

Kippen und Querschwingungen von Bogenträgern

Autor(en): **Stüssi, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **7 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8007>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

KIPPEN UND QUERSCHWINGUNGEN VON BOGENTRÄGERN.

FLAMBAGE ET OSCILLATIONS LATÉRALES DES POUTRES EN ARC.

LATERAL BUCKLING AND VIBRATION OF ARCHES.

Prof. Dr. F. STÜSSI, Eidg. Techn. Hochschule Zürich,
Generalsekretär für Stahlbau der I. V. B. H.

1. Allgemeines.

Das Kippen oder seitliche Ausknicken von Bogenträgern ist bis jetzt nur für Kreisbogen mit konstantem Querschnitt und gleichmäßig verteilter radialer Belastung streng untersucht worden¹⁾; die unter diesen einschränkenden Voraussetzungen gefundenen Werte können nicht auf die Bemessung der Hauptträger von Bogenbrücken übertragen werden.

Eine allgemeinere Untersuchung über die Seitensteifigkeit von Bogenbrücken hat A. OSTENFELD²⁾ durchgeführt. Um zu fertigen Formeln zu gelangen, setzt er aber einfache, also willkürliche Bogenform und Querschnittsänderung voraus, sodaß seine Untersuchung auch keine allgemeine Gültigkeit beanspruchen kann.

Nachstehend wird ein allgemein anwendbares baustatisches Verfahren zur Bestimmung der kritischen Belastung angegeben. Durch eine Verformung des Bogenträgers aus seiner ursprünglichen Ebene, d. h. durch die seitlichen Ausbiegungen z_0 und die Verdrehungen φ_0 entstehen zusätzliche seitliche Biegemomente $M_2 = V$ und Torsionsmomente $T = U$, die ihrerseits die Ausbiegungen z_1 und die Verdrehungen φ_1 verursachen. Da unter der kritischen Belastung, als Grenzfall, gerade noch Gleichgewicht besteht, müssen wegen der Gleichheit von innern und äußern Momenten die anfänglichen Verformungen z_0, φ_0 gleich groß sein, wie die durch sie verursachten, z_1, φ_1 . Im Sinne des Verfahrens, das ENGESSER und VIANELLO zur Untersuchung des geraden Druckstabes angegeben haben und auf dem auch die Untersuchung von A. OSTENFELD²⁾ aufbaut, ist somit die Kipplast eines Bogens so zu bestimmen, daß wir die ursprünglichen Verformungen z_0, φ_0 mehr oder weniger willkürlich, jedoch unter Beachtung der Randbedingungen, schätzen oder annehmen und die dadurch verursachten Verformungen z_1, φ_1 berechnen. Die „Stabilitätsbedingung“ $z_1 = z_0, \varphi_1 = \varphi_0$ liefert die Größe der kritischen Belastung. Stimmen angenommene und daraus berechnete Verformungskurven in ihrem Verlauf nicht miteinander überein, so ergibt der Vergleich von z_1, φ_1 mit z_0, φ_0 an einer bestimmten Stelle, z. B. in Bogenmitte, nur einen Näherungswert der kritischen Belastung, der durch

¹⁾ S. TIMOSHENKO, Theory of Elastic Stability, New York 1936.

²⁾ A. OSTENFELD, Seitensteifigkeit offener massiver Bogenbrücken. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 77 (1921), Nr. 15, 16.

Wiederholung der Berechnung, ausgehend von den nun schon eine bessere Annäherung an die genauen Lösungskurven des Problems darstellenden Kurven z_1 und φ_1 , oder aber durch eine Energiebetrachtung oder Mittelwertbildung

$$z_1 = \frac{\int_0^l z_0 \cdot z_1 \cdot ds'}{\int_0^l z_0^2 \cdot ds'} \cdot z_0,$$

wobei ds' die entsprechend der Steifigkeit reduzierte Länge des Bogenelementes bedeutet, zu verbessern ist. In beiden Fällen aber benötigen wir die berechneten Formänderungen z_1 , φ_1 nicht nur an einer bestimmten Trägerstelle, sondern in ihrem ganzen Verlauf über die Bogenlänge. Um somit die kritische Belastung zuverlässig und mit beliebig zu steigernder Genauigkeit berechnen zu können, muß zuerst ein baustatisches Verfahren zur Ermittlung der Ausbiegungs- und Verdrehungskurven z_1 und φ_1 infolge der Biegungs- und Torsionsmomente V und U an beliebig geformten Bogenträgern aufgestellt werden.

Ganz ähnlich wie die Größe der kritischen Belastung lassen sich auch die Eigenfrequenzen der seitlichen Schwingungen untersuchen. Die beiden Aufgaben sind nicht nur formal, sondern auch ursächlich eng miteinander verwandt³⁾: das Ausknicken kann als Grenzfall einer unendlich langsamen Schwingung gedeutet werden, bei der der Bogen ausschwingt, um nie mehr in seine Ruhelage zurückzukehren. Für eine versuchstechnische Untersuchung ergibt sich aus der gemeinsamen Behandlung von kritischer Belastung und Eigenschwingungen der Vorteil, daß die kritische Belastung nicht als Einzelwert, und zwar gerade unter den auf zufällige äußere Störungen empfindlichsten Verhältnissen, bestimmt werden muß, sondern daß sie sich aus einer stetigen Versuchskurve ergibt.

2. Die Biegungs- und Verdrehungsmomente.

Wir denken uns aus dem verformten (z_0 , φ_0) und durch beliebige Lasten P_x , P_y , P_z belasteten Bogen der Fig. 1 das Bogenstück zwischen den Knotenpunkten $m-1$ und m herausgeschnitten. Die Belastungen P denken wir uns in die Knotenpunkte m reduziert, wobei es für die weitere Untersuchung gleichgültig sein soll, ob diese Lasten P in Wirklichkeit Einzellasten oder Resultierende von verteilten Belastungen sind. Im übrigen soll über die Länge des Bogenstückes noch vorausgesetzt werden, daß im Rahmen der praktisch erforderlichen Rechnungsgenauigkeit mit Rücksicht auf die spätere Untersuchung der Formänderungen die Bogenlänge gleich der Sehnlänge gesetzt werden dürfe.

Wir betrachten zunächst im verformten Bogenstück von $m-1$ bis m (Fig. 2) die um die Axen x , y , z drehenden Momente, wobei wir mit Q_{xm} , Q_{ym} , Q_{zm} die Resultierenden aller Kräfte P_x , P_y , P_z vom Auflager A bis und mit dem Knotenpunkt $m-1$, d. h. die Querkräfte im Feld m , bezeichnen. Die Momente seien positiv, wenn sie im Uhrzeigersinn um die entsprechenden Axen drehen; die Momente werden im Folgenden durch ihre Axen dargestellt und mit X , Y , Z bezeichnet.

³⁾ S. z. B.: F. Stüssi, Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis: Knicklast und Grundschwingungszahl von Bogenträgern. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 106 (1935), Nr. 12.

Infolge der Ausbiegungen z verursachen die parallel zur x -Axe wirkenden Kräfte P_x Momente Y und es ergibt sich aus dem Gleichgewicht des Feldes m

$$\Delta Y_m = Y_m - Y_{m-1} = Q_{xm}(z_m - z_{m-1}) = \underline{Q_{xm} \cdot \Delta z_m}. \quad (1)$$

Greifen zwischen A und B keine Kräfte P_x an, so ist $Q_{xm} = \text{konst.}$ gleich dem Horizontalschub H des Bogens, der durch die als klein vorausgesetzten Formänderungen z und φ nicht verändert wird.

