Der eingespannte Bogen mit Versteifungsträger

DER EINGESPANNTE BOGEN MIT VERSTEIFUNGSTRÄGER.

L'ARC ENCASTRÉ AVEC POUTRE RAIDISSEUSE.

THE ENCASTRE ARCH WITH STIFFENING GIRDER.

Prof. Dr. M. RITTER, Eidg. Techn. Hochschule, Generalsekretär für Eisenbetonbau der I. V. B. H., Zürich.

Bei Bogenbrücken in Eisenbeton gelangt häufig das in Fig. 1 skizzierte Tragsystem zur Anwendung. Es besteht aus einem vollwandigen, beidseitig vollständig eingespannten Bogenträger, auf den sich der waagrechte Fahrbahnträger, nachstehend Versteifungsträger genannt, durch biegungsfeste oder gelenkige Pfosten abstützt. Die strenge Berechnung dieses vielfach statisch unbestimmten Systems als Rahmenträger mit verschieblichen Knoten erscheint für die Anwendung sehr umständlich; man hat sich daher in der Praxis bisher meist damit begnügt, den Bogenträger als freien Bogen zu untersuchen, während der Fahrbahnträger als durchlaufender Balken auf festen Stützen betrachtet und bemessen wurde. Dieses Vorgehen ergibt im Bogen zu große, im Versteifungsträger zu geringe Biegungsmomente. Der begangene Fehler hängt ab von dem Verhältnis der Trägheitsmomente beider Konstruktionsteile und erreicht unter Umständen große Beträge; außerdem ermöglicht die genannte Näherungsberechnung nicht, die wichtigen Einflüsse von Temperaturänderungen und Widerlagerverschiebungen auf dem Versteifungsträger festzustellen.

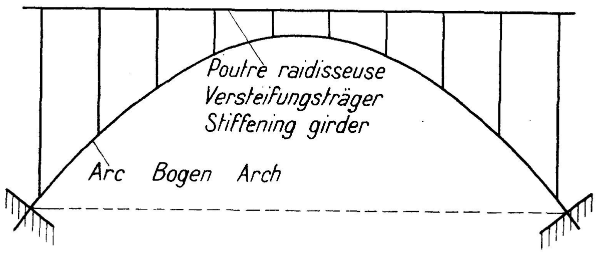

Fig. 1

Nachstehend wird eine einfache Berechnungsmethode für den eingespannten Bogen mit Versteifungsträger vorgeführt, die ohne großen Rechenaufwand das Zusammenwirken zwischen Bogen und Aufbau zu berücksichtigen erlaubt. Die Methode beruht auf der Einführung eines gedachten Ersatzbogens, dessen Trägheitsmomente so gewählt sind, daß er sich als freier Bogen gleich deformiert, wie das wirkliche System; im übrigen werden einige vereinfachende Annahmen getroffen, die — abgesehen von Sonderfällen — keine wesentlichen Fehler bedingen und deren Tragweite sich überprüfen läßt. Die Ergebnisse können zum Ausgangspunkt eines Iterationsverfahrens gewählt werden; indessen dürfte in der Regel der erste Rechnungsgang allein bereits eine befriedigende Genauigkeit bieten.

1. Voraussetzungen.

Es wird von den üblichen Voraussetzungen der Baustatik für biegungsfeste Stabwerke im elastischen Bereiche Gebrauch gemacht, insbesondere von der Annahme relativ kleiner Formänderungen (Problem 1. Ordnung). In der Gleichung für die Krümmungsänderung der Bogenachse wird der Einfluß der Normalkräfte und der Querkräfte vernachlässigt, ebenso der Einfluß der ursprünglichen Krümmung, der wie bekannt bei schwach gekrümmten,

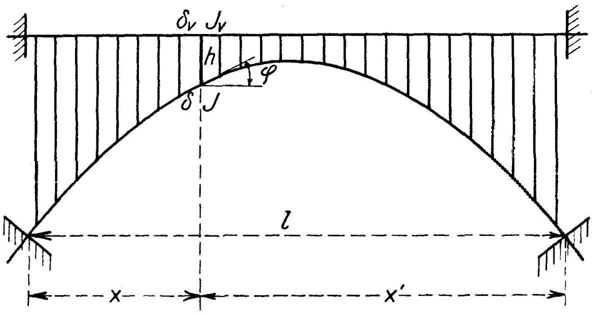

Fig. 2

schlanken Stäben unwesentlich ist. Vom Versteifungsträger wird zunächst angenommen, daß er sich durch eng aneinander gereihte Pfosten auf den Bogen abstützt, vergl. Fig. 2. Diese Annahme einer stetigen Stützung vereinfacht die Rechnung wesentlich und dient als Rechnungsgrundlage; wie die Ergebnisse in einfacher Weise auf den in der Praxis meist vorliegenden Fall von Einzelstützen zu übertragen sind, wird anschließend gezeigt.

