

# Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences

Autor(en): **Favre, Henry**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **7 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-7996>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LE CALCUL DES PLAQUES OBLIQUES PAR LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES.

DIE BERECHNUNG DER SCHIEFEN PLATTE MIT DER  
DIFFERENZENRECHNUNG.

THE CALCULATION OF OBLIQUE SLABS BY THE METHOD  
OF DIFFERENCES.

HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

Dans un mémoire paru récemment, nous avons montré qu'il est commode d'utiliser un système de coordonnées cartésiennes obliques pour l'étude des plaques dont le contour est un parallélogramme<sup>1)</sup>. Après avoir établi les équations générales de la théorie dans ce système de coordonnées, nous avons donné des formules approchées pour le calcul de la plaque oblique encadrée à charge uniformément répartie.

Ces dernières formules ont été obtenues à l'aide du principe des travaux virtuels. L'application de ce principe constitue, comme on sait, une des principales méthodes que les ingénieurs utilisent aujourd'hui dans leurs recherches sur la déformation des solides élastiques.

Nous nous proposons maintenant de montrer que les coordonnées obliques sont également commodes lorsqu'il s'agit d'appliquer la méthode des équations aux différences à l'étude des plaques dont le contour est un parallélogramme. Le choix d'un réseau oblique, constitué par deux systèmes de droites parallèles aux côtés, paraît être en effet l'un des mieux adaptés à ce contour. En outre, comme un exemple le montrera, les réseaux obliques permettent d'établir pour le parallélogramme des formules générales qu'il serait certainement plus difficile d'obtenir à l'aide d'autres réseaux<sup>2)</sup>.

Dans la première partie de ce mémoire, nous rappelons les équations fondamentales de notre étude précédente. Dans la seconde, nous établissons les équations aux différences relatives aux réseaux obliques. Celles-ci sont ensuite appliquées à l'étude de la déformation de la plaque oblique posée, à charge uniformément répartie. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous comparons la flèche de la plaque posée à celle de la plaque encadrée.

<sup>1)</sup> Voir «Contribution à l'étude des plaques obliques». Schweizerische Bauzeitung des 25 juillet et 1<sup>er</sup> août 1942 et Bulletin technique de la Suisse romande du 3 octobre 1942.

<sup>2)</sup> On a utilisé jusqu'à présent, pour l'étude des plaques obliques, des réseaux triangulaires et des réseaux rectangulaires. Pour les premiers, voir H. VOGT, : «Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten». Diss. der T. H. Hannover, 1939. Pour les seconds: F. STÜSSI: «Die neue Eisenbahnbrücke bei der Seestraßen-Unterführung in Zürich-Wollishofen». Schweizerische Bauzeitung du 20 décembre 1941.

### § 1. Rappel des principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes obliques.

Considérons une plaque d'épaisseur  $h$ , sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces et posée ou encadrée le long du pourtour (fig. 1). Choisissons un système cartésien oblique  $Ouvz$  dont les axes  $u, v$  sont situés dans le plan équidistant des faces, avant la déformation. Les axes  $u, v$  font un angle  $\alpha$  compris entre 0 et  $\pi$ , l'axe  $z$  est perpendiculaire aux deux premiers.

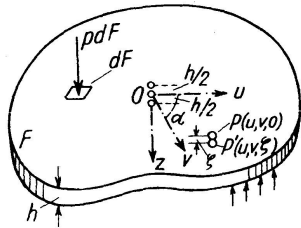


Fig. 1

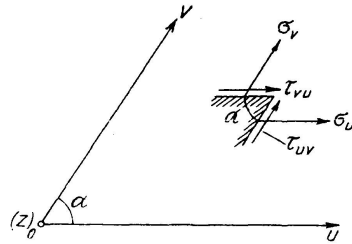


Fig. 2

Soit  $\zeta = PP'$  le déplacement, parallèle à  $z$ , d'un point  $P$  du plan  $u, v$ . Le lieu des points  $P'$  ( $u, v, \zeta$ ) est la « surface élastique ».

Nous avons démontré, dans notre premier mémoire, que l'équation différentielle de cette surface est <sup>3)</sup>:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial v^4} - 4 \cos \alpha \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^3 \partial v} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial u \partial v^3} \right) + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^2 \partial v^2} = \frac{12(1 - \nu^2) \sin^4 \alpha p}{E h^3}, \quad (1)$$

$E$  étant le module d'élasticité de YOUNG,  $\nu = \frac{1}{m}$  le coefficient de POISSON,  $p(u, v)$  la surcharge par unité de surface.

Cette équation peut aussi s'écrire:

$$\Delta \Delta \zeta = \frac{12(1 - \nu^2)}{E h^3} p, \quad (2)$$

où l'opérateur de LAPLACE a l'expression suivante:

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right). \quad (3)$$

Le travail de déformation intérieur est donné par une intégrale double, étendue à la surface  $F$  de la plaque:

$$A = \frac{E h^3}{24(1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \left\{ \iint_{(F)} \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2[2 \cos^2 \alpha + (1 - \nu) \sin^2 \alpha] \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4 \cos \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right] du dv \right\} \quad (4)$$

et le principe des travaux virtuels est exprimé par la relation:

$$\sin \alpha \iint_{(F)} p \delta \zeta du dv - \delta A = 0. \quad (5)$$

Les « composantes des tensions en coordonnées obliques » sont les suivantes (fig. 2):

<sup>3)</sup> loc. cit., § 2.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} + (\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha) \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \right], \\ \sigma_v &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ (\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha) \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \right], \\ \tau_{uv} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \cos\alpha \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \right) + \{(1+\nu)\sin^2\alpha - 2\} \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} \right], \\ \sigma_z = \tau_{vz} = \tau_{zu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ces formules permettent de calculer les tensions dès que l'on connaît  $\zeta(u, \nu)$ .

