

# Détermination de la largeur utile des tables de compression des poutres

Autor(en): **Beschkine, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **5 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-6150>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DETERMINATION DE LA LARGEUR UTILE DES TABLES DE COMPRESSION DES POUTRES.

## BESTIMMUNG DER WIRKSAMEN PLATTENBREITE VON PLATTEN- BALKEN.

### DETERMINATION OF THE EFFECTIVE WIDTH OF THE COM- PRESSION FLANGES OF T-BEAMS.

L. BESCHKINE, Ingénieur E. C. P., Paris.

#### Introduction.

Nous nous proposons de déterminer la répartition des tensions dans les tables de compression des poutres présentant des largeurs de tables comparables à la portée et d'en déduire la largeur utile des tables.

Le problème ne se prête pas à une analyse élémentaire dans le cas d'une nervure isolée sur deux appuis. Au contraire, dans les cas suivants, la solution peut être envisagée par des méthodes élémentaires:

1. Travées continues, une âme isolée, table de largeur finie ou infinie.
2. Travées continues, âmes équidistantes.
3. Travée isolée, âmes équidistantes.

Nous étudions, dans ce qui suit, ces divers cas, moyennant les hypothèses suivantes:

- a) Le matériau est homogène et isotrope.
- b) La table est assez mince pour qu'on puisse négliger ses flexions propres.

#### A. Notations:

Epaisseur de la table . . . . .	$h$
Moment d'inertie de la nervure . . . . .	$I$
Section de la nervure . . . . .	$s$
Distance entre le centre de gravité de la nervure et la fibre neutre de la table . . . . .	$e$
Distance entre nervures . . . . .	$2a$
Portée des nervures . . . . .	$2L$
Module d'Young . . . . .	$E$
Coefficient de Poisson . . . . .	$\sigma$
Module d'élasticité transversale . . . . .	$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$
Tensions normales dans le sens $ox$ . . . . .	$n_x$
Tensions normales dans le sens $oy$ . . . . .	$n_y$
Tensions de cisaillement . . . . .	$t$
Tensions correspondantes le long de la nervure . . . . .	$\nu_x, \nu_y, \tau$
Déplacement dans le sens $ox$ . . . . .	$u$
Déplacement dans le sens $oy$ . . . . .	$v$
Largeur utile d'une table . . . . .	$2\lambda$

## B. Equations fondamentales.

Le problème de la répartition des tensions dans la table étant un problème d'élasticité plane, nous savons que l'on a (voir p. ex. G. PIGEAUD, Résistance des Matériaux, 1934, T. I, p. 128)

$$(1) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (n_x + n_y) = 0$$

Comme les équations d'équilibre:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

permettent de poser:

$$(2) \quad n_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad n_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad t = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

( $\Phi$  étant une fonction d'Airy), on voit que  $\Phi$  répond à la condition, déduite de (1) (voir à ce sujet „Théorie de l'Elasticité“ par TIMOSHENKO):

$$(3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

On vérifie sans difficulté que si l'on pose  $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$  les solutions qui répondent à (3) sont de la forme:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} ny \begin{bmatrix} \text{ch} \\ \text{sh} \end{bmatrix} nx \quad \text{et} \quad x \begin{bmatrix} \cos \\ \sin \end{bmatrix} ny \begin{bmatrix} \text{ch} \\ \text{sh} \end{bmatrix} nx$$

où  $n$  est une constante arbitraire. On a donc 8 fonctions répondant au problème ainsi que les 8 autres obtenues en permutant  $x$  et  $y$ . (Les solutions du type  $y \cos ny \times \text{ch} nx$  ne présentent pas d'intérêt.)

Pour simplifier les notations nous posons:

$$nx \cdot \text{ch} nx = \text{sr} nx; \quad nx \cdot \text{sh} nx = \text{cr} nx$$

La règle de dérivation de ces fonctions est:

$$\frac{1}{n} (\text{sr} nx)' = \text{cr} nx + \text{ch} nx; \quad \frac{1}{n} (\text{cr} nx)' = \text{sr} nx + \text{sh} nx$$

$$\frac{1}{n^2} (\text{sr} nx)'' = \text{sr} nx + 2 \text{sh} nx; \quad \frac{1}{n^2} (\text{cr} nx)'' = \text{cr} nx + 2 \text{ch} nx$$

## C. Cas de charge envisagés.

Nous envisageons les cas de charge suivants (définis pour les poutres continues):

1° Charge définie par une sinusoïde, les réactions d'appui suivant la même loi. On a donc:

$$(5) \quad M = M_1 \cos \frac{\pi x}{L}$$

en prenant l'origine au milieu d'une portée.

2° Charge uniforme, réactions d'appui concentrées. On a:

$$M = \left( \frac{l^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) p$$

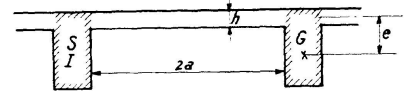
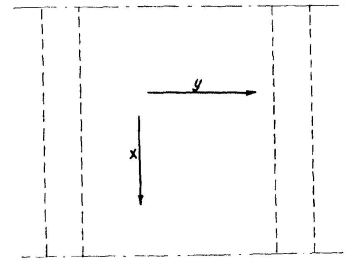


Fig. 1.

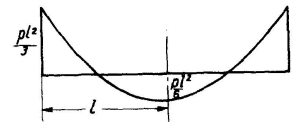


Fig. 2.

On peut développer cette expression en série de FOURIER:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \frac{n \pi x}{L}$$

$$(6) \quad M_n = \frac{p}{L} \int_{-L}^{+L} \left( \frac{L^2}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \cos \frac{n \pi x}{L} dx = \frac{2L^2 p}{\pi^2 n^2} (-1)^{n+1}$$

3° Charge concentrée au milieu de la portée.

On a: 
$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right)$$

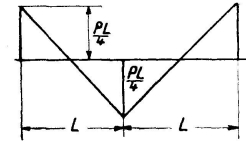


Fig. 3.

En développant en série, les termes pairs sont nuls et l'on a ( $n$  variant de 1 à l'infini):

$$(7) \quad M_{2n-1} = \frac{P}{L} \int_0^L \left( \frac{L}{2} - x \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} dx = \frac{2PL}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

D. Mode de répartition des moments. Définition de la largeur utile.

Le moment total  $M$  se divise en deux parties, l'une  $M'$  prise par la nervure, l'autre  $M''$  prise par la table (effort total  $N$ ) et par une force opposée dans la nervure. On a (prenant l'origine des  $y$  au milieu de la table)

$$N = 2h \int_0^a n_x dy$$

$$(9) \quad M'' = Ne = 2he \int_0^a n_x dy$$

Calculons les déformations dans la table et dans la nervure, dans la zone de contact et écrivons qu'elles sont égales, en appelant  $v_x$  et  $v_y$  les valeurs de  $n_x$  et  $n_y$  pour  $y = a$ .

$$(10) \quad (v_x - \sigma v_y) = \frac{M'e}{I} - \frac{N}{s} = \frac{Me}{I} - N \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right)$$

Dans le cas où on néglige la nervure ( $I = 0$ ), on a simplement:

$$(10') \quad N = \frac{M}{e}$$

Dans le calcul, nous supposons que la compression transversale de la nervure est nulle, ce qui est à peu près justifié à cause de l'augmentation de section qu'offre la nervure. Si on ne faisait pas cette hypothèse, on remplacerait  $v_x - \sigma v_y$  par  $v_x$  dans les calculs.

Pour définir la largeur utile  $2\lambda$  de la table, VON KARMAN considère une poutre ayant une table de largeur  $2\lambda$  supposée comprimée uniformément et écrit que la part de moment prise par la table est la même dans la poutre étudiée et dans la poutre de référence, ce qui revient à dire que la nervure supporte dans les deux cas le même moment. Ceci revient à dire que les fatigues (et les déformations) sont les mêmes dans les deux nervures. L'effort total  $N$  est donc le même dans les deux cas. Dans la poutre de référence, la déformation de la nervure est:  $(v_x - \sigma v_y) \frac{1}{E}$ .



