Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 6 (1940-1941)

Artikel: Erweiterte Theorie des Seilpolygones zur Berechnung von Hängebrücken

Autor: Amstutz, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7087

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ERWEITERTE THEORIE DES SEILPOLYGONES ZUR BERECHNUNG VON HÄNGEBRÜCKEN.

EXTENSION DE LA THÉORIE DU POLYGONE FUNICULAIRE AU CALCUL DES PONTS SUSPENDUS

EXTENDED THEORY OF THE FUNICULAR POLYGON FOR CALCULATING SUSPENSION BRIDGES.

ERNST AMSTUTZ, Dipl. Ing. E. T. H., Zürich.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich die Versteifungsträger von Hängebrücken auf ebenso einfache Art — graphisch oder tabellarisch — wie gewöhnliche Biegeträger mit Hilfe von Kräfte- und Seilpolygon berechnen lassen, wenn die bisherige Theorie des Seilpolygons erweitert wird. Zu diesem Zwecke wird die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems in zwei Gleichungen erster Ordnung aufgespalten, womit sich die Berechnung in zwei Stufen (Querkraft-Moment) durchführen läßt. Integriert man diese Gleichungen über ein Trägerfeld, so ergeben sich einfache Beziehungen zur fortlaufenden numerischen Berechnung der Schnittkräfte, die auch durch graphische Konstruktionen (Kräfte- und Seilpolygon) dargestellt werden können. Damit wird eine Methode gegeben, die ohne Ableitung langer Fomeln in allen Fällen sicher und rasch zum Resultat führt.

1. Grundgleichungen.

Wenr man von den Horizontalverschiebungen des Kabels[1]) absieht, ist der Versteifungsträger aus den Formänderungen η gegenüber der Elastizitätstheorie zusätzlich mit den Kräften $H \frac{d^2\eta}{dx^2}$ belastet, worin H die Horizontalkomponente des gesamten Kabelzuges bedeutet.

Das Moment M im Versteifungsträger ergibt sich also aus

$$-\frac{d^2 M}{dx^2} = p + H \frac{d^2 \eta}{dx^2}, \tag{1}$$

wobei in p außer der äußern Belastung auch die Reaktion der Hängestangen (ohne Formänderungseinfluß) enthalten ist. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \tag{2}$$

(E = Elastizitätsmodul, J = Trägheitsmoment) gewinnt man die Differential-

[1]) Zur Berücksichtigung der Horizontalverschiebungen: F. Stüssi und E. Amstutz, „Verbesserte Formänderungstheorie von Stabbogen und verankerten Hängebrücken". Schweiz. Bauzeitung vom 6. Juli 1940.

gleichung für das Biegemoment im Versteifungsträger:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{M}{r^2} - \frac{d^2 M}{dx^2} = p \\ \text{mit der Abkürzung} \quad &r = \sqrt{\frac{EJ}{H}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Grundlegend für die folgende Methode ist — analog wie bei der Berechnung des gewöhnlichen Biegeträgers — die Aufspaltung der Differentialgleichung 2. Ordnung (3) in zwei simultane Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{\bar{Q}}{r} - \frac{d\bar{Q}}{dx} = p \tag{4}$$

$$\frac{M}{r} + \frac{dM}{dx} = \bar{Q} \tag{5}$$

Die Elimination der Hilfsgröße $\bar{Q}$ ergibt, wie man sich leicht überzeugt, Gleichung (3). Die Analogie mit dem gewöhnlichen Biegeträger ist augenfällig. Die Gleichung (4) stellt das Kräftepolygon, die Gleichung (5) das

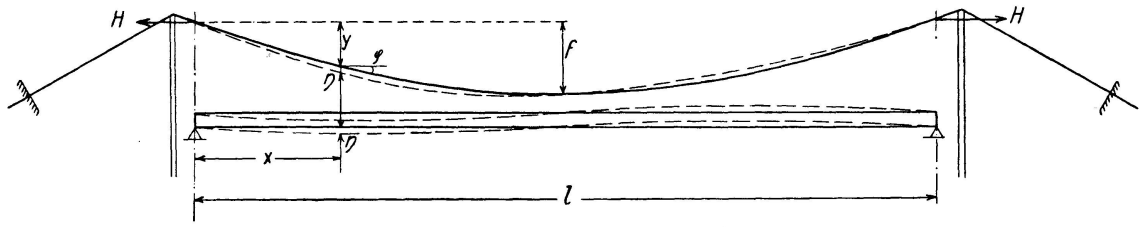

Fig. 1

Seilpolygon dar. Die Größe $\bar{Q}$ kann als ideelle Querkraft angesprochen werden; sie weicht von der wirklichen Querkraft Q um das Korrekturglied $\frac{M}{r}$ ab.

Diese Verwandtschaft mit dem Seilpolygon hat ihren tieferen Grund. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß der Durchhang eines gespannten Seiles, das stetig elastisch gestützt resp. aufgehängt ist, einer zu (3) analogen Differentialgleichung gehorcht. Die Versteifungsträger von Hängebrücken haben als Gleichnis das gespannte, elastisch unterstützte Seil, so wie die gewöhnlichen Biegeträger das frei gespannte Seil als Gleichnis haben. Die Berechnung ist somit in beiden Fällen auf einheitlicher Grundlage möglich, wie im folgenden weiter gezeigt wird.