Remarque. Si la plaque a la forme d'un parallélogramme et si  $\zeta$  est nul le long du contour, l'expression du travail de déformation se simplifie, car<sup>4)</sup>:

$$\iint_{(F)} \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} du dv = \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} \right)^2 du dv. \quad (7)$$

L'expression (4) s'écrit, en tenant compte de (7):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \iint_{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1+2\cos^2\alpha) \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4\cos\alpha \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v} \right\} du dv. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

## § 2. Equations aux différences relatives aux réseaux obliques.

L'équation différentielle de la surface élastique

$$\Delta\Delta\zeta = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} p \quad (2)$$

peut être remplacée par les deux suivantes:

$$\Delta q = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} p, \quad \Delta\zeta = q;$$

où  $q$  désigne, comme  $\zeta$ , une fonction inconnue de  $u$  et  $\nu$ .

Ces relations s'écrivent, si l'on utilise l'expression (3) de l'opérateur  $\Delta$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 q}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} &= \frac{12(1-\nu^2)\sin^2\alpha}{Eh^3} p, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} &= \sin^2\alpha \cdot q. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 q}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} &= \frac{12(1-\nu^2)\sin^2\alpha}{Eh^3} p, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} &= \sin^2\alpha \cdot q. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Nous allons remplacer ces deux équations différentielles du second ordre par deux systèmes d'équations algébriques linéaires. A cet effet, choisissons dans le plan  $u, \nu$  le réseau indiqué à la figure 3.

Ce réseau est constitué par des droites  $u = \text{const.}$  et  $\nu = \text{const.}$  équidistantes. Les mailles sont des parallélogrammes égaux, de côtés  $\Delta u$  et  $\Delta \nu$ . Les droites  $u = \text{const.}$  sont numérotées  $\dots m-1, m, m+1, \dots$ , les droites  $\nu = \text{const.}$   $\dots n-1, n, n+1, \dots$

<sup>4)</sup> loc. cit., § 3.

Les sommets des parallélogrammes sont désignés par les numéros des deux droites qui les définissent. Par exemple, l'intersection des droites  $m$  et  $n$  est désignée par  $m, n$ . De même, toute grandeur relative à ce point sera affectée de l'indice  $m, n$ .

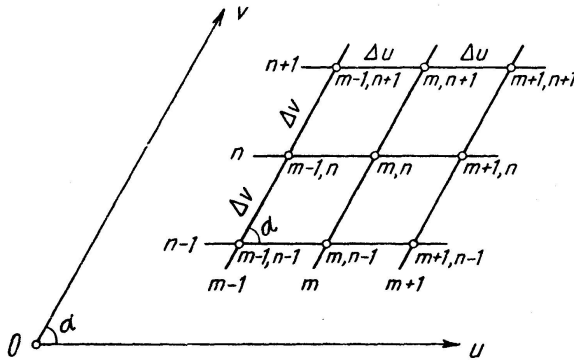


Fig. 3

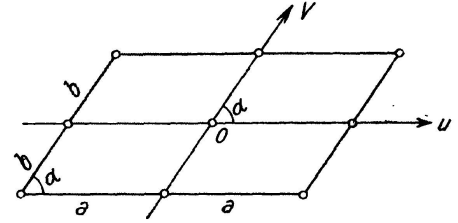


Fig. 4

Cela posé nous avons, avec une exactitude d'autant plus grande que  $\Delta u$  et  $\Delta v$  sont plus petits <sup>5)</sup> :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n} - \zeta_{m-1,n}}{2 \Delta u}, \\ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m,n+1} - \zeta_{m,n-1}}{2 \Delta v}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n} - 2 \zeta_{m,n} + \zeta_{m-1,n}}{\Delta u^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m,n+1} - 2 \zeta_{m,n} + \zeta_{m,n-1}}{\Delta v^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n+1} + \zeta_{m-1,n-1} - \zeta_{m+1,n-1} - \zeta_{m-1,n+1}}{4 \Delta u \Delta v}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

et des expressions analogues pour

$$\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)_{m,n}, \quad \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)_{m,n}, \quad \left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}\right)_{m,n}, \quad \left(\frac{\partial^2 q}{\partial v^2}\right)_{m,n} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v}\right)_{m,n}.$$

Introduisons ces valeurs des dérivées secondes dans (9) et (10). On obtient pour le point,  $m, n$  les deux équations aux différences :

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{m+1,n} - 2q_{m,n} + q_{m-1,n}}{\Delta u^2} - 2 \cos \alpha \frac{q_{m+1,n+1} + q_{m-1,n-1} - q_{m+1,n-1} - q_{m-1,n+1}}{4 \Delta u \Delta v} \\ + \frac{q_{m,n+1} - 2q_{m,n} + q_{m,n-1}}{\Delta v^2} = \frac{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha}{E h^3} p_{m,n}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\zeta_{m+1,n} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m-1,n}}{\Delta u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\zeta_{m+1,n+1} + \zeta_{m-1,n-1} - \zeta_{m+1,n-1} - \zeta_{m-1,n+1}}{4 \Delta u \Delta v} \\ + \frac{\zeta_{m,n+1} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m,n-1}}{\Delta v^2} = \sin^2 \alpha \cdot q_{m,n}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

<sup>5)</sup> Ces expressions sont les mêmes en coordonnées obliques qu'en coordonnées rectangulaires. Pour ces dernières, voir par exemple NADAI: «Elastische Platten», Springer, Berlin, 1925, p. 216 et suiv.

Remarquons que l'on passe de la première équation à la seconde en remplaçant  $q$  par  $\zeta$  et le second membre par  $\sin^2\alpha \cdot q_{mn}$ .

A chaque point tel que  $m, n$ , situé à l'intérieur du contour de la plaque, correspondent deux équations analogues. On pourra écrire autant d'équations (12) et (13) qu'il y a de sommets à l'intérieur du contour de la plaque.

D'autre part en chaque sommet situé sur le contour, les conditions aux limites peuvent s'exprimer à l'aide de deux équations aux différences analogues à (12) et (13).

