Die kombinierte Kraft- und Deformationsmethode

DIE KOMBINIERTE KRAFT- UND DEFORMATIONSMETHODE.

LA MÉTHODE COMBINÉE DES FORCES ET DES DÉFORMATIONS.

THE COMBINED METHOD OF FORCES AND DEFORMATIONS.

Von Dr. techn. AXEL EFSEN, Kopenhagen.

Einleitung.

Die Kraftmethode, bei der man die Kräfte (X_a, X_b, ...) als die Unbekannten einführt, ist die ursprüngliche und grundlegende Methode zur Berechnung der statisch unbestimmten Systeme. Ihre Entwicklung ist in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts durch Beiträge von MAXWELL, CLAPEYRON, MOHR, CASTIGLIANO und viele andere gefördert worden.

Viel später erschien die Deformationsmethode, die mit Deformationsgrößen (ζ_a, ζ_b, ...) als Unbekannten arbeitet, und die ihre endgültige Form durch A. BENDIXEN [1]) und A. OSTENFELD [2]) erhielt. Es ist jedoch zu bemerken, daß sich diese Methode auf die Kenntnis der Spannungs- und Deformationseigenschaften gewisser statisch unbestimmter Systeme (eingespannter Balken und Bogen) stützt, und deshalb nur einen praktischen Wert hat, weil man eben durch die Kraftmethode im Stande ist, diese Elemente zu berechnen.

Die allgemeine Theorie beider Methoden liegt in vollständig fertiger Form für willkürliche Systeme mit willkürlicher Belastung vor und ist in jeder Beziehung erschöpfend behandelt. Eigentlich Neues auf diesem Gebiet kann daher kaum erwartet werden, dagegen aber wohl arbeitsersparende Sondermethoden, die auf der vorliegenden allgemeinen Grundlage aufgebaut sind.

Ob man die eine oder andere Methode benützt, kann theoretisch gesehen gleichgültig sein, indem beide selbstverständlich dasselbe Ergebnis haben, nämlich den Spannungs- und Deformationszustand in dem gegebenen System für die gegebene Belastung. Denkt man aber an den Umfang der praktischen Rechenarbeit, so ist es von allergrößter Bedeutung, daß man die am besten geeignete Methode wählt, d. h. diejenige, welche die geringste Anzahl Elastizitätsgleichungen ergibt.

Eine Kombination der beiden Methoden in der Art, daß man zuerst die eine Methode zur Aufstellung und Lösung eines Gleichungssatzes benützt und danach nach der anderen Methode weiterrechnet, hat den größten Erfolg ergeben, z. B. bei der Behandlung von Systemen mit beweglicher Knotenpunktsfigur nach der Fixpunktmethode.

Neu ist der Gedanke auch nicht, Elastizitätsgleichungen aufzustellen,

---

1) A. BENDIXEN: Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen. Berlin 1914.

2) A. OSTENFELD: Die Deformationsmethode. Berlin 1926.

die gleichzeitig Kraft- und Deformationsgrößen als Unbekannte enthalten. Dies hat BLEICH [3]) getan, und auch MANN [4]) kam auf diese Möglichkeit, ohne sie weiter zu verfolgen.

Dagegen ist, soweit der Verfasser weiß, eine allgemeine theoretische Ausarbeitung der kombinierten Kraft- und Deformationsmethode noch nicht unternommen worden, und dies soll daher die Aufgabe dieser Abhandlung sein.

Das Hauptsystem.

Ein elastisches, statisch unbestimmtes System ist einem Einfluß ausgesetzt, bestehend aus äußeren Kräften und Momenten P_p, samt Deformationen D_q, welch letztere lineare Verschiebungen und Winkeldrehungen sein können, sowohl absolute wie relative. Außerdem können Temperaturvariationen und unelastische Bewegungen der Unterstützungen vorhanden sein. Diese letzteren können jedoch unter D_q einbezogen werden, was im Folgenden geschieht.

Man ändert jetzt die Bewegungsmöglichkeiten dieses gegebenen Systems zu dem Zweck, ein leicht zu berechnendes System zu erzielen, d. h. ein System, für welches man Schnittkräfte und Deformationen für einen beliebigen Einfluß berechnen kann. Dieses neue System wird das Hauptsystem genannt.