2. Zusammenhang der Momente im Bogen und im Versteifungsträger.

An irgend einer Stütze im Abstande x vom linken Kämpfer bezeichne nach Fig. 2

δ die Senkung des Stützenfußes, d. h. die lotrechte Komponente der Bogendeformation, positiv nach unten;
δ_v die Senkung des Stützenkopfes, d. h. die Ordinate der Biegungslinie des Versteifungsträgers, positiv nach unten;
δ_h die Längenänderung der Stütze, positiv als Verkürzung;
M das Biegungsmoment und J das (meist veränderliche) Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes;
M_v das Biegungsmoment und J_v das (oft konstante) Trägheitsmoment am Versteifungsträger.

Für jede Stütze gilt die Beziehung

$$\delta_v = \delta + \delta_h\,, \tag{1}$$

somit im Falle einer stetigen Stützung für jeden Schnitt x

$$\frac{d^2\,\delta_v}{dx^2} = \frac{d^2\,\delta}{dx^2} + \frac{d^2\,\delta_h}{dx^2}\,. \tag{2}$$

Nach bekannten Gesetzen der Baustatik lauten die Gleichungen der Biegungslinien am Bogen (mit φ als Neigungswinkel der Bogenachse im Schnitte x)

$$\frac{d^2\,\delta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ\cos\varphi},$$

am Versteifungsträger

$$\frac{d^2\,\delta_v}{dx^2} = -\frac{M_v}{EJ_v}.$$

Gleichung (2) liefert damit die Beziehung

$$M_v = M\,\frac{J_v}{J\cos\varphi} - EJ_v\cdot\frac{d^2\,\delta_h}{dx^2},$$

oder mit den Abkürzungen

$$k = \frac{J_v}{J\cos\varphi} \qquad \text{und} \qquad M_h = -EJ_v\cdot\frac{d^2\,\delta_h}{dx^2} \tag{3}$$

$$M_v = k\cdot M + M_h \tag{4}$$

Der Ausdruck M_h hat die Dimension eines Momentes und bringt den Einfluß der Längenänderung der Stützen zum Ausdruck; er bezeichnet das Biegungsmoment, das im Versteifungsträger auftreten müßte, wenn der Bogen starr wäre ($k = 0$).

Für die weitere Darstellung der Theorie führen wir die Momentensumme

$$M' = M + M_v - M_h \tag{5}$$

ein. In Verbindung mit Gleichung (4) erhalten wir für die Momente M im Bogen und M_v im Versteifungsträger die Ausdrücke

$$M = \frac{M'}{1+k}, \qquad M_v = \frac{k}{1+k}\,M' + M_h. \tag{6}$$

3. Der Ersatzbogen.

Als Grundsystem wählen wir die in Fig. 3 skizzierte Anordnung. Der Bogenträger ist ersetzt durch den einfachen Balken mit gekrümmter Achse, an dem ein Teil der Lasten P, sowie die unbekannten Stützendrücke