Nous aurons en tout deux systèmes d'équations algébriques linéaires, l'un correspondant aux relations (12), l'autre aux relations (13). La résolution de ces deux systèmes par rapport aux grandeurs  $\zeta$  et  $q$  donnera les valeurs approchées des coordonnées  $\zeta$  de la surface élastique pour les sommets du réseau.

Les équations (11) permettront ensuite de calculer les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}$$

qui, substituées dans les formules (6), donneront les valeurs approchées des tensions.

Les équations (12) et (13) peuvent être appliquées à la résolution de problèmes particuliers relatifs aux plaques obliques. Mais elles peuvent être aussi utilisées dans la recherche de formules générales permettant l'étude de l'influence de la forme de la plaque sur certaines grandeurs, comme nous le montrons au paragraphe suivant.

### § 3. La déformation de la plaque oblique posée, à charge uniformément répartie.

Nous nous proposons, comme application des formules établies au paragraphe précédent, d'étudier la flèche de la plaque oblique posée, à charge uniformément répartie.

Soient  $2a$  et  $2b$  les côtés de la plaque,  $\alpha$  un des deux angles,  $p$  la surcharge constante. Choisissons le système  $u, v$  indiqué à la figure 4.

Remarquons que le long du contour on doit avoir  $\zeta = 0$  et  $q = \Delta\zeta = 0$ . La première égalité exprime que les points du contour ne subissent aucun déplacement, la seconde, que les tensions  $\sigma$  relatives aux éléments de surface parallèles au contour y sont nulles<sup>6)</sup>. On sait, depuis les travaux de KIRCHHOFF, qu'il n'est pas nécessaire d'annuler les tensions tangentielles le long du contour.

#### a) Formules de première approximation pour la flèche.

Choisissons tout d'abord le réseau le plus simple que l'on puisse imaginer, défini par les axes  $u, v$  et les quatre côtés de la plaque (fig. 4). Ce réseau ne comprend que quatre parallélogrammes de côtés  $\Delta u = a$  et  $\Delta v = b$ . Désignons par 0 l'intersection des axes. Les autres sommets n'ont pas besoin d'être numérotés, car ils sont tous sur le pourtour, où  $\zeta$  et  $q$  sont nuls.

Chacun des systèmes (12) et (13) ne comprend qu'une équation, celle relative au point 0.

<sup>6)</sup> Il est facile de vérifier, à l'aide de (3) et (6) que, si les conditions  $\zeta = 0$  et  $\Delta\zeta = 0$  sont remplies, on a  $\sigma_u = 0$  pour  $u = \pm a$  et  $\sigma_v = 0$  pour  $v = \pm b$ .

L'équation (12) s'écrit :

$$\frac{0 - 2q_0 + 0}{a^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + 0 - 0 - 0}{4ab} + \frac{0 - 2q_0 + 0}{b^2} = \frac{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha p}{E h^3},$$

c'est à dire :

$$-2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) q_0 = \frac{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha p}{E h^3}. \quad (12')$$

En remplaçant, dans cette équation,  $q_0$  par  $\zeta_0$  et le second membre par  $\sin^2 \alpha \cdot q_0$ , l'équation (13) s'écrit :

$$-2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \zeta_0 = \sin^2 \alpha \cdot q_0. \quad (13')$$

La résolution du système (12') (13') par rapport à  $q_0$  et  $\zeta_0$  donne pour la flèche  $f = \zeta_0$  :

$$f = 3 \frac{(1-\nu^2) p}{E h^3} \frac{a^2 b^2 \sin^4 \alpha}{\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2}. \quad (14)$$

Cette valeur de la flèche peut s'écrire :

$$f = \frac{(1-\nu^2) F^2 p}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right), \quad (15)$$

où  $F$  désigne la surface  $4ab \sin \alpha$  de la plaque et

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{16}{3n} (1+n)^2}, \quad \text{avec } n = \left( \frac{a}{b} \right)^2. \quad (16)$$

$\Phi$  dépend uniquement de la forme de la plaque.

La figure 5 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$ , pour  $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$  et  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$  (trait pointillé). Elle montre l'influence de la forme de la plaque sur la valeur de la flèche.

#### b) Formules de seconde approximation pour la flèche.

Les formules (14), (15) et (16) ont l'avantage d'être simples, mais elles doivent être peu exactes, étant donné la grandeur des mailles du réseau.

Pour obtenir des formules de seconde approximation, choisissons le réseau indiqué à la figure 6. Ce réseau comprend seize parallélogrammes de côtés  $\Delta u = \frac{a}{2}$  et  $\Delta v = \frac{b}{2}$ . Comme l'origine des axes est un centre de symétrie, les sommets sont symétriques deux à deux. Il suffit de les numérotés de 0 à 4, comme l'indique la figure. Les sommets situés sur le pourtour n'ont pas besoin d'être numérotés, car  $\zeta$  et  $q_y$  sont nuls.

Chacun des systèmes (12) et (13) comprend cinq équations.

Le système (12) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Point 0: } & \frac{q_1 - 2q_0 + q_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 2 \cos \alpha \frac{q_3 + q_3 - q_4 - q_4}{4 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)} + \frac{q_2 - 2q_0 + q_2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{12(1-\nu^2) \sin^2 \alpha p}{E h^3}, \\
 \text{„ 1: } & \frac{0 - 2q_1 + q_0}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + q_2 - 0 - q_2}{4 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)} + \frac{q_3 - 2q_1 + q_4}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \text{„}, \\
 \text{„ 2: } & \frac{q_3 - 2q_2 + q_4}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + q_1 - q_1 - 0}{4 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)} + \frac{0 - 2q_2 + q_0}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \text{„}, \\
 \text{„ 3: } & \frac{0 - 2q_3 + q_2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + q_0 - 0 - 0}{4 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)} + \frac{0 - 2q_3 + q_1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \text{„}, \\
 \text{„ 4: } & \frac{0 - 2q_4 + q_2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + 0 - 0 - q_0}{4 \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)} + \frac{q_1 - 2q_4 + 0}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \text{„}.
 \end{aligned} \right\}$$

Le système (13) s'obtient en remplaçant, dans les cinq dernières équations,  $q$  par  $\zeta$  et les seconds membres par  $\sin^2 \alpha \cdot q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ).

