

$$\frac{\partial n_r}{\partial r} dr + \frac{\partial t_{xr}}{\partial x} dx + \frac{\partial t_{sr}}{d\varphi} d\varphi - n_s\, d\varphi + \mathfrak{r}\, dr\, ds\, dx = 0.$$

Substituons les valeurs déjà citées des dérivées partielles et de n_s; nous parvenons à l'équation

$$\frac{\partial (r \nu_r)}{\partial r} dr\, d\varphi\, dx + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} r\, dr\, d\varphi\, dx + \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial \varphi} dr\, d\varphi\, dx - \nu_s\, dr\, d\varphi\, dx + \mathfrak{r}\, r\, dr\, d\varphi\, dx = 0$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \nu_r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial \varphi} - \frac{\nu_s}{r} + \mathfrak{r} = 0. \tag{2}$$

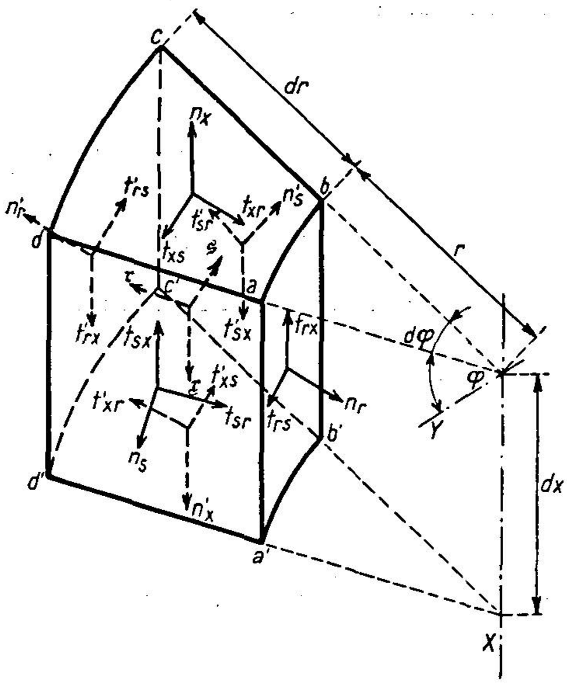

Fig. 1.

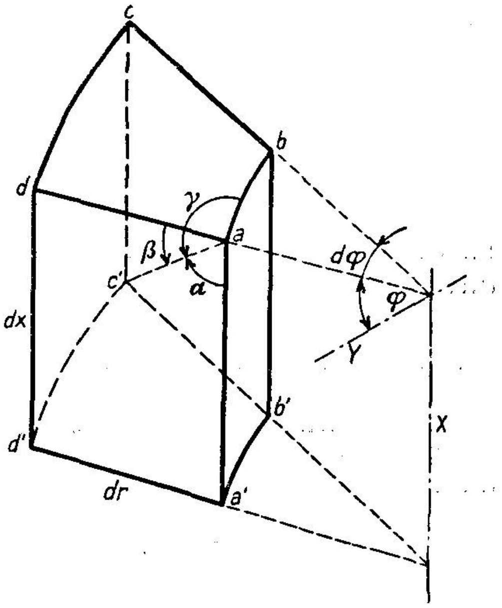

Fig. 2.

La somme des composantes dans la direction perpendiculaire aux deux directions précédentes donne enfin

$$(n_s' - n_s) \cos\frac{d\varphi}{2} + (t_{sr}' + t_{sr}) \sin\frac{d\varphi}{2} + t_{xs}' - t_{xs} + t_{rs}' - t_{rs} + \mathfrak{s}\, dr\, ds\, dx = 0.$$

On en déduit comme auparavant

$$\frac{\partial n_s}{\partial \varphi} d\varphi + t_{sr}\, d\varphi + \frac{\partial t_{xs}}{\partial x} dx + \frac{\partial t_{rs}}{\partial r} dr + \mathfrak{s}\, dr\, ds\, dx = 0$$

et de là

$$\frac{\partial \nu_s}{\partial \varphi} dr\,d\varphi\,dx + \tau_{sr}\,dr\,d\varphi\,dx + \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} r\,dr\,d\varphi\,dx + \frac{\partial (r\tau_{rs})}{\partial r} dr\,d\varphi\,dx + \mathfrak{s}\,r\,dr\,d\varphi\,dx = 0.$$

Parce que l'on a

$$\tau_{rs} = \tau_{sr} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (r\tau_{rs})}{\partial r} = r\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial r} + \tau_{rs},$$

on obtient l'équation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \nu_s}{\partial \varphi} + 2\frac{\tau_{rs}}{r} + \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} + \mathfrak{s} = 0. \tag{3}$$

Considérons maintenant la déformation de l'élément. On obtient les dilatations et les glissements dans les coordonnées cylindriques, en considérant les sommets $a\,(x, r, \varphi)$ et $c'\,(x + dx, r + dr, \varphi + d\varphi)$ de l'élément (fig. 2). Pour la diagonale $ac' = du$ on a

$$du^2 = dr^2 + (r\,d\varphi)^2 + dx^2.$$

La déformation change toutes les valeurs des quantités très petites. La relation pour les variations des valeurs se déduit de la dernière équation, en différenciant et substituant le signe Δ à d:

$$du \cdot \Delta\,du = dr \cdot \Delta\,dr + r\,d\varphi\,(\Delta r \cdot d\varphi + r \cdot \Delta\,d\varphi) + dx \cdot \Delta\,dx.$$

Désignons $\Delta x = \xi$, $\Delta r = \varrho$ et par σ le changement de l'arc $s = r\varphi$; alors $\Delta\varphi = \frac{\sigma}{r}$. On a

$$\Delta\,dx = d\Delta x = d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial r}dr + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \xi}{\partial x}dx, \quad \Delta\,dr = d\Delta r = d\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial r}dr + \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \varrho}{\partial x}dx,$$

$$\Delta\,d\varphi = d\Delta\varphi = d\left(\frac{\sigma}{r}\right) = \frac{d\sigma}{r} - \frac{\sigma}{r^2}dr, \quad d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r}dr + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial x}dx.$$

La variation $\Delta\,du$ peut être exprimée à l'aide de la dilatation relative λ dans la direction ac':

$$\Delta\,du = \lambda\,du.$$

En substituant dans l'équation $du.\ \Delta\,du$ on obtient:

$$\lambda\,du^2 = dr\,d\varrho + r\,d\varphi\left(\varrho\,d\varphi + d\sigma - \frac{\sigma}{r}dr\right) + dx\,d\xi,$$

d'où

$$\lambda = \frac{dr}{du}\cdot\frac{d\varrho}{du} + r\varrho\frac{d\varphi^2}{du^2} + r^2\frac{d\varphi}{du}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{d\sigma}{du} - \frac{\sigma}{r^2}\cdot\frac{dr}{du}\right) + \frac{dx}{du}\cdot\frac{d\xi}{du}.$$

La droite ac' forme avec les normales aux surfaces, données par les équations $x =$ const. (plan perpendiculaire à X), $r =$ const. (surface cylindrique) et $\varphi =$ const. (plan radial), les angles α, β, γ, pour lesquels on a

$$\frac{dx}{du} = \cos\alpha, \quad \frac{dr}{du} = \cos\beta, \quad \frac{ds}{du} = \cos\gamma.$$

En remplaçant $d\varrho$, $d\sigma$, $d\xi$ par leurs valeurs, développées par rapport aux dérivées des coordonnées, dans l'équation de λ, on trouve

$$\lambda = \frac{dr}{du}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{dr}{du} + \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{du}\right) + r\varrho\frac{d\varphi^2}{du^2} +$$

$$+ r^2\frac{d\varphi}{du}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{dr}{du} + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{du}\right) - \frac{\sigma}{r^2}\frac{dr}{du}\right] + \frac{dx}{du}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{dr}{du} + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{du}\right).$$

