Das Einheitsgrössenverfahren zur Berechnung elastisch gestützter Durchlaufträger

DAS EINHEITSGRÖSSENVERFAHREN ZUR BERECHNUNG ELASTISCH GESTÜTZTER DURCHLAUFTRÄGER.

LA MÉTHODE DES «GRANDEURS UNITAIRES» POUR LE CALCUL DES POUTRES CONTINUES SUR APPUIS ÉLASTIQUES.

THE STANDARD MAGNITUDE PROCESS FOR CALCULATING FLEXIBLY SUPPORTED CONTINUOUS BEAMS.

Dipl. Ing. L. KULKA, Hannover.

Das hier beschriebene Verfahren hat zum Ziele, bei Berechnung elastisch gestützter Durchlaufträger die Aufstellung und Auflösung linearer Gleichungssätze zu vermeiden, indem gewisse Hilfsgrößen (Einheitsgrößen) Verwendung finden, die von Feld zu Feld, bezw. von Stützpunkt zu Stützpunkt fortschreitend, berechnet werden. Während man bei Anwendung des gleichen Grundgedankens auf die Berechnung starr gestützter Durchlaufträger (etwa nach dem Festpunktverfahren von RITTER [1]), dem Verfahren der Drehwiderstände nach MAYER [2]) oder dem Winkelverfahren von WIEDEMANN [3])) mit nur e i n e r Art von Hilfsgrößen auskommt, um den Grad der gegenseitigen elastischen Einspannung von Trägerabschnitten zu beschreiben, verlangt das hier behandelte Problem die Verwendung von vier Gruppen von Hilfsgrößen, die das elastische Verhalten von Trägerabschnitten unter dem Angriff gewisser Einheitsbelastungen kennzeichnen, und die hier als Einheitsgrößen bezeichnet werden. Nach Herleitung dieser Hilfsgrößen wird es auch hier möglich, die Stützenmomente (Einspannmomente) eines belasteten Trägerfeldes aus nur zwei linearen Gleichungen zu ermitteln. Das Abklingen der Stützenmomente von dem jeweils belasteten Felde nach beiden Enden des Trägerzuges kann auch hier in einfachster Weise berechnet werden. Die erwähnten Einheitsgrößen zusammen mit den Abnahmeverhältniszahlen der Stützenmomente gestatten auch eine rasche Aufstellung der Einflußlinien der Stützenmomente.

Unter elastischer Stützung wird hier eine Stützung verstanden, deren Baustoff dem Hooke'schen Geradliniengesetz folgt, oder die aus einem Schwimmkörper besteht, also allgemein eine Stützung, deren Nachgiebigkeit der Stützkraft verhältnisgleich ist.

Für den Trägerbaustoff gelte gleichfalls das Geradliniengesetz mit dem Elastizitätsmodul E.

---

[1]) RITTER, Anwendung der graphischen Statik. Zürich 1900.

[2]) MAYER, Neue Statik der Tragwerke aus biegesteifen Stäben. Bauwelt-Verlag, Berlin.

[3]) WIEDEMANN, Ein neues Verfahren praktischer Rahmenberechnung. Zeitschrift „Der Stahlbau" 1939, S. 125 u. ff.

Bezeichnungen:

Stützpunkte: 0, 1, 2, ... $n-1$, n.

Ein beliebiges Trägerfeld wird durch die Stützpunkte $r-1$, r, das jeweils belastete Feld durch die Stützpunkte i, k begrenzt.

Einzelstützweite: l_r.

Der die Biegesteifigkeit des Trägerstückes $r-1$, r kennzeichnende „Stabwert“:

$$S_r = \frac{EJ_r}{l_r}.$$

λ_r: lotrechte Verschiebung des Stützpunktes r durch eine am frei gemachten Stützenkopf lotrecht nach oben wirkende Kraft von 1 t. Zum Beispiel bei einer Stütze mit der Höhe h_r:

$$\lambda_r = \frac{1 \cdot h_r}{E \cdot F_r};$$

worin F_r = Stützenquerschnitt.

$\delta_{r,0}$ = lotrechter Weg des Stützpunktes r infolge einer Last von 1 t, die im Endpunkt r des von 0 bis r durchlaufenden Trägerzuges (Abschnittes) angreifend gedacht wird.

$\delta_{r,n}$ = entsprechend für den Endstützpunkt r des Trägerzuges r bis n.

$\mu_{r,0}$ = Winkeländerung (Summe aus Stab- und Tangentendrehwinkel) im Stützpunkt r des Trägerzuges $0 \ldots r$ durch ein in r angreifendes positives, also entgegen dem Uhrzeiger drehendes Moment von 1 tm.

$\mu_{r,n}$ = entsprechender Drehwinkel für den Trägerzug $r \ldots n$ durch ein positives, also im Sinne des Uhrzeigers in r angreifendes Moment. Es wird in dieser Abhandlung eine gelenkige, also frei drehbare Auflagerung des Durchlaufträgers in allen Stützpunkten vorausgesetzt. Eine Erweiterung auf den Fall einer biegesteifen Verbindung des Trägers mit den Stützen ist ohne weiteres möglich.

$\nu_{r,0}$, bezw. $\nu_{r,n}$ sind die Winkeländerungen im Stützpunkt r des Trägerzuges $0 \ldots r$, bezw. $n \ldots r$ durch eine lotrecht nach aufwärts gerichtete Kraft von 1 t in r.

$\varkappa_{r,0}$, bezw. $\varkappa_{r,n}$ sind die gleichzeitig mit den Winkeländerungen $\mu_{r,0}$, bezw. $\mu_{r,n}$ auftretenden lotrechten Verschiebungen des Stützpunktes r infolge des an diesem Punkte angreifenden positiven Einheitsmomentes am Trägerzug $0 \ldots r$, bezw. $n \ldots r$.