La relation définissant  $\lambda$  est donc:

$$(11) \quad \frac{1}{E} \frac{N}{2\lambda h} = \frac{1}{E} (\nu_x - \sigma \nu_y)$$

$$\lambda = \frac{N}{\nu_x - \sigma \nu_y} \frac{1}{2h}$$

Si on définissait la largeur utile par la fatigue de la table et non par sa déformation on aurait:

$$(12) \quad \lambda = \frac{N}{2h \nu_x}$$

Cette formule est plus logique que la précédente. On obtient, en effet,  $\lambda \neq a$  pour des poutres à nervures très rapprochées, à cause de la compression transversale, si on applique la formule (11).

Nous employons la formule (12) quand  $I \neq 0$ ; dans le cas où  $I = 0$ , nous employons (12) sous la forme:

$$(12') \quad \lambda = \frac{M}{2he \nu_x}$$

### Premier cas.

#### Une nervure à table infiniment large. Poutre continue.

Ce cas a été étudié par V. KARMAN<sup>1)</sup>. Nous reprenons les calculs d'une autre façon. Nous examinons le cas de travées égales et également chargées. Le problème est donc résolu par des fonctions périodiques en  $x$  (période  $2L$ ).

Nous écrivons donc, en prenant l'origine sur l'axe de la nervure:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos n \left( \frac{\pi x}{L} - \alpha_n \right)$$

$f_n(y)$  est une fonction hyperbolique en  $y$ , devant être nulle ou finie pour  $y = \infty$ ; il résulte que  $f_n(y)$  est de la forme (pour la table d'un côté de la nervure):

$$f_n(y) = a_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} + b_n \left( \frac{n\pi y}{L} + 1 \right) e^{-\frac{n\pi y}{L}}$$

(cas particulier des expressions 4).

Nous allons définir une relation entre  $a_n$  et  $b_n$  en écrivant que (par raison de symétrie), le bord  $ox$  de la plaque doit rester rectiligne.

Nous avons:

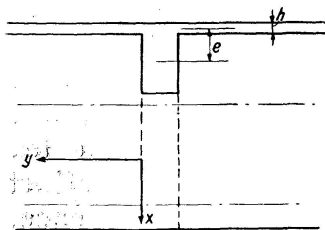


Fig. 4.

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = n_x - \sigma n_y$$

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = n_y - \sigma n_x$$

$$E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2t(1 + \sigma)$$

<sup>1)</sup> „Festschrift August Föppl“, p. 114, 1923.

Se servant des équations (2) on trouve:

$$Ev = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left\{ a_n + b_n \left( 2 + \frac{n\pi y}{L} \right) + \sigma a_n \right\} e^{-\frac{n\pi y}{L}} \cos n \left( \frac{\pi x}{L} - a_n \right)$$

(Il n'y a pas de fonction arbitraire en  $x$ , à cause de la troisième relation de déformation.) En particulier, pour  $y = 0$ , on a:

$$Ev = \sum_1^{\infty} \frac{n\pi}{L} [a(1 + \sigma) + 2b_n] \cos n \left( \frac{\pi x}{L} - a_n \right) = 0$$

$$b_n = -\frac{a_n(1 + \sigma)}{2}$$

D'où l'expression de  $\Phi$  (en se bornant au cas des charges symétriques,  $a_n = 0$ )

$$(13) \quad \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} \left[ 1 - \frac{1 + \sigma}{2} \left( 1 + \frac{n\pi y}{L} \right) \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Supposons les moments  $M$  développés en série de FOURIER:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Nous avons tout d'abord:

$$N = 2h \int_0^{\infty} n_x dy = -2h \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\infty}^0 = \sum_1^{\infty} \frac{2hn\pi}{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

D'autre part, les déformations le long de la nervure sont:

$$v_x - \sigma v_y = \sum_1^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n \frac{(3 - \sigma)(1 + \sigma)}{2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$-N \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right) + \frac{Me}{I} = -\sum_1^{\infty} \frac{2hn\pi}{L} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right) + \sum_1^{\infty} \frac{M_n e}{I} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

en écrivant que les déformations sont égales, on a, pour chaque terme  $a_n$ :

$$a_n \left[ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{(3 - \sigma)(1 + \sigma)}{2} + \frac{2hn\pi}{L} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right) \right] = M_n \frac{e}{I}$$

D'où:

$$(14) \quad M_n = \frac{2hn\pi}{L} a_n = \frac{M_n}{e} \frac{1}{1 + \frac{I}{se^2} + \frac{n\pi I}{hLe^2} \frac{(3 - \sigma)(1 + \sigma)}{4}}$$

On en déduit:

$$(15) \quad (v_x) = \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} a_n \frac{3 + \sigma}{2} \cos \frac{n\pi x}{L} = \sum \pi \frac{3 + \sigma}{4} \frac{M_n}{ehl} \cdot n \cdot \frac{1}{1 + \frac{I}{se^2} + \frac{n\pi I}{hLe^2} \frac{(3 - \sigma)(1 + \sigma)}{4}} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

#### A. Cas d'une charge sinusoïdale.

On a, pour  $n = 1$ :

$$N_1 = \frac{M}{e} \frac{1}{1 + \frac{I}{se^2} + \frac{\pi I}{hle^2} \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{4}}$$

$$v_x = \pi \frac{3+\sigma}{4} \frac{M}{ehl} \frac{1}{1 + \frac{I}{se^2} + \frac{\pi I}{hle^2} \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{4}}$$

D'où:

$$(16) \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hLv_x} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)}$$

VON KARMAN trouve, par application de (11):

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3-\sigma)(1+\sigma)}$$

La différence est faible, en valeur relative:

$$\delta = \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{3+\sigma} - 1 = \frac{\sigma(1-\sigma)}{3+\sigma}$$

Cette différence a les valeurs numériques suivantes:

$\sigma =$	0,1	0,3
$\delta \%$	2,9	6,4
$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)}$	0,205	0,193

On voit que la largeur utile est égale à  $\frac{1}{5}$  de la portée.

### B. Cas d'une charge uniforme.

On a trouvé:

$$M = \sum_1^{\infty} \frac{2L^2 p}{\pi^2 n^2} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Il en résulte, au milieu de la portée:

$$N = \sum \frac{2L^2 p}{\pi^2 n^2} (-1)^{n+1} \frac{1}{e \left( 1 + \frac{I}{se^2} + \frac{n\pi I}{hle^2} \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{4} \right)}$$

$$v_x = \sum \frac{3+\sigma}{4} \cdot \frac{2L^2 p}{\pi n} (-1)^{n+1} \frac{1}{ehl \left( 1 + \frac{I}{se^2} + \frac{n\pi I}{hle^2} \frac{(3-\sigma)(1+\sigma)}{4} \right)}$$

Posant:

$$(17) \quad q = \left( \frac{e^2}{I} + \frac{1}{s} \right) \frac{4hL}{\pi(3-\sigma)(1+\sigma)}$$

On déduit:

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hLv_x} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)} \frac{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+q)}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+q)}}$$

$$(16') \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \left\{ \frac{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}{\sum (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+q} \right)} - \frac{1}{q} \right\}$$

1° Pour  $q = 0$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}$$

On a :

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{3}{4} \sum \frac{1}{n^3} = \frac{3}{4} \frac{\pi^3}{25,79436}$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

D'où :

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{18}{3 + \sigma} \frac{1}{25,79436} = 0,225$$

2° Pour  $q = \infty$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\frac{\pi^2}{12}}{\text{Log } 2} = \frac{\pi}{6(3 + \sigma) \text{Log } 2} = 0,244$$

On voit que  $\frac{\lambda}{L}$  varie très peu en fonction de  $q$ .