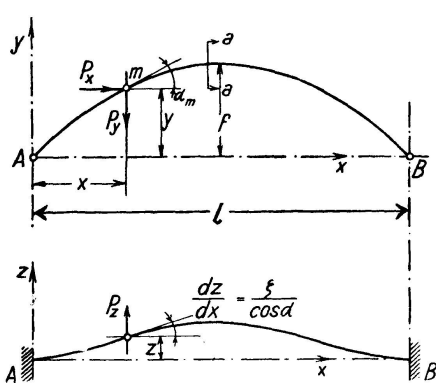


Fig. 1

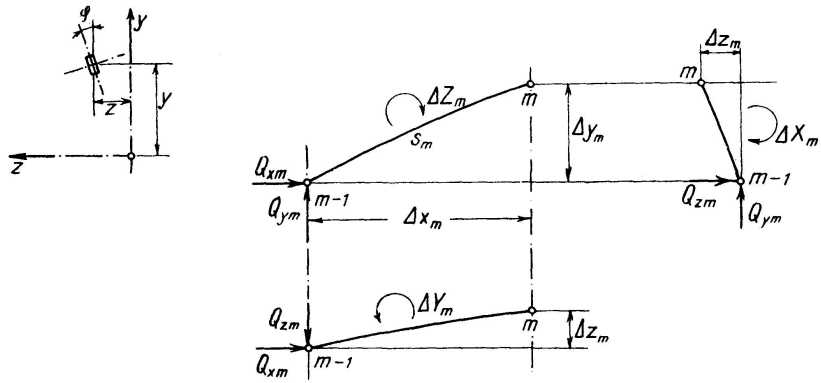


Fig. 2

Die lotrechten Lasten P_y verursachen Momente X und es ist am Bogenstück s_m :

$$\Delta X_m = X_m - X_{m-1} = - \underline{Q_{ym} \cdot \Delta z_m}. \quad (2)$$

Infolge der quergerichteten Belastungen P_z treten sowohl Momente X wie Momente Y auf und es ist

$$\underline{Y_m - Y_{m-1} = Q_{zm} \cdot \Delta x_m} \quad (3)$$

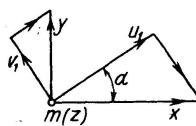
und

$$\underline{X_m - X_{m-1} = - Q_{zm} \cdot \Delta y_m} \quad (4)$$

Diese quergerichteten Belastungen P_z oder auch einzelne äußere Drehmomente ΔX und ΔY , wie die Verformungen z und φ bei Belastungen P_x und P_y , beeinflussen somit die Momente Z nicht oder das Kräftespiel des ebenen Bogens wird durch diese Ursachen nicht beeinflusst. Wir brauchen uns deshalb hier mit dem ebenen Kräftespiel des Bogens (unter Lasten P_y und P_x) nicht zu beschäftigen, sondern dürfen es als gegeben voraussetzen.

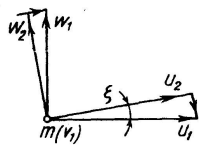
Bevor wir aus diesen Differenzen die Momente X, Y selbst bestimmen, sei ihr Zusammenhang mit den Biegungs- und Torsionsmomenten des Bogens an der Stelle m untersucht. Wir legen im Punkt m des verformten Bogens ein rechtwinkliges Koordinatensystem u, v, w , wobei die u -Axe mit der Bogentangente in m und die Axen v und w mit den (um φ verdrehten) Querschnittshauptaxen im Normalschnitt zu u zusammenfallen sollen. Dieses Koordinatensystem geht somit durch die Verschiebungen x, y, z und die Verdrehungen $\alpha, \zeta = \frac{dz}{ds}, \varphi$ aus dem System x, y, z hervor. Bei der Betrachtung der Momente spielen die Verschiebungen keine Rolle und wir können uns auf die Untersuchung der Verdrehungen beschränken. Wir führen diese Drehungen stufenweise ein.

Bei einer Drehung um den Winkel α mit der Drehaxe z (Fig. 3) ergibt sich



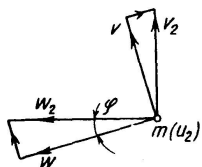
$$\left. \begin{aligned} U_1 &= X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha \\ V_1 &= Y \cdot \cos \alpha - X \cdot \sin \alpha \\ W_1 &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Drehen wir nun das System u_1, v_1, w_1 um den Winkel $\zeta = \frac{dz}{ds}$ mit der Drehaxe v_1 , so folgt aus Fig. 4



$$\left. \begin{aligned} U_2 &= U_1 \cdot \cos \zeta + W_1 \cdot \sin \zeta \\ V_2 &= V_1 \\ W_2 &= W_1 \cdot \cos \zeta - U_1 \cdot \sin \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Durch Drehung um den Winkel φ mit der Drehaxe u_2 (Fig. 5) ergibt sich endlich



$$\left. \begin{aligned} U &= U_2 \\ V &= V_2 \cdot \cos \varphi + W_2 \cdot \sin \varphi \\ W &= W_2 \cdot \cos \varphi - V_2 \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Setzen wir die Werte der Gleichungen (5) und (6) in Gleichung (7) ein, so erhalten wir den gesuchten Zusammenhang zwischen den Momenten U, V, W mit den Momenten X, Y, Z . Da die Verformungen ζ, φ voraussetzungsgemäß klein sein sollen, so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \zeta = 1 \\ \sin \varphi &= \varphi; \quad \sin \zeta = \zeta \end{aligned}$$

und unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} U &= X \cdot \cos \alpha + Y \cdot \sin \alpha + Z \cdot \zeta \\ V &= Y \cdot \cos \alpha - X \cdot \sin \alpha + Z \cdot \varphi \\ W &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die letzte dieser Gleichungen, $W = Z$, bestätigt die bereits festgestellte Tatsache, daß die im ebenen Bogen ermittelten Momente Z durch kleine Verformungen z, φ oder durch Querbelastungen P_y und Drehmomente $\Delta X, \Delta Y$ abgesehen von Einflüssen höherer Kleinheit, nicht beeinflusst werden.

Um nun aus den Differenzen der Gleichungen (1) bis (4) die Momente X, Y selbst zu bestimmen, müssen wir die Auflagerreaktionen bei A und B kennen. Im allgemeinen Fall des beidseitig eingespannten und deshalb 6fach statisch unbestimmten Bogens interessieren uns hier, nach Ausschaltung des ebenen Problems, noch drei überzählige Größen, als welche wir beispielsweise, nach Einschaltung entsprechender Gelenke, die beiden Biegemomente V_A und V_B und das Torsionsmoment U_B wählen können. Die Berechnung dieser überzähligen Momente für einen gegebenen Belastungszustand des Grundsystems ist eine normale Aufgabe der Baustatik und soll hier im allgemeinen Fall nicht weiter behandelt werden.

Bei der uns hier besonders interessierenden Aufgabe, der Bestimmung der kleinsten kritischen Belastung und der kleinsten Eigenfrequenz der Querschwingungen, ist Vollbelastung und symmetrische Verformung des Bogens maßgebend. Für diesen Fall werden aus Symmetriegründen $V_A = -V_B$ und $U_A = U_B$ und das Problem ist noch einfach statisch unbestimmt.

