EIN BEITRAG ZUR ERMITTLUNG DER EIGENWERTE AUS EIGENWERTDETERMINANTEN.

UNE CONTRIBUTION AU CALCUL DES VALEURS FONDAMENTALES DONNÉES PAR LE DÉTERMINANT CORRESPONDANT.

A CONTRIBUTION TO THE CALCULATION OF FUNDAMENTAL VALUES GIVEN BY THE CORRESPONDING DETERMINANT.

Prof. Dr. Ing. K. KRISO, Deutsche Technische Hochschule, Brünn.

I. Einleitung.

Wenn man bei einem homogenen Randwertproblem, das nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt, in den Beiwerten der zugeordneten homogenen Differentialgleichung linear einen unbestimmten Parameter η einführt, der aus den Randbedingungen so bestimmt werden kann, daß die Differentialgleichung für geeignete Werte η_i nunmehr eine nichttriviale Lösung $y = f(x\eta_i)$ besitzt, so nennt man diese so bestimmten Parameter η_i „Eigenwerte des Randwertproblems", die Lösung $y = f(x\eta_i)$ heißt „Eigenlösung" oder auch „Eigenfunktion", das Randwertproblem selbst wird „Eigenwertproblem" genannt.

Zu den vordringlichsten Eigenwertproblemen der technischen Praxis zählen die Schwingungs- und Stabilitätsprobleme, deren Eigenwerten auch eine sinnvolle technische Bedeutung zukommt. So z. B. bestimmen die Eigenwerte von Schwingungsproblemen die möglichen Frequenzen der Schwingung, während beispielsweise der dem Knickproblem eines mehrfeldrigen elastisch quergestützten Stabes[1]) zugeordnete kleinste Eigenwert zur Ermittlung der vorhandenen „Stützensicherheit" dient. Bei diesem Problem errechnen sich die Eigenwerte η_i aus der Knickbedingung $\Delta = 0$, wobei Δ die sogenannte „Knickdeterminante" darstellt und die Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} i_{11} + \eta & i_{12} & i_{13} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} + \eta & i_{23} & \cdots & i_{2n} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} + \eta & \cdots & i_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ i_{n1} & i_{n2} & i_{n3} & \cdots & i_{nn} + \eta \end{vmatrix} \tag{1}$$

besitzt.

Beim Schwingungsproblem eines Systems von n Freiheitsgraden führen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zur „Frequenzdeterminante"

---

[1]) K. KRISO, Die Knickberechnung mehrfeldriger, in den Feldgrenzen beliebig gestützter Stäbe, Band VI der Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich 1940/41.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} - b_{11}\eta & a_{12} - b_{12}\eta & \cdots\cdots & a_{1n} - b_{1n}\eta \\ a_{21} - b_{21}\eta & a_{22} - b_{22}\eta & \cdots\cdots & a_{2n} - b_{2n}\eta \\ a_{31} - b_{31}\eta & a_{32} - b_{32}\eta & \cdots\cdots & a_{3n} - b_{3n}\eta \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdots\cdots & \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdots\cdots & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} - b_{n1}\eta & a_{n2} - b_{n2}\eta & \cdots\cdots & a_{nn} - b_{nn}\eta \end{vmatrix} \tag{2}$$

deren Nullsetzung die Ermittlung der Eigenwerte η gestattet.

Auch bei anderen Eigenwertproblemen ergeben sich die Eigenwerte letzten Endes aus der Nullsetzung einer Determinante, die, unabhängig vom jeweilig vorliegenden Sonderfall, die Bezeichnung „Eigenwertdeterminante“ führen soll. Die Ausrechnung der Determinante führt zum „Determinantenpolynom“, dessen Nullsetzung die „Determinantengleichung“

$$\varDelta = \eta^n + A_1\eta^{n-1} + A_2\eta^{n-2} + \cdots\cdots + A_{n-1}\eta + A_n = 0 \tag{3}$$

liefert, aus welcher die Eigenwerte η zu bestimmen sind.

Die obige Determinante (2) stellt die allgemeinste Form der Eigenwertdeterminanten dar. Auf diese Form führen z. B. auch die in ihrer Anwendung auf Eigenwertprobleme oft recht praktischen Näherungsverfahren von Henky und Ritz. Die Form der Eigenwertdeterminante (1) soll weiterhin als „Normalform“ bezeichnet werden.

Die Errechnung der in der Determinantengleichung (3) auftretenden Koeffizienten A_i ist bei vielreihigen Determinanten eine mühsame und langwierige Arbeit, die nur dann mit erträglichem Rechenaufwand geleistet werden kann, wenn einfache Verfahren zur Ermittlung dieser Koeffizienten bereitgestellt sind[2].

In der vorliegenden Abhandlung wird ein solches Verfahren entwickelt, das, auf die Normalform von Eigenwertdeterminanten angewandt, in einfacher Weise und verhältnismäßig rasch zu den Zahlenwerten der Koeffizienten A_i führt. Determinanten der allgemeinen Form (2) müssen vorerst mit Hilfe der bekannten Determinantensätze auf die Normalform reduziert werden. Dies kann in folgender Weise geschehen. Dividiert man in einer solchen Determinante $\varDelta$ die Elemente der ersten bezw. zweiten, dritten ... Zeile durch b_{11} bezw. b_{21}, b_{31}, ..., so besitzen in der neuen Determinante $\varDelta_1$ sämtliche η-Glieder der ersten Spalte den Koeffizienten „1“ und $\varDelta = b_{11}b_{21} \ldots b_{n1}\varDelta_1$. Wegen $\varDelta = 0$ folgt auch $\varDelta_1 = 0$. Der Wert von $\varDelta_1$ bleibt unverändert, wenn man die erste Zeile von allen übrigen subtrahiert, wodurch $\varDelta_1$ in eine neue Form $\varDelta_2$ übergeführt wird, in der die erste Spalte bereits ihre „Normalform“ besitzt. Die Zahlenwerte der in $\varDelta_2$ auftretenden Elemente sollen nun die Bezeichnung a'_{rk} bezw. b'_{rk} führen. Teilt man nun die Elemente der zweiten, dritten,... Spalte durch b'_{12} bezw. durch b'_{13}, b'_{14}, ..., so besitzen in dieser neu geformten Determinante $\varDelta_3$ sämtliche η-Glieder der ersten Zeile den Koeffizienten „1“. Wegen $\varDelta_2 = b'_{12}b'_{13} \ldots b'_{1n}\varDelta_3 = 0$ ist auch $\varDelta_3 = 0$. Subtrahiert man nun die erste Spalte von allen übrigen, so besitzen in der hieraus hervorgehenden Determinante $\varDelta_4$ bereits die erste Zeile und die erste Spalte ihre „Normalform“. In analoger Weise fortschreitend, lassen sich der Reihe nach auch alle übrigen gleichbenannten

[2]) K. Hohenemser, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik (S. 44 Auflösung von Frequenzdeterminanten), Springer, Berlin.

Spalten und Zeilen auf ihre Normalform bringen, bis schließlich die Normalform der ganzen Determinante hergestellt ist.

II. Numerische Berechnung einer Determinante.

Sind die Elemente einer Determinante zahlenmäßig gegeben, so reduziert man die Determinantenmatrix, zwecks Ermittlung des Zahlenwertes der Determinante, mit Vorteil auf die ihr gleichwertige „Diagonalmatrix". In der Diagonalmatrix verschwinden sämtliche Elemente unter- und oberhalb der von links nach rechts fallenden Hauptdiagonale. Der Zahlenwert der Determinante ist dann durch das Produkt der in der Diagonalmatrix stehenden Diagonalelemente gegeben.

Diese Reduktion der Determinantenmatrix auf eine Diagonalmatrix geschieht bekanntlich mit Hilfe eines dem Gauss'schen Eliminationsverfahren bei linearen Gleichungen nachgebildeten Vorganges. So ist z. B.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

und

$$\varDelta = i_{11} a_{22} \alpha_{33},$$

wenn die a- und α-Elemente in folgender Weise ermittelt werden.

Wie ersichtlich deutet der erste Zeiger eines Determinantenelementes die horizontale R e i h e, der zweite Zeiger hingegen die vertikale K o l o n n e an. Das Element i_{rk} ist daher ein Element der r-ten Zeile in der k-ten Kolonne. Die zweite Determinante in (4) geht aus der ersten dadurch hervor, daß man die mit

$$\varkappa_r = -\frac{i_{r1}}{i_{11}}$$

multiplizierte erste Zeile der i-Determinante zu ihren übrigen Zeilen ($r = 2$, bezw. $r = 3$) addiert. Dann ist

$$a_{rk} = i_{rk} + \varkappa_r i_{1k} = i_{rk} - \frac{i_{r1}}{i_{11}} i_{1k} \Bigg|_{\substack{r=2,3. \\ k=1,2,3.}} \tag{5}$$

In analogem Vorgang gewinnt man mit den a_{rk}-Elementen die Elemente α_{rk} aus

$$\alpha_{rk} = a_{rk} - \frac{a_{r2}}{a_{22}} a_{2k} \Bigg|_{\substack{r=3. \\ k=2,3.}}$$

Die Figur 1 zeigt das für eine Zahlenrechnung zweckmäßig angeordgeordnete Schema, nach welchem die der vorgegebenen dreireihigen Determinantenmatrix zugeordnete Diagonalmatrix zu errechnen ist.