Nous donnons les valeurs de  $\frac{\lambda}{L}$  pour quelques valeurs utilisables de  $q$  :

$q$	0	1	2	5	10	$\infty$
$\frac{\lambda}{L}$	0,225	0,232	0,235	0,239	0,241	0,244

### C. Cas d'une charge concentrée.

En prenant :

$$M_{2n-1} = \frac{2pL}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

on obtient, au droit de la charge :

$$(18) \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hL\nu_x} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{1}{(2n-1)^2} \frac{1}{2n+q-1}}{\sum \frac{1}{(2n-1)} \frac{1}{2n+q-1}}$$

On constate que cette valeur est nulle quand  $q$  est infini. Cela résulte de la discontinuité des efforts tranchants au point d'application de la charge qui empêche la table de prendre les efforts normaux correspondant aux termes d'ordre élevé de la série de FOURIER représentant les moments. Quand  $q$  est

infini, la nervure ne supporte pas de flexion et il en résulte qu'aucun élément de la construction ne peut supporter les moments correspondants. Nous revenons sur ce point plus loin et calculons les valeurs de  $\frac{\lambda}{L}$  en fonction de  $q$ .

On peut écrire:

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{1}{\pi(3 + \sigma)} \left[ \frac{\sum \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2}}{\sum \left( \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{q-1}{2}} \right)} - \frac{2}{q} \right]$$

Pour  $q = 0$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{1}{(2n-1)^3}}{\sum \frac{1}{(2n-1)^2}}$$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\frac{7}{8} \frac{\pi^3}{25,79436}}{\frac{\pi^2}{8}} = \frac{14}{3 + \sigma} \frac{1}{25,79436} = 0,175$$

On voit que  $\frac{\lambda}{L}$  est nettement plus petit dans ce cas que pour une charge continue.

Nous donnons le tableau des valeurs de  $\lambda$  en fonction de  $q$ :

$q$	0	1	2	4	8	16	24	$\infty$
$\frac{\lambda}{L}$	0,175	0,160	0,151	0,139	0,125	0,112	0,108	0

Pratiquement,  $q$  ne dépasse pas 16. Même dans ce cas, la largeur utile est très faible.

Nous allons chercher les largeurs utiles, pour  $q = \infty$ , aux environs du point d'application de la charge, à une distance définie par  $pL = x$ .

Dans ce cas:

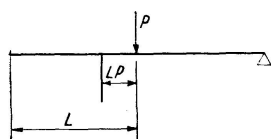


Fig. 5.

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \frac{p}{L} \pi}{(2n-1)^2}}{\sum \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \pi}{(2n-1)}}$$

La série au dénominateur n'est plus divergente, aussi grand que soit  $n$ . Prenons, par exemple

$$p = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{16} \quad \text{il vient respectivement:}$$

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{0,925}{0,795} = 0,239 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \cdot \frac{1,078}{1,167} = 0,190$$

Or, pour une charge uniformément répartie, dans ce cas  $\frac{\lambda}{L} = 0,244$ . On voit donc que la concentration de charge n'a d'effet que dans une portion très

restreinte, celle précisément où les calculs actuels ne sont pas applicables à cause des déformations locales. On en déduit que l'on peut négliger ces effets très restreints et adopter une largeur utile indépendante du mode d'application des charges. Pour l'autre valeur limite de  $q$ ,  $q = 0$ , on a également, pour  $p = \frac{1}{8}$ :

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \frac{\sum \frac{\cos \frac{2n-1}{2} \pi}{(2n-1)^3}}{\sum \frac{p}{(2n-1)^2}} = \frac{2}{\pi(3 + \sigma)} \cdot \frac{0,933}{0,925} = 0,207$$

et pour  $p = \frac{1}{16}$ ,  $\frac{\lambda}{L} = 0,187$

Dans ce cas,  $\frac{\lambda}{L}$  est égal à 0,225 pour les charges réparties. La répartition sinusoïdale de charge donnant des valeurs comprises entre  $p = \frac{1}{8}$  et  $p = \frac{1}{16}$ , on peut prendre ce cas de charge pour définir la largeur utile.

Dans les calculs suivants, nous nous abstenons de calculer la largeur utile dans le cas de charges concentrées, eu égard aux considérations précédentes. Remarquons simplement que, dans le cas de poutres sur deux appuis, l'effet de concentration est relativement deux fois moindre que dans le cas de poutres continues.

**Deuxième cas.**

**Une nervure à table de largeur finie. Poutre continue.**

Prenant le cas de travées égales et également chargées, nous écrivons:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Nous prenons pour origine des  $y$  le bord de la table. Posons:

$$f_n(y) = e_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + b_n \operatorname{cr} \frac{n\pi y}{L} + c_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} + d_n \operatorname{sr} \frac{n\pi y}{L}$$

Ecrivons que les efforts tangentiels et normaux sont nuls sur le bord de la table:

$$\begin{aligned} - (ny)_{y=0} &= \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \left( e_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + 0 \right) \\ + (t)_{y=0} &= \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( c_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + d_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} \right) \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} e_n &= 0 & d_n &= -c_n \\ f_n(y) &= b_n \operatorname{cr} \frac{n\pi y}{L} + c_n \left( \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} - \operatorname{sr} \frac{n\pi y}{L} \right) \end{aligned}$$

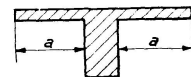


Fig. 6.

Ecrivons maintenant que les déplacements  $v$  sont nuls le long de la nervure.

On obtient:

$$E v = -\frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \left[ b_n(1 + \sigma) \operatorname{sr} \frac{n\pi a}{L} - b_n(1 - \sigma) \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} - c_n(1 + \sigma) \operatorname{cr} \frac{n\pi a}{L} + 2c_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \right]$$

Il en résulte:

$$b_n \left\{ (1+\sigma) \frac{n\pi a}{L} - \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - (1-\sigma) \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \right\} = c_n \left\{ (1+\sigma) \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} - 2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \right\} = a_n$$

Soient  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  les valeurs des crochets.

On peut poser:

$$b_n = \frac{a_n}{\beta_n}; \quad c_n = \frac{a_n}{\gamma_n}$$

La valeur de l'effort total de compression est:

$$\begin{aligned} N &= 2h \int_0^a n_x dy = + 2h \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_0^a \\ &= 2h \sum \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{n\pi}{L} \left\{ b_n \left( \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} + \frac{n\pi a}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \right) - c_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \right\} \\ &= \frac{2h\pi}{L} \sum n \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} a_n \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} + \frac{n\pi a}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L}}{\beta_n} - \frac{\frac{n\pi a}{L} \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}{\gamma_n} \right\} \end{aligned}$$

La valeur de la déformation  $\nu_x - \sigma \nu_y$  est:

$$\nu_x - \sigma \nu_y = \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} a_n \left\{ \frac{(1+\sigma) \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} + 2 \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} (1-\sigma) - (1+\sigma) \frac{n\pi a}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L}}{\beta_n} + \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} (1-\sigma) - (1+\sigma) \frac{n\pi a}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L}}{\gamma_n} \right\}$$

On obtient les expressions équivalentes:

$$(19) \quad \nu_x - \sigma \nu_y = \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{a_n}{\beta_n \gamma_n} \left\{ \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{L} (1-\sigma)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{L} - (1+\sigma)^2 \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \right\}$$

$$(20) \quad N = - \frac{4h\pi}{L} \sum \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{a_n}{\beta_n \gamma_n} \left( \frac{n\pi a}{L} + \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \right)$$

D'où:

$$(21) \quad \frac{eM_n}{I} = - \frac{a_n}{\beta_n \gamma_n} \left[ \frac{2h\pi n}{L} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I^2} \right) \left( \frac{2n\pi a}{L} + \operatorname{sh} \frac{2n\pi a}{L} \right) + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left\{ 4 \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{L} - \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{L} (1-\sigma)^2 + (1+\sigma)^2 \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \right\} \right]$$

$$(21') \quad \nu_x = - \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \frac{a_n}{\beta_n \gamma_n} \left\{ 4 \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi a}{L} - (1-\sigma) \operatorname{sh}^2 \frac{n\pi a}{L} + (1+\sigma) \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} \right\}$$

#### A. Cas d'une charge sinusoidale.

$$(22) \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hL\gamma_x} = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{2\pi a}{L} + \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{L}}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{L} - (1-\sigma) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi a}{L} + (1+\sigma) \frac{\pi^2 a^2}{L^2}}$$

Nous avons les valeurs suivantes de  $\frac{\lambda}{L}$  en fonction de  $\frac{a}{L}$ :

$\frac{a}{L}$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	$\infty$
$\frac{\lambda}{L}$	0	0,093	0,157	0,199	0,203	0,203	0,2035	0,2055
$\frac{\lambda}{a}$	1	0,935	0,784	0,498	0,338	0,254	0,2035	0

On voit que pour  $\frac{a}{L} = 0,4$  la table a une résistance pratiquement égale à celle d'une table infinie.