In Fig. 6 ist die Auflagerung des Grundsystems bei A skizziert und wir erhalten aus Gleichung (8) die Auflagermomente:

$$\left. \begin{aligned} U_A &= X_A \cdot \cos \alpha_A + Y_A \cdot \sin \alpha_A + Z_A \cdot \zeta_A \\ V_A &= Y_A \cdot \cos \alpha_A - X_A \cdot \sin \alpha_A + Z_A \cdot \varphi_A \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wegen der freien Drehbarkeit um die Axe V_A ist $V_A = 0$ oder

$$Y_A = X_A \cdot \operatorname{tg} \alpha_A - Z_A \cdot \frac{\varphi_A}{\cos \alpha_A} \quad (10)$$

und ferner

$$U_A = \frac{X_A}{\cos \alpha_A} + Z_A (\zeta_A - \varphi_A \cdot \operatorname{tg} \alpha_A) \quad (11)$$

Bei momentenfreien Bogen (Drucklinienbelastung, $Z = 0$) oder bei starr eingespannten Bogen ($\varphi_A = 0$, $\zeta_A = 0$) vereinfachen sich diese Werte auf

$$Y_A = X_A \cdot \operatorname{tg} \alpha_A \quad (10a)$$

$$U_A = X_A \cdot \sec \alpha_A \quad (11a)$$

X_A ergibt sich hier aus Symmetriegründen ($X_M = 0$) durch Aufsummieren der Differenzen $X_{m-1} - X_m$ der Gleichungen (2) und (4) für die linke Bogenhälfte; darauf kann Y_A mit Gleichung (10) bestimmt werden. Damit sind die Momente X und Y und durch Gleichung (8) auch die Momente U und V für alle Punkte des Grundsystems bekannt.

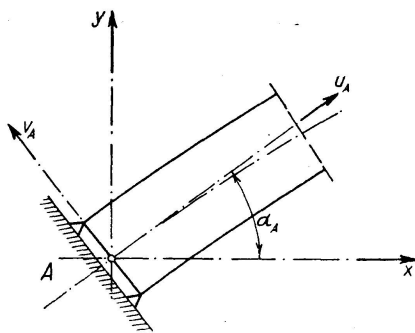


Fig. 6

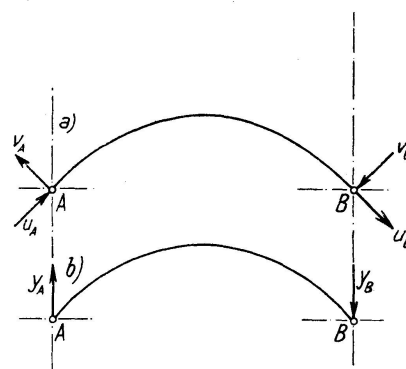


Fig. 7

Zur Bestimmung des überzähligen Einspannmomentes $V_A = V_B$ können wir nun allerdings nicht einfach das Grundsystem mit $V_A = 1$ und $V_B = 1$ allein belasten (Fig. 7a), da zum Gleichgewichtszustand noch Drehmomente U_A und U_B notwendig sind. Die Überzähligen V_A und V_B ergeben mit ihren Reaktionen U_A und U_B zusammen resultierende Momente Y_A und Y_B . Wir führen deshalb einfacher als überzählige Größen direkt die Momente Y_A und Y_B ein (Fig. 7b) und belasten das Grundsystem mit $Y_A = -Y_B = 1$, wodurch die Momente

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 1 \cdot \sin \alpha \\ V_1 &= 1 \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

entstehen. Damit sind die in die Elastizitätsbedingung $Y_A \cdot a_{11} + a_{10} = 0$ eintretenden Verschiebungsgrößen a_{1k} bestimmbar. Diese hängen nun sowohl von den Biegemomenten V wie von den Torsionsmomenten U , d. h. sowohl von der Biegesteifigkeit $B_2 = EJ_y$ wie von der Verdrehungssteifigkeit $C = G \cdot J_d$ ab. Wenn wir einfachheitshalber und wohl mit praktisch genügender Genauigkeit die Steifigkeiten je feldweise konstant annehmen, so ergibt sich mit der in der Baustatik üblichen „Trapezformel“ die Verschiebungsgröße a_{1k} zu

$$a_{1k} = \left. \begin{aligned} & \sum_A^B V_{km} \cdot \left[\frac{s_m}{6 B_{2m}} (\cos \alpha_{m-1} + 2 \cos \alpha_m) + \frac{s_{m+1}}{6 B_{2m+1}} (2 \cos \alpha_m + \cos \alpha_{m+1}) \right] \\ & + \sum_A^B U_{km} \cdot \left[\frac{s_m}{6 C_m} (\sin \alpha_{m-1} + 2 \sin \alpha_m) + \frac{s_{m+1}}{6 C_{m+1}} (2 \sin \alpha_m + \sin \alpha_{m+1}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Es kann ohne Schwierigkeit, auch bei stetig veränderlicher Steifigkeit, der Wert von a_{1k} genauer bestimmt werden, beispielsweise durch die „Parabelformel“; wesentlich ist aber, mit Rücksicht auf die innere Übereinstimmung der ganzen Berechnung, daß diese Verschiebungsgrößen auf den gleichen Grundlagen berechnet werden, wie die analogen Werte, die in die nun aufzustellenden Formänderungsgleichungen eingehen. Bei nicht allzugroßen Feldweiten genügt erfahrungsgemäß die Trapezformel in normalen Fällen allen vernünftigen Anforderungen an die Rechnungsgenauigkeit.

Die wirklichen Bogenmomente ergeben sich nun nach Auflösung der Elastizitätsbedingung aus der Superposition

$$\left. \begin{aligned} U_m &= U_{0m} + Y_A \cdot U_{1m} \\ V_m &= V_{0m} + Y_A \cdot P_{1m} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. Die Verformungslinien z und φ .

Um die Ausbiegungen z des Bogenfeldes von $m-1$ bis m mit der Länge s_m zu untersuchen, bringen wir in $m-1$ die virtuelle Belastung $-\frac{1}{s_m}$ in Richtung der gesuchten Verschiebung z_{m-1} an (Fig. 8) und berechnen die bei dieser Belastung geleisteten virtuellen Arbeiten. Das Bogenstück s_m wird dadurch im Gleichgewicht gehalten, das am festgehalten gedachten Ende m die waagrechte Auflagerkraft $\frac{1}{s_m}$ und die Auflagermomente

$$V_m = -\frac{1}{s_m} \cdot \cos \varepsilon'_m \cdot s_m = -1 \cdot \cos \varepsilon'_m \cong -1$$

und

$$U_m = \frac{1}{s_m} \cdot \sin \varepsilon'_m \cdot s_m = 1 \cdot \sin \varepsilon'_m$$

auftreten. Diese äußern Kräfte leisten, mit $\zeta_m = \left(\frac{dz}{ds}\right)_m$, die virtuelle Arbeit

$$-\frac{1}{s_m} \cdot z_{m-1} + \frac{1}{s_m} \cdot z_m - 1 \cdot \zeta_m - 1 \cdot \sin \varepsilon'_m \cdot \varphi_m.$$

Gleichzeitig wird der Stab s_m auch durch die in Fig. 8 skizzierten Biege- und Torsionsmomente, sowie auch durch Querkräfte, die jedoch hier nicht

weiter berücksichtigt sind, beansprucht; die entsprechende innere virtuelle Arbeit beträgt, mit Hilfe der „Trapezformel“ bestimmt:

infolge Biegung: $\frac{s_m}{6 B_{2m}} (V_{m-1} + 2 V_m) = v K'_m$

infolge Torsion: $\sin \varepsilon'_m \cdot \frac{s_m}{6 C_m} (U_{m-1} + 2 U_m) = v K'_m \cdot \sin \varepsilon'_m$

Setzen wir nun die inneren und äußeren virtuellen Arbeiten aus Gleichgewichtsgründen einander gleich, so erhalten wir den Zusammenhang

$$-\frac{1}{s_m} \cdot z_{m-1} + \frac{1}{s_m} \cdot z_m = v K'_m + v K'_m \cdot \sin \varepsilon'_m + 1 \cdot \varphi_m \cdot \sin \varepsilon'_m + 1 \cdot \zeta_m. \quad (15a)$$

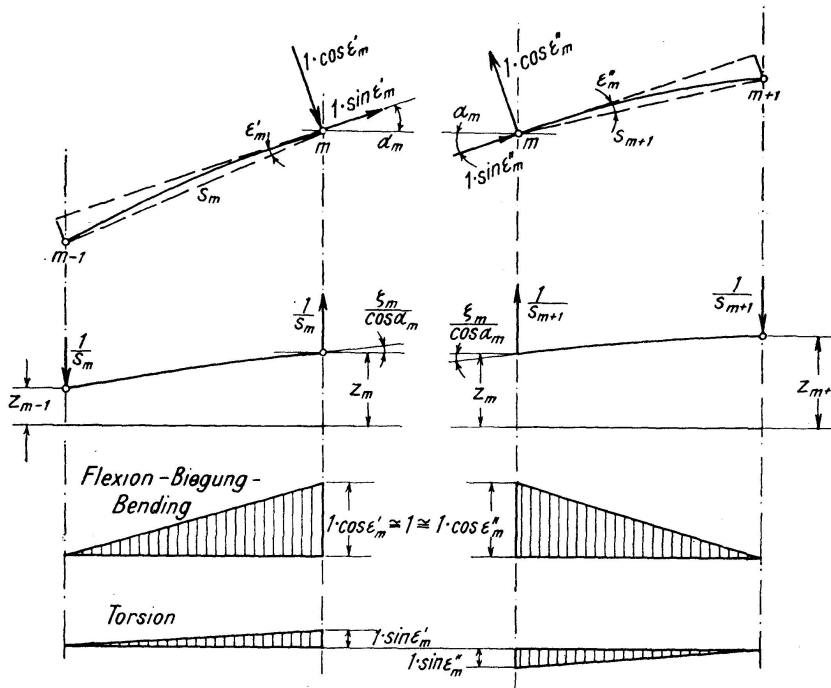


Fig. 8

Um ζ_m eliminieren zu können, bringen wir am Ende $m + 1$ des Feldes s_{m+1} die virtuelle Belastung $-\frac{1}{s_{m+1}}$ an und erhalten analog:

$$\frac{1}{s_{m+1}} \cdot z_m - \frac{1}{s_{m+1}} \cdot z_{m+1} = v K''_m - v K''_m \cdot \sin \varepsilon''_m + 1 \cdot \varphi_m \cdot \sin \varepsilon''_m - 1 \cdot \zeta_m. \quad (15b)$$

Die Differenz $v K'_m \cdot \sin \varepsilon'_m - v K''_m \cdot \sin \varepsilon''_m$ ist vernachlässigbar klein; wir erhalten somit mit der Bezeichnung $v K'_m + v K''_m = v K_m$ durch Addition der Gleichungen (15a) und (15b) die gesuchte Bestimmungsgleichung der Ausbiegungen z :

$$-\frac{1}{s_m} \cdot z_{m-1} + \left(\frac{1}{s_m} + \frac{1}{s_{m+1}} \right) z_m - \frac{1}{s_{m+1}} \cdot z_{m+1} = v K_m + (\sin \varepsilon'_m + \sin \varepsilon''_m) \cdot \varphi_m. \quad (16)$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung des gewöhnlichen Seilpolygons mit der veränderlichen Feldweite s unter den Knotenlasten

$\nu K_m + (\sin \varepsilon'_m + \sin \varepsilon''_m) \cdot \varphi_m$. Die Biegelinie z des Bogenträgers unterscheidet sich also nur dadurch von der Biegelinie eines ebenen Stabzuges, daß die Knotenlast oder das „elastische Gewicht“ νK_m um das „Zusatzgewicht“ $\varphi_m \cdot (\sin \varepsilon'_m + \sin \varepsilon''_m)$ zu vergrößern ist.

Wir bestimmen nun die uns noch fehlenden Drehwinkel φ . Am Ende $m-1$ des Feldes s_m bringen wir als virtuelle Belastung das Torsionsmoment $U=1$ an (Fig. 9), dem im Knotenpunkt m durch das Torsionsmoment $-1 \cdot \cos \beta_m$ und das Biegemoment $-1 \cdot \sin \beta_m$ Gleichgewicht gehalten wird. Gleichzeitig wird das Bogenfeld s_m durch die in Fig. 9 skizzierten Biege- und Torsionsmomente beansprucht. Die Gleichsetzung von innern und äußern virtuellen Formänderungsarbeiten liefert

$$-1 \cdot \varphi_{m-1} + 1 \cdot \cos \beta_m \cdot \varphi_m - 1 \cdot \sin \beta_m \cdot \zeta_m = \nu K_{m-1}'' + \nu K_m' + \nu K_m'' \cdot \sin \beta_m \quad (17a)$$

Eine analoge Betrachtung des Feldes s_{m+1} liefert

$$1 \cdot \cos \beta_{m+1} \cdot \varphi_m - 1 \cdot \varphi_{m+1} + 1 \cdot \sin \beta_{m+1} \cdot \zeta_m = -\nu K_m'' - \nu K_{m+1}' + \nu K_m'' \cdot \sin \beta_{m+1} \quad (17b)$$

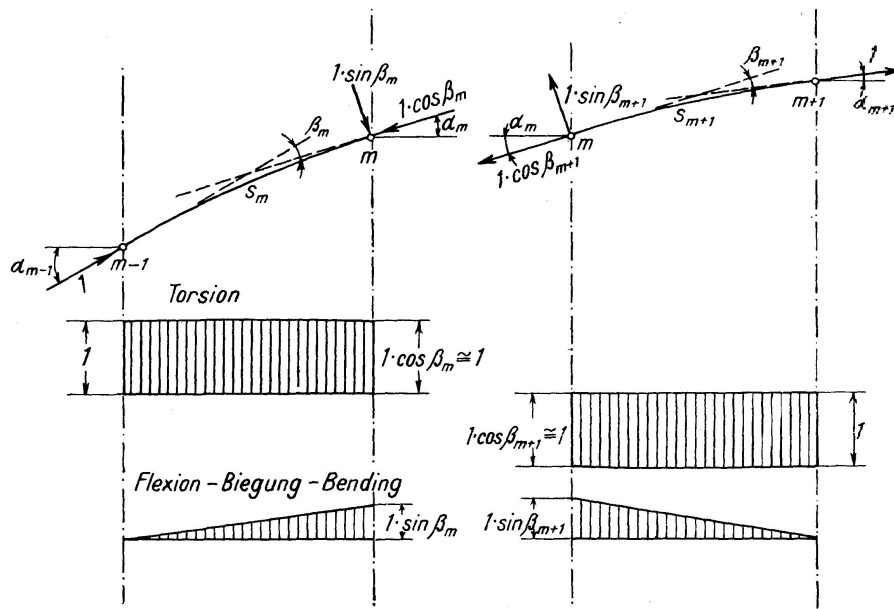


Fig. 9

Multiplizieren wir, um ζ_m zu eliminieren, Gleichung (17a) mit $\sin \beta_{m+1}$ und Gleichung (17b) mit $\sin \beta_m$, so erhalten wir durch Addition

$$\frac{-\sin \beta_{m+1} \cdot \varphi_{m-1} + (\sin \beta_{m+1} \cdot \cos \beta_m + \sin \beta_m \cdot \cos \beta_{m+1}) \varphi_m - \sin \beta_m \cdot \varphi_{m+1}}{=} = (\nu K_{m-1}'' + \nu K_m') \sin \beta_{m+1} - (\nu K_m'' + \nu K_{m+1}') \sin \beta_m + \nu K_m'' \cdot \sin \beta_m \cdot \sin \beta_{m+1} \quad (18)$$

Wegen $\sin \beta_m \cdot \cos \beta_{m+1} + \sin \beta_{m+1} \cdot \cos \beta_m = \sin (\beta_m + \beta_{m+1})$ läßt sich diese Gleichung noch etwas vereinfachen. Bei den Vorzeichen der Unbekannten φ_m darf in dieser Differenzgleichung zweiter Ordnung, im Gegensatz zu den Belastungsgliedern, nun nicht etwa $\cos \beta_m = \cos \beta_{m+1} = 1$ oder $\sin (\beta_m + \beta_{m+1}) = \sin \beta_m + \sin \beta_{m+1}$ gesetzt werden, weil sich eine hier eingeführte, wenn auch kleine Ungenauigkeit bei der Auflösung des ganzen Systems von dreigliedrigen Gleichungen vervielfachen würde. Im übrigen

bietet die Auflösung des dreigliedrigen Gleichungssystems Gl. (18), etwa mit dem abgekürzten Gauss'schen Algorithmus, und unter Beachtung der Randbedingungen, gewöhnlich $\varphi_A = \varphi_B = 0$, keine Schwierigkeiten. Sind damit die Verdrehungen φ gefunden, so lassen sich mit Gleichung (16) nun auch die Ausbiegungen z bestimmen und unsere Aufgabe ist grundsätzlich gelöst.

Vielleicht noch einfacher als die direkte Auflösung des Gleichungssystems ist hier die Lösung in der Form eines „verallgemeinerten Seilpolygons“⁴⁾. Wir schreiben Gleichung (18) als Rekursionsformel:

$$\varphi_{m+1} = \left(\frac{\sin \beta_{m-1}}{\sin \beta_m} \cdot \cos \beta_m + \cos \beta_{m+1} \right) \cdot \varphi_m - \frac{\sin \beta_{m+1}}{\sin \beta_m} \cdot \varphi_{m+1} - (uK''_{m-1} + uK'_m) \cdot \frac{\sin \beta_{m+1}}{\sin \beta_m} + (uK''_m + uK'_{m+1}) - vK_m \cdot \sin \beta_{m+1}, \quad (19a)$$

oder mit den Abkürzungen

$$a_m = \frac{\sin \beta_{m+1}}{\sin \beta_m} \cdot \cos \beta_m + \cos \beta_{m+1}$$

$$b_m = \frac{\sin \beta_{m+1}}{\sin \beta_m}$$

$$uD_m = (uK''_{m-1} + uK'_m) \cdot b_m - (uK''_m + uK'_{m+1})$$

in einfacherer Schreibweise:

$$\varphi_{m+1} = a_m \cdot \varphi_m - b_m \cdot \varphi_{m-1} - uD_m - vK_m \cdot \sin \beta_{m+1}. \quad (19b)$$

Wir berechnen nun zuerst das „Seilpolygon“, indem wir außer dem gegebenen Wert φ_A noch φ_1 willkürlich, z. B. $\varphi_1 = 0$, annehmen; von diesem ersten „Seilstrahl“ aus sind nun die Werte φ_2, φ_3 usw. bestimmbar. Allerdings wird dieses Seilpolygon die zweite Randbedingung, z. B. $\varphi_B = 0$, nun nicht erfüllen; wir müssen noch die „Schlußlinie“ einlegen. Diese Schlußlinie, zunächst in willkürlichem Maßstab, finden wir durch die homogene Gleichung 19b,

$$\varphi_{m+1} = a_m \cdot \varphi_m - b_m \cdot \varphi_{m-1},$$

wobei wir wieder den ersten Seilstrahl annehmen, diesmal mit $\varphi_A = 0$ und etwa $\varphi_1 = 1$. Diese Schlußlinie, die hier nicht mehr gerade ist, müssen wir nun, in passendem Maßstab, so in das Seilpolygon einlegen, daß die Randbedingung für φ_B erfüllt ist. An Stelle der Randbedingung bei B kann selbstverständlich auch eine Symmetriebedingung treten.

4. Anwendungsbeispiel und Versuche.

Das Rechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Last und der Grundschwingungszahl, dessen Grundlagen vorstehend entwickelt wurden, soll nun noch am Beispiel eines eingespannten Parabelbogens mit konstantem Querschnitt und $f = 0,30 \cdot l$, belastet durch 8 gleiche und gleichmäßig verteilte, stets lotrecht wirkende Einzellasten P skizziert werden. Die statische Berechnung des ebenen Bogens lieferte $H = 3.361 \cdot P$ und vernachlässigbar kleine Momente Z .

⁴⁾ F. STÜSSI, Statik der Seile. Abhandlungen I. V. B. H., Band 6, 1940/41.

a) Kritische Belastung:

Aus den angenommenen Ausbiegungen z_0 (Fig. 10) wurden über die Momente X und Y die Momente U_0 und V_0 im Grundsystem berechnet. Nun konnte die Elastizitätsbedingung für ein bestimmtes Verhältnis von $B_2:C$ aufgestellt und daraus die Überzählige Y_A bestimmt werden. Entsprechend dem angenommenen stehenden schmalen Rechteckquerschnitt wurde mit

$$C = G \cdot J_d = G \cdot \frac{(h - 0,63 \cdot d) d^3}{3}$$

das Verhältnis $C = 1,4 \cdot B_2$ eingeführt. Aus der Superposition Gleichung (14) ergaben sich nun die wirklichen Momente U und V .

Die Formänderungsgleichung (18) bzw. (19) lieferte nun die Verdrehungswinkel φ , worauf mit Gleichung (16) die gesuchten Ausbiegungen z_1 als Seilpolygon zu elastischen Gewichten berechnet werden konnte. Die Form der Ausbiegungslinie lieferte mit $\zeta_A = 0$ eine Rechnungskontrolle. In Fig. 10 sind zur Veranschaulichung der Verhältnisse die fünf Kurven $z_0, U, V, \varphi_1, z_1$, für U und V sowohl für das Grundsystem, $Y_A = 0$, wie auch für den endgültigen Zustand, eingetragen.