Après simplifications et en posant

$$\frac{3(1-\nu^2) a^2 b^2 \sin^2 \alpha p}{E h^3} = c, \quad \frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{4} = \varepsilon. \quad (17)$$

on obtient le système de dix équations linéaires (12'') (13'') :

$$\left. \begin{aligned}
 -2(a^2+b^2)q_0 & + 2b^2q_1 & + 2a^2q_2 & - ab \cos \alpha q_3 & + ab \cos \alpha q_4 & = c \\
 b^2q_0 - 2(a^2+b^2)q_1 & & & + a^2q_3 & + a^2q_4 & = c \\
 a^2q_0 & & -2(a^2+b^2)q_2 & + b^2q_3 & + b^2q_4 & = c \\
 -\frac{1}{2}ab \cos \alpha q_0 & + a^2q_1 & + b^2q_2 & - 2(a^2+b^2)q_3 & & = c \\
 +\frac{1}{2}ab \cos \alpha q_0 & + a^2q_1 & + b^2q_2 & & - 2(a^2+b^2)q_4 & = c
 \end{aligned} \right\} (12'')$$

$$\left. \begin{aligned}
 -2(a^2+b^2)\zeta_0 & + 2b^2\zeta_1 & + 2a^2\zeta_2 & - ab \cos \alpha \zeta_3 & + ab \cos \alpha \zeta_4 & = \varepsilon q_0 \\
 b^2\zeta_0 - 2(a^2+b^2)\zeta_1 & & & + a^2\zeta_3 & + a^2\zeta_4 & = \varepsilon q_1 \\
 a^2\zeta_0 & & -2(a^2+b^2)\zeta_2 & + b^2\zeta_3 & + b^2\zeta_4 & = \varepsilon q_2 \\
 -\frac{1}{2}ab \cos \alpha \zeta_0 & + a^2\zeta_1 & + b^2\zeta_2 & - 2(a^2+b^2)\zeta_3 & & = \varepsilon q_3 \\
 +\frac{1}{2}ab \cos \alpha \zeta_0 & + a^2\zeta_1 & + b^2\zeta_2 & & - 2(a^2+b^2)\zeta_4 & = \varepsilon q_4
 \end{aligned} \right\} (13'')$$

La résolution du système (12'') (13'') par rapport aux dix inconnues  $q_0 \dots q_4 \zeta_0 \dots \zeta_4$  est longue, mais facile. On obtient pour la flèche  $f = \zeta_0$ :

$$f = \frac{(1-\nu^2) F^2 p}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right), \quad (15)$$

où  $F$  désigne la surface  $4ab \cdot \sin \alpha$  de la plaque et

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{\frac{7}{2} + 49n + 159n^2 + 49n^3 + \frac{7}{2}n^4 + (1-12n-14n^2-12n^3+n^4) \frac{n \cos^2 \alpha}{4(1+n)^2} \sin^2 \alpha}{\frac{64}{3n} \left[ (1+n)(1+6n+n^2) - \frac{1+4n+n^2}{2(1+n)} n \cos^2 \alpha \right]^2} \sin^2 \alpha, \quad (18)$$

avec  $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ .



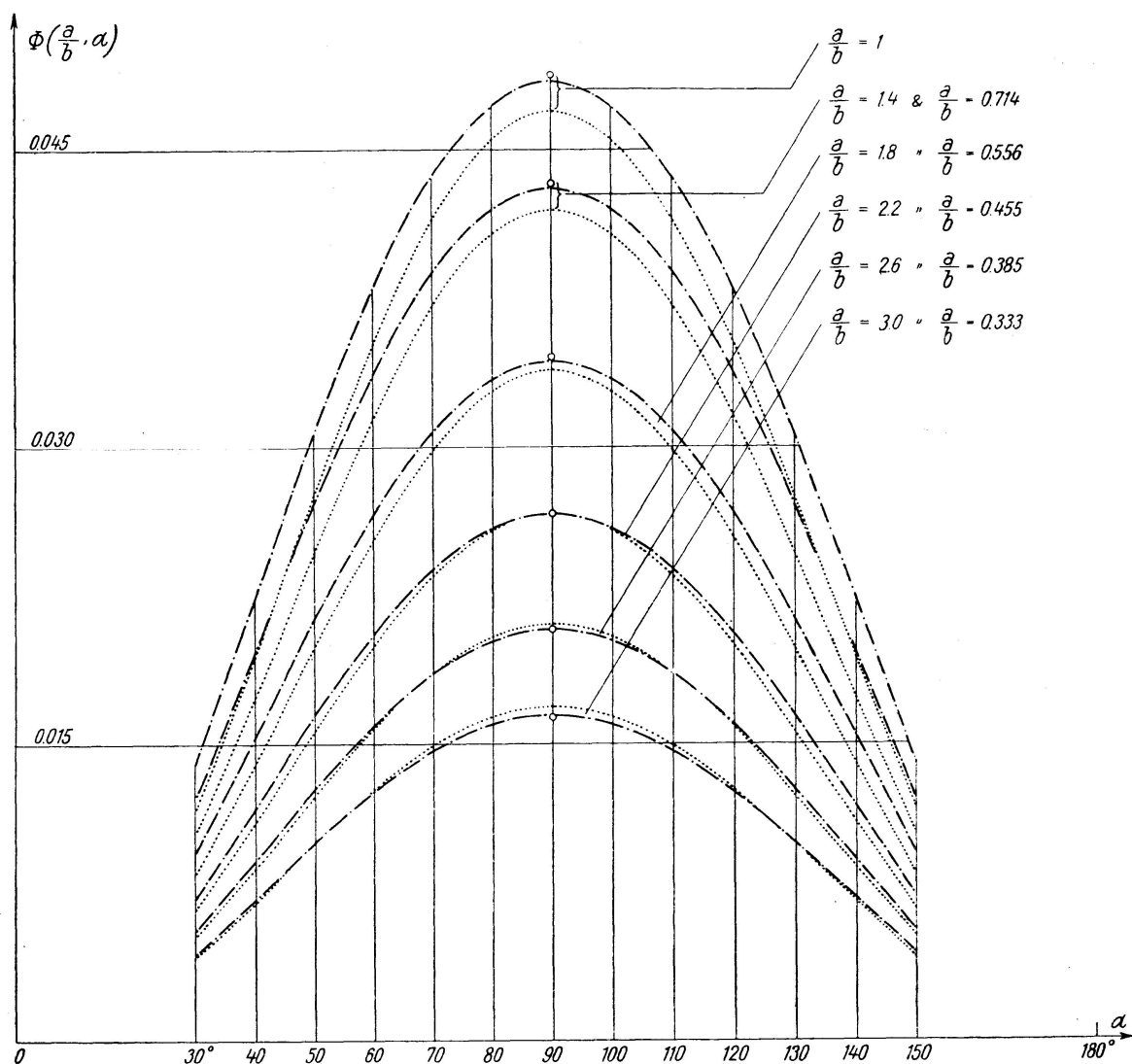


Fig. 5. Plaque oblique posée, à charge uniformément répartie. Représentation graphique de la fonction  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ . — Schiefe freiaufhängende Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Graphische Darstellung der Funktion  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ . — Oblique free slab with uniformly distributed load. Graph of the function  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ .

..... d'après la formule (16)      - - - - - d'après la formule proposée (18)  
 nach der Formel (16)              nach der vorgeschlagenen Formel (18)  
 according to formula (16)          according to the proposed formula (18)

Valeurs données par la solution rigoureuse de Navier (plaque rectangulaire)  
 ○ Aus der strengen Lösung von Navier stammende Werte (Rechteckige Platte)  
 Values given by the rigorous solution of Navier (rectangular slab)

La figure 5 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$  (trait mixte).

Si nous comparons les courbes  $\frac{a}{b} = \text{const.}$  données par la formule (18) à celles données par (16) pour les mêmes valeurs de  $\frac{a}{b}$ , on voit qu'elles diffèrent sensiblement. Ceci n'a rien d'étonnant. Le calcul qui conduit à (16)

est en effet peu rigoureux, puisqu'un seul sommet du réseau « ausculte » la déformation de toute la plaque (point 0, figure 4). Au contraire, dans le calcul qui conduit à (18), neuf points auscultent la plaque (0, 1, 1, ... 4, 4, voir fig. 6).

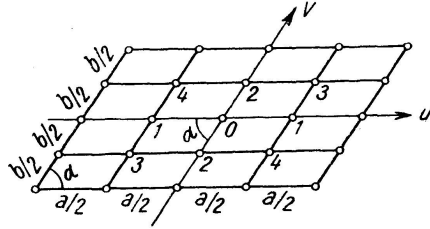


Fig. 6

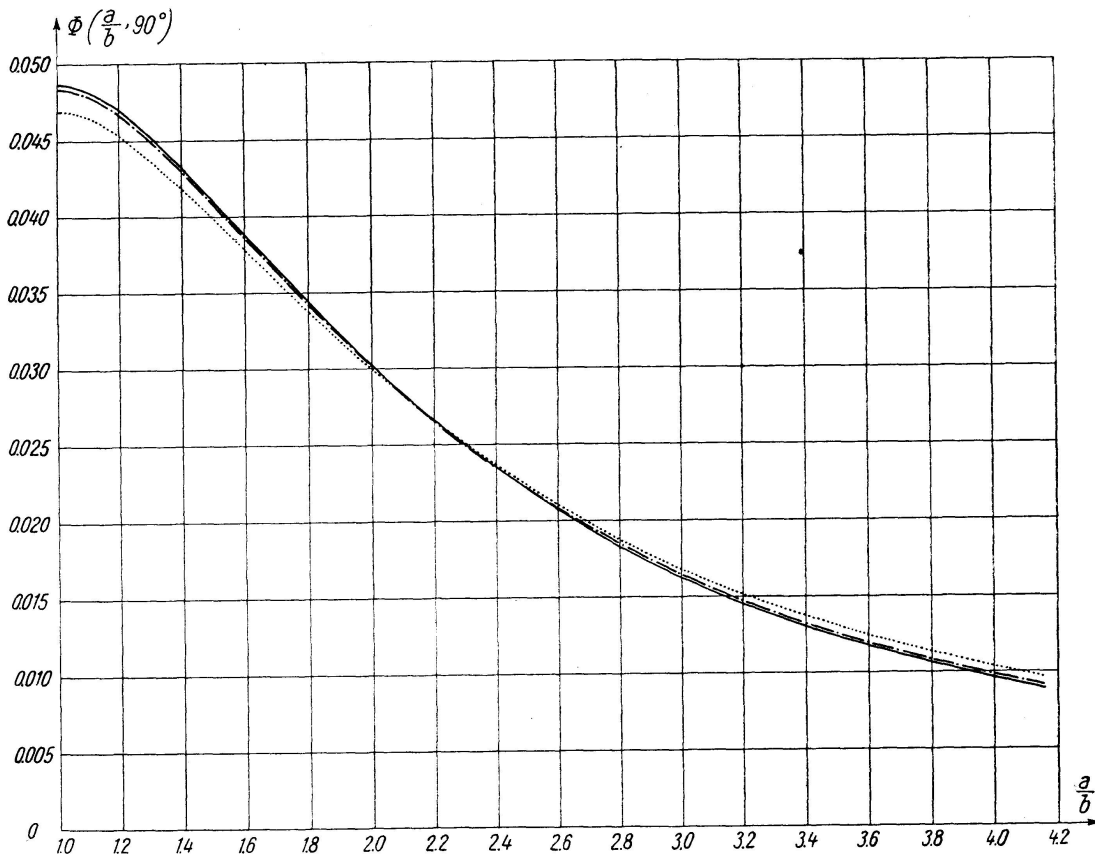


Fig. 7. Plaque rectangulaire posée, à charge uniformément répartie. Représentation graphique de la fonction  $\Phi\left(\frac{a}{b}, 90^\circ\right)$ . — Rechteckige freiaufliegende Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung. Graphische Darstellung der Funktion  $\Phi\left(\frac{a}{b}, 90^\circ\right)$ . — Rectangular free slab with uniformly distributed load. Graph of the function  $\Phi\left(\frac{a}{b}, 90^\circ\right)$ .