Zur Durchführung einer graphischen oder tabellarischen Berechnung stellen wir nun Beziehungen zwischen den ideellen Querkräften $\bar{Q}$ und den Momenten M in zwei benachbarten Trägerschnitten mit dem Abstand λ auf. Hierbei dürfen wir feldweise konstante Belastung $\left(\frac{dp}{dx} = 0\right)$ und feldweise konstantes Trägheitsmoment $\left(\frac{dr}{dx} = 0\right)$ voraussetzen. Die Lösung von (4) lautet daher, wenn mit e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet wird,

$$\bar{Q} = A \cdot e^{\frac{x}{r}} + r \cdot p \tag{6}$$

und von (5)

$$M = B \cdot e^{-\frac{x}{r}} + \frac{rA}{2} e^{\frac{x}{r}} + r^2 \cdot p, \tag{7}$$

wovon man sich leicht überzeugt. A und B sind Integrationskonstanten, die von den Randbedingungen abhängen.

Betrachten wir ein Trägerfeld von der Länge λ, so ist für den Endpunkt links ($x = 0$)

$$\bar{Q}_n = A + r \cdot p, \tag{8}$$

für den Endpunkt rechts ($x = \lambda$)

$$\bar{Q}_{n+1} = A \cdot e^{\varepsilon} + r \cdot p \tag{9}$$

mit $\varepsilon = \frac{\lambda}{r}$. Die Elimination von A ergibt die Beziehung

$$\underline{\bar{Q}_{n+1} = \bar{Q}_n \cdot e^{\varepsilon} - rp(e^{\varepsilon} - 1)} \tag{10}$$

Entsprechend findet man aus (7)

$$\underline{M_{n+1} = M_n \cdot e^{-\varepsilon} + r \cdot \operatorname{sh}\varepsilon \cdot \bar{Q}_n + r^2 p(1 - \operatorname{ch}\varepsilon)}, \tag{11}$$

worin $\operatorname{sh}\varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}}{2}$, $\operatorname{ch}\varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}}{2}$ die hyperbolischen Funktionen darstellen.

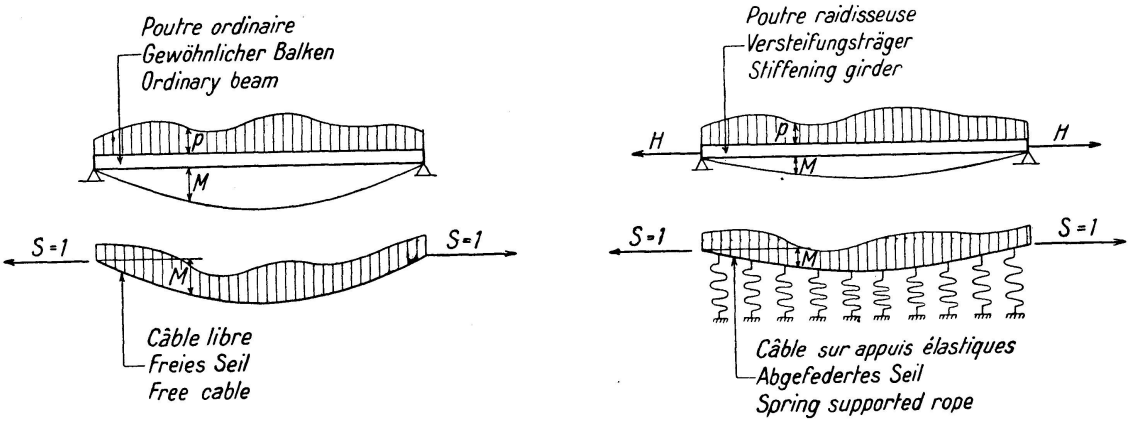

Fig. 2

Besteht die Belastung aus Einzellasten P in den Feldgrenzen, so ergibt sich einfacher

$$\bar{Q}_{n+1} = \bar{Q}_n \cdot e^{\varepsilon} \tag{10a}$$

$$M_{n+1} = M_n \cdot e^{-\varepsilon} + r \operatorname{sh}\varepsilon \cdot \bar{Q}_n. \tag{11a}$$

An der Feldgrenze weist der Wert von $\bar{Q}$ den Sprung $-P$ auf:

$$\bar{Q}_{n,r} - \bar{Q}_{n,l} = -P. \tag{12}$$

2. Knotenlasten.

Um die vereinfachten Rekursionsformeln (10a) und (11a) auch bei verteilter Belastung anwenden zu können, führen wir den Begriff der Knoten-

lasten ein; das sind diejenigen Einzellasten in den Feldgrenzen, die das Sehnenpolygon der Momentenfläche ergeben.