Nach (4) folgt der Zahlenwert der i-Determinante aus

$$\varDelta = i_{11} a_{22} \alpha_{33} = (+4)(+5)(+15{,}1) = +302.$$

Die „a_{22}-Matrize" wurde nach der durch (5) gegebenen Vorschrift aus der i_{11}-Matrize „abgeleitet", sie soll daher — nur um fernerhin eine kurze Benennung hiefür zu haben — auch als „A b l e i t u n g d e r i_{11}-Matrize" bezeichnet werden. Es ist von selbst verständlich, daß dieses hier gebrauchte Wort „Ableitung" mit dem Begriff der Ableitung im Sinne der Differentialrechnung nichts zu tun hat. Weil aber auch in den folgenden Erörterungen durch die gewählte Bezeichnung „Ableitung einer Matrize" keinerlei sinnstörende Verwechslungen möglich sind, darf diese Benennung wohl auch weiterhin bedenkenlos gebraucht werden. In diesem Sinne ist dann die Einsermatrix α_{33} die „Ableitung der a_{22}-Matrize“.

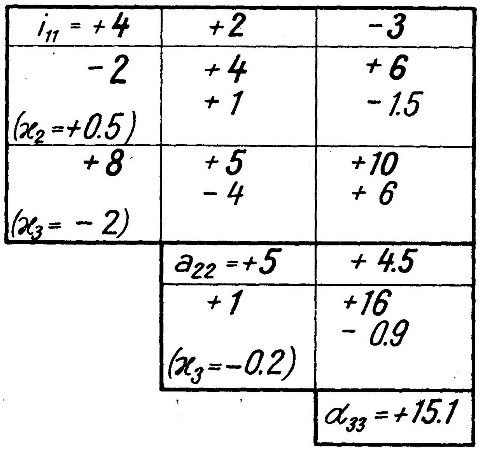
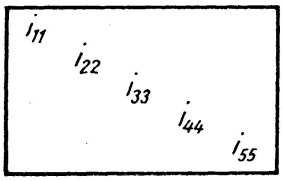


Fig. 1

Développement en diagonale de la matrice i_{11} d'ordre 5 — Diagonalentwicklungen der 5-reihigen Grundmatrize $-i_{11}$ — Diagonal developments of the matrix $-i_{11}$ of the 5th order (a–e)

a) Matrice principale – Grundmatrize $-i_{11}$ – Principal matrix



$$\overset{1}{S}(i_{11})_5 = i_{11} + i_{22} + i_{33} + i_{44} + i_{55}$$

b) Premier développement en diagonale — Erste Diagonalentwicklung — First diagonal development

Groupe-Gruppe-Group $G(i_{11})$

Somme de groupes — Gruppensumme — Sum of the groups $\overset{2}{S}(i_{11})_5$:

$$\overset{2}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\overset{1}{S}(a_{22})_4 + i_{22}\overset{1}{S}(b_{33})_3 + i_{33}\overset{1}{S}(c_{44})_2 + i_{44}\overset{1}{S}(d_{55})_1$$

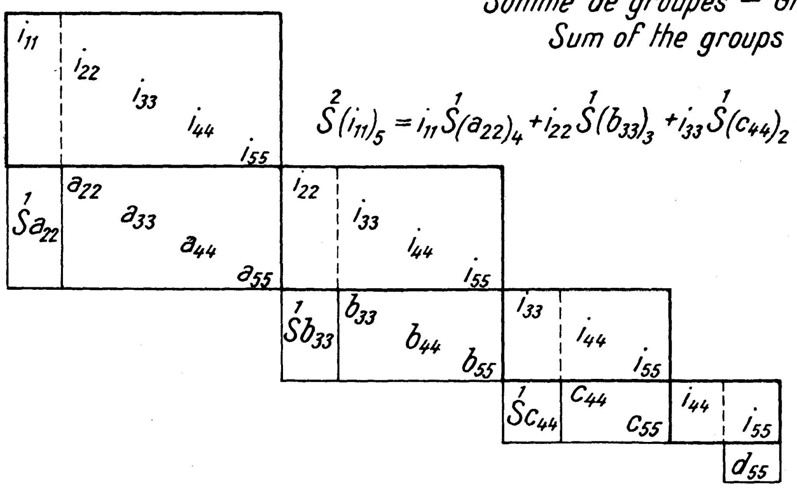


Fig. 2a — b

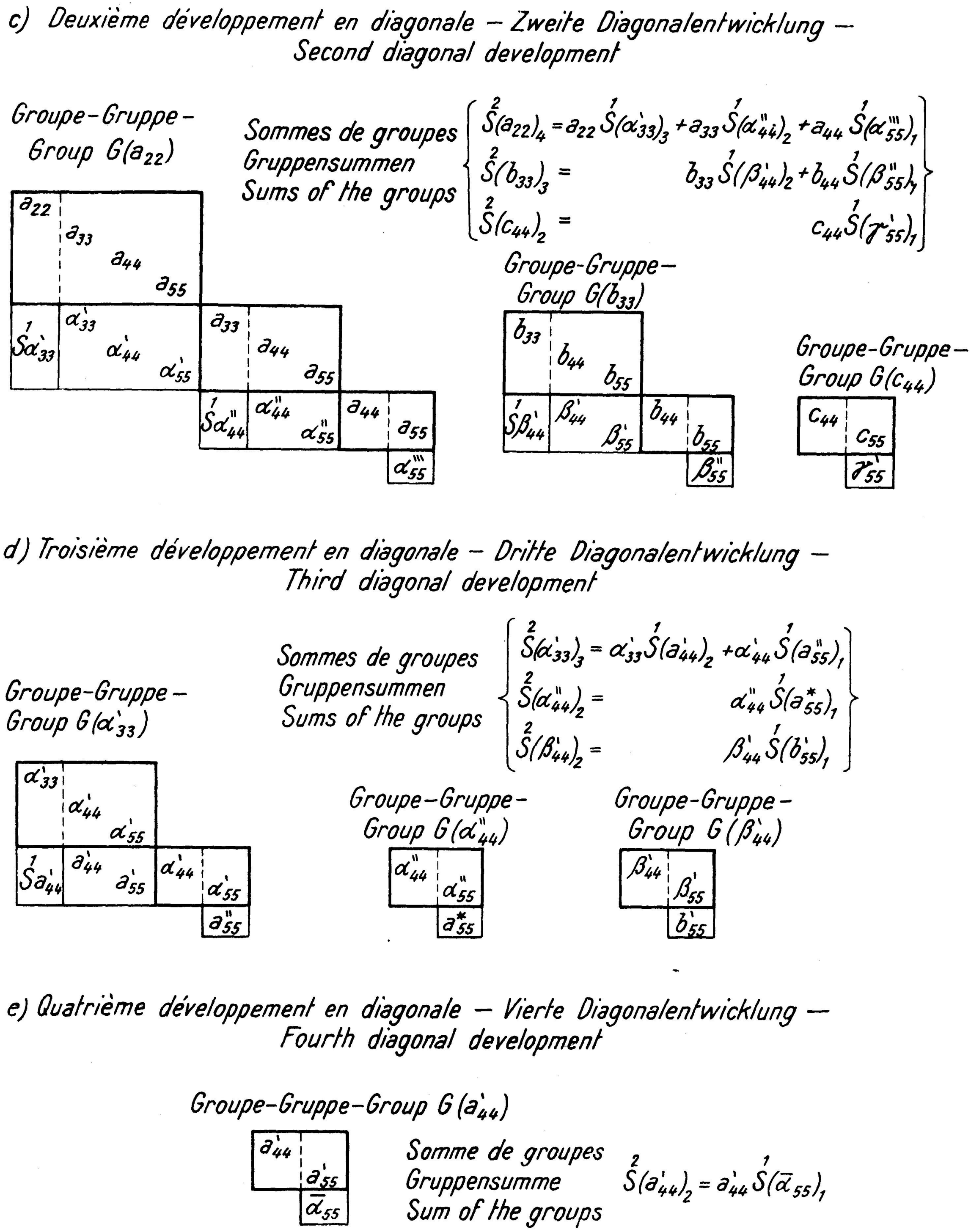


Fig. 2c—e

III. Diagonalentwicklungen der Grundmatrize.

In der zeichnerischen Darstellung werden die Matrizen von Determinanten, wie Figur 2 zeigt, durch die in einem Quadrat eingeschriebenen Elemente der Hauptdiagonale gekennzeichnet.

Wird eine vorgegebene Matrize, die als „G r u n d m a t r i z e" bezeichnet werden soll, wie z. B. die fünfreihige i_{11}-Matrize der Figur 2b in Richtung der Hauptdiagonale durch Angliederung von weiteren i-Matrizen, die aus der vorgegebenen Matrize durch Streichung von gleichnamigen Zeilen und Spalten hervorgehen, fortgesetzt, so sollen diese angegliederten Matrizen als „diagonale Fortsetzung der i_{11}-Matrize“ bezeichnet werden. Die Gesamtheit dieser i-Matrizen bildet die „i_{11}-Matrizendiagonale“ oder die „Matrizendiagonale-i_{11}“. Die letzte Matrize einer solchen Matrizendiagonale ist stets zweireihig.

Die unterhalb der Matrizendiagonale stehenden Matrizen wurden, auf Grund der im Abschnitt II gegebenen Erläuterungen, durch „Ableitung“ aus den darüber befindlichen i-Matrizen erhalten. Die Gesamtheit der vier abgeleiteten Matrizen bildet die „Ableitung der Matrizendiagonale-i_{11}.

Beide Matrizendiagonalen zusammen bilden eine „Matrizengruppe“, die hier in Fig. 2b mit bezug auf die Ausgangsmatrize -i_{11} die Bezeichnung G(i_{11}) führen soll. Diese Gruppe G(i_{11}) ist die „erste Diagonalentwicklung der Grundmatrize -i_{11}“.

Die „zweite Diagonalentwicklung“ geht, wie Figur 2c veranschaulicht, aus der ersten Diagonalentwicklung dadurch hervor, daß jede dort abgeleitete zwei- oder mehrreihige Matrize abermals einer Diagonalentwicklung unterworfen wird. Hiedurch entstehen die drei Matrizengruppen $G(a_{22})$, $G(b_{33})$ und $G(c_{44})$.

Die „dritte Diagonalentwicklung“ geht in sinngemäßer Weise aus der zweiten ebenso hervor, wie die zweite aus der ersten. Daher ergeben sich, wie Figur 2d zeigt, die nach den Ausgangsmatrizen benannten drei Gruppen $G(\alpha'_{33})$, $G(\alpha''_{44})$ und $G(\beta'_{44})$.

Die „vierte Diagonalentwicklung“ (Figur 2e) besitzt nur mehr die einzige Gruppe $G(a'_{44})$, weil in den Ableitungen der dritten Diagonalentwicklung nur die einzige zweireihige a'_{44}-Matrize vorkommt und hierin keine anderen mehrreihigen Matrizen enthalten sind. Da die vierte Diagonalentwicklung die letzte Diagonalentwicklung der vorgegebenen fünfreihigen i_{11}-Matrize darstellt, so kann man hieraus den allgemeinen Schluß ziehen, daß einer n-reihigen Grundmatrize (n-1) Diagonalentwicklungen zugeordnet sind.

Bezeichnung der Matrizenelemente. Die Elemente der vorgegebenen Grundmatrize führen die Bezeichnung i_{rk}. In der ersten Diagonalentwicklung (Figur 2b) werden die Elemente in den Ableitungen der i-Matrizen, in der Reihenfolge des Alphabetes mit a_{rk} bezw. b_{rk}, c_{rk} ... bezeichnet. In der zweiten Diagonalentwicklung (Figur 2c) führen sämtliche Elemente in den abgeleiteten Matrizen der Gruppe $G(a_{22})$ die Bezeichnung α_{rk}. Rechts oben erhalten diese Elemente ein Kennzeichen, z. B. wie hier einen Strich, der in der ersten α-Matrize einmal, in den folgenden aber zwei- bezw. dreimal beigesetzt wird. In analogem Vorgang werden die Elemente in den abgeleiteten Matrizen der Gruppen $G(b_{33})$ und $G(c_{44})$ mit β_{rk} bezw. γ_{rk} bezeichnet und diese Bezeichnungen wieder mit entsprechenden Kennzeichen versehen.

In der dritten Diagonalentwicklung (Figur 2d) werden aus den α-Matrizen wiederum a-Matrizen, aus der β-Matrize wieder eine b-Matritze abgeleitet. Die Elemente a_{rk} bezw. b_{rk} dieser abgeleiteten Matrizen sind, wie schon bemerkt, wieder mit entsprechenden Kennzeichen zu versehen.

Bei folgerichtiger Weiterführung dieser Bezeichnung wechseln in vielreihigen Determinanten die mit lateinischen bezw. griechischen Buchstaben bezeichneten Matrizendiagonalen der aufeinander folgenden Diagonalentwicklungen regelmäßig ab. Aus den a-, bezw. b-, c-,... Matrizen der ersten

Diagonalentwicklung, deren Elemente mit keinerlei Kennzeichen versehen sind, stammen letzten Endes alle mit irgend welchen Kennzeichen versehenen α-, a-Matrizen, bezw. β-, b- bezw. γ-, c-Matrizen usw. ab.

Die Zahl der Matrizengruppen, die in den Diagonalentwicklungen einer n-reihigen Matrize enthalten sind, sowie ihre Zugehörigkeit zu einer a-, b-, c-,... bezw. α-, β-, γ-,... Gruppe kann nach einem einfachen Schema leicht im vorhinein errechnet werden. Der Beweis für die Richtigkeit dieses Schemas, das in Figur 3 für $n = 5$, in Figur 4 für $n = 8$ angeschrieben ist, möge hier unterbleiben. Aus diesen Sonderfällen läßt sich das Gesetz für den allgemeinen Aufbau eines solchen Schemas leicht erkennen. Aus dem Schema der Figuren 3 und 4 ersieht man zunächst, daß die Diagonalentwicklung I immer nur eine einzige Matrizengruppe -i aufweist und daß in den weiteren Zeilen die a-, b-, c-...Gruppen regelmäßig mit den α-, β-, γ-... Gruppen wechseln.

$n=5$			
①	②	③	2^{n-2}
I	$1i$	1	8
II	$1a+1b+1c$	3	
III	$2\alpha+1\beta$	3	
IV	$1a$	1	

Fig. 3

$n=8$			
①	②	③	2^{n-2}
I	$1i$	1	64
II	$1a+1b+1c+1d+1e+1f$	6	
III	$5\alpha+4\beta+3\gamma+2\delta+1\varepsilon$	15	
IV	$10a+6b+3c+1d$	20	
V	$10\alpha+4\beta+1\gamma$	15	
VI	$5a+1b$	6	
VII	1α	1	

Fig. 4

① = Développement en diagonale – Diagonal„entwicklung – Diagonal development
② = Nombre des groupes – Zahl der Gruppen – Number of groups
③ = Somme – Summe – Sum

Die Zahl der Posten in der Diagonalentwicklung II ist stets (n-2), ihre Koeffizienten sind durchwegs gleich „1“. Jede folgende Diagonalentwicklung enthält je einen Posten weniger als die vorangehende, die Koeffizienten der letzten Posten sind in allen Reihen gleich „1“.

Nach diesen Erläuterungen läßt sich zunächst die Zeile II für jeden beliebigen Wert von n unmittelbar anschreiben.

Die Koeffizienten der Zeile III werden in der Reihenfolge von rechts nach links in folgender Weise gewonnen. Der stets bekannte Koeffizient „1“ des letzten Postens wird angeschrieben. Addiert man denselben zu dem darüberstehenden Koeffizienten der vorhergehenden Zeile II, so erhält man den Koeffizienten „2“ des vorletzten Postens in Zeile III. Nach dieser Regel sinngemäß fortschreitend ergeben sich im Schema der Figuren 3 und 4 in einfachster Weise die sämtlichen Koeffizienten der Matrizengruppen in den Diagonalentwicklungen. Die Summen der in einer Diagonalentwicklung vorkommenden Matrizengruppen weisen, wie die Figuren 3 und 4 zeigen, Symmetrie zur Mitte auf; sie sind in der r^{ten} Zeile durch $\binom{n-2}{r-1}$ gegeben, die Gesamtsumme aller Gruppen überhaupt ist durch 2^{n-2} bestimmt.

IV. Der Operator $\overset{m}{S}(\ )r$.

Eine aus den Elementen i_{rk} gebildete n-reihige Matrize mit dem ersten Hauptdiagonalglied i_{pp} soll weiterhin durch die Bezeichnung $(i_{pp})_n$ gekennzeichnet werden.

Das zur Bezeichnung der „m-ten Summe" einer r-reihigen Matrize verwendete Zeichen $\overset{m}{S}(\ )_r$ ist als ein Operator aufzufassen und demnach ein Symbol für eine bestimmte noch zu definierende Rechenvorschrift, die auf die rechts von $\overset{m}{S}$ angeschriebene Matrize $(\ )_r$ anzuwenden ist.

So bezeichnet z. B. $\overset{1}{S}(i_{11})_n$ die „erste Summe" der n-reihigen i-Matrize mit dem ersten Hauptdiagonalglied i_{11} und sinngemäß wäre z. B. $\overset{3}{S}(a_{22})_4$ die „dritte Summe" der vierreihigen a-Matrize mit dem ersten Hauptdiagonalglied a_{22}.

In der Bezeichnung $\overset{m}{S}(\ )_r$ bestimmt der „Summenindex m" den Typ der Summe, der „Matrizenindex r" den Typ der quadratischen Matrix. Der Index r bestimmt die Zahl der Horizontal- bezw. Vertikalreihen und stimmt natürlich auch mit der im graphischen Matrizenschema allein verzeichneten Zahl der Hauptdiagonalglieder überein.

Die Rechenoperation $\overset{m}{S}(i_{pp})_n$ — die Bildung der „m-ten Summe" einer n-reihigen i-Matrize mit dem ersten Hauptdiagonalelement i_{pp} —, wobei stets $m \leq n$ ist, wird durch die Definitionsgleichung

$$\overset{m}{S}(i_{pp})_n = i_{pp}\overset{m-1}{S}(\ )_{n-1} + i_{p+1,\,p+1}\overset{m-1}{S}(\ )_{n-2} + \cdots\cdots + i_{zz}\overset{m-1}{S}(\ )_{n-x=m-1} \quad (6)$$

definiert, wobei noch die folgenden Sätze zu beachten sind:

1. Die m-te Summe $\overset{m}{S}(i_{pp})_n$ einer n-reihigen i-Matrize mit dem ersten Hauptdiagonalglied i_{pp} ist eine Summe von $x = (n+1) - m$ Summanden von je zwei Faktoren.

2. Die ersten Faktoren dieser Summanden sind die aufeinander folgenden Elemente i_{pp}, $i_{p+1,\ p+1} \ldots i_{zz}$ der Hauptdiagonale, wobei

$$z = n + p - m.$$

3. Die zweiten Faktoren sind Summen vom Typus $\overset{m-1}{S}$. Die hinter den Operator zu stellende Matrize ist die Ableitung jener Matrize, die durch Einklammerung des ersten, vor dem Operator $\overset{m-1}{S}$ stehenden Faktors gekennzeichnet erscheint.

4. Die in der Definitionsgleichung (6) erscheinenden Matrizenindexe nehmen von links nach rechts hin in der Folge der natürlichen Zahlenreihe so lange ab, bis im letzten Summanden der Matrizenindex $n-x$ übereinstimmt mit dem Summenindex $m-1$.

5. Einer n-reihigen Matrize sind nur Summen $\overset{m}{S}(\ )_n$ vom Typus $m \leq n$ zugeordnet, die mögliche „höchste Summe" ist $\overset{n}{S}(\ )_n$, die „niedrigste Summe" ist $\overset{1}{S}(\ )_n$. Die Summe $\overset{0}{S}(\ )_n$ hat nur eine formale Bedeutung, ihr Wert wird mit $\overset{0}{S}(\ )_n = 1$ festgesetzt.

6. Alle hinter beliebige Operatoren $\overset{m}{S}$ zu stellenden Matrizen sind, wie jeder Sonderfall erweist, in den Diagonalentwicklungen der Grundmatrize enthalten. Den Summenbildungen $\overset{m}{S}$ haben daher die Diagonalentwicklungen der Grundmatrize vorauszugehen.

7. Die möglichen Summen $\overset{m}{S}(i_{11})_n \,|_{m=1,2\ldots n}$ einer n-reihigen Grundmatrize $\text{-}i_{11}$ bilden, wie im Abschnitt VI noch bewiesen wird, die Koeffizienten des Determinantenpolynoms der Gleichung (3).

8. Die Definitionsgleichung (6) hat den Charakter einer Rekursionsformel, welche die Ermittlung einer Summe $\overset{m}{S}(\quad)$ gestattet, sobald die auf der rechten Gleichungsseite auftretenden Summen $\overset{m-1}{S}$ an der Hand der Diagonalentwicklungen errechnet sind.

9. Da die Definitionsgleichung (6) auch in der Form

$$\overset{m}{S}(i_{pp})_n = i_{pp}\overset{m-1}{S}(\quad)_{n-1} + \overset{m}{S}(i_{p+1,\,p+1})_{n-1} \tag{7}$$

dargestellt werden kann, so folgt umgekehrt, daß auch jede Summe

$$i_{pp}\overset{m}{S}(\quad)_n + \overset{m+1}{S}(i_{p+1,\,p+1})_n = \overset{m+1}{S}(i_{pp})_{n+1} \text{ ist.} \tag{8}$$

Diese Reduktionsformel wird in den Entwicklungen des Abschnittes VI ihre praktische Verwendung finden.

B e i s p i e l. An Hand der Diagonalentwicklung der Figur 2 sind die Summen $\overset{m}{S}(i_{11})_5 \,|_{m=1,2\ldots 5}$ zu entwickeln.

$$\overset{1}{S}(i_{11})_5 = i_{11} + i_{22} + i_{33} + i_{44} + i_{55} \tag{9}$$

$$\overset{2}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\overset{1}{S}(a_{22})_4 + i_{22}\overset{1}{S}(b_{33})_3 + i_{33}\overset{1}{S}(c_{44})_2 + i_{44}\overset{1}{S}(d_{55})_1 \tag{10}$$

$$\overset{3}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\overset{2}{S}(a_{22})_4 + i_{22}\overset{2}{S}(b_{33})_3 + i_{33}\overset{2}{S}(c_{44})_2 \tag{11}$$

$$\overset{4}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\overset{3}{S}(a_{22})_4 + i_{22}\overset{3}{S}(b_{33})_3 \tag{12}$$

$$\overset{5}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\overset{4}{S}(a_{22})_4 \tag{13}$$

Die „e r s t e S u m m e $\overset{1}{S}(i_{11})_5$“ ist nach (9) die Summe der in der Hauptdiagonale stehenden Matrizenelemente.

Zur Bildung der „z w e i t e n S u m m e $\overset{2}{S}(i_{11})_5$“ benötigt man, wie aus (10) und Figur 2b ersichtlich, die Matrizengruppe $G(i_{11})$ der e r s t e n D i a g o n a l e n t w i c k l u n g. Die z w e i t e S u m m e ist also gewissermaßen einer M a t r i z e n g r u p p e zugeordnet und soll daher gelegentlich auch als „G r u p p e n s u m m e“ bezeichnet werden. Beim Zahlenrechnen werden die ersten Summen, wie aus Figur 2b ersichtlich, in die vor den Matrizen befindlichen Vertikalspalten eingetragen. Die „G r u p p e n s u m m e n“ der in den Diagonalentwicklungen vorkommenden Matrizengruppen werden, wie sich in jedem Sonderfall erweist, für die Berechnung aller „h ö h e r e n“ Summen benötigt, sie bilden die eigentlichen Bausteine und sind daher für jede in den Diagonalentwicklungen vorkommende Matrizengruppe zu errechnen.

Die „d r i t t e S u m m e $\overset{3}{S}(i_{11})_5$“ erfordert die Kenntnis der Gruppensummen von den in der z w e i t e n D i a g o n a l e n t w i c k l u n g (Figur 2c) auftretenden Matrizengruppen $G(a_{22})$, $G(b_{33})$ und $G(c_{44})$.

Die Bildung der „v i e r t e n S u m m e $\overset{4}{S}(i_{11})_5$“ nach (12) verlangt zuvor die Entwicklung

$$\left.\begin{aligned} \overset{3}{S}(a_{22})_4 &= a_{22}\overset{2}{S}(\alpha'_{33})_3 + a_{33}\overset{2}{S}(\alpha''_{44})_2 \\ \overset{3}{S}(b_{33})_3 &= \qquad\qquad\qquad b_{33}\overset{2}{S}(\beta'_{44})_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wobei die Gruppensummen $\overset{2}{S}(\alpha'_{33})_3$, $\overset{2}{S}(\alpha''_{44})_2$ und $\overset{2}{S}(\beta'_{44})_2$ an Hand der drei in der d r i t t e n D i a g o n a l e n t w i c k l u n g vorkommenden Matrizengruppen zu errechnen sind.

Die „f ü n f t e S u m m e $\overset{5}{S}(i_{11})_5$“ errechnet sich schließlich durch Weiterentwicklung von (13) aus

$$\overset{5}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\, a_{22}\, \alpha'_{33}\, \overset{2}{S}(a'_{44})_2\,, \tag{15}$$

wobei die hierin vorkommende Gruppensumme mit Hilfe der v i e r t e n D i a g o n a l e n t w i c k l u n g aus der Matrizengruppe $G(a'_{44})$ ermittelt wird. Da

$$\overset{2}{S}(a'_{44})_2 = a'_{44}\, \overset{1}{S}(\bar{a}_{55})_1 = a'_{44}\, \bar{a}_{55}\,,$$

so folgt aus (15)

$$\overset{5}{S}(i_{11})_5 = i_{11}\, a_{22}\, \alpha'_{33}\, a'_{44}\, \bar{a}_{55} \tag{16}$$

und man erkennt — bezugnehmend auf die Erläuterungen des Abschnittes II —, daß $\overset{5}{S}(i_{11})_5$ mit dem Zahlenwert der der Matrize $(i_{11})_5$ zugeordneten Determinante $|i_{11}|_5$ identisch ist. Aus dieser Tatsache folgt die allgemeine Erkenntnis, daß der Zahlenwert einer vorgegebenen n-reihigen Determinante durch die „h ö c h s t e S u m m e $\overset{n}{S}(\ )_n$“ ihrer Matrize bestimmt wird. Dies trifft auch im besonderen Falle der Gleichungen (10)—(13) für die in den letzten Summanden auftretenden Summen zu.

V. Reduktion von Eigenwertdeterminanten.

Die N o r m a l f o r m einer n-reihigen Eigenwertdeterminante nach (1) soll weiterhin durch das Symbol $\overset{n}{\Delta} i_{11}$ gekennzeichnet werden. Die über Δ gesetzte Ziffer zeigt den Grad der Determinante an, der Buchstabe hinter dem Δ ist das erste Hauptdiagonalelement. Im folgenden soll nun eine die Normalform besitzende Eigenwertdeterminante vom n-ten Grade auf eine Summe von zwei gleichgebauten Determinanten vom Grade $(n—1)$ reduziert werden. Der Herleitung wird die 4-reihige Eigenwertdeterminante

$$\overset{4}{\Delta} i_{11} = \left|\begin{array}{c:c:c:c} i_{11}+\eta & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ i_{21} & i_{22}+\eta & i_{23} & i_{24} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33}+\eta & i_{34} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44}+\eta \end{array}\right| \tag{17}$$

zugrundegelegt; die speziellen Ergebnisse lassen sich dann leicht verallgemeinern.

Nach bekannten Determinantensätzen ist

$$\overset{4}{\varDelta} i_{11} = \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ i_{21} & i_{22}+\eta & i_{23} & i_{24} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33}+\eta & i_{34} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44}+\eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ 0 & i_{22}+\eta & i_{23} & i_{24} \\ 0 & i_{32} & i_{33}+\eta & i_{34} \\ 0 & i_{42} & i_{43} & i_{44}+\eta \end{vmatrix} \tag{18}$$

Nach den im Abschnitte II gegebenen Erläuterungen läßt sich die erste Determinante in (18) umformen in

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} \\ 0 & a_{22}+\eta & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33}+\eta & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}+\eta \end{vmatrix} \tag{19}$$

wobei die Elemente a_{rk} nach (5) zu ermitteln sind. Die a_{22}-Matrize der Determinante $\varDelta_1$ ist die Ableitung der durch (17) vorgegebenen i_{11}-Matrize. Mit (19) folgt aus (18)

$$\overset{4}{\varDelta} i_{11} = i_{11} \begin{vmatrix} a_{22}+\eta & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33}+\eta & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}+\eta \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} i_{22}+\eta & i_{23} & i_{24} \\ i_{32} & i_{33}+\eta & i_{34} \\ i_{42} & i_{43} & i_{44}+\eta \end{vmatrix} \tag{20}$$

und hieraus mit Verwendung der erläuterten symbolischen Bezeichnung die Form

$$\overset{4}{\varDelta} i_{11} = i_{11} \overset{3}{\varDelta} a_{22} + \eta \overset{3}{\varDelta} i_{22} \tag{21}$$

Dieses spezielle Ergebnis ist auf jede beliebige n-reihige Eigenwertdeterminante übertragbar und führt zu der allgemein gültigen Reduktionsformel

$$\overset{n}{\varDelta} i_{11} = i_{11} \overset{n-1}{\varDelta} a_{22} + \eta \overset{n-1}{\varDelta} i_{22}, \tag{22}$$

wonach jede n-reihige in der Normalform vorliegende Eigenwertdeterminante auf die Summe von zwei um einen Grad erniedrigte Determinanten derselben Bauart zurückgeführt werden kann.

Wie erwähnt, ist die a_{22}-Matrize die Ableitung der $(i_{11})_n$, die durch die Einklammerung des vor dem $\varDelta$-Zeichen stehenden Faktors i_{11} gekennzeichnet erscheint. Die $(i_{22})_{n-1}$ ist die „Restmatrize“, die durch Streichung der ersten Zeile und ersten Kolonne aus der $(i_{11})_n$ hervorgeht.

VI. Entwicklung der Eigenwertdeterminante in ein nach Potenzen der Eigenwerte geordnetes Polynom.

Für die hier durchzuführende Entwicklung des „Determinantenpolynoms“ aus der Eigenwertdeterminante wird vorausgesetzt, daß dieselbe in ihrer Normalform vorgegeben sei. Ist dies nicht der Fall, so muß diese Form nach den im Abschnitt I gegebenen Erläuterungen hergestellt werden.

Die Entwicklung des Determinantenpolynoms wird an Hand von einigen einfachen Sonderfällen durchgeführt, die erhaltenen Ergebnisse werden verallgemeinert.

Sonderfall $\overset{1}{\Delta} i_{11}$.

Laut Definition ist

$$\overset{1}{\Delta} i_{11} = i_{11} + \eta \tag{23}$$

Sonderfall $\overset{2}{\Delta} i_{11}$.

Nach (22) ist

$$\begin{aligned}\overset{2}{\Delta} i_{11} &= i_{11} \overset{1}{\Delta} a_{22} + \eta \overset{1}{\Delta} i_{22} \\ &= i_{11}(a_{22} + \eta) + \eta (i_{22} + \eta) \\ &= i_{11} a_{22} + \eta (i_{11} + i_{22}) + \eta^2\end{aligned}$$

$$\overset{2}{\Delta} i_{11} = \overset{2}{S}(i_{11})_2 + \eta \overset{1}{S}(i_{11})_2 + \eta^2 \tag{24}$$

Sonderfall $\overset{3}{\Delta} i_{11}$.

Nach (22) ist

$$\overset{3}{\Delta} i_{11} = i_{11} \overset{2}{\Delta} a_{22} + \eta \overset{2}{\Delta} i_{22} \tag{25}$$

und nach (24)

$$\overset{2}{\Delta} a_{22} = \overset{2}{S}(a_{22})_2 + \eta \overset{1}{S}(a_{22})_2 + \eta^2,$$

$$\overset{2}{\Delta} i_{22} = \overset{2}{S}(i_{22})_2 + \eta \overset{1}{S}(i_{22})_2 + \eta^2,$$

womit (25) übergeht in

$$\overset{3}{\Delta} i_{11} = i_{11} \overset{2}{S}(a_{22})_2 + \eta [i_{11} \overset{1}{S}(a_{22})_2 + \overset{2}{S}(i_{22})_2] + \eta^2 [i_{11} + \overset{1}{S}(i_{22})_2] + \eta^3. \tag{26}$$

Nun ist

und nach (8)

$$\left.\begin{aligned} i_{11} \overset{2}{S}(a_{22})_2 &= \overset{3}{S}(i_{11})_3 \\ i_{11} \overset{1}{S}(a_{22})_2 + \overset{2}{S}(i_{22})_2 &= \overset{2}{S}(i_{11})_3 \\ i_{11} + \overset{1}{S}(i_{22})_2 &= \overset{1}{S}(i_{11})_3 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Mit (27) folgt aus (26)

$$\overset{3}{\Delta} i_{11} = \overset{3}{S}(i_{11})_3 + \eta \overset{2}{S}(i_{11})_3 + \eta^2 \overset{1}{S}(i_{11})_3 + \eta^3. \tag{28}$$

Aus den speziellen Ergebnissen (24) und (28) erkennt man, daß die Koeffizienten des Determinantenpolynoms durch die im Abschnitt IV erläuterten Summen $\overset{m}{S}(i_{11})_n |_{m=1,2\ldots n}$ der Grundmatrize-i_{11} gebildet werden. Die Summe aus dem Potenzexponenten von η und dem Summenindex m ist konstant und immer gleich dem Grad n der vorgegebenen Determinante, weshalb ein beliebiges Glied des Polynoms stets die Form $\eta^x \overset{n-x}{S}(i_{11})_n$ besitzen muß. Aus diesen Erkenntnissen folgt das allgemeine Ergebnis

$$\underline{\overset{n}{\Delta} i_{11} = \eta^n + \eta^{n-1} \overset{1}{S}(i_{11})_n + \eta^{n-2} \overset{2}{S}(i_{11})_n + \cdots + \eta^m \cdot \overset{n-m}{S} \cdot (i_{11})_n + \cdots + \eta \overset{n-1}{S}(i_{11})_n + \overset{n}{S}(i_{11})_n}, \tag{29}$$

wonach eine n-reihige Eigenwertdeterminante der Normalform in eine nach den Potenzen der Eigenwerte geordnete Reihe von $(n+1)$ Summanden zu entwickeln ist. Hiemit ist das eigentliche Ziel dieser Abhandlung erreicht, die in (29) auftretenden Summen sind in jedem Sonderfalle nach den im Abschnitt IV gegebenen Vorschriften leicht zahlenmäßig zu errechnen.

Zum Schlusse sei noch auf die anschauliche Bedeutung der in IV entwickelten Summen $\overset{m}{S}$ hingewiesen. In der Determinantentheorie [3]) wird gezeigt, daß ein im Determinantenpolynom (29) dem Potenzglied η^m beigeordneter Koeffizient identisch ist mit der Summe aller $p = n - m$-reihigen Hauptminoren in der n-reihigen, aus den Elementen i_{rk} gebildeten Determinante. In dieser Determinante sind $\binom{n}{p}$ p-reihige Hauptminoren enthalten. Daher ist z. B. im Determinantenpolynom der Eigenwertdeterminante $\overset{6}{\Delta} i_{11}$ die Summe

$\overset{1}{S}(i_{11})_6 \equiv$ der Summe aller $\binom{6}{1} = 6$ einreihigen Hauptminoren (Diagonalelemente)

$\overset{2}{S}(i_{11})_6 \equiv$ „ „ „ $\binom{6}{2} = 15$ zwei „ „

$\overset{3}{S}(i_{11})_6 \equiv$ „ „ „ $\binom{6}{3} = 20$ drei „ „

$\overset{4}{S}(i_{11})_6 \equiv$ „ „ „ $\binom{6}{4} = 15$ vier „ „

$\overset{5}{S}(i_{11})_6 \equiv$ „ „ „ $\binom{6}{5} = 6$ fünf „ „

$\overset{6}{S}(i_{11})_6 \equiv$ dem einzigen $\left[\binom{6}{6} = 1\right]$ sechsreihigen Hauptminor, also der Determinante selbst.

Eine weitere vergleichende Untersuchung zeigt, daß beispielsweise in der Summe

$$\overset{4}{S}(i_{11})_6 = i_{11}\overset{3}{S}(a_{22})_5 + i_{22}\overset{3}{S}(b_{33})_4 + i_{33}\overset{3}{S}(c_{44})_3$$

der erste Summand die Summe aller 4-reihigen mit i_{11} beginnenden Hauptminoren darstellt, der zweite bezw. dritte Summand hingegen jene 4-reihigen Hauptminoren umfaßt, die i_{22} bezw. i_{33} zum ersten Diagonalglied haben. In jeder anderen Summe $\overset{m}{S}$ lassen sich die Summanden in sinngemäßer Weise deuten.

VII. Praktische Anwendung und Zahlenbeispiel.

Die in Figur 2 dargestellte Form der Diagonalentwicklungen ermöglicht zwar eine übersichtliche Berechnung der Gruppensummen, doch erkennt man ohne weiteres, daß hinsichtlich der Anschreibung von Matrizen eine gewisse Doppelarbeit zu leisten ist, da die in einer Diagonalentwicklung abgeleiteten Matrizen in der nächstfolgenden Diagonalentwicklung neuerlich anzuschreiben sind. Diese Doppelarbeit kann vermieden werden, wenn man eine Matrizenanordnung nach den Figuren 5—8 trifft, wo jede in den Diagonalentwicklungen vorkommende Matrize nur ein einzigesmal erscheint.

Die Figuren 5—8 zeigen das Rechenschema zur Ermittlung des Determinantenpolynoms für den Sonderfall einer $n =$ 3-, bezw. 4-, 5- und 6-reihigen Eigenwertdeterminante. Determinanten mit grösserer Reihenzahl wird man zunächst, um ein allzu weitläufiges Rechenschema zu vermeiden, nach Gl. (22) auf zwei oder mehrere Determinanten von geringerer Reihenzahl zurückführen und jede dieser Determinanten für sich behandeln.

In diesen Figuren wurde die Anordnung der Matrizen so getroffen, daß zunächst alle aus der i_{11}-Matrize abstammenden a- bezw. α-Matrizen ent-

[3]) G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Verlag Veit & Co., Leipzig 1909, § 53, S. 126.

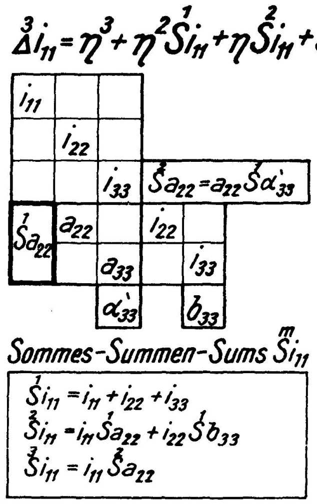


Fig. 5

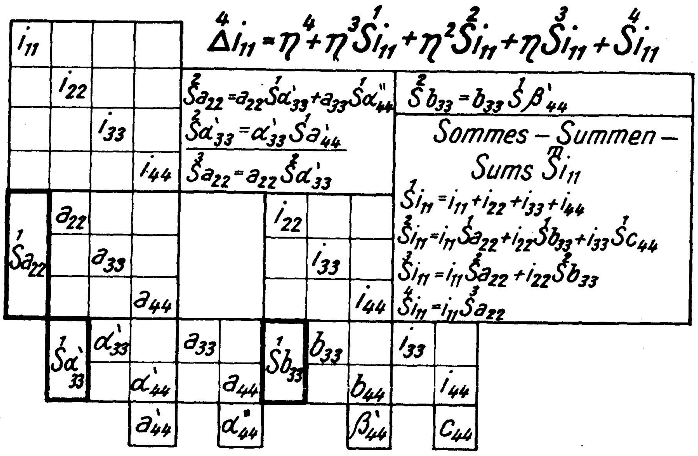


Fig. 6

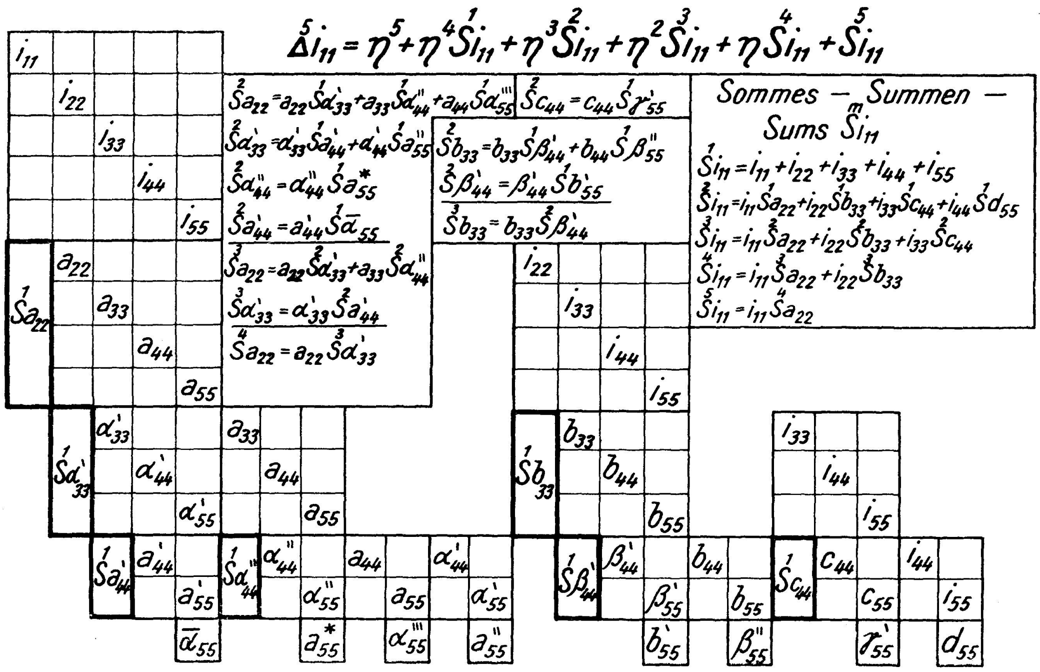


Fig. 7

wickelt werden, dann sämtliche aus der i_{22}-Matrize entspringenden b- und β-Matrizen, hierauf sämtliche c-, γ-Matrizen usw. Wie aus allen diesen Figuren ersichtlich ist, wird zunächst die aus einer i_{xx}-Matrize abgeleitete Matrize diagonal bis zur letzten zweireihigen Matrize fortgesetzt und sämtliche Matrizen dieser Diagonale in vertikaler Richtung bis zur letzten „Einsermatrix" abgeleitet.

An die letzte rechtsgelegene Matrize dieser Gruppe werden nun, wie z. B. Figur 8 deutlich zu erkennen gibt, jene restlichen Matrizendiagonalen angereiht, welche den noch nicht fortgesetzten Matrizen in der ersten bezw. zweiten, dritten ... vertikalen Matrizenkolonne zugeordnet sind. Diese Matrizen werden nun, so wie die vorhergehenden, wieder in vertikaler Richtung bis zur Einsermatrix abgeleitet.

$$\overset{6}{\Delta} \dot{i}_{11} = \eta^6 + \eta^5 \overset{1}{S} \dot{i}_{11} + \eta^4 \overset{2}{S} \dot{i}_{11} + \eta^3 \overset{3}{S} \dot{i}_{11} + \eta^2 \overset{4}{S} \dot{i}_{11} + \eta \overset{5}{S} \dot{i}_{11} + \overset{6}{S} \dot{i}_{11}$$

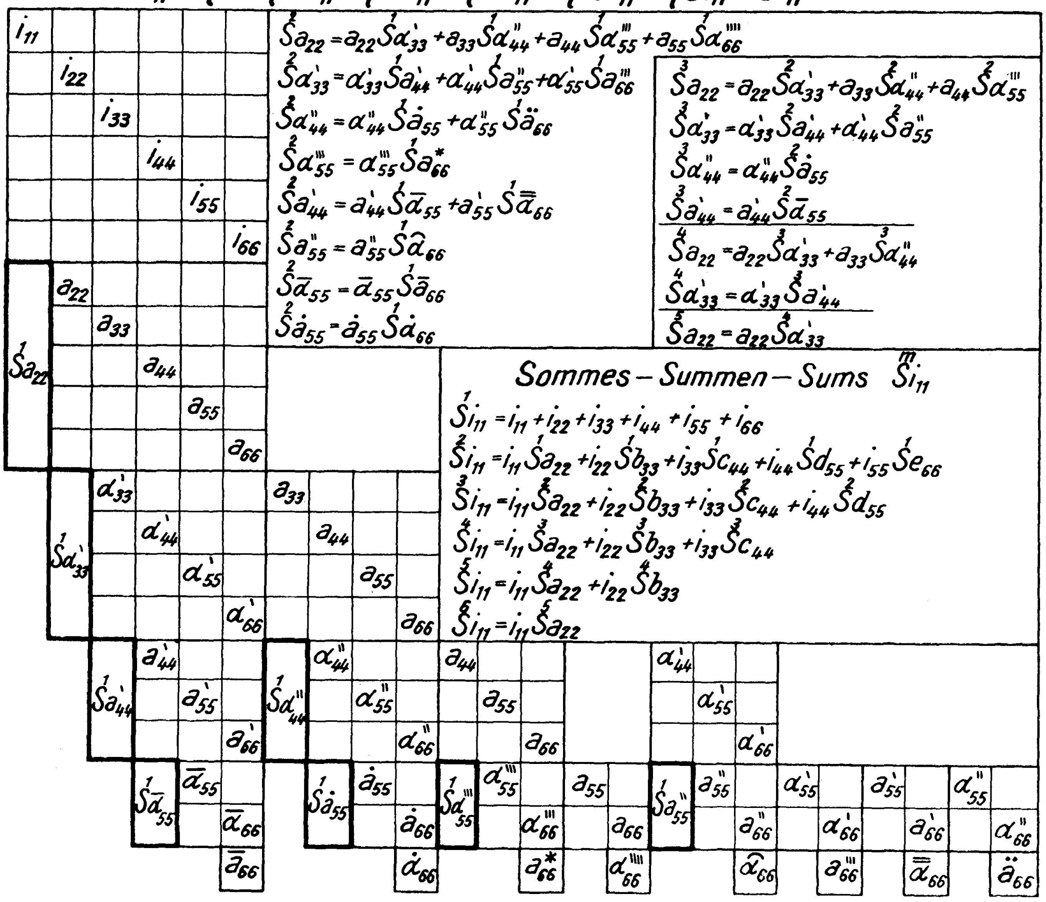


Fig. 8a

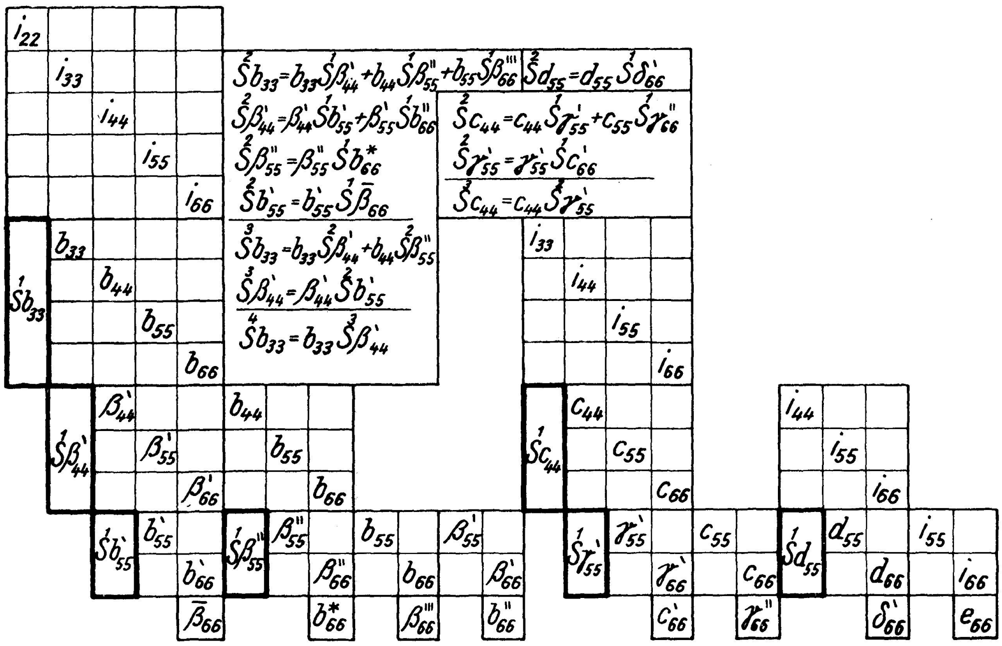


Fig. 8b

In die in der Figur stark umrahmten Spalten wird die erste Summe $\overset{1}{S}(\ )_r$ der rechtsstehenden Matrize eingeschrieben. Die Gesamtheit dieser ersten Summen beträgt, wie sich leicht herleiten läßt, in den a- und α-Gruppen 2^{n-3}, in den b- und β-Gruppen 2^{n-4}, in den c- und γ-Gruppen 2^{n-5} usw. Die hier durch Umrahmung erfaßten Matrizen kennzeichnen auch gleichzeitig die Gesamtheit aller in den Diagonalentwicklungen auftretenden „Matrizengruppen"; daher sind auch die ihnen zugeordneten zweiten Summen $\overset{2}{S}(\ )_r$ zu bilden, deren Zahl mit der Zahl der Summen $\overset{1}{S}(\ )_r$ übereinstimmt.

Von den in den stark umrahmten Spalten eingeschriebenen Matrizen sind nun auch die höheren Summen $\overset{m}{S}(\ )_r$ für $m \gtreqless 3$ zu bilden. Allerdings ist, da immer $r \gtreqless m$, die Bildung der Summen $\overset{3}{S}(\ )$ nur von jenen Matrizen möglich, deren Reihenzahl $r \gtreqless 3$ und aus demselben Grunde sind Summen $\overset{4}{S}(\ )$, $\overset{5}{S}(\ )\ldots$ nur jenen Matrizen zugeordnet, deren Reihenzahl $r \gtreqless 4$ bezw. $r \gtreqless 5\ldots$ ist. Demnach folgt, daß von den in die stark umrahmten Spalten eingeschriebenen Matrizen eines Schemas, die 2-reihigen Matrizen nur Summen vom Typ $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$, die 3-reihigen nur Summen vom Typ $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$, $\overset{3}{S}$, daher die r-reihigen Matrizen die Summen $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}, \ldots \overset{r}{S}$ als Beitrag zu den Diagonalentwicklungen liefern. Es läßt sich im übrigen auch noch leicht zeigen, daß innerhalb der a-, α-Gruppen, bezw. b-, β-Gruppen usw. die

$$\Sigma[\text{aller}\ \overset{3}{S}(\ )] = \tfrac{1}{2}\Sigma[\text{aller}\ \overset{2}{S}(\ )]\,,\quad \Sigma[\text{aller}\ \overset{4}{S}(\ )] = \tfrac{1}{2}\Sigma[\text{aller}\ \overset{3}{S}(\ )]$$

oder allgemein $\Sigma[\text{aller}\ \overset{m}{S}(\ )] = \frac{1}{2}\Sigma[\text{aller}\ \overset{m-1}{S}(\ )]\,|_{m \geqq 3}$ ist. Die Richtigkeit dieser allgemeinen Erläuterungen läßt sich, an Hand der den Figuren 5—8 beigegebenen Anschreibungen, leicht überprüfen. Hiebei wurde zur Vereinfachung der Schreibweise die für die Matrizenbezeichnung im Abschnitt IV eingeführte Einklammerung des hinter den Operator $\overset{m}{S}$ zu stellenden Buchstabens weggelassen. Die Entwicklung der Rechenoperation $\overset{m}{S}$ durch die Summenbildung der rechten Seite ist dann mit jenem Gliede von der allgemeinen Form $s_{xx}\overset{m-1}{S}\sigma_{yy}$ beendet, wenn $x + (m-1) = n$, oder was auf dasselbe hinauskommt, wenn $y + (m-1) = n + 1$ ist, wobei n den Grad der Grundmatrize $\cdot i_{11}$ darstellt.