On en déduit facilement

$$\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial \varrho}{\partial r}\cos^2\beta + \frac{1}{r}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta +$$
$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\gamma + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r}\right)\cos\beta\cos\gamma.$$

Le coefficient[2]) de $\cos^2\alpha$ ($\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$) représente la dilatation relative λ_x (λ_r, λ_s) et le coefficient de $\cos\alpha\cos\beta$ ($\cos\alpha\cos\gamma$, $\cos\beta\cos\gamma$) le glissement γ_{xr} (γ_{xs}, γ_{rs}). On a alors:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \lambda_r = \frac{\partial \varrho}{\partial r}, \quad \lambda_s = \frac{1}{r}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right); \\ \gamma_{xr} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad \gamma_{xs} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \gamma_{rs} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Il s'agit ici du problème général d'élasticité en espace, pour lequel on a les relations

$$\lambda_x = \frac{1}{E}\left(\nu_x - \frac{\nu_r + \nu_s}{m}\right), \quad \lambda_r = \frac{1}{E}\left(\nu_r - \frac{\nu_s + \nu_x}{m}\right), \quad \lambda_s = \frac{1}{E}\left(\nu_s - \frac{\nu_x + \nu_r}{m}\right).$$

E est le module d'élasticité, m le coefficient de Poisson. De là on déduit les équations:

$$\left.\begin{aligned} \nu_x &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}[(m-1)\lambda_x + \lambda_r + \lambda_s], \quad \nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}[\lambda_x + (m-1)\lambda_r + \lambda_s], \\ \nu_s &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}[\lambda_x + \lambda_r + (m-1)\lambda_s]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les tensions τ et les glissements γ sont liés simplement par les relations

$$\tau_{xr} = G\gamma_{xr}, \quad \tau_{xs} = G\gamma_{xs}, \quad \tau_{rs} = G\gamma_{rs}. \tag{6}$$

En substituant λ, γ des équations (4) par leur valeur dans les relations (5), (6), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \nu_x &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)\right], \\ \nu_r &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + (m-1)\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)\right], \\ \nu_s &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{m-1}{r}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\tau_{xr} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right), \quad \tau_{xs} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right), \quad \tau_{rs} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r}\right). \tag{8}$$

Introduisons les valeurs des tensions dans les équations d'équilibre (1), (2), (3). Déduisons d'abord des relations (7), (8) les dérivées

$$\frac{\partial \nu_x}{\partial x} = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial x} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi\,\partial x}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} = \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial x}\right), \quad \frac{\partial \tau_{sx}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial \varphi} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi\,\partial x}\right);$$

[2]) V. le livre cité sous 1, p. 54.

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial r} = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x} + (m-1)\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r\,\partial \varphi}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau_{rs}}{\partial \varphi} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right);$$

$$\frac{\partial \nu_s}{\partial \varphi} = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi\,\partial x} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{m-1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \tau_{rs}}{\partial r} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2}\right),\quad \frac{\partial \tau_{xs}}{\partial x} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi\,\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right).$$

En substituant ces valeurs et le module de glissement $G = E\dfrac{m}{2(m+1)}$ dans les équations (1), (2), (3), on parvient pour les déformations ϱ, σ, ξ aux équations différentielles

$$2\left[(m-1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial x} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi\,\partial x}\right)\right] +$$
$$+(m-2)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi\,\partial x}\right) + \frac{2(m+1)(m-2)}{Em}\mathfrak{x} = 0, \quad (9)$$

$$2\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x} + (m-1)\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{m-1}{r^2}\left(\varrho + \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r\,\partial \varphi}\right] +$$
$$+(m-2)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}\right) + \frac{2(m+1)(m-2)}{Em}\mathfrak{r} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{2}{r}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi\,\partial x} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{m-1}{r}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi^2}\right)\right] +$$
$$+(m-2)\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\sigma}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi\,\partial x} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\right] + \frac{2(m+1)(m-2)}{Em}\mathfrak{s} = 0. \quad (11)$$

Les équations (9), (10), (11) déterminent en général les composantes de la déformation ϱ, σ, ξ desquelles on calcule les tensions ν, τ d'après les équations (5), (6). Pour six composantes des tensions on a seulement trois composantes de déformation comme inconnues.

La solution consisterait maintenant dans l'intégration des équations différentielles (9), (10), (11). Les constantes et les fonctions d'intégration sont déterminées par les conditions de surface et les conditions aux appuis.

Appliquons cette méthode générale dans quelques cas particuliers.

1. Enveloppe cylindrique circulaire épaisse,

illimitée dans le sens de l'axe et sollicitée par des pressions radiales uniformes à l'intérieur et à l'extérieur (fig. 3). Elle subit une déformation d'après la loi de similitude. Chaque plan perpendiculaire à l'axe X de l'enveloppe est un plan de symétrie de l'enveloppe et des forces extérieures; c'est donc un plan principal. De même, chaque plan radial est aussi un plan principal. Enfin les surfaces cylindriques à axe X sont des surfaces principales. Dans les trois, il n'y a ni glissement ni tension tangentielle, par conséquent

$$\gamma_{rx} = \gamma_{rs} = \gamma_{sx} = 0, \qquad \tau_{rs} = \tau_{rx} = \tau_{sx} = 0.$$

Si l'on prend en un endroit quelconque une partie de la même longueur, entre deux plans perpendiculaires à l'axe X, cette partie se trouve partout dans les mêmes conditions par rapport à l'enveloppe illimitée. Alors toutes les composantes des déformations et des tensions sont indépendantes de x. Ceci est vrai aussi pour φ, car il n'y a pas de différence entre divers plans radiaux, en ce qui concerne les tensions et les déformations. Par suite, toutes les dérivées partielles par rapport à x et φ disparaissent et il reste dans les équations seulement les dérivées par rapport à r.

Des équations (7), on obtient ici

$$\nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r}\right], \quad \nu_s = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial r} + (m-1)\frac{\varrho}{r}\right]. \quad (12)$$

En négligeant le poids propre ($\mathfrak{r} = 0$), l'équation (10) se simplifie en

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{\varrho}{r^2} = 0.$$

Les équations (9), (11) se réduisent en relations semblables pour ξ, σ, dont on n'a pas besoin.

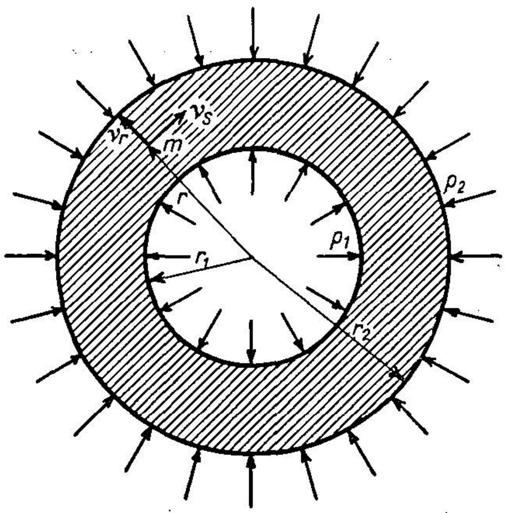

Fig. 3.

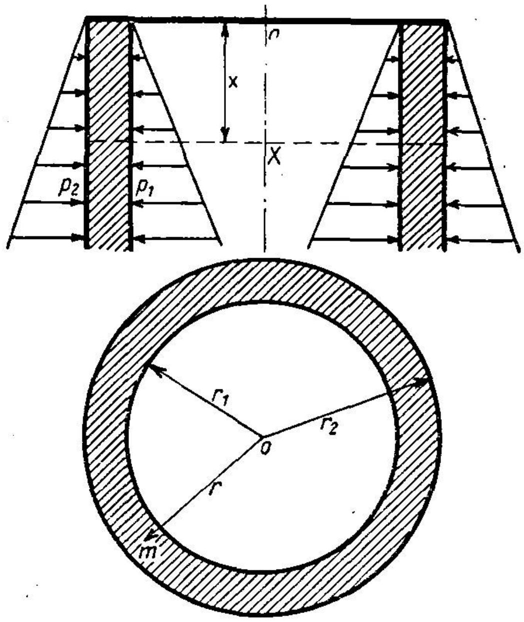

Fig. 4.