### B. Cas d'une charge uniforme.

Nous étudions ce cas pour l'hypothèse de poutres à nervures parallèles, les différences étant très faibles entre les deux cas (voir les tableaux relatifs aux charges sinusoïdales dans les deux cas).

#### Troisième cas.

#### Poutres continues à nervures parallèles.

Le nombre de nervures est supposé infini. Nous prenons pour origine l'axe d'une table entre deux nervures. Soit  $2a$  la distance entre les nervures. Nous posons toujours :

$$\Phi = \sum f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{L}$$

et nous prenons pour  $f_n(y)$  une fonction paire en  $y$ , soit :

$$f_n(y) = a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + b_n \operatorname{cr} \frac{n\pi y}{L}$$

Le déplacement  $v$  des bords  $y = \pm a$  de la plaque doit être nul. On a :

$$E v = - \sum \frac{n\pi}{L} \left[ \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} (a_n(1+\sigma) - b_n(1+\sigma)) + \frac{n\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} b_n(1+\sigma) \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

D'où :

$$a_n = b_n \left[ \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right]$$

L'effort normal dans la table est :

$$\begin{aligned} N &= 2h \int_0^a n_x dy = 2h \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_0^a \\ &= 2h \sum \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{2}{1+\sigma} b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

La déformation de la table le long de la nervure est :

$$v_x - \sigma v_y = \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n \left[ (3-\sigma) \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - (1+\sigma) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right] \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{M e}{I} - \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right) N$$

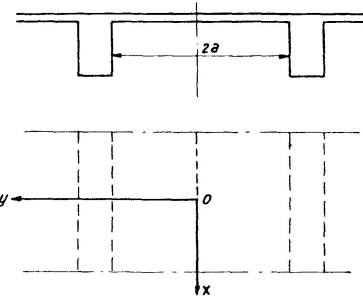


Fig. 7.



On a donc, pour définir  $b_n$

$$b_n \left[ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left[ (3-\sigma) \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - (1+\sigma) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right] + \frac{4hn\pi}{(1+\sigma)L} \left( \frac{1}{s} + \frac{e^2}{I} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \right] = M_n \frac{e}{I}$$

D'où:

$$(23) \quad \frac{4hn\pi}{(1+\sigma)L} b_n = \frac{M_n}{e} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \left( 1 + \frac{I}{se^2} \right) + \frac{n\pi I}{4hLe^2} \left[ (3-\sigma)(1+\sigma) \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - (1+\sigma)^2 \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right]}$$

$$(24) \quad v_x = \sum \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} b_n \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \frac{3+\sigma}{1+\sigma} - \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right]$$

A. Cas d'une charge sinusoïdale.

$$(25) \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hLv_x} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{L} - \frac{\pi a}{L} \frac{1+\sigma}{3+\sigma} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}}}$$

Nous avons les valeurs suivantes de  $\lambda/L$  en fonction de  $a/L$ :

$\frac{a}{L}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	$\infty$
$\frac{\lambda}{L}$	0	0,093	0,158	0,191	0,204	0,209	0,207	0,206	0,2055
$\frac{\lambda}{a}$	1	0,935	0,791	0,636	0,510	0,348	0,259	0,206	0

Il est à remarquer que  $\frac{\lambda}{L}$  augmente quand  $\frac{a}{L}$  diminue jusqu'à la valeur 0,6 environ. On constate que les résultats diffèrent peu, comme il fallait s'y attendre, de ceux correspondant à une nervure isolée. Les différences sont de l'ordre de 3 % au maximum.

Afin de simplifier les calculs, nous allons provisoirement définir  $\lambda$  par l'expression (11):

$$\frac{\lambda'}{L} = \frac{N}{2hL(v_x - \sigma v_y)}$$

Dans le cas présent, on trouve:

$$\frac{\lambda'}{L} = \frac{2}{\pi(3-\sigma)(1+\sigma)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{L} - \frac{\pi a}{L} \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}}}$$

En particulier, pour

$$\frac{a}{L} = 0; \quad \frac{\lambda'}{a} = \frac{1}{1-\sigma^2} = 1,01 \neq 1$$

$$\frac{a}{L} = \infty; \quad \frac{\lambda'}{L} = \frac{2}{\pi(3-\sigma)(1+\sigma)} = 0,1995 \neq 0,2055$$

Pour les valeurs intermédiaires de  $\frac{a}{L}$ , la différence entre les deux expressions passe par 0. Ceci provient de ce que, pour les tables étroites,  $n_y$  provient uniquement de la tendance à la dilatation transversale et est donc positif. Pour les tables larges,  $n_y$  provient de l'équilibre des forces de cisaillement et devient une traction, au moins près de la nervure.

### B. Cas d'une charge uniforme.

On a, avec l'expression (11) de  $\frac{\lambda'}{L}$  (au milieu de la portée):

$$\frac{\lambda'}{L} = \frac{\sum \frac{n\pi}{L^2} \frac{2}{1+\sigma} b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}{\sum \frac{n^2\pi^2}{L^2} \left[ (3-\sigma) \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - (1+\sigma) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right] b_n}$$

Posons:

$$q = \frac{4hL}{\pi} \left( \frac{e^2}{I} + \frac{1}{s} \right) \cdot \frac{1}{(3-\sigma)(1+\sigma)}$$

Il vient:

$$\frac{\pi^2 I (3-\sigma)}{L^2 e} b_n = \frac{M_n}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L} \left[ q + n \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right]}$$

On en déduit:

$$(26) \quad \frac{\lambda'}{L} = \frac{\Sigma}{1-q\Sigma} \cdot \frac{2}{\pi(3-\sigma)(1+\sigma)}$$

avec la notation:

$$(26') \quad \Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M} \frac{1}{q + \frac{n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right)}$$

( $M$  étant le moment total, égal à  $\Sigma M_n$ .)