Figur 9 bringt schließlich die zahlenmäßige nach dem Schema der Figur 6 durchgeführte Ermittlung des Determinantenpolynoms der nach 17 gebauten Knickdeterminante $\overset{4}{\Delta} i_{11}$, deren i_{rk}-Elemente in der in der Fußnote 1 genannten Abhandlung errechnet wurden. In Figur 9 wurde der Name einer jeden Matrize durch die Buchstabenanschreibung des ersten Hauptdiagonalgliedes gekennzeichnet. Die in den ersten Spalten der Matrizen in ( ) gesetzten Zahlen sind die im Abschnitt II genannten Multiplikatoren $\varkappa_r$. Sind die Hauptdiagonalelemente der i-Matrize sehr kleine Zahlen, so nehmen die Multiplikatoren $\varkappa_r$ unter Umständen für die Zahlenrechnung unvorteilhaft große Werte an. In solchen Fällen empfiehlt sich die Umformung $\eta + i_{rr} = (\eta - k) + (i_{rr} + k) \equiv \eta' + i'_{rr}$. Je nach der Wahl von k können die i'_{rr} beliebig groß gemacht werden, während alle übrigen i_{rk}-Elemente ihre Werte beibehalten. Nun ermittelt man das η'Determinantenpolynom, berechnet aus der

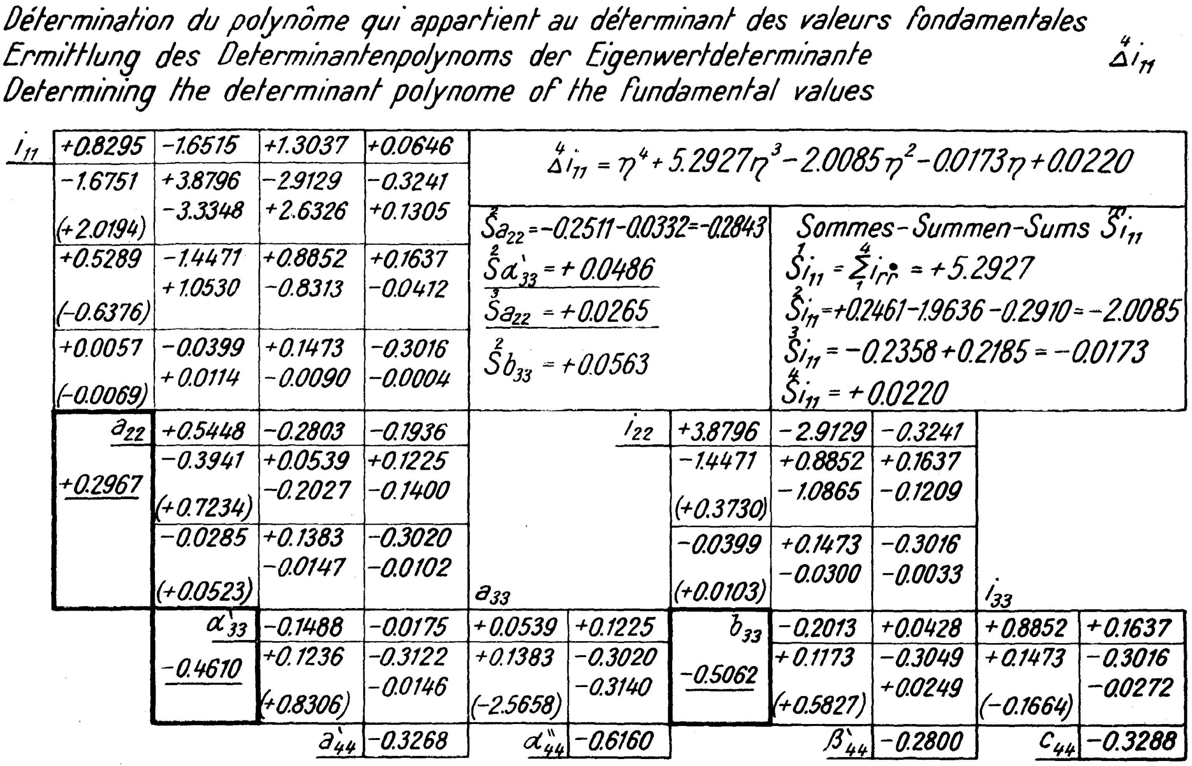


Fig. 9

Determinantengleichung entweder direkt η' und hiemit die Werte $\eta = \eta' + k$ oder ersetzt schon zuvor im η'-Polynom den Wert η' durch $\eta' = \eta - k$. Das Beispiel der Fig. 9 zeigt das einfache, übersichtliche und leicht kontrollierbare Verfahren der zahlenmäßigen Ermittlung des der Determinante $\overset{4}{\Delta} i_{11}$ zugeordneten η-Polynoms. Die nun aus der Determinantengleichung $\overset{4}{\Delta} i_{11} = 0$ auszurechnenden Eigenwerte η ergeben sich in einfacher Weise mit Hilfe des Graeffe'schen Näherungsverfahrens[4]) in beliebiger Genauigkeit, die, falls notwendig, auch nach dem Horner-Schema[4]) noch verschärft werden kann.

Aus dem hier durchgerechneten Sonderfall möge man erkennen, daß das angestrebte Ziel dieser Abhandlung völlig erreicht wurde.

VIII. Zusammenfassung.

In der technischen Literatur wurde des öfteren eine strenge Berechnung von Eigenwertproblemen (Stabilitäts- und Schwingungsproblemen), die auf mehrreihige Eigenwertdeterminanten führen, vielfach deshalb abgelehnt, weil die Ermittlung der Eigenwertdeterminante einerseits und die Ermittlung der hieraus fließenden Determinantengleichung andererseits mit einem, für den praktischen Rechner untragbar hohen Zeitaufwand verbunden seien. Diese Abhandlung entwickelt nun ein einfaches, allgemeines und rasch zum Ziele führendes Verfahren für die zahlenmäßige Ermittlung der Determinantengleichung aus einer vorge-

---

4) H. von Sanden, Praktische Analysis, Leipzig, Verlag B. G. Teubner, Seite 44 und 141.

gebenen Eigenwertdeterminante von der Form der Gl. (1); sie ist im besonderen eine Ergänzung der in Fußnote 1 genannten Abhandlung und zwar in dem Sinne, daß bei dem dort behandelten strengen Knickproblem nunmehr nicht nur die Knickdeterminante, sondern auch die Determinantengleichung mit verhältnismäßig geringem Zeitaufwand zu ermitteln sind. Daher dürfte die strenge Berechnung dieses besonderen Knickproblems, wohl auch von Seite der Praxis, in Hinkunft keine Ablehnung mehr erfahren.

Résumé.

En parcourant la littérature technique, il est aisé de constater l'opposition marquée faite au calcul rigoureusement exact des problèmes à valeurs fondamentales (problèmes de stabilité et problèmes d'oscillations) conduisant à des déterminants d'ordre élevé. Ceci provient du fait que le temps nécessaire à l'établissement du «déterminant des valeurs fondamentales» et de «l'équation aux valeurs fondamentales» qui en découle n'est pas à la portée de l'ingénieur de la pratique. Le but de ce mémoire consiste à développer une méthode générale simple et rapide pour le calcul numérique de l'équation susmentionnée à partir d'un déterminant du type de l'équation (1). Elle forme en particulier un complément du mémoire cité dans la note explicative 1 au bas de la page 227 et permet de calculer rapidement en ce qui concerne le problème rigoureux du flambage, non seulement le déterminant, mais aussi l'équation aux valeurs fondamentales correspondante. De ce fait, il n'y a plus de difficultés à traiter le problème du flambage de manière rigoureuse.

Summary.

In technical literature it is easy to recognise a decided reluctance to make a rigorously exact calculation of problems on fundamental values (problems regarding stability and vibrations) when the use of determinants of a high order is involved. This is because the time required to establish the "determinant of the fundamental values" and the "equation of the fundamental values" which follows from it, is much too long for the practical engineer. The aim of the present article is to develop a simple and rapid general method for the numerical calculation of the above-mentioned equation, starting with a determinant in the form of equation (1). This is in particulier an amplification of the article quoted in the explanatory note 1 at the foot of page 227 and allows a rapid calculation to be made with regard to the rigorous problem of buckling, not only to determine the buckling determinant itself but also the determinant equation. Now there is consequently no longer any difficulty in handling buckling problems in a rigorous manner.