Für zwei aufeinanderfolgende Felder (Fig. 3) ergeben die Formeln (10) und (11):

$$\left.\begin{aligned} \bar{Q}_n &= \bar{Q}_{n-1} \cdot e^{\varepsilon} - rp(e^{\varepsilon} - 1) \\ \bar{Q}_{n+1} &= \bar{Q}_n \cdot e^{\varepsilon'} - r'p'(e^{\varepsilon'} - 1) \\ M_n &= M_{n-1} \cdot e^{-\varepsilon} + r \operatorname{sh} \varepsilon \cdot \bar{Q}_{n-1} + r^2 p(1 - \operatorname{ch} \varepsilon) \\ M_{n+1} &= M_n \cdot e^{-\varepsilon'} + r' \operatorname{sh} \varepsilon' \cdot \bar{Q}_n + r'^2 p'(1 - \operatorname{ch} \varepsilon'). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Rechnet man mit Knotenlasten P, so findet man hingegen gemäß (10a), (11a) und (12):

$$\left.\begin{aligned} \bar{Q}_n^* &= \bar{Q}_{n-1}^* \cdot e^{\varepsilon} \\ \bar{Q}_{n+1}^* &= \bar{Q}_n^{*\prime} \cdot e^{\varepsilon'} \\ M_n &= M_{n-1} \cdot e^{-\varepsilon} + r \cdot \operatorname{sh} \varepsilon \cdot \bar{Q}_{n-1}^* \\ M_{n+1} &= M_n \cdot e^{-\varepsilon'} + r' \operatorname{sh} \varepsilon' \bar{Q}_n^{*\prime} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und die Übergangsbeziehung

$$\bar{Q}_n^{*\prime} - \bar{Q}_n^* = -P.$$

Aus den beiden Gleichungsgruppen (13) und (14) lassen sich die 10 Größen M, $\bar{Q}$ und $\bar{Q}^*$ eliminieren. Man gewinnt schließlich die Knotenlast zu

$$\underline{P = r \cdot p \frac{\operatorname{ch} \varepsilon - 1}{\operatorname{sh} \varepsilon} + r'p' \frac{\operatorname{ch} \varepsilon' - 1}{\operatorname{sh} \varepsilon'}} \cdot \tag{15}$$

Für kleine Werte ε findet man auch, wenn man noch $r = \frac{\lambda}{\varepsilon}$ einsetzt, durch Reihenentwicklung

$$P \cong \frac{\lambda p}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{12}\right) + \frac{\lambda' p'}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon'^2}{12}\right). \tag{16}$$

3. Tabellarische Berechnung.

Der Horizontalschub H ist eine überzählige Größe X, die aus einer Elastizitätsgleichung zu bestimmen ist. Für den Formänderungseinfluß setzen wir jedoch in $r = \sqrt{\frac{EJ}{H}}$ einen geschätzten Konstantwert[2]) H ein, der — für strenge Gültigkeit — dem zu berechnenden Totalwert gleich sein muß. Dadurch gilt, wie in der Baustatik gewohnt, das Superpositionsgesetz wieder, sodaß Teileinflüsse gesondert untersucht werden können. Genauer läßt sich die Berechnung auch mit zwei oder drei Werten H durchführen, sodaß am Schluß der richtige Wert durch Interpolation berücksichtigt werden kann.

Bei Anwendung der Rekursionsformeln (10a) und (11a) ist, da es sich um einen beidseitig aufliegenden Balken handelt, der Anfangswert von $\bar{Q}$ nicht bekannt und muß als unbekannte Größe aus der Bestimmungsgleichung $M = 0$ über dem Auflager gefunden werden. Dies entspricht beim Biege-

[2]) F. Stüssi, „Zur Berechnung verankerter Hängebrücken". 4. Bd. Abh. I.V.B.H. (1936).

träger dem Einziehen der Schlußlinie. Hier ist jedoch die Schlußlinie keine Gerade mehr, sondern muß nach (10a) und (11a) für fehlende Belastung P berechnet werden. Bei weichen Versteifungsträgern wählt man zweckmäßig die ideelle Querkraft $\bar{Q}$ auf dem rechten Auflager als Überzählige und rechnet nach der Formel

$$\bar{Q}_n = \bar{Q}_{n+1} \cdot e^{-\varepsilon} \tag{17}$$

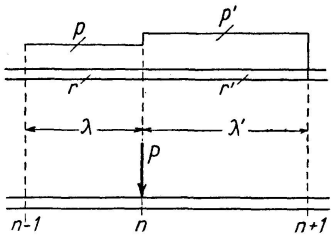

Fig. 3

von rechts nach links, da dann die Werte $\bar{Q}$ rasch abklingen, und damit eine bessere Genauigkeit erzielt wird als bei umgekehrter Reihenfolge.

Die Elastizitätsbedingung für den Horizontalschub X lautet bekanntlich

$$\underline{X \cdot a_{11} + a_{10} = 0} \tag{18}$$

worin die Verschiebungsgrößen

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= -\int \frac{y \cdot M_{X=1}}{EJ}\, dx + \frac{L}{E_K \cdot F_K{}^0} \quad \text{mit} \quad L = \int \frac{F_K{}^0}{F_K \cdot \cos^3 \varphi}\, dx \\ a_{10} &= -\int \frac{y \cdot M_0}{EJ}\, dx + \omega \cdot t \cdot L_t \quad \text{mit} \quad L_t = \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

mit Hilfe der SIMPSON'schen Flächenregeln oder graphisch bestimmt werden. E_K und F_K sind Elastizitätsmodul und Querschnittsfläche des Kabels oder der Kette, die übrigen Bezeichnungen gehen aus Fig. 1 hervor.