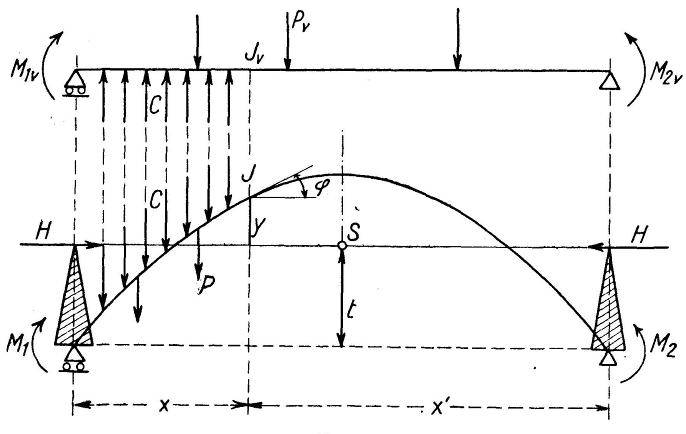

Fig. 3

C als äußere Kräfte angreifen und die Schnittmomente $M_0 + M_c$ erzeugen. Der Versteifungsträger ist ersetzt durch den einfachen Balken von der Stützweite l, an dem ein anderer Teil der Lasten, P_v, sowie die Stützenreaktionen $-C$ wirken und die Schnittmomente $M_{0v} - M_c$ erzeugen. Als überzählige Größen wirken am Grundsystem des Bogens die sogenannten Balkenmomente M_1 und M_2, sowie der Horizontalschub H, der an den Endpunkten starrer Scheiben, die mit den Bogenkämpfern starr verbunden sind, angreifend zu denken ist. Am Versteifungsträger wirken die Einspannmomente M_{1v} und M_{2v}. Auch die unbekannten Normalkräfte C in den Stützen, durch die ein Teil der Lasten in den Bogen abgeleitet wird, sind als überzählige Größen anzusprechen.

Das Schnittmoment M im Bogen an der Stelle x, x' beträgt

$$M = M_0 + M_c + M_1 \frac{x'}{l} + M_2 \frac{x}{l} - Hy;$$

das entsprechende Schnittmoment M_v im Versteifungsbalken ist

$$M_v = M_{0v} - M_c + M_{1v} \frac{x'}{l} + M_{2v} \frac{x}{l}.$$

Durch Addition läßt sich der unbekannte Wert M_c ausschalten; wir erhalten

$$M + M_v = M_0 + M_{0v} + (M_1 + M_{1v}) \frac{x'}{l} + (M_2 + M_{2v}) \frac{x}{l} - Hy.$$

Subtrahieren wir von diesem Ausdrucke noch den Betrag M_h, der nach Gleichung (3) den Einfluß der Längenänderung der Stützen darstellt, so gelangen wir zu der durch Gleichung (5) definierten Momentensumme

$$M' = M + M_v - M_h.$$

Mit den Abkürzungen

$$M'_0 = M_0 + M_{0v} - M_h = M_0 + M_{0v} + EJ_v \cdot \frac{d^2 \delta_h}{dx^2},$$

$$M'_1 = M_1 + M_{1v}; \quad M'_2 = M_2 + M_{2v} \tag{7}$$

ergibt sich

$$M' = M'_0 + M'_1 \frac{x'}{l} + M'_2 \frac{x}{l} - Hy.$$

somit ist M' das Schnittmoment eines freien Bogens, an dessem Grundsystem die überzähligen Größen M_1', M_2' und H wirken.

Die Elastizitätsgleichungen des eingespannten Bogens bringen zum Ausdruck, daß die Auflagerdrehwinkel und die Änderung der Spannweite bei der Deformation gleich Null sind, oder (bei nachgiebigen Widerlagern) bestimmte Werte erreichen. Nach der geometrischen Methode von Bresse oder mit Hilfe der Arbeitsgleichung gewinnt man die bekannten Grundgleichungen

$$\alpha = \int \frac{Mx'\,ds}{lEJ}, \qquad \beta = \int \frac{Mx\,ds}{lEJ},$$
$$\Delta l = \int \frac{My\,ds}{EJ} - H \int \frac{ds}{EF}, \tag{8}$$

die zunächst für eine beliebige Höhenlage der Angriffslinie von H Geltung haben. Δl bezeichnet die Änderung der Entfernung der Endpunkte der starren Scheiben, an denen der Horizontalschub angreift (positiv als Verlängerung). Wir beschränken uns in der Folge auf undrehbare Kämpfer; hier ist Δl identisch mit der Längenänderung der Spannweite l.

Die Beziehungen (6) bieten die Möglichkeit, die durch Gleichung (5) definierte Momentensumme M' in die Grundgleichungen einzuführen. Mit $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich zunächst

$$\int \frac{M'\,x'\,ds}{(1+k)\,l\,EJ} = 0, \qquad \int \frac{M'\,x\,ds}{(1+k)\,l\,EJ} = 0,$$

$$\int \frac{M'\,y\,ds}{(1+k)\,EJ} - H \int \frac{ds}{EF} = \Delta l.$$

Führen wir noch das ideelle Trägheitsmoment J' ein durch den Ausdruck

$$J' = (1+k)\,J = J + \frac{J_v}{\cos\varphi} \tag{9}$$

und setzen zur Abkürzung $dw = \dfrac{ds}{EJ'}$, $du = \dfrac{ds}{EF}$, so gehen die obigen Gleichungen über in

$$\begin{gathered} \int M'\,x'\,dw = 0, \qquad \int M'x\,dw = 0, \\ \int M'y\,dw - H \int du = \Delta l. \end{gathered} \tag{10}$$

Dies sind die G r u n d g l e i c h u n g e n eines ideellen f r e i e n B o g e n t r ä g e r s, dessen Querschnitte das Trägheitsmoment J' besitzen. Wir nennen diesen gedachten Bogenträger den E r s a t z b o g e n; er wird deformiert durch die Momente M_0' im Grundsystem im Verein mit den überzähligen Größen M_1', M_2' und H.