La dernière équation s'intègre facilement et donne la fonction

$$\varrho = C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

En substituant dans l'équation (12), on obtient

$$\nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m C_1 - (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right], \quad \nu_s = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m C_1 + (m-2)\frac{C_2}{r^2}\right]. \quad (13)$$

Pour déterminer les constantes d'intégration C_1, C_2, appliquons les conditions de surface. A la surface intérieure, il y a une pression radiale uniforme p_1 et alors pour $r = r_1$ la tension $\nu_r = -p_1$. A la surface extérieure, où $r = r_2$, la tension devient $\nu_r = -p_2$, parce qu'il y a ici une pression radiale uniforme p_2. Pour $r = r_1$ on obtient

$$\nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[m C_1 - (m-2)\frac{C_2}{r_1^2}\right] = -p_1,$$

et pour $r = r_2$

$$\nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[mC_1 - (m-2)\frac{C_2}{r_2^2}\right] = -p_2.$$

En résolvant les deux dernières équations par rapport à C_1 et C_2, on trouve

$$C_1 = \frac{(m+1)(m-2)}{Em^2} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad C_2 = \frac{m+1}{Em} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Les formules (13) donnent maintenant, en y substituant C_1 et C_2,

$$\nu_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}, \quad \nu_s = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}. \tag{14}$$

On est parvenu aux résultats connus, que l'on obtient usuellement de deux équations différentielles pour les tensions ν_r, ν_s. La déformation devient ici

$$\varrho = C_1 r + \frac{C_2}{r} = \frac{m+1}{Em^2 (r_2^2 - r_1^2)}\left[(m-2)(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2) r + m(p_1 - p_2)\frac{r_1^2 r_2^2}{r}\right]. \tag{15}$$

2. Enveloppe cylindrique circulaire épaisse d'un réservoir

à axe vertical X (fig. 4), sollicitée par des pressions radiales uniformément réparties sur le pourtour à l'intérieur et à l'extérieur et variables dans le sens de l'axe X. Elle se déforme de la même manière dans le sens de tous les rayons. Le profil horizontal circulaire du réservoir reste le même après la déformation. Chaque plan radial est un plan de symétrie de l'enveloppe et des forces extérieures; il est donc plan principal, où il n'y a pas de tensions tangentielles: $\tau_{sr} = \tau_{sx} = 0$. Ensuite, il n'y a pas de glissements dans les plans radiaux: $\gamma_{sr} = \gamma_{sx} = 0$. Tous les plans radiaux se comportent de la même façon; il n'y a donc pas de dépendance de l'angle φ et toutes les dérivées partielles par rapport à φ disparaissent. En négligeant aussi le poids propre, on obtient des équations (9) et (10)

$$2(m-1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (m-2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{m-2}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} + m\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r \partial x} + \frac{m}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial x} + 2(m-1)\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + (m-2)\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + 2\frac{m-1}{r}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - 2\frac{m-1}{r^2}\varrho = 0. \tag{17}$$

L'équation (11) fut déduite de l'équation (3) dont tous les membres disparaissent ici.

En déterminant ϱ et ξ, on aurait une solution complète pour le cas donné, car les tensions normales viennent des relations (7), en supprimant les dérivées par rapport à φ:

$$\left.\begin{aligned} \nu_x &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[(m-1)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r}\right], \quad \nu_r = \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + (m-1)\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r}\right], \\ \nu_s &= \frac{Em}{(m+1)(m-2)}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial r} + (m-1)\frac{\varrho}{r}\right], \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

et l'unique tension tangentielle est donnée par l'équation (8)

$$\tau_{xr} = \tau_{rx} = \tau = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x}\right). \tag{19}$$

Des équations (18) on peut calculer

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{-\nu_r - \nu_s + m\nu_x}{E m}, \tag{20a}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{m\nu_r - \nu_s - \nu_x}{E m}, \tag{20b}$$

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{-\nu_r + m\nu_s - \nu_x}{E m}. \tag{20c}$$

Ces formules donnent, comme il résulte des équations (4), les dilatations relatives

$$\lambda_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \lambda_r = \frac{\partial \varrho}{\partial r}, \qquad \lambda_s = \frac{\varrho}{r}.$$

On obtient les mêmes valeurs des dilatations en partant directement des tensions.

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre le cas donné.

a) En partant des déformations ϱ, ξ, on peut déduire de (16), (17) deux équations dont chacune contient seulement une inconnue [3]).

Eliminons d'abord des deux équations ξ. Dérivons la première par rapport à r et x:

$$2(m-1)\frac{\partial^4 \xi}{\partial r\,\partial x^3} + (m-2)\frac{\partial^4 \xi}{\partial r^3\,\partial x} + (m-2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2\,\partial x} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x}\right) + m\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^2\,\partial x^2} +$$

$$+ m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{16'}$$

L'équation (17) donne

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r\,\partial x} = -2\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} - \frac{m-2}{m}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} - 2\frac{m-1}{m r}\frac{\partial \varrho}{\partial r} + 2\frac{m-1}{m}\frac{\varrho}{r^2};$$

en dérivant par rapport à r, on obtient

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2\,\partial x} = -2\frac{m-1}{m}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r^3} - \frac{m-2}{m}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2} - 2\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right) + 2\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{2}{r^3}\varrho\right),$$

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial r^3\,\partial x} = -2\frac{m-1}{m}\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^4} - \frac{m-2}{m}\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^2\,\partial x^2} - 2\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial \varrho}{\partial r}\right) +$$

$$+ 2\frac{m-1}{m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} - \frac{4}{r^3}\frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{6}{r^4}\varrho\right),$$

et en dérivant deux fois par rapport à x

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial r\,\partial x^3} = -2\frac{m-1}{m}\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^2\,\partial x^2} - \frac{m-2}{m}\frac{\partial^4 \varrho}{\partial x^4} - 2\frac{m-1}{m r}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2} + 2\frac{m-1}{m r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}.$$

En introduisant toutes les dérivées de ξ dans (16'), on peut calculer

$$\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^4} + 2\frac{\partial^4 \varrho}{\partial r^2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 \varrho}{\partial x^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r^3} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2} - \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{3}{r^3}\frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{3}{r^4}\varrho = 0. \tag{21}$$

Pour éliminer ϱ de (16) et (17), dérivons (17) par rapport à x et multiplions par $\frac{m}{r}$:

---

[3]) V. aussi *A. Föppl-L. Föppl*, „Drang und Zwang, II" (1920), p. 167.

$$\frac{m^2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r\,\partial x^2}+2\frac{(m-1)m}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^2\,\partial x}+\frac{(m-2)m}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial x^3}+2\frac{(m-1)m}{r^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r\,\partial x}-2\frac{(m-1)m}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0.$$

Dérivons ensuite (17) par rapport à x et r et multiplions par m, pour obtenir

$$m^2\frac{\partial^4\xi}{\partial r^2\,\partial x^2}+2(m-1)m\frac{\partial^4\varrho}{\partial r^3\,\partial x}+(m-2)m\frac{\partial^4\varrho}{\partial r\,\partial x^3}+2\frac{(m-1)m}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^2\,\partial x}-$$
$$-4\frac{(m-1)m}{r^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r\,\partial x}+4\frac{(m-1)m}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0.$$

En dérivant (16) deux fois par rapport à x et en multipliant par $(m-2)$, on a

$$2(m-1)(m-2)\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+(m-2)^2\frac{\partial^4\xi}{\partial r^2\,\partial x^2}+\frac{(m-2)^2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r\,\partial x^2}+m(m-2)\frac{\partial^4\varrho}{\partial r\,\partial x^3}+\frac{m(m-2)}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial x^3}=0.$$