Für die Bogenmitte ergab sich, bei guter Übereinstimmung der z_0 - und der z_1 -Linie und kontrolliert durch Mittelwertbildung, für den untersuchten Fall mit $C = 1,4 \cdot B_2$ die Ausbiegung

$$z_{1m} = 0,197 \frac{P \cdot l^2}{B_2} \cdot z_{0m} \quad \text{oder allgemein} \quad \underline{z_{1m} = c_k \cdot \frac{Pl^2}{B_2} \cdot z_{0m}}$$

Die kritische Last ergibt sich nun aus der Stabilitätsbedingung $z_{1m} = z_{0m}$ zu

$$\underline{P_{kr} = \frac{1}{c_k} \cdot \frac{B_2}{l^2}}$$

oder hier

$$P_{kr} = 5,08 \cdot \frac{B_2}{l^2} \quad (20)$$

$$H_{kr} = 17,1 \cdot \frac{B_2}{l^2}$$

Um den Einfluß der Verdrehungssteifigkeit C gegenüber der Biegesteifigkeit B_2 besser zu verfolgen, können die Durchbiegungen infolge der Einzeleinflüsse U_0, V_0, U_1, V_1 je getrennt für sich ermittelt und erst zuletzt zu z_1 superponiert werden. Das Ergebnis dieser Untersuchung, die Veränderlichkeit der Kipplast bei veränderlichem Verhältnis $B_2:C$, ist in Fig. 11 dargestellt. Es zeigt sich, daß der Einfluß der Verdrehungssteifigkeit C beim eingespannten Bogen offenbar viel kleiner ist als bei Lagerung nach Fig. 6.

b) Eigenschwingungen:

Während der (harmonischen) Eigenschwingungen des Bogens mit der Kreisfrequenz p wirken, außer den durch die Verformungen z, φ statisch oder direkt verursachten Momenten U_k, V_k (die bei genügender Größe der Belastung das Kippen verursachen), noch die Trägheitskräfte $P_{zs} = \frac{P}{g} \cdot p^2 \cdot z_0$ und, infolge der Verdrehung φ , die Verdrehungsmomente $\Delta U_s =$

$$z_1 = c_{s1} \cdot \frac{P \cdot p^2 \cdot l^3}{g B_2} \cdot z_0 + c_{s2} \cdot \frac{P \cdot i_F^2 \cdot p^2 \cdot l}{g B_2} \cdot z_0 + c_k \cdot \frac{P \cdot l^2}{B_2} \cdot z_0.$$

Setzen wir nun $z_1 = z_0$ (Frequenzgleichung), so kann die Kreisfrequenz p und die sekundliche Schwingungszahl $\nu = p : 2\pi$ bestimmt werden. Beachten wir, daß

$$\frac{B_2}{c_k \cdot l^2} = P_{kr},$$

so ergibt sich

$$p = \frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{g B_2}{c_{s1} \cdot l P} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c_{s2} \cdot i_p^2}{c_{s1} \cdot l^2}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{kr}}} \quad (21)$$

Bei der numerischen Auswertung zeigt sich, daß der Wert

$$\frac{c_{s2}}{c_{s1}} \cdot \frac{i_p^2}{l^2}$$

gegen eins vernachlässigbar klein ist; der Einfluß der Rotationsträgheit ist also auch hier bedeutungslos. Für das Zahlenbeispiel der Fig. 10 ergab sich

$$c_{s1} = 0,0418 = \frac{1}{23,9} \text{ oder}$$

$$\underline{\underline{\nu = \frac{p}{2\pi} = \frac{\sqrt{23,9}}{2\pi \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{g B_2}{l \cdot P} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{kr}}} = \frac{0,778}{l} \cdot \sqrt{\frac{g B_2}{l \cdot P} \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{kr}}}}}}}$$

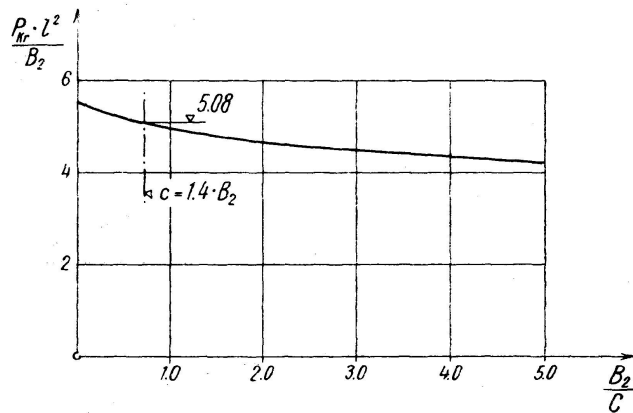


Fig. 11

c) Versuche:

Zur Überprüfung dieser Berechnungen habe ich in meiner Abteilung des Institutes für Baustatik an der E. T. H. Schwingungsversuche an Modellbogen durchführen lassen⁵⁾. Die parabelförmigen Bogen wurden mit konstanter Höhe von 12 mm aus einer ebenen Aluminiumblechtafel von 2.0 mm Stärke herausgeschnitten. Um möglichst reine Versuchsbedingungen zu erhalten, wurden die Bogen in verhältnismäßig kräftigen Stahlwinkeln eingespannt. Die Schwingungen wurden unter verschiedenen am Bogen direkt angebrachten Belastungen P durch ein leichtes und weiches, am Bogen befestigtes Blattfederchen auf einer mit berußtem Papier belegten Trommel aufgezeichnet. Durch Vergleich mit dem ebenfalls aufgezeichneten Zeit-

⁵⁾ Versuchsdurchführung: Dipl. Ing. H. LUMPERT.

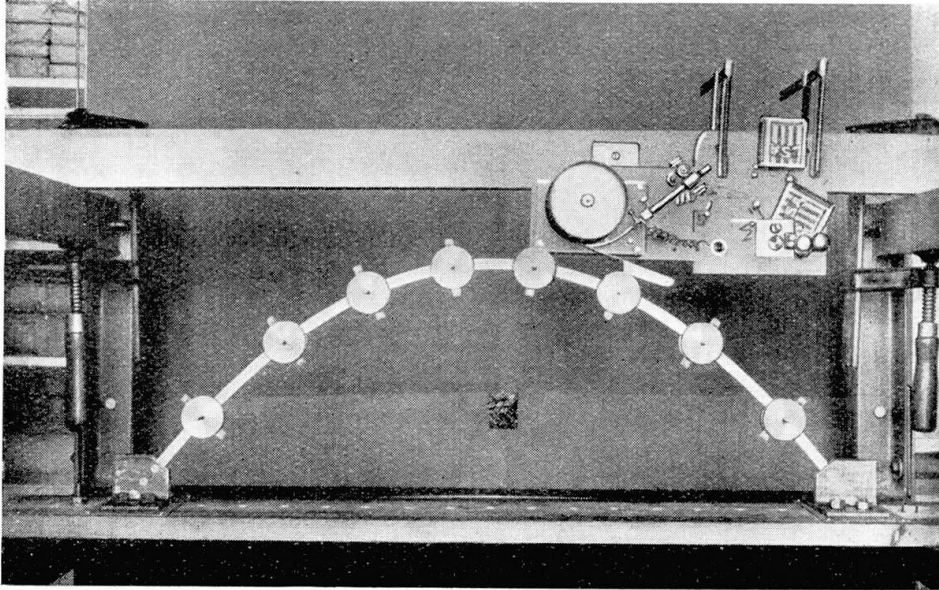


Fig. 12

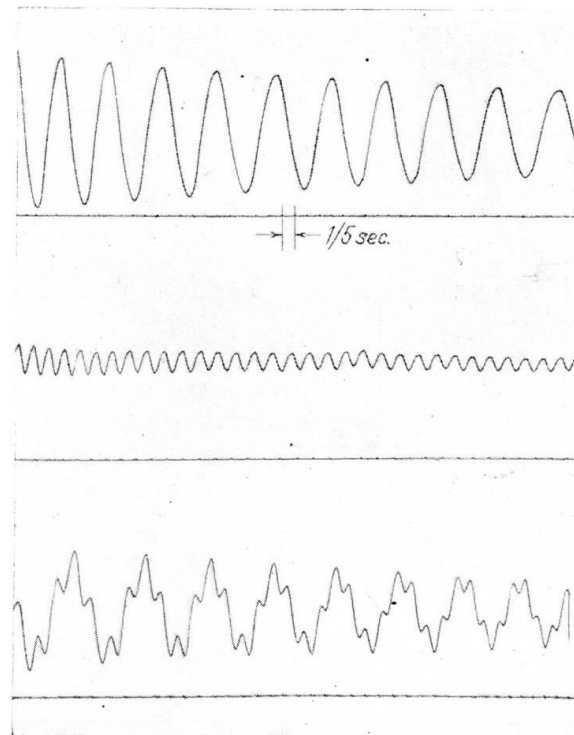


Fig. 13

maßstab konnten die Schwingungszahlen bestimmt werden. Zur Kontrolle darüber, daß die Reibung des Federchens auf dem Papier die Frequenzen nicht spürbar beeinflusse, wurden bei den höheren Laststufen (wo dies allein zuverlässig möglich war) die Schwingungen auch direkt mit der Stoppuhr abgezählt. Fig. 12 zeigt die Versuchsanordnung und Fig. 13 drei typische