4. Berechnung der überzähligen Größen.

Wird in die Grundgleichungen (10) der Ausdruck (7) für das Schnittmoment M' eingesetzt, so erhält man die Elastizitätsgleichungen des Ersatzbogens in der ausführlichen Form

$$\begin{aligned} &\int M'_0\,x'\,dw + \frac{M'_1}{l}\int x'^2\,dw + \frac{M'_2}{l}\int x\,x'\,dw - H\int x'y\,dw = 0, \\ &\int M'_0\,x\,dw + \frac{M'_1}{l}\int x\,x'\,dw + \frac{M'_2}{l}\int x^2\,dw - H\int xy\,dw = 0, \\ &\int M'_0\,y\,dw + \frac{M'_1}{l}\int x'y\,dw + \frac{M'_2}{l}\int xy\,dw - H\int y^2\,dw - H\int du = \Delta l. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Auflösung wird erleichtert durch den bekannten Kunstgriff der Baustatik, nach dem die Angriffslinie des Horizontalschubes so gelegt wird, daß

$$\int x'y\,dw = 0 \qquad \text{und} \qquad \int xy\,dw = 0. \tag{12}$$

Die beiden ersten Gleichungen enthalten dann nur noch die überzähligen Größen M_1' und M_2'; die Gleichungen sind identisch mit den Elastizitätsgleichungen eines beidseitig vollständig eingespannten Balkens, an dem M_1' und M_2' die Einspannmomente darstellen. Man benützt am besten die bekannte F e s t p u n k t m e t h o d e und bestimmt zunächst die Festpunkte mit Hilfe ihrer Abstände

$$a = \frac{\int x\,x'\,dw}{\int x'\,dw}, \qquad b = \frac{\int x\,x'\,dw}{\int x\,dw}. \tag{13}$$

Die Schlußlinie der Momentenfläche für die Balkenmomente wird dann festgelegt durch die sogenannten Festpunktmomente M_i und M_k, für die sich leicht die Ausdrücke ableiten lassen [1])

$$M_i = -\frac{\int M'_0\,x'\,dw}{\int x'\,dw}, \qquad M_k = -\frac{\int M'_0\,x\,dw}{\int x\,dw}. \tag{14}$$

Nach Berechnung der Festpunktmomente erhält man analytisch oder graphisch die Einspannmomente M_1' und M_2' des eingespannten Balkens, vergl. Fig. 4. Die dritte Elastizitätsgleichung liefert mit den Bedingungen (12) den Horizontalschub des Ersatzbogens zu

$$H = \frac{\int M'_0\,y\,dw - \Delta l}{\int y^2\,dw + \int du}, \tag{15}$$

der nach (12) in einer Angriffslinie durch den Schwerpunkt der „Gewichte" dw wirkt.

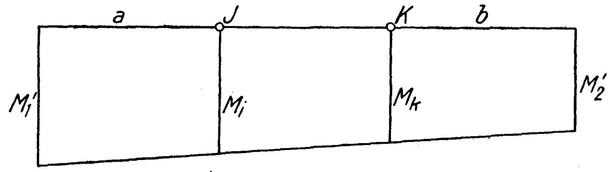

Fig. 4

Nachdem die Schnittmomente M' am Ersatzbogen berechnet sind, ergeben sich die Momente am wirklichen Bogen und am Versteifungsträger mit Hilfe der Beziehungen (6). Die Normalkräfte am wirklichen Bogen sind praktisch dieselben wie am Ersatzbogen.