Retranchons de la dernière équation les deux précédentes et divisons par $2(m-1)$; nous aurons

$$(m-2)\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}-2\frac{\partial^4\xi}{\partial r^2\,\partial x^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r\,\partial x^2}-m\frac{\partial^4\varrho}{\partial r^3\,\partial x}-2\frac{m}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^2\,\partial x}+\frac{m}{r^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r\,\partial x}-\frac{m}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial x}=0.$$

Dérivons (16) par rapport à r et divisons par r:

$$2\frac{m-1}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r\,\partial x^2}+\frac{m-2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}+\frac{m-2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)+\frac{m}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^2\,\partial x}+\frac{m}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r\,\partial x}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)=0.$$

Dérivons enfin (16) deux fois par rapport à r:

$$2(m-1)\frac{\partial^4\xi}{\partial r^2\,\partial x^2}+(m-2)\frac{\partial^4\xi}{\partial r^4}+(m-2)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)+m\frac{\partial^4\varrho}{\partial r^3\,\partial x}+$$
$$+m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3\varrho}{\partial r^2\,\partial x}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\varrho}{\partial r\,\partial x}+\frac{2}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)=0.$$

Faisant la somme des trois dernières équations, nous pouvons calculer:

$$\frac{\partial^4\xi}{\partial r^4}+2\frac{\partial^4\xi}{\partial r^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3\xi}{\partial r\,\partial x^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial\xi}{\partial r}=0. \quad (22)$$

On peut simplifier les équations (21), (22), en utilisant l'opérateur de Laplace dont la valeur en coordonnées cylindriques est

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Alors

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)=$$
$$=\frac{\partial^4}{\partial r^4}+2\frac{\partial^4}{\partial r^2\,\partial x^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}.$$

La comparaison montre que l'on peut écrire l'équation (21) plus simplement

$$\nabla^4\varrho-\frac{2}{r^2}\nabla^2\varrho+\frac{4}{r^3}\frac{\partial\varrho}{\partial r}-\frac{3}{r^4}\varrho=0. \quad (21')$$

et l'équation (22)

$$\nabla^4\xi=0. \quad (22')$$

En dérivant l'équation (22) par rapport à r, on obtient pour $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ une équation de la même forme que l'équation (21) pour ϱ. Parce que la dernière contient seulement $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^4 \varrho}{\partial x^4}$, alors ϱ peut être égal à $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ multiplié par une fonction linéaire de x.

Les équations (21') et (22') déterminent en général ϱ et ξ en fonctions de r et x. Les membres des expressions générales pour ϱ, ξ qui ne conviennent pas au cas donné, s'éliminent par les équations (16) et (17) qui représentent des conditions plus spéciales. Les relations (18) et (19) donnent alors les tensions v_r, v_s, v_x, τ. Les conditions de surface déterminent les constantes et les fonctions d'intégration. S'il n'y a pas de tensions au plan supérieur horizontal de l'enveloppe, on doit pour $x = 0$ avoir $v_r = v_s = v_x = \tau = 0$. La surface cylindrique intérieure (extérieure) étant sollicitée par une pression radiale, en général variable par rapport à la hauteur, p_1 (p_2), on a $v_r = -p_1$, $\tau = 0$ ($v_r = -p_2$, $\tau = 0$) pour $r = r_1$ ($r = r_2$).

b) On peut partir des tensions. Les équations d'équilibre (1) et (2) prennent ici la forme

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} - \frac{v_s}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{24}$$

De l'équation (20 c) on calcule

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} = \frac{1}{Em}\left[-\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + m\frac{\partial (r v_s)}{\partial r} - \frac{\partial (r v_x)}{\partial r}\right];$$

en comparant cette valeur avec (20 b), on déduit

$$m v_r - v_s - v_x = -r\frac{\partial v_r}{\partial r} - v_r + m\left(r\frac{\partial v_s}{\partial r} + v_s\right) - r\frac{\partial v_x}{\partial r} - v_x$$

ou

$$(m+1)(v_r - v_s) = r\left(m\frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_x}{\partial r}\right).$$

L'équation (24) donne

$$v_r - v_s = -r\frac{\partial v_r}{\partial r} - r\frac{\partial \tau}{\partial x}$$

et l'introduction de cette valeur dans l'équation précédente

$$m\frac{\partial v_r}{\partial r} + m\frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{\partial v_x}{\partial r} + (m+1)\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{25}$$

On peut éliminer v_s, v_x des équations (23), (24), (25). En dérivant la dernière par rapport à x, on obtient

$$m\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x} + m\frac{\partial^2 v_s}{\partial r\,\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial r\,\partial x} + (m+1)\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = 0.$$

De l'équation (23) on calcule, en dérivant par rapport à r,

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial r\,\partial x} = \frac{\tau}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2}$$

et l'équation (24) donne, en dérivant par rapport à x et r,

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial r\,\partial x} = r\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2\,\partial x} + 2\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x} + r\frac{\partial^3 \tau}{\partial r\,\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}.$$

L'introduction des deux dernières valeurs dans l'équation précédente mène à la relation:

$$mr\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2\,\partial x} + 3m\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x} + mr\frac{\partial^3 \tau}{\partial r\,\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} + (2m+1)\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{\tau}{r^2} = 0. \quad (26)$$

En choisissant par ex. la tension τ, on peut calculer v_x de l'équation (23), v_r de (26) et v_s de (24). Pour déterminer les constantes et les fonctions d'intégration, on a les conditions de surface. On ne peut pas choisir τ tout-à-fait arbitrairement, car τ doit satisfaire l'équation (19), si l'on y introduit, après avoir déterminé toutes les tensions, les déformations ϱ et ξ données par les relations (20).

On peut déduire une équation contenant la tension τ seule, en éliminant les autres inconnues des équations (19), (20), (23), (25) et (26). En dérivant par rapport à r et x, l'équation (19) donne

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial r\,\partial x} = G\left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2\,\partial x} + \frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2}\right).$$

De l'équation (20 a) on calcule, en dérivant deux fois par rapport à r,

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial r^2\,\partial x} = \frac{1}{Em}\left(-\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial r^2} + m\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}\right)$$

et de l'équation (20 b), en dérivant deux fois par rapport à x,

$$\frac{\partial^3 \varrho}{\partial r\,\partial x^2} = \frac{1}{Em}\left(m\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right).$$

En introduisant les valeurs des deux dernières relations dans l'équation précédente et en substituant $\frac{G}{Em} = \frac{1}{2(m+1)}$, on obtient

$$2(m+1)\frac{\partial^2 \tau}{\partial r\,\partial x} = -\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial r^2} + m\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + m\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}.$$

En dérivant cette équation par rapport à r et x, on a

$$-2(m+1)\frac{\partial^4 \tau}{\partial r^2\,\partial x^2} - \frac{\partial^4 v_r}{\partial r^3\,\partial x} - \frac{\partial^4 v_s}{\partial r^3\,\partial x} + m\frac{\partial^4 v_x}{\partial r^3\,\partial x} + m\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3} - \frac{\partial^4 v_s}{\partial r\,\partial x^3} - \frac{\partial^4 v_x}{\partial r\,\partial x^3} = 0. \quad \text{(a)}$$

L'équation (25) peut s'écrire

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_s}{\partial r} - \frac{1}{m}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{m+1}{m}\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0.$$

En dérivant par rapport à x et deux fois par rapport à r, on obtient

$$\frac{\partial^4 v_r}{\partial r^3\,\partial x} + \frac{\partial^4 v_s}{\partial r^3\,\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\partial^4 v_x}{\partial r^3\,\partial x} + \frac{m+1}{m}\frac{\partial^4 \tau}{\partial r^2\,\partial x^2} = 0 \quad \text{(b)}$$

et en dérivant la même équation trois fois par rapport à x,

$$\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3} + \frac{\partial^4 v_s}{\partial r\,\partial x^3} - \frac{1}{m}\frac{\partial^4 v_x}{\partial r\,\partial x^3} + \frac{m+1}{m}\frac{\partial^4 \tau}{\partial x^4} = 0. \quad \text{(c)}$$