Ableitung der Einheitsgrößen für den Punkt r des Trägerzuges $0 \ldots r$ aus den entsprechenden Einheitsgrößen des Punktes $r-1$.

Vorzeichenregeln:

Biegungsmomente sind im üblichen Sinne positiv, wenn sie an der Trägerunterseite Zug erzeugen.

Winkeländerungen im Punkte $r-1$ werden für den Stab $r-1, r$ positiv gezählt, wenn sie im Uhrzeigerdrehsinn gegenüber der Richtung $r-1 \rightarrow r$ erfolgen.

Winkeländerungen im Punkte r des Stabes $r-1, r$ werden positiv gezählt, wenn sie im entgegengesetzten Sinn der Uhrzeigerdrehung von der Richtung $r \rightarrow r-1$ des unbelasteten Zustandes aus erfolgen. Kurz gesagt: positive Enddrehwinkel eines Stabes entsprechen dem Drehsinn eines positiven Angriffsmomentes am betreffenden Stabende. Die Stützpunktverschiebungen werden nach oben gerichtet positiv gezählt.

1. Angriffsmoment $M_r = +1$ am Stützpunkt r des Trägerzuges $0 \ldots r$. Wir bezeichnen das hierbei in $r-1$ auftretende Stützmoment mit $\mathfrak{M}^M_{r-1}$, wobei der obere Index andeutet, daß es die Folge eines Angriffsmomentes ist. Winkeländerung

$$\mu_{r,0} = \frac{1}{6S_r} \cdot (\mathfrak{M}^M_{r-1,0} + 2 \cdot 1) + (1 - \mathfrak{M}^M_{r-1,0}) \cdot \frac{\delta_{r-1} + \lambda_r}{l^2_r} - \frac{\mathfrak{M}^M_{r-1,0} \cdot \varkappa_{r-1}}{l_r} \tag{1}$$

2. Momentenangriff wie unter 1.

Hebung $\varkappa_{r,0}$ des mit der Stütze zugfest verbunden angenommenen Trägerpunktes r:

$$\varkappa_{r,0} = (1 - \mathfrak{M}^M_{r-1,0}) \cdot \frac{\lambda_r}{l_r} \tag{2}$$

3. Bestimmung von $\mathfrak{M}^M_{r-1,0}$ für die Fälle 1 und 2:

$$\frac{1}{6S_r}(2\mathfrak{M}^M_{r-1,0} + 1) + (\mathfrak{M}^M_{r-1,0} - 1) \cdot \frac{\delta_{r-1} + \lambda_r}{l^2_r} + \frac{\mathfrak{M}^M_{r-1,0} \cdot \varkappa_{r-1,0}}{l_r} + \mathfrak{M}^M_{r-1,0} \cdot \mu_{r-1,0} + (\mathfrak{M}^M_{r-1,0} - 1) \cdot \frac{\nu_{r-1,0}}{l_r} = 0 \tag{3}$$

4. Last von 1 t über dem Stützpunkt r des Trägerzuges $0 \ldots r$. Stützpunktverschiebung

$$\delta_{r,0} = \lambda_r \cdot \left(1 - \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{l_r}\right) \tag{4}$$

Hierin ist das bei $r-1$ auftretende Stützmoment mit $\mathfrak{M}^A_{r-1,0}$ bezeichnet, wobei der obere Index A auf die verursachende Auflast hinweist.

5. Last wie unter 4. Winkeländerung am Stützpunkt r:

$$\nu_{r,0} = + \frac{1 \cdot \lambda_r}{l_r} - \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{l^2_r}(\delta_{r-1,0} + \lambda_r + l_r \cdot \varkappa_{r-1,0}) + \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{6S_r} \tag{5}$$

Nach MAXWELL ist $\nu_{r,0} = \varkappa_{r,0}$.

6. Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{M}^A_{r-1,0}$ zu den Fällen 4 und 5:

$$\frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{3S_r} + \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{l^2_r}(\delta_{r-1,0} + \lambda_r) - \frac{1 \cdot \lambda_r}{l_r} + \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0} \cdot \varkappa_{r-1,0}}{l_r} + \mathfrak{M}^A_{r-1,0} \cdot \mu_{r-1,0} + \frac{\mathfrak{M}^A_{r-1,0}}{l_r} \cdot \nu_{r-1,0} = 0 \tag{6}$$

Unter Beachtung, daß $\varkappa_{r-1,0} = \nu_{r-1,0}$, kann für den praktischen Gebrauch auf Grund der Beziehungen (3) bezw. (6) auch geschrieben werden:

$$\mathfrak{M}^M_{r-1,0} = -\frac{Z^M_{r-1,0}}{N_{r-1,0}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{M}^A_{r-1,0} = \frac{Z^A_{r-1,0}}{N_{r-1,0}},$$

wobei

$$N_{r-1,0} = \frac{1}{3S_r} + \frac{\delta_{r-1,0} + \lambda_{r,0}}{l^2_r} + \mu_{r-1,0} + \frac{2\varkappa_{r-1,0}}{l_r}$$

$$Z^M_{r-1,0} = \frac{1}{6S_r} - \frac{\delta_{r-1,0} + \lambda_{r,0}}{l^2_r} - \frac{\varkappa_{r-1,0}}{l_r}$$

$$Z^A_{r-1,0} = -\frac{\lambda_{r,0}}{l_r}.$$

Betrachtung des Endfeldes *0, 1.*

Der Träger sei im Endpunkt 0 durch eine elastisch nachgiebige, lotrechte Stütze elastisch eingespannt und zwar so, daß die Einspannung unter einem vom Träger auf sie übertragenen Moment von $M_0 = 1$ tm um den Winkel μ_0 nachgibt. Für das Endfeld ist $\varkappa_0 = \nu_0 = 0$ und $\delta_0 = \lambda_0$ zu setzen.