5. Einfluß der Stützendeformation.

Die Formänderung der Stützen kommt in der vorstehenden Berechnung durch das ideelle Moment M_h nach Gleichung (3) zum Ausdruck. Eine Stütze von der Länge h und dem Querschnitte F_h erfährt zunächst eine elastische Längenänderung durch den Stützendruck C; dazu kommen noch die Beträge von einer Temperaturänderung t^0 und vom Schwinden. Bezeichnet man mit ω den Wärmeausdehnungskoeffizienten und mit ε_s die spezifische Achsverkürzung durch das Schwinden, so wäre insgesamt

$$\delta_h = \left(\frac{C}{EF_h} + \varepsilon_s - \omega\,t^0\right) h \tag{16}$$

[1]) M. Ritter: Analytische Berechnung gelenkloser Brückengewölbe. Festschrift der E. T. H. zur Jahrhundertfeier des Schweiz. Ingenieur- und Architektenvereins, 1938.

in den Ausdruck für M_h einzusetzen. Da C unbekannt ist und sich von Schnitt zu Schnitt ändert, so ist eine strenge Berücksichtigung der elastischen Stützendeformation nur auf dem Wege der Iteration möglich. Man setzt für einen ersten Rechnungsgang $C = 0$, berechnet damit die Momente M_v im Versteifungsträger und daraus (wie beim durchlaufenden Balken) die dazu gehörenden Auflagerdrücke C, die einem zweiten Rechnungsgang als Grundlage dienen. Der Einfluß der elastischen Achsverkürzung der Stützen wird in der Regel so gering sein, daß man sich praktisch wohl meist mit dem ersten Rechnungsgang begnügen, d. h. die Annahme treffen kann, daß Bogen und Versteifungsträger die gleiche Biegungslinie aufweisen. Dies gilt jedoch nur für die von den Stützdrücken C erzeugten, elastischen Längenänderungen der Stützen, nicht aber für die Achsverkürzungen $(\varepsilon_s - \omega t^0)\, h$. Dadurch, daß die Stützen gegen die Kämpfer an Höhe beträchtlich zunehmen, ergeben die eben genannten Längenänderungen der Stützen wesentliche Beiträge an die Momente im Versteifungsträger.

6. Eigengewicht.

Wir setzen einen symmetrischen Bogen voraus, dessen Achse zusammenfällt mit der durch Mitte Scheitel und Mitte Kämpfer mit der Poldistanz H_0 gezeichneten Stützlinie für das gesamte Eigengewicht (Lasten $P + P_v$). Die bekannte Methode der Ergänzungskraft gestaltet in diesem Falle die Berechnung der Schnittkräfte am Ersatzbogen und damit am wirklichen System besonders einfach.

Der Horizontalschub H wirkt der Symmetrie wegen in einer Waagrechten in der Höhe t über den Kämpfern; die Ordinaten der Bogenachse in bezug auf die Kämpferverbindungslinie betragen somit $y' = y + t$, vergl. Fig. 5. Daher ist im Grundsystem

$$M_0 + M_{0v} = H_0 (y + t),$$

und nach (7)

$$M'_0 = M_0 + M_{0v} - M_h = H_0 (y + t) - M_h. \tag{17}$$

Die Festpunktmomente am Ersatzbogen sind beide gleich groß, somit identisch mit den Balkenmomenten M_1' und M_2'. Da M_0' symmetrisch ist zur Scheitellotrechten, so ergibt sich nach Gleichung (14)

$$M'_1 = M'_2 = -\frac{\int M'_0 x' \, dw}{\int x' \, dw} = -\frac{\int M'_0 \, dw}{\int dw}.$$

und mit Gleichung (17)

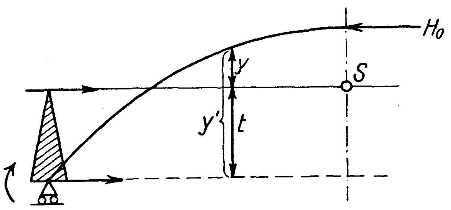

Fig. 5

$$M'_1 = M'_2 = -\frac{\int [H_0 (y + t) - M_h] \, dw}{\int dw}$$

$$= -H_0 t + \frac{\int M_h \, dw}{\int dw}. \tag{18}$$

Für den Horizontalschub am Ersatzbogen erhält man aus (15)

$$H = \frac{\int M'_0\, y\, dw}{\int y^2\, dw + \int du} = \frac{\int [H_0\,(y + t) - M_h]\, y\, dw}{\int y^2\, dw + \int du}$$

$$H = \frac{H_0}{1 + \mu} - H_1\,. \tag{19}$$

Darin bezeichnet $\mu = \frac{\int du}{\int y^2\, dw}$ nach bekannter Bezeichnungsweise den Einfluß der Normalkräfte und der Querkräfte, während

$$H_1 = \frac{\int M_h\, y\, dw}{\int y^2\, dw\,(1 + \mu)}$$

den Anteil der Stützdeformation darstellt. Als Ergänzungskraft $\varDelta H$ wird der Unterschied $H - H_0$ bezeichnet; es ist

$$\varDelta H = \frac{H_0}{1 + \mu} - H_1 - H_0 = -\frac{\mu}{1 + \mu}\, H_0 - H_1\,. \tag{21}$$