La somme des équations (a), (b) et (c) donne après une transformation facile

$$(m-1)\frac{\partial^4 v_x}{\partial r^3\,\partial x}-(2m-1)\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}+m\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3}-\frac{\partial^4 v_x}{\partial r\,\partial x^3}+\frac{\partial^4\tau}{\partial x^4}=0. \qquad (d)$$

On peut écrire l'équation (23)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial\tau}{\partial r}-\frac{\tau}{r}$$

et l'on obtient, en dérivant,

$$\frac{\partial^4 v_x}{\partial r^3\,\partial x}=-\frac{\partial^4\tau}{\partial r^4}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\tau}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}-\frac{6}{r^3}\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{6}{r^4}\tau,$$

$$\frac{\partial^4 v_x}{\partial r\,\partial x^3}=-\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\tau}{\partial r\,\partial x^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}.$$

En substituant ces dérivées de v_x dans (d), on trouve

$$m\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3}=(m-1)\frac{\partial^4\tau}{\partial r^4}+2(m-1)\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}-\frac{\partial^4\tau}{\partial x^4}+\frac{m-1}{r}\frac{\partial^3\tau}{\partial r^3}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3\tau}{\partial r\,\partial x^2}-$$
$$-3\frac{m-1}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+6\frac{m-1}{r^3}\frac{\partial\tau}{\partial r}-6\frac{m-1}{r^4}\tau$$

et en dérivant par rapport à r,

$$m\frac{\partial^5 v_r}{\partial r^2\,\partial x^3}=(m-1)\frac{\partial^5\tau}{\partial r^5}+2(m-1)\frac{\partial^5\tau}{\partial r^3\,\partial x^2}-\frac{\partial^5\tau}{\partial r\,\partial x^4}+(m-1)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^4\tau}{\partial r^4}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\tau}{\partial r^3}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\tau}{\partial r\,\partial x^2}\right)-3(m-1)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\tau}{\partial r^3}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\tau}{\partial r\,\partial x^2}-$$
$$-\frac{2}{r^3}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+6(m-1)\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}-\frac{3}{r^4}\frac{\partial\tau}{\partial r}\right)-6(m-1)\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial\tau}{\partial r}-\frac{4}{r^5}\tau\right).$$

L'équation (26), dérivée deux fois par rapport à x, donne

$$mr\frac{\partial^5 v_r}{\partial r^2\,\partial x^3}+3m\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3}+mr\frac{\partial^5\tau}{\partial r\,\partial x^4}+\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}+(2m+1)\frac{\partial^4\tau}{\partial x^4}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\tau}{\partial r\,\partial x^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}=0.$$

En introduisant ici les valeurs déterminées de $m\frac{\partial^4 v_r}{\partial r\,\partial x^3}$ et $m\frac{\partial^5 v_r}{\partial r^2\,\partial x^3}$, on parvient à une équation contenant seulement τ que l'on peut modifier en:

$$\frac{\partial^5\tau}{\partial r^5}+2\frac{\partial^5\tau}{\partial r^3\,\partial x^2}+\frac{\partial^5\tau}{\partial r\,\partial x^4}+\frac{4}{r}\frac{\partial^4\tau}{\partial r^4}+\frac{6}{r}\frac{\partial^4\tau}{\partial r^2\,\partial x^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial^4\tau}{\partial x^4}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3\tau}{\partial r^3}+$$
$$+\frac{3}{r^3}\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}-\frac{6}{r^4}\frac{\partial\tau}{\partial r}+\frac{6}{r^5}\tau=0. \qquad (27)$$

La valeur la plus simple de τ, satisfaisant cette équation, est $\tau=0$. Déduisons une solution du problème de cette valeur.

L'équation (23) donne alors $\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$, ce qui prouve que v_x est indépendant de x. Parce que pour $x=0$ on doit avoir $v_x=0$, on a partout $v_x=0$.

L'équation (26) se simplifie en

$$mr\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2\,\partial x}+3m\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x}=0.$$

En posant $\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x} = y$, on a $\frac{\partial^3 v_r}{\partial r^2\,\partial x} = \frac{\partial y}{\partial r}$ et l'on peut écrire la dernière équation sous la forme

$$\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{3}{r} y = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$y = \frac{f_1(x)}{r^3},$$

$f_1(x)$ étant une fonction de x, cependant inconnue. On a alors

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial r\,\partial x} = \frac{f_1(x)}{r^3}.$$

En intégrant par rapport à r, on obtient

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = f_2(x) - \frac{f_1(x)}{2r^2}$$

et en intégrant de nouveau par rapport à x,

$$v_r = \int f_2(x)\,dx - \frac{1}{2r^2}\int f_1(x)\,dx.$$

On devrait ajouter encore une fonction de r inconnue. Mais pour $x = 0$ on a $v_r = 0$; alors cette fonction disparaît et

$$\int f_1(x)\,dx = X_1, \qquad \int f_2(x)\,dx = X_2$$

sont des fonctions de x qui ne contiennent pas de membres absolus. Avec cette notation, on peut écrire

$$v_r = X_2 - \frac{X_1}{2r^2}.$$

Les fonctions X_1, X_2 sont déterminées par les conditions à la surface intérieure et extérieure de l'enveloppe. Supposons à l'intérieur du réservoir un liquide du poids spécifique γ, dont le niveau coïncide avec le plan supérieur de l'enveloppe, ce qui donne à la profondeur x (fig. 4) une pression

$$p_1 = \gamma x.$$

Pour $r = r_1$ on doit avoir $v_r = -p_1$; cela mène à la condition

$$X_2 - \frac{X_1}{2r_1^2} = -\gamma x.$$

Si la surface extérieure est sans pression, on a alors $v_r = 0$ pour $r = r_2$ et il s'ensuit que:

$$X_2 - \frac{X_1}{2r_2^2} = 0.$$

La résolution des deux dernières équations donne

$$X_1 = \frac{2r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\gamma x, \qquad X_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\gamma x.$$

On a alors la tension

$$v_r = \frac{\gamma r_1^2 x}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right). \tag{28}$$

L'équation (24) donne

$$\nu_s = r\frac{\partial \nu_r}{\partial r} + \nu_r + r\frac{\partial \tau}{\partial x}.$$

En introduisant $\tau = 0$, ν_r de la formule (28) et sa dérivée

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial r} = \frac{\gamma r_1^2 x}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{2 r_2^2}{r^3},$$

on obtient

$$\nu_s = \frac{\gamma r_1^2 x}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right). \tag{29}$$

De l'équation (20 c) on calcule la déformation

$$\varrho = \frac{r}{Em}(-\nu_r + m\,\nu_s - \nu_x) = \frac{\gamma r_1^2 x}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[(m-1)r + (m+1)\frac{r_2^2}{r}\right]. \tag{30}$$

En dérivant cette équation par rapport à r, on parvient au même résultat que celui de l'équation (20 b). Enfin la relation (20 a) donne d'abord

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{Em}(-\nu_r - \nu_s + m\,\nu_x) = -\frac{2\gamma r_1^2 x}{Em(r_2^2 - r_1^2)}$$

et ensuite par intégration

$$\xi = -\frac{\gamma r_1^2 x^2}{Em(r_2^2 - r_1^2)} + f(r),$$

si l'on désigne par $f(r)$ une fonction de la variable r seule. Pour la déterminer, on peut appliquer la condition donnée pour τ par l'équation (19). Elle donne ici

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

et en substituant ξ:

$$f'(r) = -\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\gamma r_1^2}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[(m-1)r + (m+1)\frac{r_2^2}{r}\right].$$

En intégrant, on obtient

$$f(r) = -\frac{\gamma r_1^2}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[(m-1)\frac{r^2}{2} + (m+1)r_2^2 \ln r\right] + a;$$

a est une constante d'intégration. Alors

$$\xi = -\frac{\gamma r_1^2}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[x^2 + (m-1)\frac{r^2}{2} + (m+1)\,r_2^2 \ln r\right] + a. \tag{31}$$

Il reste une seule constante a que l'on peut déterminer de telle sorte qu'une seule condition à l'appui de l'enveloppe soit satisfaite: en un point du plan inférieur, entre l'enveloppe et le fond du réservoir, la déformation ξ peut être nulle. Autrement, ce cas n'est possible que si l'enveloppe est librement appuyée sur le fond et peut glisser dans la direction transversale. Les tensions tangentielles dans l'enveloppe sont alors éliminées et la sollicitation de l'enveloppe est la même que pour une enveloppe cylindrique épaisse illimitée, sollicitée par une pression radiale intérieure qui croît ici proportionnellement à la profondeur x. La solution de ce cas fut donnée pour la première fois par M. Nicholas[4]).