Für starre Einspannung ist $\mu_0 = 0$, für ein Gelenklager μ_0 gleich ∞ zu setzen.

Für ein Moment $M_1 = +1$ ergibt sich das Einspannmoment in 0 mit

$$\mathfrak{M}^M_0 = -\frac{Z^M_0}{N_0}$$

worin $$Z^M_0 = 1 - \frac{6S_1}{l^2_1} \cdot (\lambda_0 + \lambda_1)$$

und $$N_0 = 2 + \frac{6S_1}{l^2_1} \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) + 6S_1 \cdot \mu_0.$$

Ferner wird für $M_1 = +1$ die Winkeländerung

$$\mu_{1,0} = \frac{1}{6S_1}(2 + \mathfrak{M}^M_0) + (1 - \mathfrak{M}^M_0) \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{l^2_1} \tag{1a}$$

bezw. die Stützpunktverschiebung bei 1:

$$\varkappa_{1,0} = (1 - \mathfrak{M}^M_0) \cdot \frac{\lambda_1}{l_1} \tag{2a}$$

Endfeld 0,1 für eine aufwärts gerichtete Last von 1 t in 1:

Einspannmoment: $$\mathfrak{M}^A_0 = +\frac{6S_1 \cdot \lambda_1}{l_1} : N_0$$

Zugehörige Stützenverschiebung in 1: $$\delta_{1,0} = \left(1 - \frac{\mathfrak{M}^A_0}{l_1}\right) \cdot \lambda_1 \tag{4a}$$

Winkeländerung dortselbst: $$\nu_{1,0} = \frac{\mathfrak{M}^A_0}{6S_1} + 1 \cdot \frac{\lambda_1}{l_1} - \mathfrak{M}^A_0 \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{l^2_1} \tag{5a}$$

Betrachtung eines belasteten Feldes *i, k,*

wobei alle übrigen Felder unbelastet angenommen sind.

An dem aus dem Zusammenhang gelöst und unverschieblich gestützt gedachten Trägerfeld i, k möge die äußere Belastung erzeugen bei i: die Winkeländerung α_0 bezw. den Auflagerdruck A_0, bei k: die Winkeländerung β_0 bezw. den Auflagerdruck B_0. Die Auflagerdrücke A_0 und B_0 werden nach unten wirkend positiv gezählt.

Zur Bestimmung der beiden Stützenmomente M_i und M_k des belasteten Feldes stehen folgende zwei Gleichungen zur Verfügung:

$$\alpha_0 + \frac{1}{l_k} \cdot (B_0 \cdot \delta_{k,n} - A_0 \cdot \delta_{i,0}) + \frac{1}{l^2_k} \cdot (M_i - M_k) \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n})$$

$$+ \frac{1}{l_k} \cdot (M_i \cdot \varkappa_{i,0} - M_k \cdot \varkappa_{k,n}) + M_i \cdot \mu_{i,0} + \frac{1}{l_k} \cdot (M_i - M_k) \cdot \nu_{i,0}$$

$$+ \frac{1}{6 S_k} \cdot (2 M_i + M_k) = 0 \tag{7a}$$

$$\beta_0 + \frac{1}{l_k} \cdot (A_0 \cdot \delta_{i,0} - B_0 \cdot \delta_{k,n}) + \frac{1}{l^2_k} \cdot (M_k - M_i) \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n})$$

$$+ \frac{1}{l_k} \cdot (M_k \cdot \varkappa_{k,n} - M_i \cdot \varkappa_{i,0}) + M_k \cdot \mu_{k,n} + \frac{1}{l_k} \cdot (M_k - M_i) \cdot \nu_{k,n}$$

$$+ \frac{1}{6 S_k} \cdot (M_i + 2 M_k) = 0. \tag{7b}$$

Die Gleichungen (7 a) und (7 b) können nun in der abgekürzten Form geschrieben werden:

$$K_{i,i} \cdot M_i + K_{i,k} \cdot M_k = Z_i$$
$$K_{k,i} \cdot M_i + K_{k,k} \cdot M_k = Z_k.$$

Hierin bedeuten:

$$K_{i,i} = \frac{1}{3 S_k} + \frac{1}{l^2_k} \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n}) + \frac{\varkappa_{i,0}}{l_k} + \mu_{i,0} + \frac{1}{l_k} \cdot \nu_{i,0}$$

$$K_{i,k} = \frac{1}{6 S_k} - \frac{1}{l^2_k} \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n}) - \frac{1}{l_k} \cdot \varkappa_{k,n} - \frac{1}{l_k} \cdot \nu_{i,0}$$

$$K_{k,i} = \frac{1}{6 S_k} - \frac{1}{l^2_k} \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n}) - \frac{1}{l_k} \cdot \varkappa_{i,0} - \frac{1}{l_k} \cdot \nu_{k,n}.$$

Nach MAXWELL ist $K_{i,k} = K_{k,i}$, was auch sofort ersichtlich ist, wenn man beachtet, daß $\varkappa_{k,n} = \nu_{k,n}$ und $\nu_{i,0} = \varkappa_{i,0}$.