..... d'après la formule (16)  
 nach der Formel (16)  
 according to formula (16)

- · - · - d'après la formule (18)  
 nach der Formel (18)  
 according to formula (18)

———— d'après la solution rigoureuse de Navier  
 nach der strengen Lösung von Navier  
 according to the rigorous solution of Navier

Pour permettre de se rendre compte de l'approximation de (18), nous avons indiqué à la figure 5 les points donnés par la solution rigoureuse de NAVIER pour la plaque rectangulaire posée, à charge uniformément répartie<sup>7)</sup>. Ces points sont figurés par des petits cercles dont les centres sont sur la droite  $\alpha = 90^\circ$ . On voit que les valeurs de  $\Phi$  qu'ils indiquent sont très voisines de celles données par la formule (18).

La figure 7 permet également de comparer, pour la plaque rectangulaire, les courbes  $\Phi\left(\frac{a}{b}, 90^\circ\right)$  données par la formule (16) (trait pointillé), la formule (18) (trait mixte) et la solution rigoureuse de NAVIER (trait continu). Ces deux dernières courbes sont très voisines. La formule de seconde approximation (18) doit donc être assez exacte.

C'est pourquoi nous proposons les formules (15) et (18) pour le calcul de la flèche des plaques obliques posées, à charge uniformément répartie. Il faut s'attendre, dans le domaine  $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$ ,  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , à ce qu'elles donnent  $f$  à quelques pour cent près.

Remarque I. La figure 5 montre que, pour des valeurs  $F, h, E, \nu, p$  données, c'est la plaque carrée ( $a = b, \alpha = 90^\circ$ ) qui accuse la plus grande flèche. Si  $\frac{a}{b}$  est aussi donné, la flèche est maximum pour la plaque rectangulaire ( $\alpha = 90^\circ$ ). Enfin, si  $F, h, E, \nu, p, \alpha$  sont donnés,  $f$  est maximum pour la plaque dont le pourtour est un losange ( $a = b$ ).

Remarque II. Il est facile de déduire de (15) et (18) les formules relatives aux cas particuliers suivants:

a) *Plaque rectangulaire posée, de côtés  $2a$  et  $2b$ , à charge uniformément répartie ( $\alpha = 90^\circ$ ):*

$$f = \frac{\frac{7}{2} + 49n + 159n^2 + 49n^3 + \frac{7}{2}n^4}{\frac{64}{3n}(1+n)^2(1+6n+n^2)^2} \frac{(1-\nu^2)F^2p}{Eh^3}, \quad \text{avec } n = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad (19)$$

La figure 7 permet de comparer les valeurs données par cette formule (trait mixte) à celles de la solution rigoureuse de NAVIER (trait continu). L'approximation est très bonne.

Si l'on remplace  $F$  par  $4ab$ , il vient:

$$f = \frac{\frac{7}{2} + 49n + 159n^2 + 49n^3 + \frac{7}{2}n^4}{\frac{4}{3}(1+n)^2(1+6n+n^2)^2} \frac{(1-\nu^2)a^4p}{Eh^3}, \quad \text{avec } n = \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad (20)$$

b) *Plaque posée ayant la forme d'un losange de côté  $2a$ , à charge uniformément répartie ( $n = 1$ ):*

<sup>7)</sup> Voir G. PIGEAUD: «Résistance des matériaux et élasticité», Gauthier-Villars, Paris, 1920, p. 619 et suiv.

$$f = \frac{9(352 - 3 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha (1 - \nu^2) F^2 p}{64 (32 - 3 \cos^2 \alpha)^2 E h^3}; \quad (21)$$

et en remplaçant  $F$  par  $4a^2 \sin \alpha$ :

$$f = \frac{9(352 - 3 \cos^2 \alpha) \sin^4 \alpha (1 - \nu^2) a^4 p}{4 (32 - 3 \cos^2 \alpha)^2 E h^3}. \quad (22)$$

c) *Plaque carrée posée, de côté  $2a$ , à charge uniformément répartie* ( $n = 1, \alpha = 90^\circ$ ):

$$f = \frac{99}{128} \frac{(1 - \nu^2) a^4 p}{E h^3}. \quad (23)$$

Remarque III. Le réseau choisi n'a pas assez de mailles pour permettre une évaluation convenable des tensions.

Remarque IV. On sait qu'une plaque rectangulaire simplement posée, à charge uniformément répartie, n'est pas appuyée tout le long du contour et que ses quatre angles se lèvent légèrement. Pour empêcher ce phénomène, il est nécessaire d'appliquer une force isolée à chaque sommet du rectangle. Cette tendance au soulèvement des angles doit aussi exister chez les plaques obliques posées. Notre calcul, qui suppose que  $\zeta$  est rigoureusement nul le long du contour, n'est donc valable que si les angles sont empêchés de se déplacer.

#### § 4. Comparaison des flèches des plaques obliques posées et encastées, à charge uniformément répartie.

Dans notre premier mémoire sur les plaques obliques, nous avons établi pour le calcul de la flèche d'une plaque encastée à charge uniformément répartie la formule suivante<sup>8)</sup>:

$$f = \frac{(1 - \nu^2) F^2 p}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (15)$$

où  $\Phi$  est approximativement:

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{0,03813 \sin^2 \alpha}{\frac{1}{2} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \cos^2 \alpha}. \quad (24)$$

La figure 8 permet de comparer les valeurs de  $\Phi$  relatives aux plaques posées et encastées. Les courbes  $\frac{a}{b} = \text{const.}$  à trait mixte donnent la variation de  $\Phi$  en fonction de  $\alpha$  pour la plaque posée. Celles à trait continu indiquent cette variation pour la plaque encastée<sup>9)</sup>. Les deux familles de

<sup>8)</sup> Voir loc. cit. formules (22) et (28).

<sup>9)</sup> Ces dernières courbes n'ont été dessinées que pour  $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$  et  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , qui est le domaine d'application de la formule (24) (voir loc. cit. § 4).

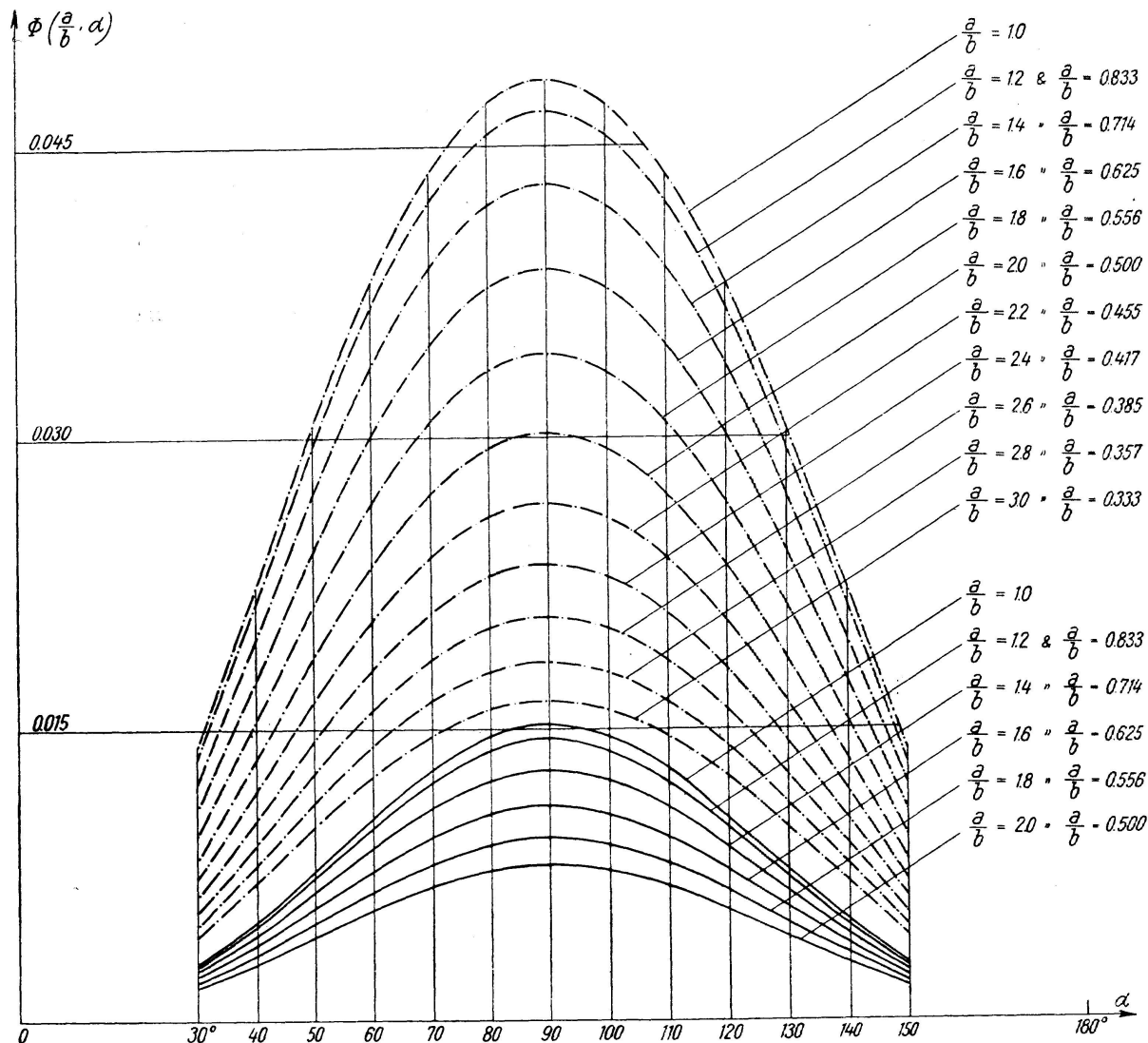


Fig. 8. Plaques obliques à charge uniformément répartie. Représentation graphique de la fonction  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ . — Schiefe Platten mit gleichmäßig verteilter Belastung. Graphische Darstellung der Funktion  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ . — Oblique slab with uniformly distributed load. Graph of the function  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ .

— · — · — plaque posée  
 freiaufliegende Platte  
 free slab

———— plaque encastrée  
 eingespannte Platte  
 fixed slab

curves ont sensiblement la même allure. Les premières (plaques posées) accusent évidemment des valeurs de  $\Phi$  beaucoup plus grandes que les secondes (plaques encastrées).

La figure 8 permet aussi de trouver par interpolation la valeur  $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$  pour une plaque oblique posée où encastrée, à charge uniformément répartie.

Cette figure peut être considérée comme l'aboutissement de nos deux études sur la flèche des plaques obliques.