[4]) V. l'article „Equilibre d'une couche cylindrique ..." aux Annales des Ponts et Chaussées 1932—II, p. 411.

c) Enfin on peut exprimer toutes les inconnues par une seule fonction Φ. Pour les tensions normales on a[5]) les relations:

$$\nu_r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right), \tag{32a}$$

$$\nu_s = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2 \Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right), \tag{32b}$$

$$\nu_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(2 - \frac{1}{m}\right)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]. \tag{32c}$$

On tire de la formule (32a)

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right)$$

et de (32a) et (32b)

$$\nu_r - \nu_s = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right).$$

L'équation (24) donne

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\partial \nu_r}{\partial r} - \frac{\nu_r - \nu_s}{r} = -\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right);$$

en intégrant par rapport à x, on détermine

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{m}\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

En dérivant la valeur connue de l'opérateur ∇^2, on a

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

La formule de la tension τ peut être écrite simplement

$$\tau = \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]. \tag{33}$$

En introduisant ν_x, τ des relations (32c), (33) dans l'équation (23), on obtient pour Φ la condition

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(2-\frac{1}{m}\right)\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right] = 0$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\nabla^4 \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 \Phi) - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0.$$

Parce qu'il y a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\nabla^2 \Phi),$$

la condition pour Φ se réduit à

$$\nabla^4 \Phi = 0. \tag{43}$$

La substitution des valeurs de ν_r, ν_s, ν_x des relations (32) dans l'équation (20c) donne

[5]) V. le livre cité sous 1, p. 276.

$$Em\frac{\varrho}{r} = -\nu_r + m\nu_s - \nu_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\Phi - \frac{m}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(2-\frac{1}{m}\right)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right],$$

d'où l'on tire

$$Em\varrho = -r\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + r\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - m\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right).$$

En dérivant par rapport à r, on peut se persuader que la relation (20 b) donne le même résultat pour $\frac{\partial\varrho}{\partial r}$ ce qui confirme la justesse du choix des expressions pour toutes les tensions ν. En remplaçant $\nabla^2\Phi$ dans la dernière équation par sa valeur explicite, on obtient

$$Em\varrho = -(m+1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial x} \quad \text{ou} \quad \varrho = -\frac{m+1}{Em}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial x}. \tag{35}$$

L'équation (20 a) donne

$$Em\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\nu_r - \nu_s + m\nu_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(2m-1)\nabla^2\Phi - m\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(2m-1-\frac{2}{m}\right)\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - m\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(2m-1-\frac{2}{m}\right)\nabla^2\Phi + \nabla^2\Phi - (m+1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2\left(m-\frac{1}{m}\right)\nabla^2\Phi - (m+1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right] = (m+1)\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{m-1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right).$$

L'intégration par rapport à x donne

$$Em\xi = (m+1)\left(2\frac{m-1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)$$

ou

$$\xi = \frac{m+1}{Em}\left(2\frac{m-1}{m}\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right). \tag{36}$$

La relation (19) pour τ est un contrôle de l'exactitude de notre solution. En portant dans (19) les valeurs de ϱ et ξ données par les équations (35), (36) et $G = \frac{Em}{2(m+1)}$, on transforme aisément le résultat à la forme (33), ce qui est une nouvelle preuve de l'exactitude des relations (32) pour toutes les tensions ν.

L'équation (34) détermine en général la fonction Φ. Pour les composantes ϱ et ξ de la déformation, données par les relations (35), (36), on a aussi les équations (21), (22) qui représentent des conditions plus spéciales. Les équations (16), (17) qui sont les conditions les plus spéciales, peuvent servir à éliminer des membres de la fonction Φ qui ne conviennent pas au cas donné.

Cherchons une solution de la fonction Φ, donnée par l'équation (34), de la forme

$$\Phi = R_1 + X_1 + R_2 X_2, \tag{37}$$

où R_1, R_2 (X_1, X_2) est une fonction de la variable r (x) seule. On a ensuite

$$\frac{\partial^n\Phi}{\partial r^n} = R_1^{(n)} + R_2^{(n)}X_2, \qquad \frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} = X_1^{(n)} + R_2 X_2^{(n)},$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial r\, \partial x^2} = R_2' X_2'', \qquad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2\, \partial x^2} = R_2'' X_2''.$$

En substituant les dérivées dans l'expression explicite de $\nabla^4 \Phi$, on obtient après une transformation

$$\nabla^4 \Phi = R_1^{(4)} + \frac{2}{r} R_1''' - \frac{1}{r^2} R_1'' + \frac{1}{r^3} R_1' + X_1^{(4)} +$$
$$+ \left(R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' - \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2'\right) X_2 + R_2 X_2^{(4)} + 2\left(R_2'' + \frac{1}{r} R_2'\right) X_2'' = 0 \cdot \quad (38)$$

La dernière équation peut être satisfaite, si l'on pose $X_2^{(4)} = 0$, $X_2'' =$ const. $= 2a_1'$, $X_1^{(4)} =$ const. $= 24 a_2'$, $R_2'' + \frac{1}{r} R_2' =$ const. $= 4 a_3'$. En dérivant la dernière équation, nous aurons successivement

$$R_2''' + \frac{1}{r} R_2'' - \frac{1}{r^2} R_2' = 0.$$

$$R_2^{(4)} + \frac{1}{r} R_2''' - \frac{2}{r^2} R_2'' + \frac{2}{r^3} R_2' = 0.$$

Ajoutons la dernière équation à l'équation précédente, multipliée par $\frac{1}{r}$:

$$R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' - \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2' = 0.$$

En introduisant les valeurs déterminées dans l'équation (38), nous trouvons

$$R_1^{(4)} + \frac{2}{r} R_1''' - \frac{1}{r^2} R_1'' + \frac{1}{r^3} R_1' + 24 a_2' + 16 a_1' a_3' = 0.$$

Par l'intégration de cette équation, on parvient à l'intégrale générale

$$R_1 = -\frac{3a_2' + 2a_1' a_3'}{8} r^4 + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r + a_4 \ln r.$$

L'intégrale de l'équation $X_1^{(4)} = 24\, a_2'$ est

$$X_1 = a_2' x^4 + a_6 x^3 + a_7 x^2 + a_8 x.$$

On peut supprimer les membres absolus en R_1, X_1 parce que Φ paraît dans toutes les formules seulement en dérivations. De l'équation $X_2'' = 2a_1'$ il s'ensuit par intégration

$$X_2 = a_1' x^2 + a_4' x$$

et l'intégration de l'équation $R_2'' + \frac{1}{r} R_2' = 4a_3'$ donne en général

$$R_2 = a_3' r^2 + a_5' \ln r.$$

Encore ici on peut supprimer les membres absolus, car ils donneraient les membres déjà contenus en R_1, X_1.