$$K_{k,k} = \frac{1}{3 S_k} + \frac{1}{l^2_k} \cdot (\delta_{i,0} + \delta_{k,n}) + \frac{\varkappa_{k,n}}{l_k} + \mu_{k,n} + \frac{1}{l_k} \cdot \nu_{k,n}$$

$$Z_i = -\alpha_0 + \frac{1}{l_k} \cdot (A_0 \cdot \delta_{i,0} - B_0 \cdot \delta_{k,n})$$

$$Z_k = -\beta_0 + \frac{1}{l_k} \cdot (B_0 \cdot \delta_{k,n} - A_0 \cdot \delta_{i,0})$$

Mit vorstehenden Bezeichnungen wird:

$$M_i = \frac{Z_i \cdot K_{k,k} - Z_k \cdot K_{i,k}}{K_{i,i} \cdot K_{k,k} - K_{i,k}^2}$$

und

$$M_k = \frac{Z_k \cdot K_{i,i} - Z_i \cdot K_{i,k}}{K_{i,i} \cdot K_{k,k} - K_{i,k}^2}. \tag{8}$$

Berechnungsvorgang im Falle nur eines belasteten Feldes *i, k*.

Es werden von 1 gegen n fortschreitend die Hilfswerte (Einheitsgrößen) $\varkappa_{1,0}$ bis $\varkappa_{n,0}$, $\delta_{1,0}$ bis $\delta_{n,0}$, $\mu_{1,0}$ bis $\mu_{n,0}$ und zur Kontrolle $\nu_{1,0}$ bis $\nu_{n,0}$ und sodann von $n-1$ gegen 0 fortschreitend die Hilfswerte $\varkappa_{n-1,n}$ bis $\varkappa_{0,n}$, $\delta_{n-1,n}$ bis $\delta_{0,n}$, $\mu_{n-1,n}$ bis $\mu_{0,n}$ und zur Kontrolle $\nu_{n-1,n}$ bis $\nu_{0,n}$ gerechnet. Nach Ermittlung der Auflagerdrücke A_0 und B_0 sowie der Winkeländerungen α_0 und β_0 eines unverschieblich gestützt gedachten Einzelbalkens i, k infolge der äußeren Belastung dieses Feldes gewinnt man die Stützenmomente M_i und M_k des belasteten Feldes durch Aufstellung der Gleichungen (7a) und (7b) und deren Auflösung mittels der Ansätze (8).

Aus dem Stützenmoment M_i können nun die Stützenmomente in den Punkten $i-1$, $i-2$, ... 1 und gegebenenfalls das Einspannmoment in 0 fortschreitend berechnet werden, wozu man sich der mittels der Gleichungen (3) bezw. (6) früher schon ermittelten „Einheitsmomente“ $\mathfrak{M}^M_{r-1,0}$ bezw. $\mathfrak{M}^A_{r-1,0}$ bedient. Um z. B. das Stützenmoment M_{i-1} zu berechnen, bestimmen wir zuerst den aus der äußeren Belastung und den Stützenmomenten M_i und M_k entspringenden Auflagerdruck $A_{i,k}$ des Einzelbalkens i, k, also: $A_{i,k} = A_0 + \dfrac{M_k - M_i}{l_k}$. $A_{i,k}$ wird nach abwärts wirkend positiv gezählt. Sodann ergibt sich das Stützenmoment in $i-1$ wie folgt:

$$M_{i-1} = M_i \cdot \mathfrak{M}^M_{i-1,0} - A_{i,k} \cdot \mathfrak{M}^A_{i-1,0}.$$

M_i und $A_{i,k}$ sind in diese Gleichung ebenso wie die Einheitsmomente mit ihrem Vorzeichen einzuführen.

In analoger Weise werden aus M_k hintereinander die Stützenmomente in $k+1$, $k+2$ ... $n-1$ und gegebenenfalls in n hergeleitet.

Bezeichnet $B_{i,k}$ den rechten Auflagerdruck des Einzelbalkens i, k im Werte von

$$B_{i,k} = B_0 + \frac{M_i - M_k}{l_k},$$

so erhält man M_{k+1} aus:

$$M_{k+1} = M_k \cdot \mathfrak{M}^M_{k+1,n} - B_{i,k} \cdot \mathfrak{M}^A_{k+1,n}.$$

Wir haben hier mit dem 2. Index n des Einheitsmomentes $\mathfrak{M}^M_{k+1,n}$ und $\mathfrak{M}^A_{k+1,n}$ angedeutet, daß sich diese Einheitsmomente auf den in n beginnenden Trägerzug beziehen. $B_{i,k}$ ist nach abwärts wirkend als positiv anzusehen.

Einflußlinie für das an einem beliebigen Stützpunkt *r* auftretende Stützenmoment M_r.

Wir denken uns den Durchlaufträger durch einen lotrechten Schnitt unmittelbar rechts von r in die beiden Trägerzüge $0 \ldots r$ und $r \ldots n$ zerlegt und bringen an der Schnittstelle die Gegenmomente $\mathfrak{M}_r$ als positive Momente und die Gegenkräfte $\mathfrak{Q}_r$ als positive Querkräfte an. Ermitteln wir die Größe von $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ so, daß die Biegelinien der beiden Trägerzüge in r mit einem Winkel vom Bogenmaße 1 zusammenstoßen, ohne daß die Schnittflächen sich in Richtung der $\mathfrak{Q}_r$ gegenseitig verschieben, so stellen diese Biegelinien die Einflußlinie für M_r dar. (Vergl. L. Kulka, „Beitrag zur Berechnung der Einflußlinien statisch unbestimmter Systeme“. Zeitschrift „Die Bautechnik“, 1930, S. 496 und R. Kušević, „Nullfeldverfahren“, Zeitschrift „Der Stahlbau“, 1939, S. 121 ff. und die dort angegebenen Quellen.)