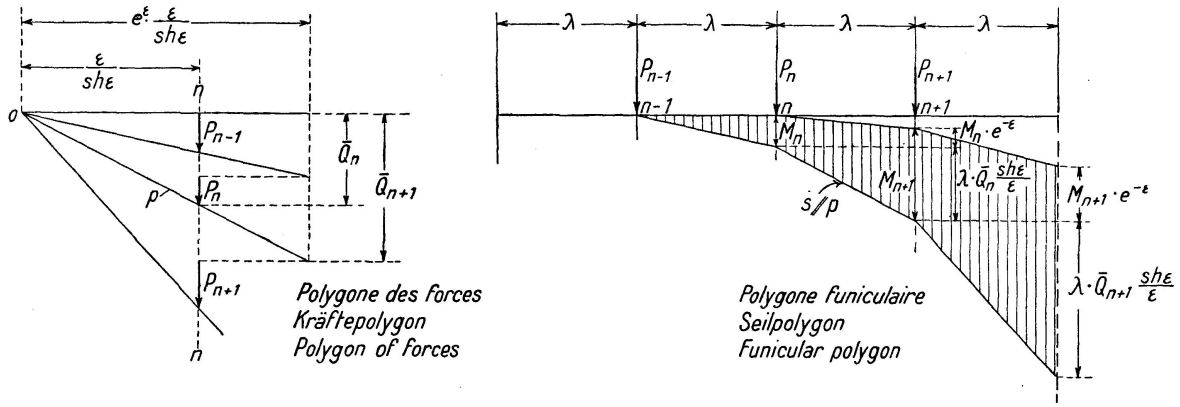

Fig. 4

4. Graphische Berechnung.

Fig. 4 zeigt die Umsetzung der Gleichungen

$$\bar{Q}_{n+1} = \bar{Q}_n \cdot e^{\varepsilon} \tag{20}$$

$$M_{n+1} = M_n \cdot e^{-\varepsilon} + \lambda \frac{\operatorname{sh}\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \bar{Q}_n \tag{21}$$

in eine einfache graphische Konstruktion. Gegenüber dem gewöhnlichen Kräftepolygon sind hier die Polstrahlen bis zu einer Vertikalen zu verlängern, die den e^{ε}-fachen Polabstand hat, die Querkraft $\bar{Q}_{n+1}$ ist dann wieder auf die Polare n zu projizieren, wo auch die Knotenlasten P abzutragen sind. Zweckmäßig wählt man den Polabstand zu $\frac{\varepsilon}{\operatorname{sh}\varepsilon}$, dann wird der Seilstrahl s

im Seilpolygon parallel zum Polstrahl p im Kräftepolygon. Selbstverständlich kann der Polabstand auch ein Vielfaches von $\frac{\varepsilon}{\mathrm{sh}\,\varepsilon}$ betragen, dementsprechend ergibt sich dann — wie gewohnt — der Maßstab der Momentenfläche.

Hat man die Seilstrahlen s im Seilpolygon gezogen, so sind die Ordinaten noch fortlaufend im Verhältnis $e^{-\varepsilon}$ zu reduzieren. Es verbleibt die schraffierte Momentenfläche, die natürlich im Falle von verteilter Belastung noch auszurunden ist. Zur Reduktion der Ordinaten fertigt man sich zweckmäßig einen Reduktionsmaßstab mit zwei drehbaren Schenkeln an, dessen einen Schenkel man an der Reißschiene anlegt. Die Anwendung geht aus Fig. 5 hervor. Statt dessen leistet auch ein Reduktionszirkel gute Dienste.

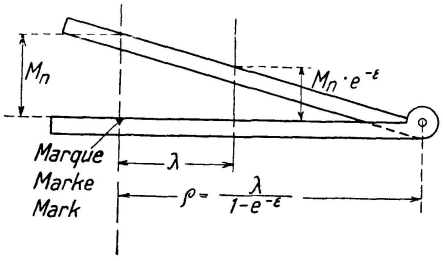

Fig. 5

Um beide Randbedingungen $M = 0$ zu befriedigen, ist noch eine Schlußlinie mit beliebigem Anfangswert $\bar{Q}$ zu konstruieren und mit dem jeweiligen Belastungsfall im geeigneten Maßstab zu kombinieren. Die Reduktion der Schlußlinie auf den passenden Maßstab geschieht zweckmäßig durch zeichnerische Projektion, sofern nicht ein Reduktionszirkel zur Verfügung steht.

Auch bei der graphischen Berechnung konstruiert man zweckmäßig die Querkräfte $\bar{Q}$ von rechts nach links, die Momente aber von links nach rechts, um ein rasches Anwachsen der Ordinaten und damit Ungenauigkeiten zu vermeiden.