Schwingungsdiagramme für $P = 243$ gr (einschl. Klemmvorrichtung und Bogeneigengewicht) und zwar die Grundschwingung, die erste Oberschwingung und eine aus diesen beiden zusammengesetzte Schwingung. Aus diesen Diagrammen, wie auch aus der theoretischen Untersuchung zeigt sich, daß das Verhältnis der Frequenzen von Grundschwingung und Oberschwingungen mit der Belastung veränderlich ist.

Der Elastizitätsmodul des Materials wurde in einem Durchbiegungsversuch zu $E = 700$ t/cm² bestimmt. Mit

$$B_2 = 700 \cdot \frac{1,2 \cdot 0,2^3}{12} = 0,56 \text{ t} \cdot \text{cm}^2, \quad C = 1,4 \cdot B_2$$

und für $l = 80$ cm, $f = 0,3 \cdot l$ ergab sich somit aus der Rechnung

$$P_{kr} = 5,08 \cdot \frac{560}{6400} = 0,445 \text{ kg}$$

$$\text{und} \quad \nu = \frac{0,778}{80} \cdot \sqrt{\frac{981 \cdot 560}{80}} \cdot \sqrt{\frac{1}{P} - \frac{1}{P_{kr}}} = 0,806 \cdot \sqrt{\frac{1}{P} - \frac{1}{P_{kr}}}$$

Der Vergleich zwischen Messung und Rechnung ist in Tabelle 1 zusammengestellt und in Fig. 14 veranschaulicht. Die Übereinstimmung darf als sehr gut bezeichnet werden, was sowohl für die sorgfältige Versuchsdurchführung wie für die Zuverlässigkeit des Rechnungsverfahrens spricht.

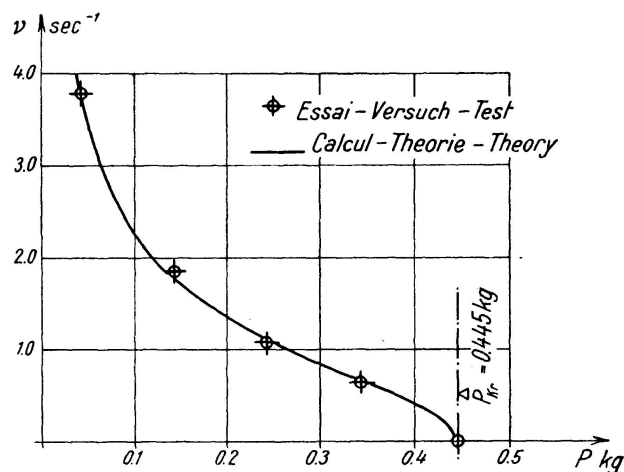


Fig. 14

Tabelle 1:

P kg	ν sec ⁻¹ berechnet	ν sec ⁻¹ gemessen	Bemerkungen
0,008	8,93	9,45	leerer Bogen + Klemmvorrichtung
0,043	3,69	3,78	
0,143	1,76	1,85	
0,243	1,10	1,08	
0,343	0,66	0,64	

5. Schlußbemerkungen.

Der kritische Horizontalschub H_{kr} . eines eingespannten Bogenträgers bei Ausknicken aus der Trägerebene nimmt gegenüber der Knicklast eines beidseitig eingespannten Stabes

$$P_{kr} = \frac{4 \pi^2 B_2}{l^2}$$

mit wachsender Pfeilhöhe beträchtlich ab. Der Einfluß des Pfeilverhältnisses $f:l$ auf die Größe des kritischen Horizontalschubes ist in Fig. 15 für eingespannte Parabelbogen skizziert und zwar sowohl für konstante Querschnittswerte wie auch für Bogen mit $B_2 \cdot \cos \alpha = B_{2c} = \text{konst.}$, $C \cdot \cos \alpha = C_c = \text{konst.}$ Dabei gelten die ausgezogenen Linien für $C = 1.4 B_2$, die gestrichelten für $C = \infty$.

Wirkt die Belastung während der Verformung nicht mehr lotrecht, sondern ändert sie ihre Richtung mit z , so ändert sich der angegebene Rechnungsgang nur insofern, als in den Momenten U_0 und V_0 auch die quergerichteten Belastungskomponenten P_z berücksichtigt werden müssen. Ist z. B. die Belastung der Fahrbahn an gelenkigen Hängestangen aufgehängt (Fig. 16), so vermindern die Kräfte

$$P_z = P_y \cdot \frac{z_0}{y}$$

die Momente U_0 und V_0 und damit auch die Durchbiegungen z_1 ; die kritische Belastung wird nennenswert größer als bei lotrechter Belastung. Umgekehrt vermindert sich die kritische Last, wenn bei obenliegender Fahrbahn durch gelenkige Stützen Kräfte P_z in Richtung einer Vergrößerung von z_1 ausgeübt werden.

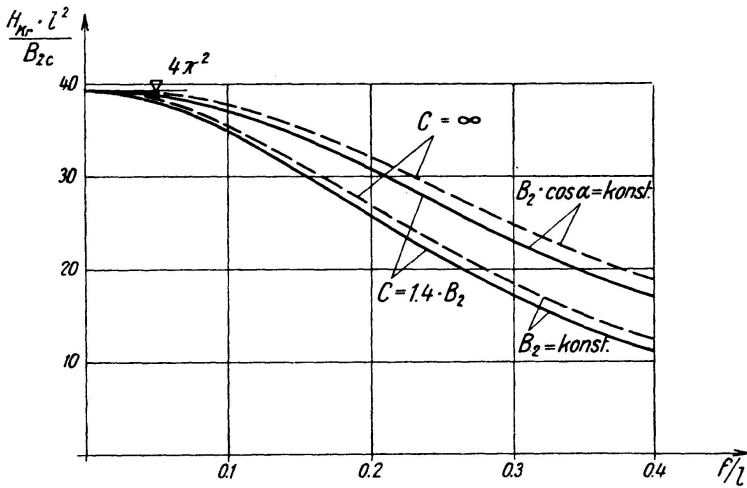


Fig. 15

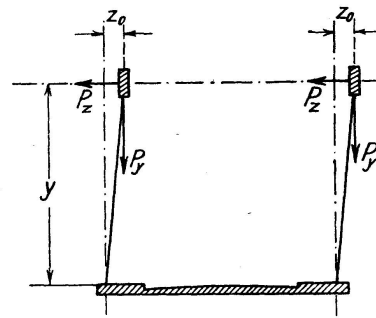


Fig. 16

Auch die Wirkung von elastischen Querstützungen durch Halbrahmen oder ähnliche Bauelemente läßt sich auf diese Weise grundsätzlich leicht untersuchen, da bei angenommener anfänglicher Ausbiegung z_0 auch die Halbrahmenwiderstände P_z gegeben sind. Allerdings muß durch Vergleichsrechnung die Zahl der maßgebenden Halbwellen gesucht werden.