Die Bestimmungsgleichungen für $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_r \cdot \varphi_{m,m} + \mathfrak{Q}_r \cdot \varphi_{m,q} &= 1 \\ \mathfrak{M}_r \cdot \delta_{q,m} + \mathfrak{Q}_r \cdot \delta_{q,q} &= 0. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß nach MAXWELL $\varphi_{m,q} = \delta_{q,m}$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_r = \frac{\delta_{q,q}}{N} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_r = -\frac{\delta_{q,m}}{N},$$

wobei

$$N = \varphi_{m,m} \cdot \delta_{q,q} - \delta^2_{q,m};$$

$$\varphi_{m,m} = \mu_{r,0} + \mu_{r+1,n} + \frac{1}{S_{r+1}};$$

$$\delta_{q,q} = \delta_{r,0} + \delta_{r+1,n} + l^2_{r+1} \cdot \mu_{r+1,n} + l_{r+1} \cdot \varkappa_{r+1,n} + l_{r+1} \cdot \nu_{r+1,n} + \frac{l^2_{r+1}}{3\,S_{r+1}};$$

$$\delta_{q,m} = -\varkappa_{r,0} + \varkappa_{r+1,n} + l_{r+1} \cdot \mu_{r+1,n} + \frac{l_{r+1}}{2\,S_{r+1}}.$$

Nun ermitteln wir die durch $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{Q}_r$ an den übrigen Stützpunkten entstehenden Stützenmomente.

$$\mathfrak{M}_{r-1} = \mathfrak{M}_r \cdot \mathfrak{M}^M_{r-1,0} - \mathfrak{Q}_r \cdot \mathfrak{M}^A_{r-1,0}$$

$$\mathfrak{M}_{r-2} = \mathfrak{M}_{r-1} \cdot \mathfrak{M}^M_{r-2,0} - \frac{\mathfrak{M}_r - \mathfrak{M}_{r-1}}{l_r} \cdot \mathfrak{M}^A_{r-2,0} \;.\;.$$

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \cdot \mathfrak{M}^M_{1,0} - \frac{\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_2}{l_3} \cdot \mathfrak{M}^A_{1,0}$$

$$\mathfrak{M}_{r+1} = \mathfrak{M}_r + \mathfrak{Q}_r \cdot l_{r+1}; \quad \mathfrak{M}_{r+2} = \mathfrak{M}_{r+1} \cdot \mathfrak{M}^M_{r+2,n} + \mathfrak{Q}_r \cdot \mathfrak{M}^A_{r+2,n};$$

$$\mathfrak{M}_{r+3} = \mathfrak{M}_{r+2} \cdot \mathfrak{M}^M_{r+3,n} - \frac{\mathfrak{M}_{r+1} - \mathfrak{M}_{r+2}}{l_{r+2}} \cdot \mathfrak{M}^A_{r+3,n}.$$

Sämtliche $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}^m$ und $\mathfrak{M}^A$ sind mit ihrem Vorzeichen einzuführen. Dadurch, daß wir $\mathfrak{M}_r$ als positives Moment angenommen haben, ergeben sich die negativen Einflußordinaten für das Stützenmoment M_r als nach abwärts gerichtete Biegeordinaten der Trägerzüge $0 \ldots r$ und $r \ldots n$ entsprechend dem durch die $\mathfrak{M}$ bestimmten Momentenverlauf unter Berücksichtigung der durch die Wirkung dieser $\mathfrak{M}$ entstehenden lotrechten Stützenverschiebungen y.

An einem beliebigen Stützpunkt s beträgt diese Stützenverschiebung und damit die Einflußordinate für M_r:

$$y_{s,r} = + \left[\frac{\mathfrak{M}_s - \mathfrak{M}_{s-1}}{l_s} + \frac{\mathfrak{M}_s - \mathfrak{M}_{s+1}}{l_{s+1}}\right] \cdot \lambda_s.$$

Positive y_s sind von der Abszissenachse der Einflußlinie nach oben aufzutragen. Von dem hierdurch bestimmten Polygonzuge sind die dem Momentenverlauf der $\mathfrak{M}$ für den nunmehr unverschieblich gestützt gedachten Trägerzug entsprechenden Biegeordinaten in ihrem tatsächlichen Sinne aufzutragen, also z. B. in den Feldern $r-1, r$ und $r, r+1$ nach abwärts.

Die Einflußordinate für ein Stützenmoment M_r unter einer Last im Felde $s-1, s$ und zwar im Abstand

$x = \xi \cdot l_s$ von $s-1$, bezw.

$x' = \xi' \cdot l_s$ von s ergibt sich nach dem Vorstehenden zu:

$$\eta_x = + \xi \cdot y_s + \xi' \cdot y_{s-1} - \frac{x}{6\,S_s} \cdot \mathfrak{M}_s \cdot (1 - \xi^2) - \frac{x'}{6\,S_s} \cdot \mathfrak{M}_{s-1} \cdot (1 - \xi'^2),$$

wobei $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_{s-1}$ mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind. Zur Kontrolle können einzelne Einflußordinaten durch Anwendung der Gleichung (7) bezw. der Ansätze (8) nachgerechnet werden.

Für eine Last im Abstand $x = \xi \cdot l_k$ von i, bezw. $x' = \xi' \cdot l_k$ von k ist in (7) und (8) einzuführen:

$$A_0 = \xi'; \; B_0 = \xi; \; \alpha_0 = \frac{1}{6\,S_k} \cdot \xi \cdot \xi' \cdot (2\,l_k - x);$$

$$\beta_0 = \frac{1}{6\,S_k} \cdot \xi \cdot \xi' \cdot (2\,l_k - x').$$

Bei dieser Kontrolle ergeben sich gleichzeitig die Einflußordinaten im Punkte x für M_i und M_k.

Der Vorteil des hier für die Ermittlung von Einflußlinien der Stützenmomente gebrachten Verfahrens erhellt aus dem Umstande, daß bei dem bisher üblichen Verfahren bei einem n-feldrigen Durchlaufträger auf elastischen, mit dem Träger frei drehbar verbundenen Stützen für jedes der $n-1$ Stützenmomente M_r ein Satz von $n-1$ linearen Gleichungen aufzulösen ist, um die Momentenbelastung der $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Jede dieser linearen Gleichungen enthält 3 bis 5 unbekannte $\mathfrak{M}$.

Die Anwendung des Grundgedankens dieser Arbeit auf andere baustatische Aufgaben unter Berücksichtigung der Knotenpunktverschiebungen bleibt einer besonderen Arbeit vorbehalten.

Zahlenbeispiele.

Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens soll an dem Beispiel einer Schwimmbrücke gezeigt werden, das in MÜLLER-BRESLAU, „Die graphische Statik der Baukonstruktionen“, 2. Band, II. Abt., S. 147 auf andere Weise behandelt ist.

Die über sieben gleiche Felder von je $l = 12{,}0$ m durchlaufenden Streckbalken weisen zusammen ein über die ganze Länge gleichbleibendes Querschnittsträgheitsmoment von $J = 0{,}0126$ m^4 auf. $E = 215 \cdot 10^5$ t/m^2. Die zur Unterstützung dienenden acht Schiffe weisen eine Grundfläche von je 100 m^2 auf, sodaß ein Schiff bei einer Einsenkung von 1,0 m einen Stützenwiderstand von 100 t leistet, bezw. die Einsenkung je t: $\lambda = 1/100$ m beträgt. Es sollen die Einflußlinien der Stützenmomente berechnet werden.

Nach obigen Angaben beträgt der Stabwert $S = \dfrac{E \cdot J}{l} = 22\,575$ tm.

Ermittlung der Einheitsgrößen.

Die Enden der Streckbalken sind gelenkig gelagert, sodaß $M_0 = M_7 = 0$.

Punkt 1.

Aus Gleichung (1 a):

$$\mu_{1,0} = \frac{2}{6 \cdot 22575} + \frac{2}{100 \cdot 12^2} = 0{,}000153656$$

Aus Gleichung (2 a), bezw. (5 a):

$$\varkappa_{1,0} = \nu_{1,0} = \frac{1}{12 \cdot 100} = 0{,}0008333$$

Aus Gleichung (4a):

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Punkt 2.

Aus Gl. (3): $\mathfrak{M}^M_{1,0} = -\frac{Z^M_{1,0}}{N_{1,0}};$

$$Z^M_{1,0} = \frac{1}{6 \cdot 22575} - \frac{0{,}01 + 0{,}01}{12^2} - \frac{0{,}0008333}{12} = -0{,}000200951$$

$$N_{1,0} = \frac{1}{3 \cdot 22575} + \frac{0{,}01 + 0{,}01}{12^2} + 0{,}000153656 + \frac{2 \cdot 0{,}0008333}{12}$$
$$= 0{,}0004462$$

somit $\mathfrak{M}^M_{1,0} = +\frac{0{,}000200951}{0{,}0004462} = +0{,}45036.$

Aus Gl. (6): $\mathfrak{M}^A_{1,0} = -\frac{Z^A_{1,0}}{N_{1,0}};$

$$Z^A_{1,0} = -\frac{0{,}01}{12} = -0{,}0008333$$

somit $\mathfrak{M}^A_{1,0} = +\frac{0{,}000833}{0{,}0004462} = +1{,}8676$

Aus Gl. (1): $\mu_{2,0} = \frac{1}{6 \cdot 22575} \cdot (0{,}45036 + 2) + (1 - 0{,}45036) \cdot \frac{0{,}01 + 0{,}01}{12^2}$
$$- \frac{0{,}45036 \cdot 0{,}0008333}{12} = 0{,}000063157.$$

Aus Gl. (2): $\varkappa_{2,0} = (1 - 0{,}45036) \cdot \frac{0{,}01}{12} = 0{,}00045803$

Aus Gl. (4): $\delta_{2,0} = 0{,}01 \cdot \left(1 - \frac{1{,}8676}{12}\right) = 0{,}0084437.$

Zur Kontrolle aus Gleichung (5):

$$\nu_{2,0} = 0{,}00045803 = \varkappa_{2,0} \text{ wie oben.}$$

In gleicher Weise werden die Werte $\mathfrak{M}^M$, $\mathfrak{M}^A$, $\mu_{r,0}$, $\varkappa_{r,0} = \nu_{r,0}$ und $\delta_{r,0}$ für die Punkte 3 bis 7 abgeleitet. Eine besondere Ableitung der Werte $\mu_{r,n}$, $\varkappa_{r,n} = \nu_{r,n}$ und $\delta_{r,n}$ erübrigt sich aus Symmetriegründen, da z. B. $\mu_{3,0} = \mu_{4,7}$ usw.

Die Hilfsmomente $\mathfrak{M}^M$ und $\mathfrak{M}^A$ sowie die Einheitsgrößen sind in der nachstehenden Tafel zusammengestellt.