Diese Umgestaltung geschieht folgendermaßen:

1. durch Einschaltung von neuen Bewegungsmöglichkeiten,
2. durch Ausschaltung von bestehenden Bewegungsmöglichkeiten.

Im ersten Fall werden Stäbe durchschnitten, Gelenke angebracht usw., und die zugehörigen Schnittkräfte (eine für jede der neuen Bewegungsmöglichkeiten $\delta_a, \delta_b, \ldots$) werden mit $X_a, X_b, \ldots$ bezeichnet.

Im anderen Fall hält man das System unter Hinzufügung der Kräfte Z fest; diese sind so beschaffen, daß die beabsichtigten Bewegungseinschränkungen entstehen. Es bedeutet einen gewissen formellen Vorteil, diese Z-Kräfte ($Z_\alpha, Z_\beta \ldots$) in hinzugefügten (unelastischen) Systemteilen, den Z-Stäben, wirken zu lassen. Die (unelastischen) Deformationen in diesen Stäben werden mit $\zeta_\alpha, \zeta_\beta \ldots$ bezeichnet.

Eine Umgestaltung der oben beschriebenen Art kann in verschiedener Weise (viele verschiedene Hauptsysteme) durchgeführt werden; eine zweckmäßige Wahl des Hauptsystems bleibt jedoch Vorbedingung für die Durchführbarkeit der Berechnung.

Da man bei Einschaltung genügend vieler Bewegungsmöglichkeiten zu einem statisch bestimmten System kommen kann, kann man jedenfalls auf diesem Wege ein brauchbares Hauptsystem erzielen.

Die Elastizitätsgleichungen.

Um jetzt von dem Hauptsystem zu dem gegebenen System wieder zurück zu gelangen, muß man setzen:

$$\delta_a = \delta_b = \ldots = 0, \tag{1 a}$$
$$Z_\alpha = Z_\beta = \ldots = 0, \tag{1 b}$$

---

[3]) BLEICH: Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Berlin 1918.

[4]) MANN: Theorie der Rahmenwerke auf neuer Grundlage. Berlin 1927 (Das Vorwort).

wo die Gleichung (1a) das wirkliche elastische Verhalten, die Gl. (1b) die Beweglichkeit wiederherstellen. Zusammen führen sie also das Hauptsystem zu dem gegebenen System zurück.

Im Hauptsystem ist eine beliebige Deformation:

$$\delta_m = \delta_{m0} - \delta_{ma} \cdot X_a - \delta_{mb} \cdot X_b \ldots - \delta_{m\alpha} \cdot \zeta_\alpha - \delta_{m\beta} \cdot \zeta_\beta \ldots \tag{2a}$$

und eine Schnittkraft:

$$S_n = S_{n0} - S_{na} \cdot X_a - S_{nb} \cdot X_b \ldots - S_{n\alpha} \cdot \zeta_\alpha - S_{n\beta} \cdot \zeta_\beta \ldots \tag{2b}$$

wo δ die Deformationen und S die Schnittkräfte bezeichnen.

Hier und im folgenden gibt der erste Index den Ort und die Richtung an, wo die Wirkung (Deformation, Kraft) auftritt. Bei zwei Indizes gibt der letztere die Ursache an. Außerdem ist die Regel eingeführt, daß $a, b, \ldots$ (lat. Buchstaben) Punkte bezeichnen, wo Bewegungsmöglichkeiten neu eingeschaltet, während $\alpha, \beta, \ldots$ (griech. Buchstaben) Punkte bezeichnen, wo die Bewegungsmöglichkeiten ausgeschaltet wurden.