Pour le cas de charge considéré:

$$\frac{M_n}{M} = (-1)^{n+1} \frac{12}{\pi^2 n^2}$$

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{12}{\pi^2 n^2} \frac{1}{q + \frac{n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left( \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right)}$$

Pour les deux cas extrêmes,  $q = \infty$  et  $q = 0$  on obtient:

$$(27) \quad 1^0) \quad q = 0; \quad \frac{\lambda'}{L} = \frac{24}{\pi^3(3-\sigma)(1+\sigma)} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}}$$

$$(28) \quad 2^0) \quad q = \infty; \quad \frac{\lambda'}{L} = \frac{\pi}{6(1+\sigma)(3-\sigma)} \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3-\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right]$$

Dans le deuxième cas, l'on peut rétablir la valeur exacte de  $\frac{\lambda}{L}$  (formule 12):

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{N}{2hL\nu_x} = \frac{2}{(3+\sigma)\pi} \sum \frac{M_n}{M} \frac{n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \frac{1+\sigma}{3+\sigma} \right]$$

$$(28') \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{\pi}{6(3+\sigma)} \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1+\sigma}{3+\sigma} \frac{n\pi a}{L} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right]$$

On obtient ainsi les valeurs suivantes:

$\frac{a}{L}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	$\infty$	
$q = 0$	$\frac{\lambda'}{L}$	0	0,096	0,169	0,206	0,219	0,224	0,222	0,220	0,218
	$\frac{\lambda'}{a}$	1,01	0,966	0,842	0,688	0,559	0,374	0,277	0,220	0
$q = \infty$	$\frac{\lambda'}{L}$	0	0,095	0,172	0,217	0,237	0,244	0,241	0,239	0,237
	$\frac{\lambda'}{a}$	1,01	0,951	0,858	0,721	0,593	0,407	0,301	0,239	0
$q = \infty$	$\frac{\lambda}{L}$	0	0,094	0,171	0,221	0,241	0,250	0,248	0,246	0,244
	$\frac{\lambda}{a}$	1,00	0,943	0,856	0,735	0,601	0,417	0,310	0,246	0
$q = 0$	$\frac{\lambda}{L}$	0	0,096	0,168	0,210	0,227	0,230	0,228	0,227	0,225
	$\frac{\lambda}{a}$	1,00	0,958	0,840	0,701	0,567	0,383	0,285	0,227	0

Les valeurs  $\frac{\lambda}{a}$  pour  $q = 0$  sont calculées approximativement en multipliant les valeurs  $\frac{\lambda'}{a}$  correspondantes par le rapport  $\frac{\lambda}{\lambda'}$  correspondant à  $q = \infty$ .

#### Quatrième cas.

##### Poutres sur deux appuis à nervures parallèles.

Dans ce calcul, nous négligeons l'inertie propre de la nervure (que nous supposons donc réduite aux armatures tendues). Le problème résolu au cas

précédent, avec l'hypothèse  $q = \infty$  ( $I = 0$ ) permet de résoudre le problème de la répartition des efforts dans le cas d'une seule travée.

Il suffit, en effet, de prendre une travée calculée en continuité, de l'isoler de ses voisines et de superposer aux tensions existantes un système de tensions déterminées de façon à rendre nul l'effet de continuité. Pour cela, on calcule les tensions normale et tangentielle au droit de l'appui et l'on superpose des efforts opposés de manière à annuler les efforts sur la coupure.

Soit donc  $\Phi_1 = \sum f_n(y) \cos \frac{n\pi x}{L}$  la solution du problème dans le cas d'une poutre continue. On a trouvé:

$$\Phi_1 = \sum b_n \left[ \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\text{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \text{ch} \frac{n\pi y}{L} + \text{cr} \frac{n\pi y}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Dans le cas où  $I = 0$ , la relation définissant  $b_n$  devient:

$$b_n = \frac{M_n (1 + \sigma) L}{e} \frac{1}{4 h n \pi} \frac{1}{\text{sh} \frac{n\pi a}{L}}$$

D'où l'expression de  $\Phi_1$

$$(29) \quad \Phi_1 = \frac{L(1+\sigma)}{4 h \pi e} \sum \frac{M_n}{n \text{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\text{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \text{ch} \frac{n\pi y}{L} + \text{cr} \frac{n\pi y}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Au droit de l'appui ( $x = L$ ) les cisaillements sont nuls (sauf au droit des nervures) et les efforts normaux sont:

$$(30) \quad (n_x^1)_{x=L} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = \frac{\pi(1+\sigma)}{4 h e L} \sum \frac{M_n \cdot n}{\text{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{3+\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\text{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \text{ch} \frac{n\pi y}{L} + \text{cr} \frac{n\pi y}{L} \right] (-1)^n$$

Cette expression de  $(n_x^1)_L$  n'est valable que dans l'intervalle  $(-a, +a)$ .  $n_x^1$  est donc une fonction périodique de période  $2a$ . Nous pouvons donc l'exprimer en série de FOURIER développée suivant  $y$ .

On obtient les développements suivants dans l'intervalle  $(-a, +a)$ :

$$\text{ch} \frac{n\pi y}{L} = 2 \text{sh} \frac{n\pi a}{L} \cdot \frac{n a}{\pi L} \left[ \frac{1}{2 n^2 a^2} - \frac{1}{\frac{n^2 a^2}{L^2} + 1} \cos \frac{\pi y}{a} \dots + (-1)^k \frac{\cos \frac{k\pi y}{a}}{\frac{n^2 a^2}{L^2} + k^2} + \dots \right]$$

Il en résulte:

$$\begin{aligned} (1+\sigma) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\text{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{3+\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\text{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \text{ch} \frac{n\pi y}{L} + \text{cr} \frac{n\pi y}{L} \right] \\ = \frac{4 n^2 a^2}{L^2} \left[ \frac{L^2}{2 n^2 a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{k\pi y}{a}}{\frac{n^2 a^2}{L^2} + k^2} + (1+\sigma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2 \cos \frac{k\pi y}{a}}{\left( \frac{n^2 a^2}{L^2} + k^2 \right)^2} \right] \end{aligned}$$

On en déduit la valeur des efforts complémentaires pour le cas d'une travée isolée:

$$(31) \quad (n_x^2)_{x=1} = -(n_x^1)_{x=L} = + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{M_n}{eha} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{(1+\sigma) k^2}{k^2 + \frac{n^2 a^2}{L^2}} \right) \cos \frac{ky\pi}{a} \right]$$

$$= \sum (-1)^{n+1} \frac{M_n}{2eha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{ky\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{M_n}{eha} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{(1+\sigma)}{1 + \frac{n^2 a^2}{L^2}} \right)$$

La fonction  $\Phi_2$  donnant les valeurs des tensions complémentaires dans la table peut être prise de la forme :

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{a} + B_k \operatorname{cr} \frac{k\pi x}{a} \right] \cos \frac{k\pi y}{a} + \frac{A_0}{2} y^2$$

Ecrivons d'abord  $t = 0$  pour  $x = L$  :

$$t = - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{k\pi y}{a} \left[ (A_k + B_k) \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + B_k \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} \right] = 0$$

On a donc :

$$A_k \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} = - B_k \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \frac{kL\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{kL\pi}{a} \right)$$

Nous posons :

$$A_k = H_k \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \frac{kL\pi}{a} \operatorname{ch} \frac{kL\pi}{a} \right)$$

$$B_k = - H_k \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}$$

Il en résulte :

$$(32) \quad \Phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \left[ \operatorname{ch} \frac{kx\pi}{a} \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} \right) - \operatorname{cr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} \right] \cos \frac{ky\pi}{a} + \frac{A_0 y^2}{2}$$

$$(33) \quad (n_x^2) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} H_k \left[ \operatorname{ch} \frac{kx\pi}{a} \left( \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} \right) - \operatorname{cr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} \right] \cos \frac{ky\pi}{a} + A_0$$

$$(33') \quad (n_x^2)_{x=L} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} H_k \left[ \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{ch} \frac{kL\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} \right] \cos \frac{ky\pi}{a} + A_0$$

On en déduit :

$$(34) \quad A_0 = \sum (-1)^{n+1} \frac{M_n}{2eha}$$

$$(34') \quad \left[ \frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a} \right] \frac{k^2 \pi^2}{a^2} H_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{M_n}{eha} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{(1+\sigma)}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right)$$

Au milieu de la portée :

$$(35) \quad (n_x^2)_{x=0} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2}{a^2} H_k \left( \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} \right) \cos \frac{ky\pi}{a} + A_0$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{ky\pi}{a} \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{M_n}{eha} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right) + A_0$$

$A_0$  est la tension moyenne correspondant au moment sur appui pour la poutre continue.