5. Veränderliches Trägheitsmoment.

Unsere Grundformeln und Konstruktionen gelten für feldweise konstantes Trägheitsmoment. Da die Feldweiten sich beliebig wählen lassen, kann jeder treppenförmige Verlauf des Trägheitsmomentes (aufgelegte Gurtplatten) erfaßt werden. Aber auch eine stetige Veränderung der Trägerhöhe läßt sich durch eine Treppenlinie genügend genau darstellen. Im Kräftepolygon ergibt sich so bei konstanter Feldweite eine veränderliche Poldistanz und eine veränderliche Projektionsweite. Will man dies vermeiden, so wähle man nicht λ, sondern ε konstant, wozu die Fläche $\int \sqrt{\frac{J_c}{J}} \cdot dx$ in gleich große Felder zu unterteilen ist (J_c ist ein beliebiger Konstantwert).

Zu beachten ist, daß infolge eines Sprunges der Größe r auch die ideelle Querkraft $\bar{Q}$ einen Sprung von der Größe $M \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ erleidet, so als ob eine ideelle Belastung

$$P = -M \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \tag{22}$$

angreifen würde. Eine vollständige Trennung der Berechnung von $\bar{Q}$ und M ist daher nun nicht mehr durchführbar, vielmehr ist die Bestimmung der Größen $\bar{Q}$ und M Punkt für Punkt parallel durchzuführen. Hingegen darf P für jeden Teileinfluß — auch die Schlußlinie — getrennt berücksichtigt werden, da ja das Superpositionsgesetz gilt.

Die bei sehr weichem Versteifungsträger vorteilhafte Berechnungsfolge der Querkräfte von rechts nach links und der Momente von links nach rechts kann bei veränderlichem Trägheitsmoment nicht mehr angewendet werden. Sehr weiche Versteifungsträger haben jedoch fast immer konstantes Trägheitsmoment. Es werden sich also bei Anwendung der Berechnung kaum Schwierigkeiten ergeben.

6. Einflußlinien.

Zufolge fester Wahl des Horizontalschubes im Formänderungsglied gilt das Superpositionsgesetz zu Recht, und es können daher Einflußlinien für Schnittgrößen und Formänderungen gezeichnet werden. Wir interpretieren die Einflußlinien wie üblich als Biegelinien η.

Zur Einflußlinie einer Durchbiegung berechnen wir vorerst die Momentenfläche infolge $P = 1$ nach der hier dargestellten erweiterten Theorie des Seilpolygons. Hierauf ergibt sich die Biegelinie zu dieser Momentenfläche nach der gewöhnlichen Theorie des Seilpolygons.

Bei der Einflußlinie eines Momentes oder einer Querkraft halten wir uns an die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\eta}{r^2} - \eta'' = 0. \tag{23}$$

Für die Einflußlinie der Querkraft ist im betrachteten Schnitt $\Delta\eta = 1$, für das Moment $\Delta \frac{d\eta}{dx} = -1$ zu setzen. Die Berechnung der Werte η im Grundsystem erfolgt auf analoge Art wie bei den Momenten mit Hilfe der erweiterten Theorie des Seilpolygons. Man beachte, daß trotz dem gleichartigen Belastungsglied die Einflußlinie des Momentes nicht mit dem Moment für $P = 1$ übereinstimmt (wie von anderen Autoren schon behauptet wurde), da sich die Überzählige X aus verschiedenen Elastizitätsgleichungen ergibt und auch verschiedenen Einfluß hat (im einen Fall Biegelinie aus X, im andern Momentenfläche aus X).

Die Verschiebungsgrößen der Elastizitätsgleichung lassen sich hier zweckmäßiger als aus den Momenten direkt aus den Durchbiegungen in der Form

$$a_{1k} = -\int \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \eta_k \cdot dx = -y'' \int \eta_k \cdot dx \tag{24}$$

berechnen. Bei sehr weichem Versteifungsträger ist die Summation mit Hilfe der SIMPSON'schen Flächenregeln in diesem Falle zu ungenau. Da hier der Versteifungsträger im Grundsystem unbelastet ist ($p = 0$), läßt sich zur Integration eine einfache, strenge Formel angeben:

η ist gegeben durch

$$\eta = a \cdot e^{\frac{x}{r}} + b \cdot e^{-\frac{x}{r}}, \tag{25}$$

in den Feldgrenzen:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & \eta_n = a + b \\ x = \lambda & \eta_{n+1} = a e^{\varepsilon} + b \cdot e^{-\varepsilon} \end{array}\right\} \tag{26}$$

Die Integration ergibt

$$\int_n^{n+1} \eta \cdot dx = r \cdot a(e^{\varepsilon} - 1) + r \cdot b(1 - e^{-\varepsilon}). \tag{27}$$

Nach Elimination der Integrationskonstanten erhält man schließlich:

$$\int_n^{n+1} \eta \cdot dx = \lambda \frac{\operatorname{ch} \varepsilon - 1}{\varepsilon \cdot \operatorname{sh} \varepsilon} (\eta_n + \eta_{n+1}). \tag{28}$$

Die Summation ist über alle Felder zu erstrecken.

7. Kontinuierliche Hängebrücken.

Die Berechnung kontinuierlicher Hängebrücken bereitet nach der dargelegten Methode keinerlei Schwierigkeiten. Es sind lediglich außer dem Horizontalzug auch die Kontinuitätsmomente der Versteifungsträger als Überzählige einzuführen.