Wir haben bis jetzt einen einfachen oder einrippigen Bogenträger untersucht. Bei Bogenbrücken mit zwei Hauptträgern und einem (in der Höhe der Bogenachse) angeordneten Windverband ist vor allem zu beachten, daß die Torsionsmomente nun nicht mehr nur durch Torsionsschubspannungen, son-

dem auch, und zwar hier in der Hauptsache, durch entgegengesetzt gerichtete Belastungen des vordern und hintern Hauptträgers (in den lotrechten Trägerebenen) aufgenommen werden. Dies ist gleichbedeutend wie eine Vergrößerung der Verdrehungssteifigkeit C . Da aber, bei seitlich eingespannten Bogen, wie wir erkannt haben, eine Zunahme der Verdrehungssteifigkeit C etwa über den Wert $C = 2B_2$ hinaus (Fig. 11 und Fig. 15) keine beträchtliche Vergrößerung der kritischen Belastung zur Folge hat, wird man sich meist mit einer Abschätzung des „Flanschbiegungseinflusses“ begnügen können. Bei zwei Windverbänden wird sich das Verhalten des Bogens noch mehr dem Fall $C = \infty$ annähern.

Sind die beiden Bogenrippen nur durch einzelne Querriegel rahmenförmig miteinander verbunden, so läßt sich eine genaue Berechnung ohne Schwierigkeit dadurch durchführen, daß (außer den überzähligen Einspannmomenten der Bogenrippen) in der Mitte der aufgeschnitten gedachten Querriegel je zwei überzählige Größen X und Y angebracht und für die angenommene Verformung berechnet werden. Infolge der resultierenden Momente V und U lassen sich nun die Formänderungen z_1, φ_1 der Bogenrippen bestimmen und aus der Stabilitätsbedingung bzw. Frequenzgleichung $z_1 = z_0$ ergeben sich die gesuchten Werte der kritischen Belastung bzw. der Eigenschwingungszahl. Bei einer größeren Zahl von Querriegeln läßt sich eine angenäherte Untersuchung dadurch denken, daß, ähnlich wie bei der vereinfachten Engesserschen Formel für die Knickberechnung von Rahmenstäben, eine ideelle Steifigkeit B_{2id} .

$$B_{2id} \cong \frac{EJ}{1 + \frac{\Delta s^2}{2s^2} \cdot \frac{J}{J_1}}$$

eingeführt wird. Dabei bedeutet J das Gesamtträgheitsmoment der beiden Bogenrippen,

$$J = \frac{b^2 F_1}{2}$$

und F_1 den Querschnitt, J_1 das Trägheitsmoment J_y einer Rippe, b den Rippenabstand, Δs den Querriegelabstand und s die Bogenlänge.

Die vorstehenden Untersuchungen gelten zunächst nur für den elastischen Bereich; sie lassen sich aber leicht auf den unelastischen Bereich erweitern, indem wir im Wert der Biegesteifigkeit B_2 den Elastizitätsmodul E durch den Engesser-Kármán'schen Knickmodul T_k ersetzen, der allerdings im allgemeinen über die Bogenlänge veränderlich sein wird. Dadurch wird eine anfängliche Schätzung des Verlaufs von T_k und deshalb meist eine Wiederholung der Berechnung notwendig. Eine gewisse Unsicherheit ergibt sich daraus, daß wir den Zusammenhang zwischen T_k und dem Schubmodul G im unelastischen Bereich nicht kennen. Da aber der Einfluß von C auf die kritische Last nicht allzu groß ist, wird es am einfachsten und genügend sicher sein, wenn wir die Verdrehungssteifigkeit C im gleichen Verhältnis $T_k:E$ abmindern.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß bei endlichen Ausbiegungen z_0 oder bei endlicher Querbelastung P_z , z. B. durch Winddruck, auch endliche Zusatzmomente U und V entstehen; wir haben es somit beim Bogen auch für solche Belastungen mit einem Spannungsproblem zweiter Ordnung zu tun. Die hier gegebenen Grundlagen erlauben auch die Untersuchung dieses Problems. Bei voller Windbelastung auf die ganze Bogenlänge läßt sich, aus Analogie mit verwandten Problemen, die Größe des Gesamtmomentes V recht zutreffend abschätzen zu

$$V = V_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{H}{H_{kr}}}$$

wobei V_0 das nach der Theorie erster Ordnung bestimmte Biegemoment infolge Winddruck und H_{kr} den für Kippen maßgebenden kritischen Horizontalschub, für den elastischen Bereich ermittelt, bedeuten.

Zusammenfassung.

Zur Bestimmung der kritischen Belastung beim Kippen (seitliches Knicken) und der Eigenfrequenzen von Querschwingungen bei Bogenträgern wird ein baustatisches Verfahren angegeben. Insbesondere werden die Verdrehungen des Bogens durch ein dreigliedriges Gleichungssystem oder ein „verallgemeinertes“ Seilpolygon bestimmt, während die seitlichen Ausbiegungen durch ein gewöhnliches Seilpolygon gefunden werden. Der Rechnungsgang wird an einem eingespannten Parabelbogen mit einfachem Querschnitt skizziert. Zur Überprüfung der Rechnungsergebnisse wurden Schwingungsversuche an Modellbogen aus Aluminium durchgeführt, die eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zeigen. Allgemeiner Fälle werden diskutiert, und es wird auf das bei Querbelastung (Winddruck) auftretende Spannungsproblem zweiter Ordnung hingewiesen.

Résumé.

La détermination de la charge critique de flambage (flambage latéral) et des fréquences fondamentales d'oscillations transversales des poutres à arc est traitée par une méthode numérique s'adaptant au cas le plus général. En particulier, le calcul de la rotation des sections de l'arc est établie sur la base d'un système d'équations à trois termes ou d'un polygone funiculaire «généralisé», tandis que les fléchissements latéraux s'obtiennent par un polygone funiculaire ordinaire. Les grandes lignes du calcul sont esquissées au moyen d'un arc parabolique encastré de section simple. Des essais d'oscillations sur un arc modèle en aluminium conduisent à une vérification des calculs et prouvent la bonne concordance entre les mesures et la théorie. Enfin, des cas plus généraux sont discutés, suivis d'indications sur le problème du second ordre se rapportant aux contraintes dues aux charges transversales (action du vent).

Summary.

To determine the critical buckling load (lateral buckling) and the natural frequencies of the transverse oscillations of the arched girders, a generally applicable numerical method is employed. In particular the calculation of the rotation of the sections of the arch is established on the basis of a system of equations of three terms or a "generalised" funicular polygon, whilst the lateral deflections are obtained by an ordinary funicular polygon. The main lines of the calculation are illustrated by means of an encastré parabolic arch of simple section. To check the calculated results, tests were carried out on a model arch made of aluminium, and the measurements obtained were found to agree well with the theoretical values. In conclusion some more general cases are considered, and then reference is made to the problem of the second order relating to stresses caused by transverse loading (wind pressure).

Leere Seite
Blank page
Page vide