En particulier, pour  $y = a$  (le long de la nervure) :

$$(35) \quad (v_x^2)_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{M_n}{eha} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right) + A_0$$

D'autre part, la valeur pour la poutre continue de  $(n_x')_{0,a}$  est :

$$(35'') \quad (v_x^1)_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{4 a e h} (1 + \sigma) \left[ \left( \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} + \operatorname{cr} \frac{n\pi a}{L} \right] \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{4 a e h} (1 + \sigma) \left[ \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right] \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}$$

D'où la valeur totale de  $(n_x)_{0,a} = (v_x)_0$

$$(36) \quad (v_x)_0 = (v_x^1)_0 + (v_x^2)_0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{4 a e h} \left[ \left( \frac{3 + \sigma}{4} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1 + \sigma}{4} \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right) \right]$$

La largeur utile de la poutre étant définie dans ce cas par

$$(12') : \quad (v_x)_0 = \frac{M}{2 e h \lambda}$$

En posant :

$$(37) \quad \frac{M_n}{M} = \mu_n ; \quad \frac{A_0 \cdot 2 e h a}{M} = \mu'$$

( $\mu'$  est le rapport du moment sur appui au moment total) il vient :

$$(38) \quad \frac{a}{\lambda} = \mu' + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left[ \left( \frac{3 + \sigma}{2} \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right) \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \frac{2}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right) \right]$$

### I. Cas d'une table infiniment large.

Dans ce cas, il faut faire  $a = \infty$  dans la formule précédente. En multipliant les deux membres de l'égalité par  $\frac{L}{a}$  et posant :

$$u = \frac{kL}{a}$$

on voit que la valeur commune des deux membres tend vers :

$$(39) \quad \frac{L}{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left[ \left( \frac{3+\sigma}{2} \pi n + (-1)^{n+1} \right) \int_0^{\infty} \frac{4 (\operatorname{sh} \pi u + \pi u \operatorname{ch} \pi u)}{2 \pi u + \operatorname{sh} 2 \pi u} \frac{1}{1 + \frac{u^2}{n^2}} \left( 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2}{u^2}} \right) du \right]$$

L'expression entre crochets est fonction de  $n$  seul. Appelons  $I_n$  l'intégrale qui figure dans le crochet. Nous posons :

$$I_n = I_{\infty} + J_n$$

D'où :

$$(40) \quad \frac{L}{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left[ \frac{3+\sigma}{2} \pi n + (-1)^{n+1} J_n \right] + \mu' I_{\infty}$$

On a en effet, par définition de  $\mu'$  :

$$\mu' = \sum \frac{M_n}{M} (-1)^{n+1} = \sum (-1)^{n+1} \mu_n$$

Nous donnons ci-après, pour  $\sigma = 0,1$  les valeurs numériques de  $J_n$  :

$I_{\infty} = 1,83858$	$J_5 = +0,00110$	$J_{10} = +0,00076$	$J_{15} = +0,00039$
$J_1 = -0,16957$	$J_6 = +0,00135$	$J_{11} = +0,00065$	$J_{20} = +0,00022$
$J_2 = -0,02723$	$J_7 = +0,00117$	$J_{12} = +0,00056$	$J_{30} = +0,00010$
$J_3 = -0,00473$	$J_8 = +0,00103$	$J_{13} = +0,00049$	
$J_4 = +0,00002$	$J_9 = +0,00088$	$J_{14} = +0,00044$	

A. Cas d'une charge sinusoïdale :  $\mu_n = \mu_1 = \frac{1}{2}$  ;  $\mu' = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3+\sigma}{2} \pi - 0,16957 \right] + \frac{1}{2} 1,83858 = 3,269$$

$$\frac{\lambda}{L} = 0,3059$$

B. Cas d'une charge uniforme.

$$\mu' = \frac{2}{3} ; \quad \mu_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{(3+\sigma)2}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{3} I_{\infty} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{J_n}{n^2} I_{\infty} = 1,347 + 1,213 - 0,072 = 2,488$$

$$\frac{\lambda}{L} = 0,402$$

C. Cas d'une charge concentrée.

Nous pouvons décomposer  $\frac{L}{\lambda}$  en deux parts, l'une due à la poutre continue, l'autre à l'effet de la coupure.

$$(41) \quad \frac{L}{\lambda} = (1 - \mu') \frac{L}{\lambda}_{\text{continu}} + \left( \frac{L}{\lambda} \right)_{\text{coupure}}$$

$$\frac{L}{\lambda} = (1 - \mu') \frac{L}{\lambda}_{\text{continu}} + \mu' I_{\infty} + \sum \mu_n J_n (-1)^{n+1}$$

La quantité  $\frac{L}{\lambda}$  due à la continuité est nulle au droit de la charge. Nous l'avons calculée à une petite distance de la charge (voir plus haut).

$$\text{à } \frac{1}{16} \text{ de la portée: } \left(\frac{L}{\lambda}\right)_c = 4,19$$

$$\text{à } \frac{1}{32} \text{ de la portée: } \left(\frac{L}{\lambda}\right)_c = 5,27$$

On a :

$$\mu' = \frac{1}{2}; \quad \mu_{2n-1} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\lambda}\right)_c + 0,9193 - 0,0690 = \begin{cases} 2,945 \\ 3,485 \end{cases}$$

D'où les valeurs de  $\frac{\lambda}{L}$  :

$$\frac{\lambda}{L} = \begin{cases} \text{à } \frac{1}{16} \text{ de la portée} = 0,340 \\ \text{à } \frac{1}{32} \text{ de la portée} = 0,287 \end{cases}$$

## II. Cas d'une table de largeur finie.

Nous écrivons la formule établie précédemment :

$$\frac{a}{\lambda} = \mu' + (1-\mu') \left(\frac{a}{\lambda}\right)_c + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \mu_n \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \frac{2}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left(1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}}\right)$$

$$(42) \quad \frac{a}{\lambda} = \mu' + (1-\mu') \left(\frac{a}{\lambda}\right)_c$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \mu' + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \mu_n \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \left[ \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left(1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}}\right) - 1 \right]$$

Les  $\Sigma\Sigma$  restants sont des séries très rapidement convergentes car le terme entre crochets diminue rapidement quand  $n$  croît et à partir de  $n = 4$  la somme par rapport à  $k$  reste inférieure à 0,001.

### A. Cas d'une charge sinusoïdale.

$$(43) \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\lambda}\right)_c + \sum \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \left[ \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{a^2}} \left(1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{a^2}{k^2 L^2}}\right) - 1 \right]$$

$$(43') \quad \left(\frac{a}{\lambda}\right)_c = \left[ \frac{3 + \sigma}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi a}{L} - \frac{1 + \sigma}{2} \frac{\frac{\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}} \right] \frac{\frac{\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{L}}$$



$\frac{L}{a}$	0	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	10	$\infty$
$\frac{\lambda}{a}$	0	0,305	0,366	0,445	0,585	0,676	0,743	0,831	0,882	0,967	1
$\frac{\lambda}{L}$	0,305	0,305	0,305	0,303	0,292	0,270	0,248	0,208	0,176	0,0967	0

*B. Cas d'une charge uniforme.*

$$(44) \quad \frac{a}{\lambda} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{a}{\lambda} \right)_c + \frac{8}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{\frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a}} \frac{1}{1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2}} \left( 1 + \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right)$$

$$(44') \quad \left( \frac{a}{\lambda} \right)_c = \frac{12}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} \left( \frac{3 + \sigma}{2} \right) - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left( \frac{1 + \sigma}{2} \right) \right] \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}}$$

$$= \frac{6(3 + \sigma)}{\pi} \frac{a}{L} \log 2 + \frac{6(3 + \sigma)}{\pi} \frac{a}{L} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left\{ \left[ \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{L} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \frac{1 + \sigma}{3 + \sigma} \right] \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} - 1 \right\}$$

$\frac{L}{a}$	0	1	1,2	1,5	2	2,5	3	4	5	10	$\infty$
$\frac{\lambda}{a}$	0	0,408	0,493	0,603	0,736	0,816	0,865	0,923	0,954	0,979	1
$\frac{\lambda}{L}$	0,402	0,408	0,411	0,402	0,368	0,327	0,288	0,231	0,1908	0,0979	0

**Amélioration de la largeur utile.**

On peut songer à améliorer la largeur utile en mettant au droit des appuis des nervures transversales destinées à améliorer la répartition des cisaillements. L'amélioration obtenue est faible. Pour nous rendre compte, prenons dans le cas d'une travée isolée une table infiniment large et supposons que la nervure additionnelle a une rigidité infinie. Dans cette hypothèse on peut traiter le problème en considérant la travée de portée  $2L$  comme formant partie d'une suite d'éléments de portée  $2L$  chargés alternativement avec des charges positives et négatives.