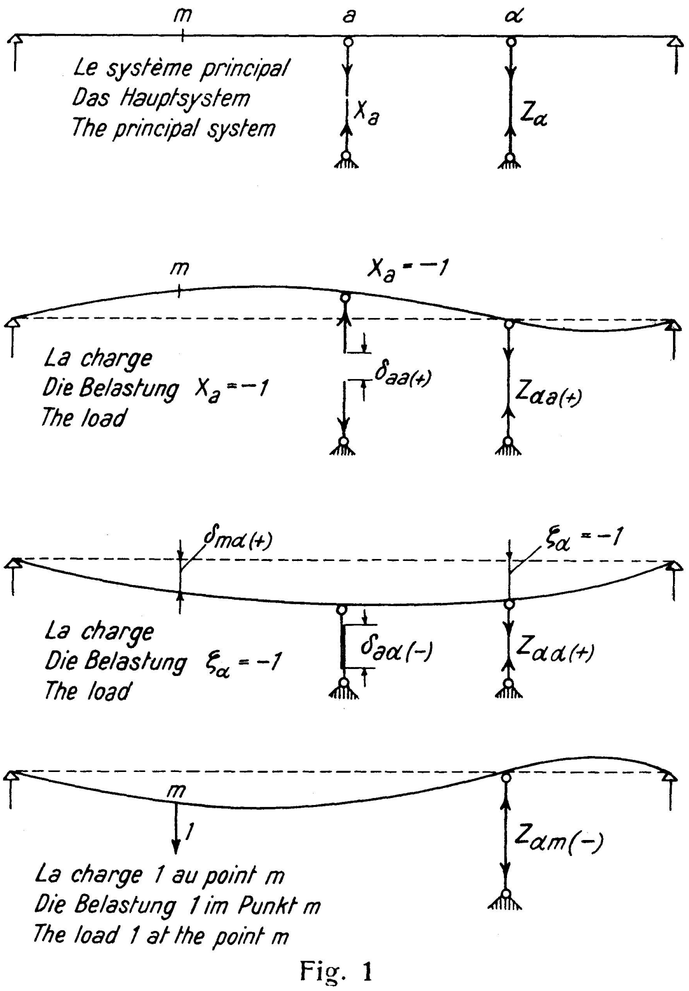


Fig. 1

Aus den Gleichungen (2a) und (2b) kann man die Bedeutung der Größen mit doppeltem Index direkt ablesen.

So bedeuten δ_{m0} und S_{n0} (Belastungsglieder) die Wirkung im Hauptsystem für die gegebene äußere Beeinflussung allein, während δ_{na}, S_{na}, $\delta_{m\alpha}$, $S_{n\alpha}$ die Werte sind, die δ_m bzw. S_n annehmen, wenn $X_a = -1$, bzw. $\zeta_\alpha = -1$ die einzige Beeinflussung ist.

Die Belastungsglieder können wie folgt geschrieben werden:

$$\delta_{m0} = \sum P_p \cdot \delta_{mp} + \sum D_q \cdot \delta_{mq} + \delta_{mt}, \tag{3a}$$

$$S_{n0} = \sum P_p \cdot S_{np} + \sum D_q \cdot S_{nq} + S_{nt}. \tag{3b}$$

Hier sind δ_{mp} und S_{np} die Wirkung für $P_p = 1$ als einziger Krafteinfluß, δ_{mq} und S_{nq} die Wirkung für $D_q = 1$ als einziger Deformationseinfluß. δ_{mt} und S_{nt} sind die Temperaturglieder.

Aus den Gl. (1) und (2) bekommt man jetzt, indem die Kräfte in den Z-Stäben mit Z bezeichnet werden:

$$\left|\begin{matrix} X_a \\ X_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_\alpha \\ \zeta_\beta \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \cdot\cdot & \delta_{a\alpha} & \delta_{a\beta} & \cdot\cdot \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \cdot\cdot & \delta_{b\alpha} & \delta_{b\beta} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ Z_{\alpha a} & Z_{\alpha b} & \cdot\cdot & Z_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\beta} & \cdot\cdot \\ Z_{\beta a} & Z_{\beta b} & \cdot\cdot & Z_{\beta\alpha} & Z_{\beta\beta} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \delta_{a0} \\ \delta_{b0} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{\alpha 0} \\ Z_{\beta 0} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right| \tag{4}$$

Alle Größen mit doppeltem Index werden in den Richtungen $X_a = -1$, $X_b = -1, \ldots$, $\zeta_\alpha = -1$, $\zeta_\beta = -1, \ldots$ positiv gezählt.

Diese Gleichungen (Elastizitätsgleichungen) bestimmen die Unbekannten X und ζ, und jede Wirkung in dem gegebenen System findet man hiernach aus den Gl. (2).

Falls in den Gl. (4) die ζ fehlen, hat man es mit der Kraftmethode, und falls die X fehlen, mit der Deformationsmethode zu tun.