En introduisant toutes les fonctions déterminées dans la formule (37), on obtient une solution de l'équation (34) sous forme de la fonction

$$\Phi_1 = -\frac{3a_2' + 2a_1' a_3'}{8} r^4 + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r + a_4 \ln r + a_2' x^4 + a_6 x^3 + a_7 x^2 + a_8 x +$$
$$+ (a_3' r^2 + a_5' \ln r)(a_1' x^2 + a_4' x)$$

ou

$$\Phi_1 = a_1 r^4 + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r + a_4 \ln r + a_5 x^4 + a_6 x^3 + a_7 x^2 + a_8 x + a_9 r^2 x^2 + \\ + a_{10} r^2 x + a_{11} x^2 \ln r + a_{12} x \ln r. \tag{39}$$

On peut satisfaire l'équation (38) aussi, en posant

$$X_1^{(4)} = \text{const.} = 24 a_2', \quad R_1^{(4)} + \frac{2}{r} R_1''' - \frac{1}{r^2} R_1'' + \frac{1}{r^3} R_1' + X_1^{(4)} = 0,$$

ce qui donne la valeur ci-dessus de X_1 et de R_1, sans le membre $a_1' a_3'$. Il reste alors dans l'équation (38) seulement les membres contenant R_2, X_2 et leurs dérivations. En divisant par X_2, on obtient

$$R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' + \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2' + R_2 \frac{X_2^{(4)}}{X_2} + 2\left(R_2'' + \frac{1}{r} R_2'\right) \frac{X_2''}{X_2} = 0. \tag{40}$$

On peut satisfaire cette dernière équation, en posant

$$\frac{X_2''}{X_2} = \text{const.} = (n\alpha)^2;$$

l'intégrale générale est

$$X_2 = b_n e^{n\alpha x} + c_n e^{-n\alpha x},$$

n désignant un nombre entier positif et α une constante. Ensuite on a

$$\frac{X_2^{(4)}}{X_2} = (n\alpha)^4$$

et l'équation (40) donne

$$R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' - \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2' + 2\left(R_2'' + \frac{1}{r} R_2'\right)(n\alpha)^2 + R_2 (n\alpha)^4 = 0. \tag{41}$$

L'intégrale de cette équation est la fonction cylindrique de Bessel de l'espèce 1 et de l'ordre 0 [6])

$$R_2 = J_0(n\alpha r) = 1 - \frac{(n\alpha r)^2}{2^2} + \frac{(n\alpha r)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{(n\alpha r)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots,$$

déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 J_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0}{dr} + (n\alpha)^2 J_0 = 0. \tag{42}$$

La dérivation successive de cette équation donne

$$\frac{d^3 J_0}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 J_0}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dJ_0}{dr} + (n\alpha)^2 \frac{dJ_0}{dr} = 0,$$

$$\frac{d^4 J_0}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 J_0}{dr^3} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 J_0}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \frac{dJ_0}{dr} + (n\alpha)^2 \frac{d^2 J_0}{dr^2} = 0.$$

En ajoutant à la dernière, l'équation précédente multipliée par $\frac{1}{r}$ et (42) multipliée par $(n\alpha)^2$, on arrive à une équation de la forme (41).

L'équation (41) est satisfaite aussi, comme on peut se persuader facilement de l'équation (42), par la fonction

$$R_2 = r \frac{dJ_0(n\alpha r)}{dr} = -\frac{(n\alpha r)^2}{2}\left(1 - \frac{(n\alpha r)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(n\alpha r)^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{(n\alpha r)^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \ldots\right),$$

ce qui est une fonction de Bessel de l'espèce 1 et de l'ordre 1.

---

[6]) V. S. *Timoshenko*, „Theory of Elasticity" (1934), p. 353.

La fonction

$$X_2 = f_n x\, e^{nax} + g_n x\, e^{-nax}$$

satisfait aussi l'équation (40). En dérivant X_2 et en introduisant dans l'équation (40), on obtient après une transformation l'équation

$$\left[R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' - \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2' + 2\left(R_2'' + \frac{1}{r} R_2'\right)(n\alpha)^2 + R_2 (n\alpha)^4\right] x (f_n e^{nax} + g_n e^{-nax}) +$$
$$+ 4 n \alpha \left[R_2'' + \frac{1}{r} R_2' + R_2 (n\alpha)^2\right] (f_n e^{nax} - g_n e^{-nax}) = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite pour toutes les valeurs de x, on doit avoir séparément

$$R_2'' + \frac{1}{r} R_2' + R_2 (n\alpha)^2 = 0,$$

$$R_2^{(4)} + \frac{2}{r} R_2''' - \frac{1}{r^2} R_2'' + \frac{1}{r^3} R_2' + 2\left(R_2'' + \frac{1}{r} R_2'\right)(n\alpha)^2 + R_2 (n\alpha)^4 = 0.$$

Les deux équations ont pour intégrale la fonction de Bessel

$$R_2 = J_0 (n\alpha r).$$

Les membres R_1, X_1 sont contenus déjà dans la fonction Φ_1. A part cela, Φ est donné par $R_2 X_2$, où l'on peut prendre pour n un nombre entier positif quelconque. L'équation (34) est satisfaite aussi par la série

$$\Phi_2 = \sum (b_n e^{nax} + c_n e^{-nax}) J_0 (n\alpha r) + \sum (d_n e^{nax} + e_n e^{-nax})\, r \frac{d J_0 (n\alpha r)}{dr} +$$
$$+ \sum (f_n e^{nax} + g_n e^{-nax})\, x J_0 (n\alpha r). \tag{43}$$

Enfin, les fonctions des deux variables[7]) de la forme

$$\Phi_3 = (r^2 + x^2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (r^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \Phi_4 = (r^2 + x^2)\, \Phi_3 \tag{44}$$

satisfont aussi l'équation (34), pourvu que n soit un nombre entier positif quelconque. Les fonctions Φ_3 pour $n = 1$ à 4 et Φ_4 pour $n = 1$, 2 sont contenues déjà dans Φ_1.

Si l'on posait précédemment

$$\frac{X_2''}{X_2} = -(n\alpha)^2,$$

on aurait l'intégrale

$$X_2 = b_n \sin(n\alpha x) + c_n \cos(n\alpha x)$$

et la fonction

$$R_2 = J_0 (i n \alpha r)$$

comme fonction de Bessel d'argument imaginaire. Les autres membres de Φ_2 seraient transformés de la même façon.

En choisissant pour Φ les diverses valeurs obtenues, on arrive aux solutions pour divers cas.

La fonction Φ_1, donnée par la relation (39), mène à une solution que l'on trouve ainsi: Calculons d'abord

---

[7]) V. le livre cité sous 1, p. 153.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 4 a_1 r^3 + 2 a_2 r + 2 a_3 r \ln r + a_3 r + \frac{a_4}{r} + 2 a_9 r x^2 + 2 a_{10} r x + a_{11} \frac{x^2}{r} + a_{12} \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = 12 a_1 r^2 + 2 a_2 + 2 a_3 \ln r + 3 a_3 - \frac{a_4}{r^2} + 2 a_9 x^2 + 2 a_{10} x - a_{11} \frac{x^2}{r^2} - a_{12} \frac{x}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 12 a_5 x^2 + 6 a_6 x + 2 a_7 + 2 a_9 r^2 + 2 a_{11} \ln r.$$

En substituant ces valeurs, on obtient

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 16 a_1 r^2 + 4 a_2 + 4 a_3 \ln r + 4 a_3 + 4 a_9 x^2 +$$

$$+ 4 a_{10} x + 12 a_5 x^2 + 6 a_6 x + 2 a_7 + 2 a_9 r^2 + 2 a_{11} \ln r.$$

Des équations (32) et (33) on tire les tensions

$$\nu_r = 4\left[\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_9 + \frac{6}{m} a_5\right] x + 2\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_{10} + \frac{6}{m} a_6 + 2 a_{11} \frac{x}{r^2} + \frac{a_{12}}{r^2},$$

$$\nu_s = 4\left[\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_9 + \frac{6}{m} a_5\right] x + 2\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_{10} + \frac{6}{m} a_6 - 2 a_{11} \frac{x}{r^2} - \frac{a_{12}}{r^2},$$

$$\nu_x = \frac{8}{m} [(2m - 1) a_9 + 3(m - 1) a_5] x + 4 \cdot \frac{2m - 1}{m} a_{10} + 6 \cdot \frac{m - 1}{m} a_6,$$

$$\tau = \frac{4}{m} [8(m - 1) a_1 - a_9] r + \frac{2}{m} [2(m - 1) a_3 - a_{11}] \frac{1}{r}.$$