Die Verschiebungsgrößen ergeben sich in der Form

$$a_{ik} = \int M_{0i} \cdot M_k \cdot \frac{dx}{EJ} = \int M_i \cdot M_{0k} \cdot \frac{dx}{EJ}, \tag{29}$$

worin der Index 0 andeuten soll, daß es sich um die Momente des gewöhnlichen Balkens ohne Formänderungseinfluß handelt. Im übrigen sind die Elastizitätsgleichungen wie in der Elastizitätstheorie gewohnt anzuschreiben.

8. Berechnungsbeispiel.

Für die in Fig. 6 dargestellte Hängebrücke sollen im folgenden, analytisch und graphisch die Momente infolge $X = 1^t$ und infolge halbseitiger Nutzlast p, sowie die Einflußlinie des Momentes im Viertel der Öffnung berechnet werden.

Abmessungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stützweite } l = 800\,\text{m} \\ \text{Feldweite } \lambda = 100\,\text{m} \\ \text{Pfeil } \quad f = 64\ \text{m} \end{array}\right\} \quad y'' = -\frac{8f}{l^2} = -0{,}8 \cdot 10^{-3}\, m^{-1}$$

Versteifungsträger:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Trägheitsmoment } J = 12\,\text{m}^4 = \text{konst.} \\ \text{Elastizitätsmodul } E = 21 \cdot 10^6\ \text{t/m}^2 \end{array}\right\} \quad EJ = 252 \cdot 10^6\,\text{m}^2\,\text{t}$$

Kabel:

$$\left.\begin{array}{ll} E_K F_K = 2{,}5 \cdot 10^6\ \text{t} \\ L \quad = 1250\,\text{m} \end{array}\right\} \quad \frac{L}{E_K F_K} = 0{,}50 \cdot 10^{-3}\ \text{m/t}$$

Belastungen:

Eigengewicht $g = 4$ t/m $\qquad Hg = \dfrac{4}{0{,}8 \cdot 10^{-3}} = 5000\,\text{t}$

Verkehrslast $p = 2{,}4$ t/m $\qquad \dfrac{1}{2} Hp_{,max} \approx 1300\,\text{t}$

$$H \cong 6300\,\text{t}$$

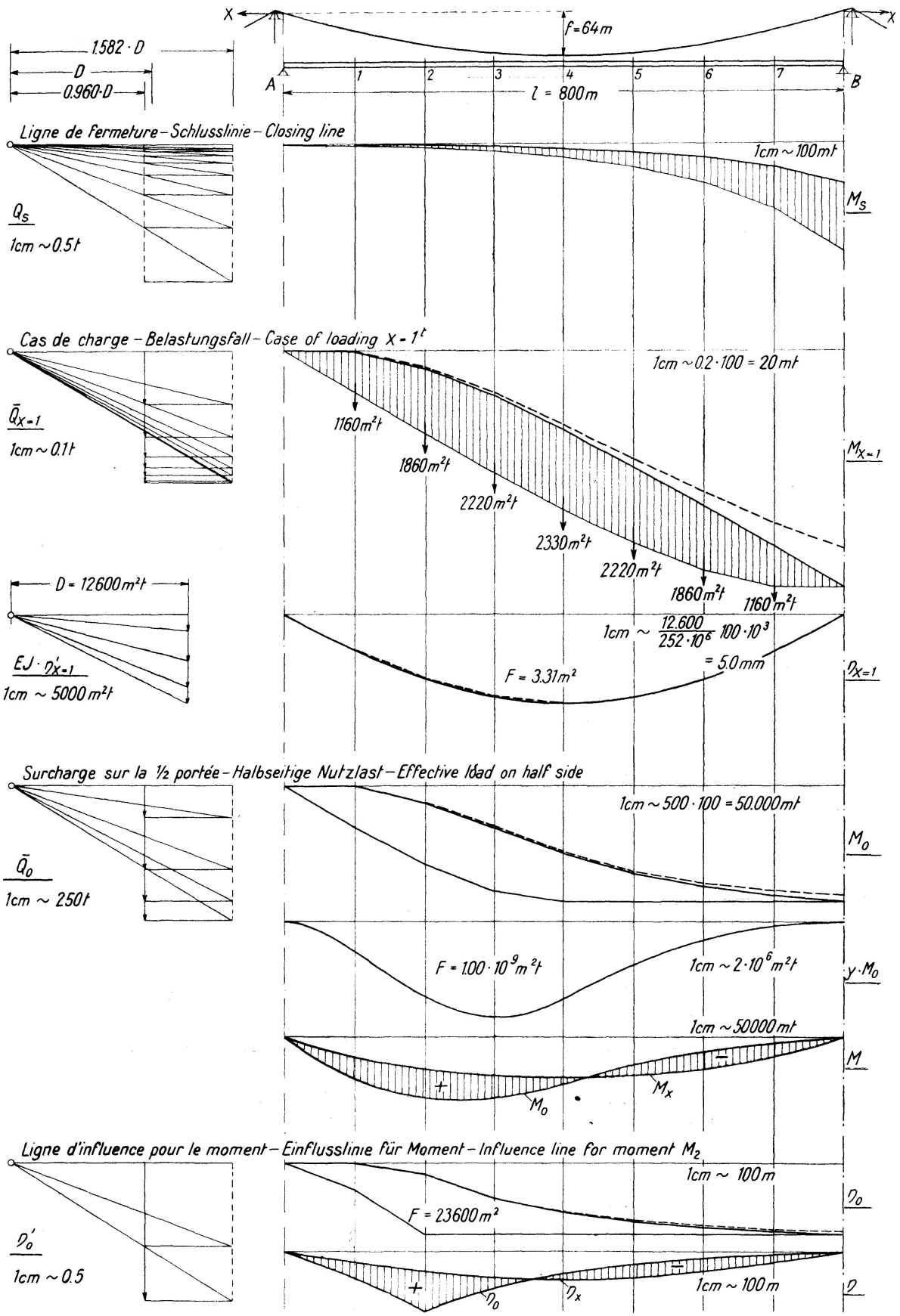
X
X
f = 64m
1.582 · D
D
0.960·D
A
1
2
3
4
5
6
7
B
l = 800m
Ligne de fermeture – Schlusslinie – Closing line
1cm ~ 100mt
M_s
Q_s
1cm ~ 0.5t
Cas de charge – Belastungsfall – Case of loading X = 1t
1cm ~ 0.2 · 100 = 20mt
$\bar{Q}_{X=1}$
1cm ~ 0.1t
1160m²t
1860m²t
2220m²t
2330m²t
2220m²t
1860m²t
1160m²t
$M_{X=1}$
D = 12600m²t
1cm ~ 12.600 / 252·10⁶ 100·10³ = 5.0mm
$EJ \cdot \eta'_{X=1}$
1cm ~ 5000m²t
F = 3.31m²
$\eta_{X=1}$
Surcharge sur la ½ portée – Halbseitige Nutzlast – Effective load on half side
1cm ~ 500 · 100 = 50.000mt
M_0
$\bar{Q}_0$
1cm ~ 250t
F = 1.00 · 10⁹ m²t
1cm ~ 2 · 10⁶ m²t
$y \cdot M_0$
1cm ~ 50000mt
M
+
−
M_0
M_x
Ligne d'influence pour le moment – Einflusslinie für Moment – Influence line for moment M_2
1cm ~ 100m
η_0
F = 23600m²
η'_0
1cm ~ 0.5
+
−
η_0
η_x
1cm ~ 100m
η