Die Beiwerte der Elastizitätsgleichungen.

Maxwell's Satz gibt wie gewöhnlich:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \text{ usw.},$$

indem die Indizes lateinische Buchstaben sind, und

$$Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha},$$

indem die Indizes in diesem Fall griechische Buchstaben sind.

Wird Betti's Satz benutzt, so folgt (vergl. Fig. 1):

$$1_a \cdot \delta_{a\alpha} + Z_{\alpha a} \cdot 1_\alpha = 0_a \cdot \delta_{aa} + Z_{\alpha\alpha} \cdot 0_\alpha,$$

$$1_a \cdot \delta_{a\alpha} = - Z_{\alpha a} \cdot 1_\alpha, \tag{5}$$

wo die Indizes „gemischte" Buchstaben sind.

Diese Formel besagt also:

In einem elastischen System wird dem Punkt (dem Punktepaar) a der Krafteinfluß (Momenteneinfluß) 1 gegeben, während der Punkt (das Punktepaar) α mit einem Z-Stab festgehalten wird, sodaß eine Bewegungsmöglichkeit verhindert wird. Dadurch entsteht die Kraftwirkung $Z_{\alpha a}$ in dem Z_α-Stabe. Gibt man daher dem Z_α-Stab den Deformationseinfluß 1, so bekommt a die Deformationswirkung $\delta_{a\alpha}$. Für die Größen $\delta_{a\alpha}$ und $Z_{\alpha a}$

gilt, daß sie gleich groß sind und (mit der angenommenen Vorzeichenregel) entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Für einen willkürlichen Punkt m gilt ebenfalls

$$\delta_{m\alpha} = - Z_{\alpha m}\,, \tag{5a}$$

indem 1_m und δ_m als positiv in derselben Richtung (vergl. Fig. 1) gezählt werden.

Gemäß der fundamentalen Voraussetzung, daß das Hauptsystem brauchbar ist, können die Schnittkräfte darin als bekannt für jeden einzelnen der folgenden Einflüsse btrachtet werden:

Die gegebene äußere Belastung,

$$\begin{aligned} X_a &= -1 \\ X_b &= -1 \text{ usw.} \\ \zeta_\alpha &= -1 \\ \zeta_\beta &= -1 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Aus diesen Belastungszuständen gehen alle Beiwerte in den Elastizitätsgleichungen hervor.

Die Deformationsgrößen δ bekommt man aus der Arbeitsgleichung, den ν-Kräften oder Verschiebungsplänen.

Die Einflußlinien.

Die Einflußlinien erhält man dadurch, daß man in der Gl. (4) folgende Werte für die Belastungsglieder einsetzt:

$$\begin{aligned} \delta_{a0} &= \delta_{am} = \delta_{ma} \text{ usw.} \\ Z_{\alpha 0} &= Z_{\alpha m} = - \delta_{m\alpha} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Einflußlinien sind dann:

$$\left|\begin{matrix} X_a \\ X_b \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \zeta_\alpha \\ \zeta_\beta \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \cdot\cdot & \delta_{a\alpha} & \delta_{a\beta} & \cdot\cdot \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \cdot\cdot & \delta_{b\alpha} & \delta_{b\beta} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \\ Z_{\alpha a} & Z_{\alpha b} & \cdot\cdot & Z_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\beta} & \cdot\cdot \\ Z_{\beta a} & Z_{\beta b} & \cdot\cdot & Z_{\beta\alpha} & Z_{\beta\beta} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \delta_{ma} \\ \delta_{mb} \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ -\delta_{m\alpha} \\ -\delta_{m\beta} \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right| \tag{6}$$

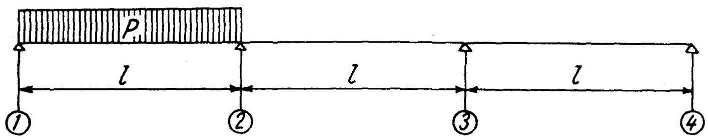
Die Größen δ_{ma}, $\delta_{m\alpha}$ usw. sind Biegelinien für die Belastungen $X_a = -1$, $\zeta_\alpha = -1$ usw.

Die Einflußlinien für andere Wirkungen ergeben sich hiernach aus den Gl. (2).

Beispiel.

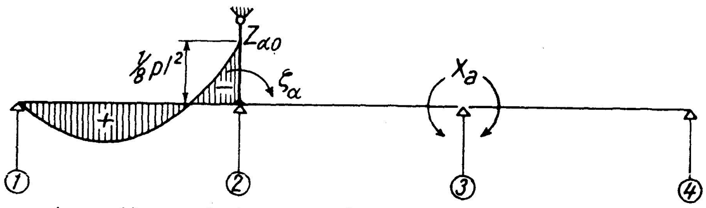
Der in Fig. 2 dargestellte kontinuierliche Balken mit gleichen Spannweiten und konstantem Trägheitsmoment J hat im Felde 1—2 gleichmäßig verteilte Totalbelastung p.

Man setzt: $$EJ/l = s.$$



Le système donné – Das gegebene System – The given system

Fig. 2



Le système principal avec la charge donnée
Das Hauptsystem mit der gegebenen Belastung
The principal system with the given load

Fig. 3

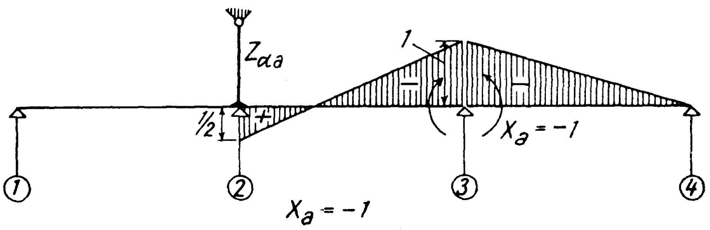


Fig. 4

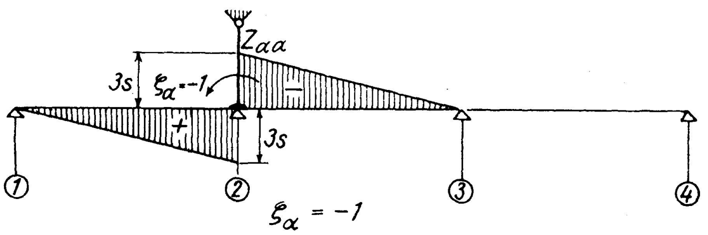


Fig. 5

Das gewählte Hauptsystem ist in Fig. 3 gezeigt. Man hat ein Gelenk in Punkt 3 eingeschaltet, und die Drehung in Punkt 2 ist mit Hilfe eines Z-Stabes verhindert. Gleichzeitig werden die unbekannten X_a und ζ_α eingeführt.

Das Momentenbild im Hauptsystem für die gegebene Belastung, $X_a = -1$ und $\zeta_\alpha = -1$ ist in Fig. 3, 4 und 5 angegeben.

Aus Fig. 3 folgt:

$$\delta_{a0} = 0,$$

$$Z_{\alpha 0} = -\frac{1}{8} p l^2,$$

und aus Fig. 4:

$$\delta_{aa} = \frac{1}{4s} + \frac{1}{3s} = + \frac{7}{12s},$$

$$Z_{\alpha a} = -\frac{1}{2} = -\delta_{\alpha a}.$$

Ferner gibt Fig. 5:

$$Z_{\alpha\alpha} = 3s + 3s = 6s$$

und als Kontrolle:

$$\delta_{a\alpha} = \frac{3s \cdot l}{6EJ} = +\frac{1}{2}.$$

Die Elastizitätsgleichungen lauten somit:

$$X_a \cdot \frac{7}{12s} + \zeta_\alpha \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

$$X_a\left(-\frac{1}{2}\right) + \zeta_\alpha \cdot 6s = -\frac{1}{8}pl^2,$$

mit der Lösung:

$$X_a = +\frac{1}{60}pl^2$$

$$\zeta_\alpha = -\frac{7}{360} \cdot \frac{pl^2}{s}.$$

Aus den Gl. (2b) geht nun z. B. hervor:

$$M_{2-1} = -\frac{1}{8}pl^2 - 0 \cdot \frac{1}{60}pl^2 - 3s\left(-\frac{7}{360} \cdot \frac{pl^2}{s}\right) = -\frac{1}{15}pl^2,$$

$$M_{2-3} = 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60}pl^2 - (-3s)\left(-\frac{7}{360} \cdot \frac{pl^2}{s}\right) = -\frac{1}{15}pl^2,$$

und man weiß im voraus, daß diese beiden Momente gleich groß sein müssen.

Die Einflußlinien gehen aus:

$$X_a \cdot \frac{7}{12s} + \zeta_\alpha \cdot \frac{1}{2} = \delta_{ma},$$

$$X_a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \zeta_\alpha \cdot 6s = \delta_{m\alpha}$$

hervor; man findet z. B.:

$$X_a = \frac{2}{15}(12s \cdot \delta_{ma} + \delta_{m\alpha}).$$

δ_{ma} entspricht der Biegelinie für $X_a = -1$ (Fig. 4) und $\delta_{m\alpha}$ der Biegelinie für $\zeta_a = -1$ (Fig. 5).

Für die Mitte des Feldes 2—3 ist:

$$\delta_{ma} = -\frac{1}{32s},$$

$$\delta_{m\alpha} = -\frac{3l}{16},$$

und somit wird die Einflußordinate für X_a in diesem Punkt:

$$\frac{2}{15}\left(12s\left(-\frac{l}{32s}\right) - \frac{3l}{16}\right) = -0{,}075\,l.$$

Zusammenfassung.

Bei der Berechnung statisch unbestimmter Systeme wird eine Umgestaltung des gegebenen Systemes mittels Einschaltung und Ausschaltung von Bewegungsmöglichkeiten derart vorgenommen, daß ein leicht zu berechnendes System (das Hauptsystem) entsteht, d. h. ein System, in welchem Schnittkräfte und Deformationen berechnet werden können. Danach werden die Bedingungsgleichungen (die Elastizitätsgleichungen) aufgestellt, welche die Bewegungsmöglichkeiten des ursprünglichen Systems wiederherstellen.

Zwei grundsätzlich verschiedene Methoden sind vorhanden.

In der Kraftmethode schaltet man im vorgelegten System einige neue Bewegungsmöglichkeiten δ_a, $\delta_b \ldots$ ein und führt die entsprechenden Kraftgrößen X_a, $X_b, \ldots$ als die Unbekannten der Bedingungsgleichungen (Kraft-Elastizitätsgleichungen) $\delta_a = \delta_b \ldots = 0$ ein.

In der Deformationsmethode dagegen schaltet man durch Hinzufügung von gedachten Z-Stäben Bewegungsmöglichkeiten $\zeta_\alpha, \zeta_\beta, \ldots$ aus, wobei Kräfte Z_α, $Z_\beta, \ldots$ in den Z-Stäben entstehen. Die Deformationsgrößen ζ_α, $\zeta_\beta, \ldots$ sind dann die Unbekannten der Bedingungsgleichungen (Deformations-Elastizitätsgleichungen) $Z_\alpha = Z_\beta, \ldots = 0$.

Die theoretische Ausarbeitung dieser beiden Methoden ist früher in jeder Hinsicht erschöpfend behandelt worden.

Dagegen ist, soweit der Verfasser weiß, eine allgemeine theoretische Behandlung von statisch unbestimmten Systemen sowohl unter Einschaltung als Ausschaltung von Bewegungsmöglichkeiten früher nicht veröffentlicht worden; dies soll deshalb der Zweck dieser Abhandlung sein.

Hat man unter den oben erwähnten Gesichtspunkten ein brauchbares System erhalten, so entstehen zwei Gruppen von Bedingungsgleichungen, nämlich $\delta_a = \delta_b, \ldots = 0$, und $Z_\alpha = Z_\beta, \ldots = 0$; die Lösung dieser Gleichungen liefert die Bedingungen für die Wiederherstellung der Beweglichkeit des ursprünglichen Systemes, für welches die Schnittkräfte und Deformationen jetzt berechnet werden können.

MAXWELL's Satz gilt für die Gleichungsbeiwerte, d. h. $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ und $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$, und außerdem kann ein neuer Satz $\delta_{a\alpha} = -Z_{\alpha a}$ abgeleitet werden.

Die Grundlage für die Berechnung von Einflußlinien wird angegeben auf Grund des neuen Satzes: $Z_{\alpha m} = -\delta_{m\alpha}$.

Résumé.