Index	$\mathfrak{M}^M$	$\mathfrak{M}^A$	μ	δ	$x = \nu$
1,0 bezw. 6,7	0,45036	1,8676	0,000153656	0,01	0,00083333
2,0 bezw. 5,7	0,5627	2,9514	0,000063157	0,0084437	0,00045803
3,0 bezw. 4,7	0,57741	3,3231	0,000053452	0,0075405	0,00036442
4,0 bezw. 3,7	0,57548	3,3863	0,000052968	0,0072307	0,00035216
5,0 bezw. 2,7	0,5749	3,3884	0,000052926	0,0071781	0,00035377
6,0 bezw. 1,7	0,5752	3,3895	0,000052773	0.0071763	0,00035425
7,0 bezw. 0,7	—	—	0,000052701	0,0071754	0,000354

Ermittlung der Einflußlinie für das Stützmoment im Punkte 1.

$$\varphi_{m,m} = \mu_{r,0} + \mu_{r+1,n} + \frac{1}{S_{r+1}} = 0{,}000153656 + 0{,}000052926 + \frac{1}{22575}$$
$$= 0{,}000250879$$

$$\delta_{q,q} = \delta_{r,0} + \delta_{r+1,n} + l^2_{r+1} \cdot \mu_{r+1,n} + 2\, l_{r+1} \cdot \varkappa_{r+1,n} + \frac{l^2_{r+1}}{3\, S_{r+1}}$$
$$= 0{,}01 + 0{,}0071781 + 12^2 \cdot 0{,}000052926 + 2 \cdot 12 \cdot 0{,}00035377 + \frac{12^2}{3 \cdot 22575}$$
$$= 0{,}0354159$$

$$\delta_{q,m} = -\varkappa_{r,0} + \varkappa_{r+1,n} + l_{r+1} \cdot \mu_{r+1,n} + \frac{l_{r+1}}{2\, S_{r+1}} = -0{,}00083333$$
$$+ 0{,}00035377 + 12 \cdot 0{,}000052926 + \frac{12}{2 \cdot 22575} = 0{,}000421331$$

$$N = \varphi_{m,m} \cdot \delta_{q,q} - \delta^2_{q,m} = 0{,}000250879 \cdot 0{,}0354159 - 0{,}000421331^2$$
$$= 0{,}00000870768$$

$$\mathfrak{M}_{1,1} = \frac{\delta_{q,q}}{N} = \frac{0{,}0354159}{0{,}00000870768} = 4067{,}2$$

$$\mathfrak{Q}_1 = -\frac{\delta_{q,m}}{N} = -\frac{0{,}000421331}{0{,}00000870768} = -48{,}384$$

$$\mathfrak{M}_{2,1} = \mathfrak{M}_{1,1} + \mathfrak{Q}_1 \cdot l = 4067{,}2 - 48{,}384 \cdot 12 = 3486{,}592$$

$$\mathfrak{M}_{3,1} = \mathfrak{M}_{2,1} \cdot \mathfrak{M}^M_{3,7} + \mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{M}^A_{3,7} = 3486{,}592 \cdot 0{,}57548 - 48{,}384 \cdot 3{,}3863 = 1842{,}65$$

$$\mathfrak{M}_{4,1} = \mathfrak{M}_{3,1} \cdot \mathfrak{M}^M_{4,7} - \mathfrak{M}^A_{4,7} \cdot \frac{\mathfrak{M}_{2,1} - \mathfrak{M}_{3,1}}{l} = 1842{,}65 \cdot 0{,}57741$$
$$- 3{,}3231 \cdot \left(\frac{3486{,}592 - 1842{,}65}{12}\right) = 608{,}74$$

$$\mathfrak{M}_{5,1} = 608{,}74 \cdot 0{,}5627 - 2{,}9514 \cdot \frac{1842{,}65 - 608{,}74}{12} = 39{,}05$$

$$\mathfrak{M}_{6,1} = 39{,}05 \cdot 0{,}45036 - 1{,}8676 \cdot \frac{608{,}74 - 39{,}05}{12} = -71{,}078$$

$$y_{0,1} = -\frac{\mathfrak{M}_{1,1}}{l} \cdot \lambda = -\frac{1 \cdot 4067{,}2}{12 \cdot 100} = -3{,}388$$

$$y_{1,1} = +\left[\frac{\mathfrak{M}_{1,1}}{l} + \frac{\mathfrak{M}_{1,1} - \mathfrak{M}_{2,1}}{l}\right] \cdot \lambda = \frac{2\,\mathfrak{M}_{1,1}}{l} \cdot \lambda - \frac{\mathfrak{M}_{2,1}}{l} \cdot \lambda = 2 \cdot 3{,}388$$
$$- \frac{3486{,}592}{100 \cdot 12} = 3{,}871$$

$$y_{2,1} = +\left[\frac{\mathfrak{M}_{2,1} - \mathfrak{M}_{1,1}}{l} + \frac{\mathfrak{M}_{2,1} - \mathfrak{M}_{3,1}}{l}\right] \cdot \lambda = \frac{2\,\mathfrak{M}_{2,1}}{l} \cdot \lambda - \frac{\mathfrak{M}_{1,1}}{l} \cdot \lambda$$
$$- \frac{\mathfrak{M}_{3,1}}{l} \cdot \lambda = 2 \cdot 2{,}905 - 3{,}388 - \frac{1842{,}65}{12 \cdot 100} = 0{,}886$$

$$y_{3,1} = \frac{2\,\mathfrak{M}_{3,1} - \mathfrak{M}_{2,1} - \mathfrak{M}_{4,1}}{l} \cdot \lambda = -\,0{,}340.$$

In analoger Weise erhält man:

$$y_{4,1} = -\,0{,}555; \qquad y_{5,1} = -\,0{,}382;$$
$$y_{6,1} = -\,0{,}151; \qquad y_{7,1} = 0{,}059.$$

Da im vorliegenden Fall für alle Stützpunkte λ denselben Wert hat, sind die y den Auflagerdrücken infolge der Momentenbelastung durch $\mathfrak{M}_{1,1}$ ... $\mathfrak{M}_{7,1}$ verhältnisgleich. Deshalb muß $\sum\limits_0^7 y = 0$ werden, ebenso wie dies für die Summe der Auflagerkräfte durch die erwähnte Momentenbelastung gilt.