Das Schnittmoment M' am Ersatzbogen berechnet sich jetzt aus Gleichung (7) mit $M_1' = M_2'$ zu

$$M' = M'_0 + M'_1 - Hy = H_0\,(y + t) - M_h - H_0\, t + \frac{\int M_h\, dw}{\int dw} - \left(\frac{H_0}{1 + \mu} + H_1\right) y$$

$$M' = -\varDelta H_1 y - M_h + \frac{\int M_h\, dw}{\int dw}\,. \tag{22}$$

Für einen ersten Rechnungsgang setzt man starre Stützen voraus, rechnet also mit $M_h = 0$. Man erhält damit das Schnittmoment am Ersatzbogen zu

$$M' = -\varDelta H \cdot y\,. \tag{23}$$

Die Momente betragen somit nach (6)

am Bogen $$M = \frac{M'}{1 + k} = -\frac{\varDelta H \cdot y}{1 + k},$$

am Versteifungsträger

$$M_v = \frac{k M'}{1 + k} = k \cdot M = -\frac{k \cdot \varDelta H \cdot y}{1 + k}\,. \tag{24}$$

Da die Ergänzungskraft $\varDelta H$ und ihr Abstand t am Ersatzbogen mit dem erhöhten Trägheitsmoment $J' = J + \frac{J_v}{\cos\varphi}$ zu berechnen sind, ergibt sich eine etwas andere Momentenverteilung als am freien Bogen mit den Trägheitsmomenten J. Bei der Anwendung wird der Koeffizient k meist vom Scheitel gegen die Auflager stark abnehmen, was zur Folge hat, daß der

Versteifungsträger in den Schnitten nahe an den Kämpfern stark entlastet wird, während die Momente im Bogen dort wesentlich größer ausfallen als am freien Bogen.

Für einen zweiten Rechnungsgang kann man die Stützungsdrücke und damit das ideelle Moment M_h nach (3) auswerten und mit den Gleichungen (21) und (22) ein genaueres Ergebnis erzielen. In der Regel dürfte sich aber der Einfluß der Stützendeformation auf die Momente vom Eigengewicht als so gering erweisen, daß der erste Rechnungsgang als praktisch genügend genau befunden wird.

Bei der Ausführung großer Eisenbetonbrücken hat man oft den Bogenträger als freien Bogen ausgerüstet, bevor der Fahrbahnträger betoniert wurde. Es bedarf kaum einer Begründung, daß bei diesem Bauvorgang der versteifende Einfluß der Fahrbahn auf die Beanspruchungen vom Eigengewicht nicht vorhanden ist oder doch stark zurücktritt.

7. Verkehrsbelastung.

Die Annahme $M_h = 0$ erscheint auch hier meist zulässig, wodurch sich die Berechnung wesentlich vereinfacht. Die Einflußlinien der Schnittmomente werden für den Ersatzbogen in bekannter Weise ausgewertet und ihre Ordinaten M' entsprechend den Beziehungen (6), d. h. im Verhältnis $M_v : M = k$ aufgeteilt. Da sich k nicht auf die Stelle der Ordinaten, sondern auf den Schnitt bezieht, für den die Einflußlinie gilt, so sind alle Ordinaten einer Einflußlinie im gleichen Verhältnis aufzuteilen. Bei gleichmäßig verteilter Belastung können mit genügender Genauigkeit die geschlossenen Formeln für die Schnittmomente benützt werden, die der Verfasser an anderer Stelle[1]) veröffentlicht hat.