Fig. 6

Tabelle I. Schlußlinie und Horizontalzug X.

	Schlußlinie		Belastungsfall $X = 1^t$: $P = -0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 0{,}9795 = 0{,}07836^t$						
	$\lambda \cdot \bar{Q}_s \cdot \frac{\operatorname{sh} \varepsilon}{\varepsilon}$	M_s	$\bar{Q}$	M	ΔM	M	$\frac{12}{\lambda} K_M$ *)	$\frac{12 EJ}{\lambda} \cdot \eta'$	η
	m	m	t	mt	mt	mt	mt	mt	mm
A	1,91	0	-0,11713	0	0	0			0
								-768,1	
1	3,15	1,91	-0,19312 / -0,11476	-12,21	+ 0,22	-11,99	-138,8		2,540
								-629,3	
2	5,19	4,31	-0,18922 / -0,11086	-19,37	+ 0,50	-18,87	-223,1		4,621
								-406,2	
3	8,55	7,80	-0,18279 / -0,10443	-23,30	+ 0,90	-22,40	-266,4		5,965
								-139,8	
4	14,10	13,28	-0,17219 / -0,09383	-25,02	+ 1,53	-23,49	-279,7		6,427
								+139,8	
5	23,25	22,15	-0,15471 / -0,07635	-24,95	+ 2,55	-22,40	-266,4		5,965
								+406,2	
6	38,34	36,68	-0,12589 / -0,04753	-23,09	+ 4,22	-18,87	-223,1		4,621
								+629,3	
7	63,21	60,59	-0,07836 / 0	-18,96	+ 6,97	-11,99	-138,8		2,540
								+768,1	
B	104,22	99,96	0	-11,50	+11,50	0			0

*) $K_{M,m} \cong \frac{\lambda}{12}(M_{m-1} + 10\, M_m + M_{m+1})$; $\frac{\lambda^2}{12\, EJ} = 3{,}307 \cdot 10^{-6}\, t^{-1}$.

Tabelle II. Halbseitige Nutzlast $p = 2{,}4$ t/m.
$P_{1-3} = 240 \cdot 0{,}9795 = 235{,}1^t$; $P_4 = 117{,}5^t$.