Ermittlung der Einflußordinaten des Stützenmomentes M_1 in den Feldmitten.

Im Felde betragen die Ordinaten:

$$\eta_x = \xi \cdot y_s + \xi' \cdot y_{s-1} + Z_s, \text{ wobei}$$

$$Z_s = -\,\frac{x}{6\,S_s} \cdot \mathfrak{M}_s\,(1 - \xi^2) - \frac{x'}{6\,S_s} \cdot \mathfrak{M}_{s-1} \cdot (1 - \xi'^2).$$

Wir wollen die Ordinaten η nur in den Feldmitten bestimmen, also für $x = l/2$, bezw. $\xi = \xi' = 1/2$; hierfür wird:

$$Z_s = -\,\frac{3 \cdot l_s}{8 \cdot 6 \cdot S_s} \cdot (\mathfrak{M}_{s-1} + \mathfrak{M}_s) = -\,0{,}000033222\,(\mathfrak{M}_{s-1} + \mathfrak{M}_s)$$

$$\begin{aligned}
Z_{1,1} &= -\,0{,}000033222 \cdot 4067{,}2 = -\,0{,}135 \\
Z_{2,1} &= -\,0{,}135 - 0{,}000033222 \cdot 3486{,}592 = -\,0{,}135 - 0{,}116 = -\,0{,}251 \\
Z_{3,1} &= -\,0{,}116 - 0{,}000033222 \cdot 1842{,}65 = -\,0{,}116 - 0{,}061 = -\,0{,}177 \\
Z_{4,1} &= -\,0{,}061 - 0{,}000033222 \cdot 608{,}74 = -\,0{,}061 - 0{,}020 = -\,0{,}081 \\
Z_{5,1} &= -\,0{,}02 \;\; - 0{,}000033222 \cdot 39{,}05 = -\,0{,}02 - 0{,}001 = -\,0{,}021 \\
Z_{6,1} &= -\,0{,}001 + 0{,}000033222 \cdot 71{,}078 = -\,0{,}001 + 0{,}002 = +\,0{,}001 \\
Z_{7,1} &= +\,0{,}002.
\end{aligned}$$

Damit beträgt die Einflußordinate des Stützenmomentes M_1 z. B. in Mitte des Feldes 1, 2:

$$\eta = \frac{y_{1,1} + y_{2,1}}{2} + Z_{2,1} = \frac{+\,3{,}871 + 0{,}886}{2} - 0{,}251 = +\,2{,}128.$$

Der Vorgang bei der Ermittlung der Einflußlinien für die Stützenmomente M_2 und M_3 ist derselbe, wie vorstehend für M_1 gezeigt.

Bei der praktischen Anwendung des Verfahrens wird man, um das Rechnen mit kleinen Dezimalzahlen zu vermeiden, von der dem Statiker geläufigen Erweiterung mit einer konstanten Größe Gebrauch machen, also z. B. mit den $E\,J_c$-fachen oder den S_c-fachen Einheitsgrößen rechnen.

Zum Schluß sei noch auf die Eigenschaft der $\mathfrak{M}^M$, $\mathfrak{M}^A$ und der Einheitsgrößen μ, ν und δ hingewiesen, bei gleichen S_r-Werten rasch einem Grenzwert zuzustreben, wie dies aus der Tafel des Zahlenbeispieles ersichtlich ist.

Hieraus ergibt sich für den meist vorliegenden Fall gleicher Feldsteifigkeiten S_r die Möglichkeit einer wesentlichen Ersparnis an Rechenarbeit, indem man sich bei der Aufstellung der genannten Größen auf nur einige wenige Felder (Indizes r) beschränken kann. Von diesem Vorteil wird man besonders bei einer größeren Felderzahl n Gebrauch machen.

Zusammenfassung.

Das vielfach statisch unbestimmte System wird schrittweise aufgebaut, indem, ausgehend vom ersten, resp. letzten Feld, sukzessive ein unbelastetes Feld angehängt wird und mit Hilfe des zuvor berechneten Systems die Momentenverteilung infolge angreifender „Einheitslasten" (Moment, Querkraft) berechnet wird. Hierbei bedient der Verfasser sich der vier „Einheitsgrößen", das sind die Formänderungen (Verdrehungen, Verschiebungen) der Schnittstelle infolge der Einheitslasten. Am herausgetrennten belasteten Feld verbleiben schließlich zwei überzählige Stützenmomente, die mit Hilfe von zwei Elastizitätsgleichungen zu berechnen sind.

Résumé.

Le système plusieurs fois statiquement indéterminé est établi par étapes en ce sens partant de la première, ou de la dernière travée, on ajoute successivement une travée non chargée pour calculer la répartition des moments engendrés par les „charges unitaires" agissantes (Moment, effort tranchant) à l'aide du système calculé précédemment. Pour cela l'auteur se sert des quatre „grandeurs unitaires", c. à d. des déformations (rotations, déplacements) de la section sous l'action des charges unitaires. Il ne restera finalement que deux moments d'appuis hyperstatiques à la travée chargée que l'on aura détachée; on pourra les calculer à l'aide de deux équations d'élasticité.

Summary.

The very statically indeterminate system is built up step by step by starting from the first, or last field and attaching successively one unloaded field; the distribution of moments in consequence of applied "standard loads" (moment, transverse force) is calculated with the help of the previously calculated system. For this the author makes use of the 4 "standard magnitudes", that is to say the changes of shape (twists, displacements) of the section in consequence of the standard loads. On the separated loaded field two redundant supporting moments finally remain, which are to be calculated with the help of two elasticity equations.