Pour calculer les systèmes hyperstatiques, on peut effectuer une transformation du système donné qui consiste d'une part à introduire, d'autre part à supprimer certains états de mobilité afin d'obtenir un système approprié (système principal) qui permette de calculer les forces et les déformations. A cet effet, on établit les équations d'élasticité qui rétablissent l'état de mobilité du système original.

Deux méthodes essentiellement différentes sont à disposition.

La «méthode des forces» est basée sur l'introduction dans le système donné d'un certain nombre de nouveaux états de mobilité δ_a, $\delta_b \ldots$; elle permet de calculer les forces correspondantes X_a, $X_b, \ldots$ qui sont les inconnues des équations $\delta_a = \delta_b = \ldots = 0$ (équations d'élasticité des forces).

La «méthode de déformation» par contre supprime certains états de mobilité ζ_α, ζ_β, par l'adjonction au système donné de certaines barres Z qui, de ce fait, sont sollicitées par des forces Z_α, $Z_\beta, \ldots$. Les déformations ζ_α,

$\zeta_3, \ldots$ sont ici les inconnues des équations $Z_\alpha = Z_\beta = \ldots = 0$ (équations d'élasticité des déformations).

Ces deux méthodes ont été étudiées jusque dans leurs moindres détails.

Par contre, une étude théorique générale des systèmes hyperstatiques, basée sur l'adjonction et la suppression de certains états de mobilité, n'a, au savoir de l'auteur, pas été publiée jusqu'ici. C'est précisément le but de ce mémoire.

Un système approprié, établi selon la méthode susmentionnée, donne lieu à deux catégories d'équations, à savoir $\delta_a = \delta_b = \ldots = 0$ et $Z_\alpha = Z_\beta = \ldots = 0$; la résolution de ces équations fournit les conditions qui rétablissent l'état de mobilité du système donné et permet de déterminer les forces et les déformations inconnues.

Le théorème de MAXWELL est valable pour les coefficients des équations, c. à. d. on a: $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ et $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$; en plus, on peut établir l'égalité suivante: $\delta_{a\alpha} = -Z_{\alpha a}$.

Les lignes d'influence peuvent être calculées au moyen d'un nouveau théorème, à savoir $Z_{\alpha m} = -\delta_{m\alpha}$.

Summary.

In the analysis of statically indeterminate structures the fundamental principle is to alter the original structure by introducing and excluding possibilities of movement and in such a way, that forces and displacements in this new auxiliary structure (The Computable System) can readily be computed. This gives the opportunity of deriving the elastic equations, which restore the conditions of movement for the original structure.

Two essentially different methods are available:

In the Method of Forces the original structure is altered to "the Residual Frame" by introducing some extra means of movement $\delta_a, \delta_b, \ldots$ and the corresponding "Redundant Forces" $X_a, X_b, \ldots$ are introduced as the unknown quantities in the elastic equations of forces $\delta_a = \delta_b, \ldots = 0$.

In the Method of Deformations on the other hand, some means of movement are excluded by adding the "Fixing Forces" Z_α, $Z_\beta, \ldots$, and the corresponding deformations $\zeta_\alpha, \zeta_\beta, \ldots$ are introduced as the unknown quantities in the elastic equations of deformations $Z_\alpha = Z_\beta, \ldots = 0$.

The general theory of those two methods is well known and has already been worked out in detail.

Of course, a computable system may be obtained by simultanously introducing and excluding possibilities of movement, but as far as known by the Author a general theoretical analysis based on this assumption has never been published and is therefore the aim of this treatise.

In this method, which combines the two above-mentioned methods, two different kinds of elastic equations with the unknown quantities X and ζ are simultaneously valid, namely $\delta_a = \delta_b, \ldots = 0$ and $Z_\alpha = Z_\beta, \ldots = 0$. By solving those equations, the condition for restoring the possibility of movement in the original system is found, after which the stresses and deformations can be computed.

For the coefficients in the elastic equations it is known that $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ and $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$ (MAXWELL's Theorem) and a new theorem can be derived: $\delta_{a\alpha} = -Z_{\alpha a}$.

The influence lines can also be found by means of the elastic equations, and in this procedure the above-mentioned new theorem $Z_{\alpha m} = -\delta_{m\alpha}$ is utilised.

Leere Seite
Blank page
Page vide