	$\bar{Q}$	M	ΔM	M_0	y	M_x	M
	t	mt	mt	mt	m	mt	mt
A	297,4	0	0	0	0	0	0
1	490,4 / 255,3	30 995	- 93	30 902	28	-15 149	+15 753
2	420,9 / 185,8	45 406	- 209	45 197	48	-23 842	+21 355
3	306,4 / 71,3	46 903	- 379	46 524	60	-28 302	+18 222
4	117,5 / 0	35 878	- 645	35 233	64	-29 680	+5 553
5	0	21 760	-1076	20 684	60	-28 302	-7 618
6	0	13 197	-1781	11 416	48	-23 842	-12 426
7	0	8 004	-2942	5 062	28	-15 149	-10 087
B	0	4 854	-4854	0	0	0	0

Hilfsgrößen: $r = \sqrt{\frac{EJ}{H}} = 200\,\mathrm{m}$

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{r} = 0{,}5 \qquad e^{\varepsilon} = 1{,}6487 \qquad \mathrm{ch}\,\varepsilon = 1{,}1276$$

$$e^{-\varepsilon} = 0{,}6065 \qquad \mathrm{sh}\,\varepsilon = 0{,}5211$$

$$\frac{\mathrm{sh}\,\varepsilon}{\varepsilon} = 1{,}0422; \qquad \frac{2(\mathrm{ch}\,\varepsilon - 1)}{\varepsilon \cdot \mathrm{sh}\,\varepsilon} = 0{,}9795; \quad \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{12} = 0{,}9792\right]$$

In Tabelle I sind die Momente M und Durchbiegungen η infolge $X = 1^t$ berechnet. Die zugehörige Verschiebungsgröße ergibt sich wie folgt:

$$\int \eta \cdot dx = 3{,}313\,\mathrm{m}^2/\mathrm{t} \qquad -y'' \cdot \int \eta\, dx = 2{,}650 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/t}$$

$$\frac{L}{E_K F_K} = 0{,}500 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/t}$$

$$a_{11} = 3{,}150 \cdot 10^{-3}\ m/\mathrm{t}$$

Für halbseitige Nutzlast (Tabelle II) folgt:

$$\int y \cdot M_0\, dx = 1003 \cdot 10^6\ \mathrm{m^3\,t} \qquad a_{10} = -\frac{\int y M_0\, dx}{EJ} = -3{,}980\,\mathrm{m}$$

$$\underline{X} = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = \underline{1263{,}5\mathrm{t}}$$

($H = 6263{,}5$ t, Annahme $H = 6300$ t genügend genau)

und für die Einflußlinie M_3:

$$\int \eta_0 \cdot dx = 23{,}59 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^2 \qquad a_{10} = y'' \int \eta_0 \cdot dx = -18{,}872\,\mathrm{m}$$

$$\underline{X} = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = \underline{5991\ \mathrm{t}}$$

Der entsprechende Einfluß von X ist zu superponieren.

Die entsprechenden Berechnungen sind in Fig. 6 auch graphisch durchgeführt.

Tabelle III. Einflußlinie M_2.

	$\lambda \frac{\mathrm{sh}\,\varepsilon}{\varepsilon} \eta'$	η	$\Delta\eta$	η_0	η_x	η
	m	m	m	m	m	m
A	38,34	0	0	0	0	0
1	63,21	38,34	-0,08	38,26	-15,22	+23,04
2	104,22 / 0	86,46	-0,19	86,27	-27,68	+58,59
3	0	52,44	-0,34	52,10	-35,74	+16,36
4	0	31,80	-0,57	31,23	-38,50	- 7,27
5	0	19,29	-0,96	18,33	-35,74	-17,41
6	0	11,70	-1,58	10,12	-27,68	-17,56
7	0	7,10	-2,61	4,49	-15,22	-10,73
B	0	4,31	-4,31	0	0	0

Zusammenfassung.

Durch Aufspalten der Differentialgleichung 2. Ordnung des Problems läßt sich die Berechnung in zwei Stufen — Querkraft, Moment — durchführen. Die Integration über ein Trägerfeld ergibt einfache Rekursionsformeln oder graphische Konstruktionen, die eine genaue Untersuchung mit gewohnten baustatischen Mitteln erlauben. Die gewöhnliche Seilpolygontheorie ergibt sich als Spezialfall.

Horizontalzug und allfällige Kontinuitätsmomente des Versteifungsträgers werden wie in der Elastizitätstheorie als überzählige Größen mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen berechnet. Zur direkten Bestimmung von Schnittkräften und Verformungen verwendet man zweckmäßig Einflußlinien.

Résumé.

Le partage de l'équation différentielle du 2e ordre de ce problème permet un calcul en deux étapes: effort tranchant, moment. L'intégration sur une travée fournit des formules simples ou des constructions graphiques qui permettent une étude exacte au moyen des méthodes comme de la statique. La théorie usuelle du polygone funiculaire est un cas spécial.

La traction horizontale et les moments de continuité éventuels de la poutre raidisseuse sont calculés, comme dans la théorie de l'elasticité, en tant que grandeurs hyperstatiques à l'aide des équations d'élasticité. Pour la détermination directe des efforts dans les sections et des déformations il est bon d'utiliser des lignes d'influence.

Summary.

By splitting up the differential equation of the 2nd order of the problem, the calculation can be effected in two steps — transverse force, moment. Integrating over one field of the beam gives simple formulae or graphical constructions which allow an exact investigation by the usual static means. The ordinary theory of the funicular polygon follows as a special case.

Horizontal pull and any continuity moments of the stiffening girder are calculated with the help of elasticity equations as in the elasticity theory, as redundant values. Influence lines are conveniently used for the direct determination of shearing forces and deformations.