8. Temperaturänderung und Schwinden.

Die Längenänderung $(\varepsilon_s - \omega t^0) \cdot h$ der Stützen im Grundsystem hat wesentliche Beträge M_h zur Folge und darf deshalb hier nicht vernachlässigt werden. Für M_h läßt sich die folgende Näherungsformel ableiten, deren Genauigkeit meist genügen dürfte. Es handle sich um einen parabolischen Bogen, vergl. Fig. 6. Die Längenänderung einer Stütze h im Abstand x vom Scheitel ist

$$\delta_h = (\varepsilon_s - \omega t^0)\left(h_s + \frac{4 f x^2}{l^2}\right)$$

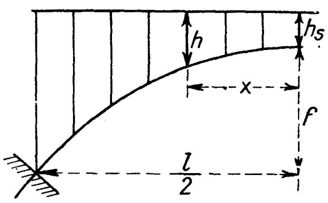

Fig. 6

Daraus folgt nach (3)

$$M_h = - E J_v \cdot \frac{d^2 \delta_h}{d x^2} = - E J_v (\varepsilon_s - \omega t^0) \cdot \frac{8 f}{l^2}$$

oder, mit R als Radius der Bogenachse im Scheitel,

$$M_h = \frac{E J_v (\omega t^0 - \varepsilon_s)}{R}. \tag{25}$$

Man kann, auch wenn die Bogenachse von einer Parabel abweicht, M_h längs der Spannweite als konstant betrachten. Das Einspannmoment M_1' am Ersatzbogen ergibt sich nach Gleichung (14) mit $M_0 = 0$, also $M_0' = -M_h$ zu

$$M'_1 = -\frac{\int M'_0\, x'\, dw}{\int x'\, dw} = M_h\,.$$

Der Horizontalschub H_t am Ersatzbogen folgt aus Gleichung (15) zu

$$H_t = \frac{(\omega t^0 - \varepsilon_s)\, l - \int M_h\, y\, dw}{\int y^2\, dw + \int du}$$

Für einen konstanten Wert von M_h fällt das Integral des Zählers dahin, da die Angriffslinie nach Definition durch den Schwerpunkt der Gewichte dw geht, somit $\int y\, dw = 0$ ist. Das Schnittmoment am Ersatzbogen wird nach (7)

$$\begin{aligned} M' &= M'_0 + M'_1 - H_t y \\ &= -M_h + M_h - H_t y = -H_t y \end{aligned}$$

Der Einfluß der Balkenmomente fällt somit weg, was sich auch leicht ohne Rechnung überlegen läßt.

Da H_t am Ersatzbogen gemäß (9) mit den erhöhten Trägheitsmomenten $J' = J + \frac{J_v}{\cos\varphi}$ zu berechnen ist, erhält man dafür einen wesentlich höheren Betrag, als am freien Bogen mit den Trägheitsmomenten J, somit auch die Schnittmomente M' des Ersatzbogens. Diese sind wiederum, den Beziehungen (6) entsprechend, aufzuteilen in

$$M = \frac{M'}{1+k}, \qquad M_v = \frac{k}{1+k} M' + M_h.$$

Man erkennt, daß an den Stellen mit positiven Bogenordinaten y der Einfluß der Stützendeformation M_h dem ersten Summanden von M_v entgegenwirkt, während sich an den Kämpferpartien beide Anteile summieren. Auch die Kämpfermomente am Bogen selbst werden durch die versteifende Wirkung des Fahrbahnträgers ungünstig beeinflußt.

9. Widerlagerverschiebungen.

Auch hier fällt der Einfluß der Balkenmomente weg und entsteht ein Horizontalschub H_w, der nach Gleichung (15) leicht zu berechnen ist. Der Einfluß der Stützendeformation ist ganz unwesentlich. Mit $M_h = 0$ wird

$$H_w = \frac{-\Delta l}{\int y^2\, dw + \int du}\,.$$

Die Schnittmomente M' des Ersatzbogens sind wiederum nach (6) aufzuteilen in M und M_v. Da H_w mit den Trägheitsmomenten J' zu berechnen ist, so ergeben sich durch die Mitwirkung des Versteifungsträgers teilweise ungünstige Schnittmomente. Auch die Momente im Versteifungsträger selbst können wesentliche Beträge erreichen, insbesondere in dem Grenzfalle des sogenannten versteiften Stabbogens ($J = 0$) oder bei sehr stark dimensioniertem Versteifungsträger.

10. Bogen mit Einzelstützen.

Die eingangs getroffene Voraussetzung einer stetigen Stützung des Versteifungsträgers wird in den meisten Fällen der Anwendung nicht zutreffen. Beim Bogen mit Einzelstützen ist daher an den unter Annahme einer stetigen Stützung berechneten Schnittmomenten eine Korrektur vorzunehmen, die sich wie folgt gestaltet. Man berechnet aus den Momenten M' des Ersatzbogens die Formänderungen δ und δ_v an den Stellen der Einzelstützen; diese Werte haben mit ausreichender Genauigkeit auch für Einzelstützen Gültigkeit. Dagegen nehmen bei Einzelstützen die Momente einen etwas andern Verlauf, insbesondere im Versteifungsträger. Dieser ist nach der Theorie des durchlaufenden Balkens mit bekannten Stützenverschiebungen nochmals zu untersuchen. Man findet die Momente infolge der Verschiebungen δ_v und hat ihnen die Momente zu überlagern, die sich aus der Belastung unter Annahme fester Stützen ergeben. Zur Berechnung eignet sich in erster Linie die Festpunktmethode[2]), da sie die Möglichkeit bietet, den an den Enden des Versteifungsträgers tatsächlich vorhandenen Einspannungsgrad richtig einzusetzen und wenn nötig den Drehwiderständen der Stützen Rechnung zu tragen. Auch die Berichtigung der Momente im Bogen infolge der Einzelstützung bietet keine Schwierigkeiten.

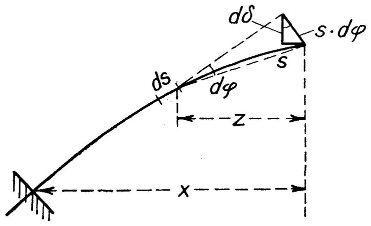

Fig. 7

Es möge noch die Berechnung der Formänderungen δ am Ersatzbogen gezeigt werden, die als Grundlage für die Untersuchung des Einflusses der Einzelstützen nötig ist. Sie erfolgt am einfachsten nach dem klassischen Verfahren von Bresse, vergl. Fig. 7. Betrachtet man ein einziges Bogenelement ds als elastisch, so entsteht durch den Formänderungswinkel $d\varphi$ im Schnitte x die lotrechte Deformation $d\delta$, die sich aus der Proportion $d\delta : s d\varphi = z : s$ zu $d\delta = z d\varphi$ berechnet; dazu kommt der Anteil der Normalkraft mit $\Delta ds \sin\varphi = \frac{N\,dy}{EF}$, wo dy die lotrechte Projektion von ds bezeichnet. Durch Integration und mit Berücksichtigung der Vorzeichen ergibt sich im ganzen

$$\delta = -\int_0^x M' z\, dw + \int_0^x \frac{N\,dy}{EF}, \qquad dw = \frac{ds}{EJ'}.$$

Die Formänderungen des Ersatzbogens sind identisch mit den Formänderungen des versteiften Bogens mit den Trägheitsmomenten J, was man leicht erkennt, wenn man in obiger Beziehung M' nach Gl. (6) durch M ausdrückt.

Bei Vorprojekten und Wettbewerbsentwürfen kann die Berichtigung der Momente infolge Einzelstützung in der Regel unterbleiben, abgesehen von Fällen mit sehr großen Stützenabständen.

[2]) M. Ritter: Der durchlaufende Balken auf nachgiebigen Stützen. Abhandlungen der I. V. B. H., Bd. IV, 1936.

Zusammenfassung.

Die statische Untersuchung des eingespannten Bogens mit Versteifungsträger wird unter der Annahme einer stetigen Stützung durchgeführt. Die Berechnung umfaßt Eigengewicht, Verkehrslast, Temperaturänderung, Schwinden und Widerlagerverschiebungen. Durch die Einführung eines gedachten „Ersatzbogens“, der sich als freier Bogen gleich deformiert wie das wirkliche System, vereinfacht sich die Berechnung wesentlich. Der Einfluß von Einzelstützen läßt sich durch eine Zusatzrechnung berücksichtigen.

Résumé.

L'étude statique de l'arc encastré avec poutre raidisseuse est basée sur l'hypothèse d'un appui continu entre les deux éléments. Le calcul s'étend au poids propre, à la surcharge, aux variations de température, au retrait et aux déformations des culées. L'introduction d'un « arc de remplacement » imaginaire, sans poutre raidisseuse, qui se déforme de la même manière que le système réel, simplifie le calcul de façon appréciable. Il est possible de tenir compte de l'influence de colonnes individuelles par un calcul supplémentaire.

Summary.

The static investigation of the arch, with fixed ends and with stiffening girder, is made under the assumption of a continuous support. The calculation comprises dead weight, live load, temperature changing, shrinkage and displacement of abutments. By introducing an imaginary "substitute arch", which as free arch is deformed like the actual system, the calculation is considerably simplified. The influence of separate supports can be considered by an additional calculation.