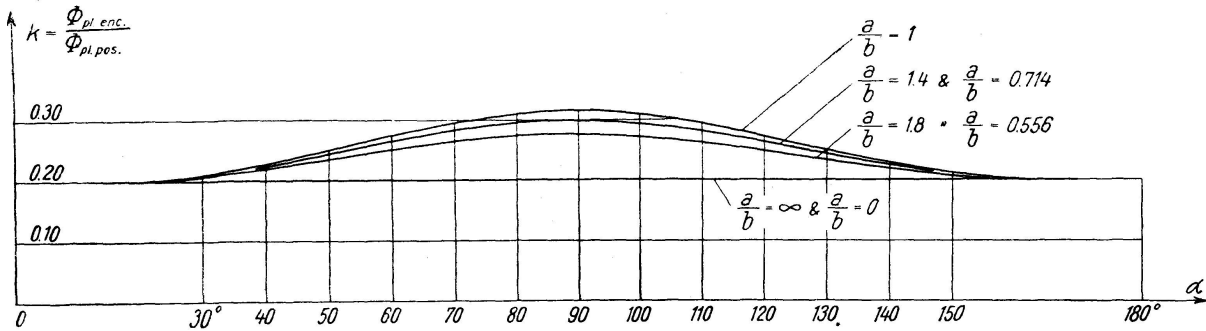


Fig. 9. Plaques obliques à charge uniformément répartie. Représentation graphique du rapport  $k = \frac{\Phi_{pl. enc.}}{\Phi_{pl. pos.}}$ . — Schiefe Platten mit gleichmäßig verteilter Belastung. Graphische Darstellung des Verhältnisswertes  $k = \frac{\Phi_{eingesp. Pl.}}{\Phi_{freiaufsl. Pl.}}$ . — Oblique slab with uniformly distributed load. Graph of the ratio  $k = \frac{\Phi_{fixed slab}}{\Phi_{free slab}}$ .

A la figure 9, nous avons dessiné quelques courbes  $\frac{a}{b} = \text{const.}$  représentant, en fonction de l'angle  $\alpha$ , le rapport  $k = \frac{\Phi_{pl. enc.}}{\Phi_{pl. pos.}}$  des flèches des plaques encastrees et posées<sup>10)</sup>. Ces courbes montrent que c'est la plaque carrée ( $a = b, \alpha = 90^\circ$ ) qui accuse la plus grande valeur de  $k$  (0,315). La plus faible valeur de ce coefficient (0,200) est donnée par les plaques dont un des côtés est grand par rapport à l'autre ( $\frac{a}{b} = 0$  et  $\frac{a}{b} = \infty$ ) ainsi que par celles où  $\alpha$  est voisin de  $0^\circ$  ou de  $180^\circ$ . Si  $\frac{a}{b}$  est donné,  $k$  est maximum pour la plaque rectangulaire ( $\alpha = 90^\circ$ ). Enfin, si  $\alpha$  est donné,  $k$  est maximum pour la plaque dont le contour est un losange ( $a = b$ ).

### Résumé.

Cette étude se rapporte aux plaques dont le contour est un parallélogramme. Elle est destinée à montrer que, dans le calcul de ces plaques par la méthode des équations aux différences, il est commode d'utiliser un réseau oblique. Les équations que l'on obtient peuvent être appliquées non seulement à la résolution de problèmes particuliers, mais à la recherche de formules générales, ainsi que le montre l'exemple de la plaque oblique posée à charge uniformément répartie. L'auteur établit une formule de première approximation très simple pour calculer leur flèche. Puis une autre de seconde approximation plus compliquée. Il compare les résultats des deux formules. Les valeurs données par la seconde pour le cas particulier de la plaque rectangulaire sont très voisines de celles correspondant à la solution

<sup>10)</sup> Pour  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , les courbes  $\frac{a}{b} = 1; 1,4$  et  $1,8$  ont été construites à l'aide des valeurs de  $\Phi$  données par les équations (18) et (24). Nous avons complété ces courbes pour  $0 < \alpha < 30^\circ$  et  $150^\circ < \alpha < 180^\circ$  en remarquant que lorsque  $\alpha = 0$  ou  $180^\circ$  le nombre  $k$  doit être égal au rapport des flèches des poutres simples encastrees et posées, c'est à dire à  $\frac{1/384}{5/384} = 0,200$ . Pour  $\frac{a}{b} = \infty$  et  $\frac{a}{b} = 0$ ,  $k$  doit aussi être égal à ce rapport, de sorte que la courbe correspondante se réduit à la droite  $k = 0,200$ .

rigoureuse de NAVIER. Ce mémoire donne également un abaque qui permet de trouver facilement la flèche d'une plaque oblique posée ou encastrée, à charge uniformément répartie. Un autre abaque montre l'influence de l'encastrement sur la flèche.

### **Zusammenfassung.**

Diese Arbeit bezieht sich auf Platten, deren Umfang ein Parallelogramm ist. Es wird darin gezeigt, daß es zweckmäßig ist, bei der Lösung dieser Plattenaufgabe mit Hilfe der Differenzenmethode schiefwinklige Koordinaten einzuführen. Die so erhaltenen Gleichungen beschränken sich nicht nur auf die Lösung von Einzelproblemen, sondern führen auch zu allgemeinen Formeln, wie das Beispiel der schiefen, freiaufliegenden Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung zeigt. Der Verfasser gibt eine erste sehr einfache Näherungsformel zur Berechnung der Durchbiegung an; es folgt dann eine zweite Näherungsformel, deren Struktur weniger einfach ist. Letztere, auf den Spezialfall der rechteckigen Platte angewendet, ergibt für die Durchbiegung Werte, die denen der strengen Lösung von NAVIER sehr nahe kommen. Dieser Arbeit ist auch eine Kurventabelle beigegeben, aus welcher die Durchbiegung einer freiaufliegenden oder eingespannten schiefen Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung leicht entnommen werden kann. Eine andere Kurventafel veranschaulicht den Einfluß der Einspannung auf die Durchbiegung.

### **Summary.**

This paper refers to slabs whose periphery forms a parallelogram. It is intended to show that, when calculating these slabs by the method of differences, it is convenient to make use of oblique coordinates. The equations thus obtained can be applied not only to solving particular problems, but also to the search for general formulae, as is shown by the example of the oblique slab subjected to a uniformly distributed load. The author gives a very simple formula of first approximation for calculating the deflection; then follows a second approximation which is more complicated. The results obtained with the two formulae are compared. The values given by the second one for the particular case of a rectangular slab are very much the same as the corresponding figures given by the exact solution of NAVIER. This paper is also accompanied by a set of curves from which the deflection of an oblique slab, with free or fixed sides, can easily be obtained. Another set of curves shows how the deflection is affected by the fixing of the sides.