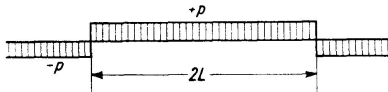


Fig. 8.

Posant:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \frac{n\pi x}{L} = \frac{p}{2} (L^2 - x^2)$$

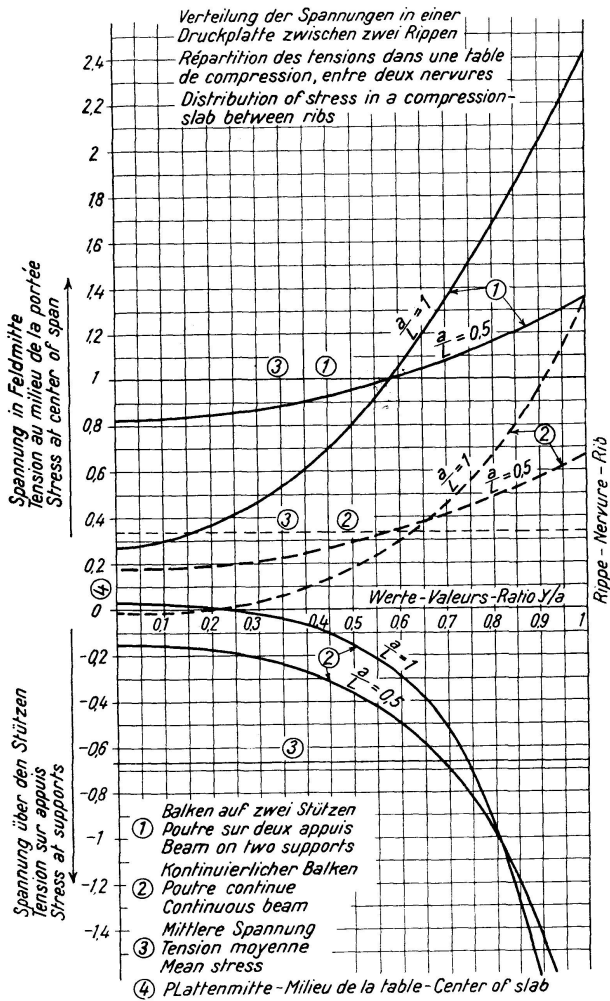
on a:

$$M_\mu = \frac{1}{L} \int_0^L M \cos \frac{(2n+1)x}{2L} dx = (-1)^{n+1} \frac{1}{(2-1)^3} \cdot \frac{16pL^2}{\pi^3}$$

Il en résulte que (dans le cas  $q = \infty$ ):

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)} \cdot \frac{2 \cdot \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}}{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}} = \frac{2}{\pi(3+\sigma)} \cdot \frac{\pi^3}{16} = 0,435$$

au lieu de 0,402 s'il n'y avait pas de nervure; on voit que l'effet de la nervure est faible, même si on la suppose indéformable. Il est certain qu'une sur-épaisseur de table réduira plus efficacement les tensions qu'une telle nervure.



Diagr. 1.

### Répartition des tensions dans les tables.

Nous servant des résultats établis précédemment, nous indiquons les valeurs des tensions normales au milieu de la portée d'une poutre chargée uniformément, dans les 2 hypothèses de poutre continue et de poutre sur deux appuis, pour les valeurs de  $\frac{a}{L}$  égales à 0,5 et 1.

Nous rappelons les formules trouvées:

Abstand zweier Rippen 2a.  
Distance entre nervures 2a.  
Distance between ribs 2a.

Stützweite 2L.  
Portée 2L.  
Span 2L.

Gleichmässig verteilte Last.  
Charge uniforme.  
Uniform load.

Die Einheit der Spannung ist gleich der mittleren Spannung der Druckplatte in einem Balken auf zwei Stützen.

L'unité de tension est égale à la tension moyenne de la table dans une poutre sur deux appuis.

The unit-stress is equal to the mean stress for the compression flanges of a beam on two supports.

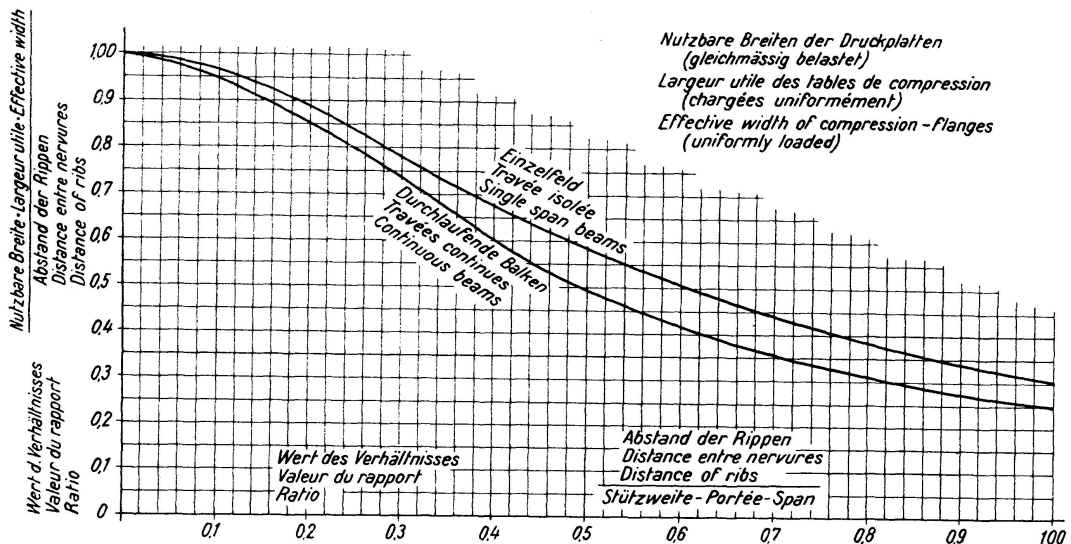
## A. Poutre continue.

$$\Phi_1 = \frac{L^3(1+\sigma)p}{2h\pi^3e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + \operatorname{cr} \frac{n\pi y}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$n_x^1 = \frac{L(1+\sigma)p}{2h\pi e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{3+\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$n_y^1 = -\frac{L(1+\sigma)p}{2h\pi e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{1-\sigma}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} + \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} \right] \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$t^1 = -\frac{L(1+\sigma)p}{2h\pi e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} \left[ \left( \frac{2}{1+\sigma} - \frac{\frac{n\pi a}{L}}{\operatorname{th} \frac{n\pi a}{L}} \right) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L} + \frac{n\pi y}{L} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$



Diagr. 2.