Appliquons maintenant les conditions aux surfaces. Pour $x = 0$ on doit avoir $\tau = 0$, d'où il résulte que:

$$8(m - 1) a_1 - a_9 = 0 \tag{α}$$

et en même temps

$$2(m - 1) a_3 - a_{11} = 0. \tag{β}$$

Donc il y a partout

$$\tau = 0.$$

Pour $x = 0$ on doit avoir aussi $\nu_r = \nu_s = \nu_x = 0$; cela exige

$$\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_{10} + \frac{3}{m} a_6 = 0, \quad a_{12} = 0, \quad 2(2m - 1) a_{10} + 3(m - 1) a_6 = 0.$$

On en déduit

$$a_6 = 0, \quad a_{10} = 0.$$

On a d'autres conditions à la surface intérieure et extérieure de l'enveloppe. Envisageons une pression radiale intérieure et extérieure, uniformément repartie au pourtour, mais proportionnelle à la profondeur x (fig. 4), c'est-à-dire la pression d'un liquide (à l'intérieur) ou de terre (à l'extérieur). Pour $r = r_1$ on doit avoir $\nu_r = -p_1 = -\gamma_1 x$, ce qui donne la condition

$$4\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_9 + \frac{24}{m} a_5 + 2 \frac{a_{11}}{r_1^2} = -\gamma_1.$$

A la surface extérieure, on a $r = r_2$ et $\nu_r = -p_2 = -\gamma_2 x$, d'où l'on trouve

$$4\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_9 + \frac{24}{m} a_5 + 2 \frac{a_{11}}{r_2^2} = -\gamma_2.$$

Des deux dernières équations on obtient

$$a_{11} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

$$4\left(\frac{2}{m} - 1\right) a_9 + \frac{24}{m} a_5 = \frac{\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (\gamma)$$

Par les valeurs déterminées on trouve déjà

$$\nu_r = \left[\gamma_1 r_1^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) - \gamma_2 r_2^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)\right] \frac{x}{r_2^2 - r_1^2}, \qquad (45)$$

$$\nu_s = \left[\gamma_1 r_1^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) - \gamma_2 r_2^2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\right] \frac{x}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (46)$$

On peut déduire une autre condition pour les coefficients a de l'équation (34) qui donne ici

$$\nabla^4 \Phi_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \nabla^2 \Phi_1 = 64 a_1 + 24 a_5 + 16 a_9 = 0$$

ou

$$8 a_1 + 3 a_5 + 2 a_9 = 0. \qquad (\delta)$$

On trouve de (δ) et (α)

$$3(m-1) a_5 + (2m-1) a_9 = 0$$

et l'on a par conséquent partout

$$\nu_x = 0.$$

L'équation (β) donne

$$a_3 = \frac{a_{11}}{2(m-1)} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{4(m-1)} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

et de (α), (γ), (δ) on calcule

$$a_1 = -\frac{\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2}{32(m+1)(r_2^2 - r_1^2)}, \qquad a_5 = \frac{2m-1}{12(m+1)} \cdot \frac{\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

$$a_9 = -\frac{m-1}{4(m+1)} \cdot \frac{\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

En déterminant encore

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial x} = 4 a_9 r x + 2 a_{10} r + 2 a_{11} \frac{x}{r} + \frac{a_{12}}{r},$$

on trouve par substitution dans la relation (35)

$$\varrho = -\frac{m+1}{Em}\left(4 a_9 r x + 2 a_{10} r + 2 a_{11} \frac{x}{r} + \frac{a_{12}}{r}\right) =$$

$$= \frac{x}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[(m-1)(\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2) r + (m+1)(\gamma_1 - \gamma_2)\frac{r_1^2 r_2^2}{r}\right]. \qquad (47)$$

Enfin l'équation (36) donne ici

$$\xi = \frac{m+1}{Em}\left[2\frac{m-1}{m}(16 a_1 r^2 + 4 a_2 + 4 a_3 \ln r + 4 a_3 + 4 a_9 x^2 + 4 a_{10} x) + \right.$$

$$\left. + \frac{m-2}{m}(12 a_5 x^2 + 6 a_6 x + 2 a_7 + 2 a_9 r^2 + 2 a_{11} \ln r)\right] =$$

$$= -\frac{1}{Em(r_2^2 - r_1^2)}\left[\frac{m-1}{2}(\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2) r^2 + (m+1)(\gamma_1 - \gamma_2) r_1^2 r_2^2 \ln r + (\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2) x^2\right] + a, \qquad (48)$$

en résumant les membres absolus dans la notation a.

Si l'on pose $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma$, on obtient les relations (45) à (48) pour les tensions ν_r, ν_s et pour les déformations ϱ, ξ les équations (28) à (31) déterminées précédemment.

Résumé.

Pour le calcul des enveloppes cylindriques épaisses, les méthodes approximatives de la résistance des matériaux sont parfois insuffisantes. C'est pour cette raison que l'auteur de ce rapport applique à ce calcul la théorie de l'élasticité basée sur les équations d'équilibre et de déformation d'un élément infiniment petit.

Après avoir effectué tout le développement de la théorie générale, l'auteur l'applique à quelques cas particuliers: 1° Cas d'une enveloppe cylindrique circulaire épaisse illimitée dans les sens de l'axe et sollicitée par des pressions radiales uniformes à l'intérieur et à l'extérieur. 2° Cas d'une enveloppe cylindrique circulaire épaisse d'un réservoir à axe vertical X, sollicitée par des pressions radiales uniformément réparties sur le pourtour, à l'intérieur et à l'extérieur, et variables dans le sens de l'axe X. Ce dernier cas est traité a) en partant des déformations, b) en partant des tensions et c) en exprimant toutes les inconnues par une seule fonction.

Zusammenfassung.

Die Näherungsmethoden der Festigkeitslehre sind für die Berechnung von dicken zylindrischen Schalen oft ungenügend. Deshalb wendet der Verfasser dieses Berichtes darauf die Elastizitätstheorie an, die auf den Gleichgewichtsbedingungen und Verformungen eines unendlich kleinen Teiles beruht.

Nach Entwicklung der allgemeinen Theorie wendet sie der Verfasser auf einige besondere Fälle an:

1. Dicke Kreiszylinderschale, in der Achsenrichtung unbegrenzt, durch innere und äußere radiale und gleichmäßig verteilte Drucke beansprucht.
2. Dicke Kreiszylinderschale eines Behälters mit senkrechter Achse X, durch innere und äußere radiale und gleichmäßig verteilte Drucke beansprucht, die in der Richtung X veränderlich sind. Dieser Fall wird behandelt
   a) von den Verformungen aus,
   b) von den Spannungen aus und
   c) indem alle Unbekannten durch eine einzige Funktion dargestellt werden.

Summary.

The approximative methods based on the theory of the strength of materials are insufficient for the calculation of thick cylindrical shells. The author therefore applies the theory of elasticity, using as basis the deformations and equilibrium conditions of an infinitely small particle.

After developing the general theory the author applies it to some special cases:

1. Thick circular cylindrical shells, unlimited in the direction of the axis, subjected to radial, uniformly distributed pressure forces, both internal and external.

2. Thick circular cylindrical shells of a container with vertical axis X, subjected to internal and external, radial, uniformly distributed pressure forces, but variable in the direction X of the axis. This case ist treated from the point of view of:
   a) the deformations,
   b) the stresses,
   c) expressing all unknowns in one single function.