## B. Poutre sur deux appuis.

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{A_0 y^2}{2} - \frac{2L^2 p a}{\pi^4 e h} \sum \sum \frac{\operatorname{ch} \frac{kx\pi}{a} \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} \right) - \operatorname{cr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{n^2 k^2 (-1)^k \left[ \frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a} \right] \left[ 1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2} \right]} \left[ 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right] \cos \frac{ky\pi}{a}$$

$$n_x = n_x^1 + A_0 - \frac{2L^2 p}{\pi^2 e h a} \sum \sum \frac{\operatorname{ch} \frac{kx\pi}{a} \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} + \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} \right) - \operatorname{cr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{n^2 (-1)^k \left[ \frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a} \right] \left[ 1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2} \right]} \left[ 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right] \cos \frac{ky\pi}{a}$$

$$n_y = n_y^1 - \frac{2L^2 p}{\pi^2 e h a} \sum \sum \frac{\operatorname{ch} \frac{kx\pi}{a} \left( \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a} - \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} \right) - \operatorname{cr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{n^2 (-1)^k \left[ \frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a} \right] \left[ 1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2} \right]} \left[ 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right] \cos \frac{ky\pi}{a}$$

$$t = t^1 + \frac{2L^2 p}{\pi^2 e h a} \sum \sum \frac{\operatorname{sh} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sr} \frac{kL\pi}{a} - \operatorname{sr} \frac{kx\pi}{a} \operatorname{sh} \frac{kL\pi}{a}}{n^2 (-1)^k \left[ \frac{kL\pi}{a} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{2kL\pi}{a} \right] \left[ 1 + \frac{k^2 L^2}{n^2 a^2} \right]} \left[ 1 + \frac{1+\sigma}{1 + \frac{n^2 a^2}{k^2 L^2}} \right] \sin \frac{ky\pi}{a}$$

$$A_0 = \frac{M_{\text{appui}}}{2 e h a} = \text{fatigue moyenne sur appui} = \frac{p L^2}{6 e h a}$$

Nous prenons pour unité, la fatigue uniforme de la poutre sur deux appuis:

$$n_0 = \frac{p L^2}{4 e h a}$$

Sur appui et au milieu de la portée  $n_x'$  et  $-n_y'$  s'écrivent (rapportés à  $n_0$ ):

$$\text{appui} \quad \frac{L}{a} \frac{1}{2(1+\sigma)} n^1 = - \frac{a-y}{L} \frac{1}{1 - e^{\pi \frac{a-y}{L}}} - \sum \Theta_n$$

$$\text{milieu} \quad \frac{L}{a} \frac{1}{2(1+\sigma)} n^1 = - \frac{a-y}{L} \frac{1}{1 - e^{\pi \frac{a-y}{L}}} - \sum \Theta_n (-1)^n$$

$$\Theta_n = \left\{ \frac{\alpha}{n} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{L}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi y}{L}} + \frac{a-y}{L} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi (a-y)}{L}}{e^{\frac{n\pi a}{L}} \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{L}} - \frac{2a}{L} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi (a-y)}{L}}{\operatorname{ch} \frac{2n\pi a}{L} - 1} \right\}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\pi} & \text{pour } n_y \\ \frac{3+\sigma}{1+\sigma} \frac{1}{\pi} & \text{pour } n_x \end{cases}$$

### Résumé.

Dans ce mémoire, nous avons étudié divers cas de répartition des contraintes dans une table de compression d'une poutre, en partant des formules de l'élasticité plane et nous servant des développements connus en séries trigonométriques et hyperboliques. Nous indiquons ci-après les résultats obtenus.

La largeur utile  $2\lambda$  d'une table est définie par la largeur d'une table fictive qui subit une contrainte uniforme égale à la contrainte maxima de la table étudiée.

Pour une table de largeur infinie appartenant à une poutre uniformément chargée et de portée  $2L$ , la nervure ayant une inertie négligeable, le rapport  $\lambda/L$  a les valeurs 0,244 et 0,402 respectivement dans les deux cas de poutre continue et de poutre sur deux appuis.

Dans le cas de poutres continues chargées uniformément, avec des nervures distantes de  $2a$  (et approximativement dans le cas de tables de largeur  $2a$  avec une nervure centrale), les formules (28), (28') et le tableau correspondant donnent les valeurs de  $\lambda/L$  en fonction de  $a/L$  dans les deux hypothèses: nervure infiniment rigide ( $q = 0$ ) et nervure d'inertie négligeable ( $q = \infty$ ), le paramètre  $q$  étant défini par la formule (17).

Dans le cas de poutres sur deux appuis à nervures équidistantes la formule (44') et le tableau correspondant donnent les valeurs de  $\lambda/L$ .

Le diagramme 2 donne également les valeurs numériques dans les deux cas précités.

Enfin, pour des poutres sur deux appuis et des poutres continues uniformément chargées, le diagramme 1 donne la répartition des contraintes au milieu de la portée et sur appui, pour deux valeurs de l'écartement des nervures.

### Zusammenfassung.

Es werden die verschiedenen Fälle der Spannungsverteilung in der Druckplatte eines Plattenbalkens behandelt, ausgehend von den Formeln des ebenen Spannungszustandes unter Berücksichtigung der bekannten Entwicklungen in trigonometrischen und hyperbolischen Reihen. Wir geben nachstehend die erhaltenen Resultate an.

Die nutzbare Breite  $2\lambda$  einer gegebenen Platte ist bestimmt durch die Breite einer ideellen Platte, deren gleichmäßige Beanspruchung der Maximalspannung der zu untersuchenden Platte entspricht.

Für eine unendlich breite Platte eines gleichmäßig belasteten Balkens mit einer Spannweite  $2L$ , dessen Rippe eine unbedeutende Steifigkeit besitzt, hat das Verhältnis  $\lambda/L$  im Falle des durchlaufenden und des einfachen Balkens die Werte 0,244 bzw. 0,402.

Im Falle des gleichmäßig belasteten durchlaufenden Trägers mit Rippen im Abstand  $2a$  (und näherungsweise im Falle der Platte mit einer Breite  $2a$  und mit nur einer Mittelrippe) geben die Formeln (28), (28') und die entsprechende Tabelle die Werte von  $\lambda/L$  in Funktion von  $a/L$  an für die beiden Hypothesen: unendlich steife Rippe ( $q = 0$ ) und Rippe mit unbedeutender Steifigkeit ( $q = \infty$ ). Der Parameter  $q$  ist durch die Formel (17) bestimmt.

Im Falle der einfachen Balken mit Rippen in gleichen Abständen liefern die Formel (44') und die entsprechende Tabelle die Werte von  $\lambda/L$ .

Das Diagramm 2 enthält gleichfalls die numerischen Werte in den zwei vorgenannten Fällen.

Endlich gibt das Diagramm 1 für einfache Balken und gleichmäßig belastete durchlaufende Balken für zwei Werte der Entfernung der Rippen die Spannungsverteilung in der Mitte der Spannweite und auf den Auflagern.

### Summary.

In this paper a study has been made of different cases of distributions of strains in the compression slab of a  $T$  beam calculated in accordance with uni-planar formulae of elasticity making use of the customary trigonometrical and hyperbolic series. The results are given below.

The effective width  $2\lambda$  of such a slab is defined by reference to the width of an imaginary slab in which the strain is uniform and is equal to the maximum strain in the slab under discussion.

In the case of a slab of infinite width forming part of a uniformly loaded beam of span  $2L$ , having a stem of negligible width, the ratio  $\lambda/L$  has the value 0.244 and 0.402 in the two cases of a continuous beam and a simply supported beam respectively.

In the case of continuous beams carrying a uniform load in which the stems are at a distance of  $2a$  apart (and also, approximately, in the case of slabs of width  $2a$  having a central stem) the formulae (28) and (28') and the corresponding table supply the values of  $\lambda/L$  as a function of  $a/L$  under

the two hypotheses which correspond respectively to an infinitely stiff stem ( $q = 0$ ) and a stem of negligible moment of inertia ( $q = \infty$ ), the parameter  $q$  being defined by formula (17).

In the case of beams resting on two supports and having stems at equal distances the values of  $\lambda/L$  are given by formula (44') and the corresponding table.

Diagram No. 2 also gives the numerical values corresponding to the two cases mentioned above.

Finally, for beams carried on two supports and for continuous beams with a uniform loading, Diagram No. 1 shows the distribution of strains at the middle of the span and over the supports, corresponding to two different distances between the stems.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide