DIE KNICKSICHERHEIT DER DRUCKGURTE OFFENER BRÜCKEN.

LA SÉCURITÉ AU FLAMBAGE DES MEMBRURES COMPRIMÉES DE PONTS OUVERTS.

SECURITY AGAINST BUCKLING OF THE COMPRESSION FLANGES IN OPEN BRIDGES.

Prof. Ing. Dr. Z. BAŽANT, Prag.

Die Druckgurte einer offenen Brücke können aus der Trägerebene ausbiegen, wenn der Widerstand gegen solche Ausbiegungen nicht genügend groß ist. Es ist, wie bei der Knickfestigkeit, ein Fall, wo nicht die Spannung maßgebend ist. Der Bruch kann dadurch erfolgen, daß die äußeren Kräfte den kritischen Wert erreichen. Bis zu diesem Werte sind alle Teile im stabilen Gleichgewicht. Sobald aber der kritische Wert der Belastung erreicht wird, hört das Gleichgewicht auf, stabil zu sein, und wird labil. Die kleinste Überschreitung des kritischen Wertes verursacht eine plötzliche Störung des Gleichgewichts und hat eine Formänderung des Trägers zur Folge, dessen innere Kräfte nicht mehr das Gleichgewicht mit den äußeren Kräften halten können; die Formänderung wächst schnell bis zum Bruch. Die Ausbiegung des Obergurtes war oft die Ursache des Zusammenbruchs von Brücken; es ist deshalb nötig, so zu konstruieren, daß die Ausbiegung nicht erfolgen kann.

Mit dieser Frage haben sich schon ENGESSER [1]) und TIMOSCHENKO [2]) befaßt; der letztere hat auf Grund der Aufgabe von JASINSKIJ (Knickfestigkeit der elastisch nachgiebig gestützten Stäbe) eine angenäherte Berechnung gegeben, welche auf der Voraussetzung eines gleichbleibenden Querschnittes der Gurtung und einer stetigen Verteilung der Lasten und Widerstände beruht. Eine strenge Lösung und andere angenäherte Lösungen gibt FR. HARTMANN [3]) an.

Nach M. KEELHOFF [4]) kann man versuchsweise so rechnen, daß man die Ausbiegung des Obergurtes in der waagrechten Ebene wählt und daraus die auf den Obergurt wirkenden Biegungsmomente und die den Momenten entsprechende Ausbiegung ermittelt. Bekommt man eine kleinere als die gewählte Ausbiegung, so bedeutet es, daß bei der gewählten Ausbiegung das Gleichgewicht nicht möglich ist und die ausgebogene Gurtung in die ursprüngliche gerade Lage zurückkehren würde. Wenn man umgekehrt eine größere als die gewählte Ausbiegung bekommt, so ist das Gleichgewicht bei der gewählten Ausbiegung auch nicht möglich; da aber die auf die Gurtung wirkenden

---

[1]) Zentralblatt der Bauverwaltung 1884.
[2]) Zeitschrift für Mathematik und Physik 1910.
[3]) Knickung, Kippung, Beulung (1937), S. 130.
[4]) „La stabilité des membrures comprimées des ponts métalliques“ (Annales des Ponts et Chaussées 1920, S. 193); hier ist eine zeichnerische Lösung gegeben.

Kräfte den Widerstand der Trägerwände überwinden, wächst die Ausbiegung bis zum Bruch, sodaß also die Grenze der Knickfestigkeit überschritten ist. Wenn die gewählte und die berechnete Ausbiegung identisch sind, so besteht Gleichgewicht auf der gebogenen Gurtung; wir sind also gerade an der Knickfestigkeitsgrenze (kritische Belastung), wo die Kräfte bei jeder Durchbiegung das Gleichgewicht halten können. Es handelt sich aber um labiles Gleichgewicht, das durch die mindeste Überschreitung der Belastung gestört wird.

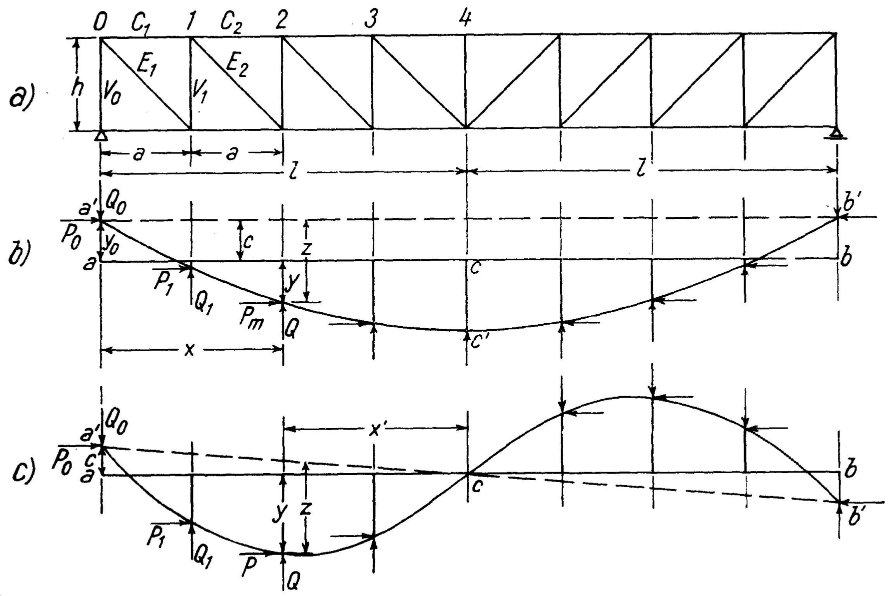

Fig. 1.

Wir untersuchen zuerst den Parallelträger (Fig. 1a). Der gedrückte Obergurt kann bei symmetrischem Träger und Belastung, die wir hier voraussetzen, aus der ursprünglichen geraden Lage acb in die zur Trägermitte symmetrische Lage $a'c'b'$ ausknicken. Auf diese ausgebogene Gurtung wirken in den Knotenpunkten die Stabkräfte der Füllstäbe; ihre Resultierende P in einem Knotenpunkt ist parallel zur ursprünglichen Lage der Gurtung ab; denn die in dem Knotenpunkt zusammentreffenden Füllstäbe liegen in einer durch diesen Punkt und die gerade Achse des Untergurtes gegebenen Ebene. Die Kräfte P bestimmt man als Differenz ΔS der Stabkräfte in den angrenzenden Obergurten; sie sind gegen die Trägermitte gerichtet. Soll der Träger mit einem Sicherheitsmaß μ der Ausbiegung des Obergurtes widerstehen, so muß man mit den Kräften $P = \mu \cdot \Delta S$ rechnen. Außerdem wirkt in jedem Knotenpunkt der Widerstand Q gegen die Ausbiegung y; er ist proportional der Ausbiegung:

$$Q = \beta y, \tag{1}$$

wenn β den Widerstand für die Ausbiegung $y = 1$ bedeutet.

Erzeugt die waagrechte Kraft $Q = 1$ (Fig. 2) die Ausbiegung Δ, so ist die der Ausbiegung $y = 1$ entsprechende Kraft

$$\beta = \frac{1}{\Delta}.$$

Die Ausbiegung Δ setzt sich aus dem durch die Biegung des Querträgers verursachten Teil Δ_0 und aus dem Nachgeben der Füllstäbe Δ_1 zusammen: $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$. Die Ausbiegung Δ_0 berechnet man bei symmetrisch wirkenden

Kräften Q aus dem konstanten Biegungsmoment $M = Qh$, das bei unveränderlichem Trägheitsmoment J des Querträgers eine konstante Krümmung mit dem Halbmesser $\varrho = EJ/M$ erzeugt. Die Biegelinie des Querträgers ist also ein Kreis und die Abweichung der Endtangente ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{2\varrho} = \frac{bM}{2EJ} = \frac{bhQ}{2EJ};$$

für $Q = 1$ bekommt man

$$\Delta_0 = h \operatorname{tg}\psi = \frac{bh^2}{2EJ}. \tag{2}$$

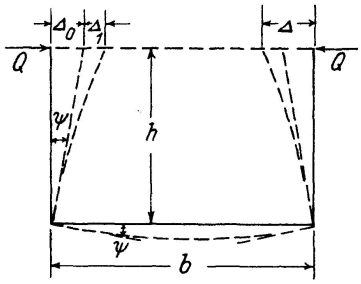

Fig. 2.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment J berechnet man den Durchschnittswert so, daß man $\Delta_0(\psi)$ gleich wie beim unveränderlichen Querschnitt bekommt. Aus der Grundgleichung für Biegung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{M\,dx}{EJ} = \frac{M}{E}\int \frac{dx}{J};$$

es gilt also für J_0 die Gleichung

$$\frac{b}{J_0} = \int \frac{dx}{J} = \sum \frac{\Delta x}{J}. \tag{3}$$

Wirken die Kräfte Q auf beide Hauptträger in derselben Richtung, so bekommt man für Δ_0 ein Drittel des obigen Wertes, der Widerstand ist also dreimal größer. Weil der kleinste Widerstand maßgebend ist, kann man diesen Fall außer Acht lassen.

Ist ein Füllstab durch die Kraft P gedrückt und durch die Querkraft Q gebogen (Fig. 3a), so bekommt man die größte Durchbiegung [4])

$$y_0 = \frac{Ql}{P}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha l}{\alpha l} - 1\right), \qquad \text{wo} \qquad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Wir setzen $\alpha l = \varphi$ und entwickeln $\operatorname{tg}\varphi/\varphi$ in eine Reihe; es ist möglich, weil $\varphi < \pi/2$; denn für $\varphi = \pi/2$ würde man $P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$ bekommen, also die Euler-Last für einen oben freien, unten eingespannten Stab, ohne jegliche Sicherheit. Diese Last darf nicht erreicht werden. Man kann also schreiben

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi} = 1 + \frac{\varphi^2}{3} + \frac{2\varphi^4}{15} + \frac{17\varphi^6}{315} + \frac{62\varphi^8}{2835} + \ldots, \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi} - 1 = \frac{\varphi^2}{3}\left(1 + \frac{2\varphi^2}{5} + \frac{17\varphi^4}{105} + \frac{62\varphi^6}{945} + \ldots\right).$$

Für $\varphi = \pi/2$ haben alle Glieder mit φ in der letzten Klammer sehr annähernd den gleichen Wert 0,986 (mit kleineren Abweichungen als 1/1000). Setzt man

$$P = \frac{\pi^2 E J}{4 l^2 \sigma} \qquad \text{oder} \qquad \varphi^2 = \frac{\pi^2}{4 \sigma}, \tag{4}$$

so folgt

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} - 1 = \frac{P l^2}{3 E J}\left[1 + \frac{0{,}986}{\sigma}\left(1 + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^3} + \ldots\right)\right].$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist

$$1 + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^3} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sigma}},$$

sodaß

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} - 1 = \frac{P l^2}{3 E J}\left(1 + \frac{0{,}986}{\sigma - 1}\right) \qquad \text{und} \qquad y_0 = \frac{Q l^3}{3 E J}\left(1 + \frac{0{,}986}{\sigma - 1}\right).$$

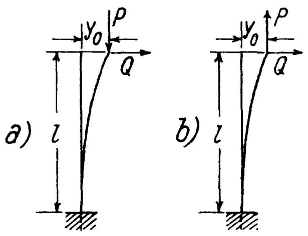

Fig. 3.

Für einen durch die Kraft P gezogenen und durch Q gebogenen Stab (Fig. 3b) folgt die größte Durchbiegung

$$y_0 = \frac{Q l}{P}\left(1 - \frac{\operatorname{tgh} \alpha l}{\alpha l}\right).$$

Da

$$\frac{\operatorname{tgh} \varphi}{\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{3} + \frac{2 \varphi^4}{15} - \frac{17 \varphi^6}{315} + \frac{62 \varphi^8}{2835} - \ldots,$$

so folgt wie oben

$$1 - \frac{\operatorname{tgh} \varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{3}\left(1 - \frac{2\varphi^2}{5} + \frac{17 \varphi^4}{105} - \frac{62 \varphi^6}{945} + \ldots\right) = \frac{P l^2}{3 E J}\left[1 - \frac{0{,}986}{\sigma}\left(1 - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^3} + \ldots\right)\right].$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist hier

$$1 - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^3} + \ldots = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sigma}},$$

es folgt also

$$y_0 = \frac{Q l^3}{3 E J}\left(1 - \frac{0{,}986}{\sigma + 1}\right). \tag{5}$$

Beide Formeln für y_0 können durch die letzte ausgedrückt werden, wenn man σ algebraisch nimmt: ist P Druck (Zug), so setzen wir es negativ (positiv) ein und bekommen σ auch negativ (positiv).

Die Kraft Q verteilt sich auf alle Füllstäbe, welche in einem Knotenpunkt des Obergurtes zusammentreffen: $Q = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$, wo X_m die auf die einzelnen Füllstäbe entfallenden Teile sind. Die oberen Enden aller Füllstäbe, die in einem Knotenpunkt zusammentreffen, erleiden dieselbe Durchbiegung

$$\Delta_1 = \gamma_1 X_1 = \gamma_2 X_2 = \gamma_3 X_3 = \ldots,$$

sodaß

$$Q = \Delta_1 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_3} + \ldots\right).$$

Für $Q = 1$ bekommt man

$$\Delta_1 = \frac{1}{\Sigma\, {}^1\!/_\gamma};$$

daraus folgt

$$\beta = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_1 + \Delta_0} = \frac{1}{\Sigma\, {}^1\!/_\gamma + \Delta_0}. \tag{6}$$

Da für die Brücke ein Sicherheitsmaß μ gefordert wird, muß man $P = \mu S$ bei der Berechnung von σ einsetzen, wenn S die Stabkraft bedeutet; ist $l = s$ die Stablänge, so hat man

$$\sigma = \frac{\pi^2 EJ}{4 s^2 \mu S}. \tag{7}$$

Aus Gl. (5) folgt für $Q = 1$ der Beiwert $\gamma = y_0$, also

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{3EJ}{s^3\left(1 - \frac{0{,}986}{\sigma + 1}\right)}. \tag{8}$$

Die Ableitung setzt voraus, daß der gedrückte wie auch der gezogene Füllstab unten bei der Biegung aus der Trägerebene eingespannt ist. Wenn die Anschlüsse dieser Voraussetzung entsprechen, kann man auch mit dem Widerstande der Zugstäbe rechnen und dieser kann sogar größer als der Widerstand der Druckstäbe werden.

Bei einer symmetrischen Ausbiegung des Druckgurtes (Fig. 1b) heben sich die Kräfte P auf beiden Hälften des Trägers auf, weshalb die Kräfte Q allein im Gleichgewicht sein müssen; aus diesem Gleichgewicht ermittelt man bei einer gewählten Biegelinie die Schlußlinie. Es muß nämlich sein

$$\sum Q = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sum \beta y = \sum \beta (z - c) = 0;$$

daraus folgt

$$c = \frac{\Sigma \beta z}{\Sigma \beta}. \tag{9}$$

Aus den Ordinaten $y = z - c$ kann man die Kräfte Q ermitteln. Darauf berechnet man die Biegungsmomente durch Addition der Momente der Kräfte Q und P links von m (positiv, wenn sie rechts drehen):

$$M_m = \sum_0^x (Q)_m + \sum_0^x (P)_m, \tag{10}$$

wo $(Q)_m$ das Moment der Kraft Q i. B. auf den Punkt m bedeutet. Aus den Biegungsmomenten ermittelt man die Biegelinie. Man kann sich auf die Ordinaten in den Knotenpunkten beschränken. Hat man in den Punkten $(m-1)$, m, $(m+1)$ die Momente M_{m-1}, M_m, M_{m+1} und in den Feldern $\overline{(m-1)m} = a_m$, $\overline{m(m+1)} = a_{m+1}$ verschiedene Gurtquerschnitte mit den

Trägheitsmomenten J_m, J_{m+1}, so folgt die Biegelinie als Seilpolygon zu den elastischen Gewichten

$$\mathfrak{P}_m = \frac{1}{6E}\left(\frac{M_{m-1} + 2M_m}{J_m}\, a_m + \frac{2M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}}\, a_{m+1}\right), \tag{11}$$

wenn man in jedem Feld die Momentenänderung annähernd geradlinig annimmt. Bei gleichen Feldlängen $a_m = a_{m+1} = a$ folgt

$$\mathfrak{P}_m = \frac{a}{6E}\left(\frac{M_{m-1} + 2M_m}{J_m} + \frac{2M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}}\right). \tag{11a}$$

Positive Biegungsmomente geben positive elastische Gewichte $\mathfrak{P}$ und eine nach oben hohle Biegelinie. Wenn man eine nach oben hohle Biegelinie gewählt hat und negative Momente sich ergeben, die eine umgekehrte Krümmung der Biegelinie bedeuten, dann folgt, daß die gewählte Biegelinie bei dem gewählten Sicherheitsgrad μ überhaupt nicht stattfinden kann; der wirkliche Sicherheitsgrad wird für die gewählte Ausbiegung weit höher sein.

Wenn man bei gewählter Biegelinie und Sicherheitsgrad positive Biegungsmomente bekommt, dann bedeuten die berechneten Ordinaten z', die kleiner sind als die gewählten z, daß die ausgebogene Gurtung in die ursprüngliche Lage zurückkehren würde. Wenn umgekehrt $z' > z$ sich ergibt, so ist die Knickfestigkeitsgrenze schon überschritten; die ausgebogene Gurtung würde weiter bis zum Bruch ausbiegen. Für $z' = z$ sind wir gerade an der Bruchgrenze, wo labiles Gleichgewicht herrscht; die mindeste Überschreitung würde den Bruch herbeiführen.

Ist die Biegelinie (Ordinaten z) beliebig gewählt, so wird die berechnete Linie nicht die gleiche Form wie die gewählte aufweisen; man könnte sich aber durch wiederholte Rechnung der gewählten Linie beliebig nähern, wenn man für weitere Berechnungen die vorher errechnete Biegelinie wählt. Zur Ermittlung des Sicherheitsgrades genügt aber der Vergleich der größten Ordinaten oder der Ordinatensummen (der durch die gewählte und berechnete Biegelinie gegebenen Flächen) bei einer beliebigen Form der gewählten Linie.

Ist die laut Fig. 1b) gewählte Ausbiegung nicht möglich, so wählt man als zweite Form eine Biegelinie, die zur Mitte des Trägers c gegensymmetrisch ist; in c besitzt die Linie einen Wendepunkt (Fig. 1c). Infolge der Gegensymmetrie bilden je zwei symmetrische Kräfte P und Q ein Kräftepaar. Das Gleichgewicht erfordert, daß die Summe der Momente aller Kräftepaare gleich Null sei oder

$$M_c = \sum_0^l (P)_c + \sum_0^l (Q)_c = 0.$$

Wie oben ist hier $Q = \beta y$, weiter ist

$$y = z - c\,\frac{x'}{l}, \quad -\sum_0^l (P)_c = \sum_0^l P y = \sum_0^l P\left(z - c\,\frac{x'}{l}\right) = \sum_0^l P z - \frac{c}{l}\sum_0^l P x',$$

$$\sum_0^l (Q)_c = \sum_0^l Q x' = \sum_0^l \beta x' y = \sum_0^l \beta x'\left(z - c\,\frac{x'}{l}\right) = \sum_0^l \beta x' z - \frac{c}{l}\sum_0^l \beta x'^2.$$

Durch Gleichsetzen folgt

$$\sum_0^l P z - \frac{c}{l}\sum_0^l P x' = \sum_0^l \beta x' z - \frac{c}{l}\sum_0^l \beta x'^2,$$

was

$$c = l \cdot \frac{\sum\limits_0^l Pz - \sum\limits_0^l \beta x' z}{\sum\limits_0^l Px' - \sum\limits_0^l \beta x'^2} \text{ ergibt.} \tag{12}$$

Kennt man c, so kann man die Ausbiegungen y, dazu die Kräfte Q und die Biegungsmomente M für die Knotenpunkte berechnen; daraus ermittelt man die Biegungsordinaten, bezogen z. B. auf die Achse $a'c$, und vergleicht sie mit den gewählten Ordinaten z. Es können wie oben wieder drei Fälle auftreten.

Beispiel. Ein Parallelträger von der Spannweite $2l = 20$ m hat 8 Feldlängen je $a = 2{,}5$ m und eine theoretische Höhe $h = 2{,}5$ m (Fig. 1a). Es handelt sich um den Hauptträger einer offenen Brücke, der mit $q = 4{,}8$ t/m gleichmäßig belastet ist.

Die Obergurt- und Füllstäbe besitzen Querschnitte, deren Flächen F (für Obergurte) und Trägheitsmomente J zu Achsen in der Trägerebene in Tab. 1 zusammengestellt sind; Tab. 1 enthält auch die Stabkräfte S für Vollbelastung (größte Gurtkräfte). Die Länge der Diagonalen ist $e = \sqrt{a^2 + h^2} = 3{,}535$ m. Die Entfernung der Hauptträger beträgt $b = 6$ m und das durchschnittliche Trägheitsmoment der Querträger $J_0 = 120000 \text{ cm}^4$. Beim Elastizitätsmodul für Stahl $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ folgt

$$\Delta_0 = \frac{bh^2}{2EJ_0} = 0{,}0726 \text{ cm/t}.$$

Tab. 1.

Stab	F(cm²)	J(cm⁴)	S(t)	Stab	J(cm⁴)	S(t)	Stab	J(cm⁴)	S(t)
C_1	110	2000	-42	V_0	4000	-42	E_1	1600	59,40
C_2	110	2000	-72	V_1	1800	-30	E_2	1000	42,43
C_3	140	3000	-90	V_2	1300	-18	E_3	700	25,46
C_4	150	4000	-96	V_3	900	-6	E_4	400	8,49
				V_4	600	0			

Wir führen die Berechnung für den Sicherheitsgrad $\mu = 4$ aus. Die Hilfswerte sind:

für die Ständer $\frac{\pi^2 E}{4 s^2} = \frac{9{,}87 \cdot 2150}{4 \cdot 250^2} = 0{,}0849$, $\frac{3E}{s^3} = \frac{3 \cdot 2150}{250^3} = 0{,}000413$,

für die Diagonalen $\frac{\pi^2 E}{4 s^2} = \frac{9{,}87 \cdot 2150}{4 \cdot 353{,}5^2} = 0{,}0425$, $\frac{3E}{s^3} = \frac{3 \cdot 2150}{353{,}5^3} = 0{,}000146$.

Weiter berechnet man für die Füllstäbe die Werte $\frac{\pi^2 EJ}{4 s^2}$, σ aus der Formel (7) und $1/\gamma$ aus der Formel (8); man setzt $\mu = 4$ ein und für S die Stabkraft algebraisch aus Tab. 1. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 enthalten.

Tab. 2.

Stab	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	E_1	E_2	E_3	E_4
$\frac{\pi^2 EJ}{4 s^2}$	339,5	152,8	110,3	76,4	50,9	67,9	42,4	29,7	17,0
σ	-2,020	-1,273	-1,533	-3,183	∞	+0,285	+0,250	+0,292	+0,502
$1/\gamma$	0,841	0,161	0,188	0,256	0,248	1,004	0,691	0,431	0,170

Die Werte β berechnet man aus Gl. (6), wie Tab. 3 zeigt. In jedem Knotenpunkt addiert man $1/\gamma$ für die im Knotenpunkte zusammentreffenden Stäbe.

Tab. 3.

Knoten	$\Sigma\frac{1}{y}$	$\frac{1}{\Sigma\frac{1}{y}}$	$\frac{1}{\Sigma\frac{1}{y}}+\Delta_0$	β	z	βz
0	1,845	0,542	0,615	1,627	0	0
1	0,852	1,173	1,246	0,803	7	5,621
2	0,619	1,615	1,688	0,592	12	7,104
3	0,426	2,348	2,421	0,413	15	6,192
4	0,248	4,033	4,106	2.0,122	16	2.1,952
$\sum\limits_0^l =$				3,557		20,869

a) Zuerst wählen wir die Biegelinie laut Abb. 1b und die Ordinaten z z. B., wie in Tab. 3, nach dem Gesetze einer quadratischen Parabel. Wir berechnen noch βz und die Summen $\Sigma\beta$ und $\Sigma\beta z$ für eine Trägerhälfte (von den Werten im Knoten *4* nehmen wir also nur eine Hälfte). Laut Gl. (9) berechnet man

$$c = \frac{\Sigma\beta z}{\Sigma\beta} = \frac{20,869}{3,557} = 5,868;$$

das Ergebnis ist in cm, wenn die z auch in cm gewählt werden.

Nun kann man $y = z - c$ und $Q = \beta y$ berechnen (Tab. 4). Zu diesen Kräften ermittelt man die Querkräfte T_Q durch Addieren von Q, von der Stütze angefangen, weiter M_Q/a, durch Addieren von T_Q auch von der Stütze angefangen; daraus folgt M_Q durch Multiplizieren mit $a = 250$ cm. Zur Kontrolle dient, daß $\frac{1}{2}\Sigma Q = 0$ sein soll, also im Punkte *4* infolge der Symmetrie $T_Q = -\frac{1}{2} Q_4$ ist.

Tab. 4.

Knoten	y	Q	T_Q	$\frac{M_Q}{a}$	M_Q	$P = -\mu\cdot\Delta C$	T_P	Δy	$T_P\Delta y$	M_P	M_P+M_Q
0	- 5,868	- 9,54		0	0	168				0	0
			-9,54				168	7	1176		
1	+ 1,132	+ 0,91		- 9,54	-2385	120				1176	- 1209
			-8,63				288	5	1440		
2	+ 6,132	+ 3,63		-18,17	-4543	72				2616	- 1927
			-5,00				360	3	1080		
3	+ 9,132	+ 3,77		-23,17	-5793	24				3696	- 2097
			-1,23				384	1	384		
4	+10,132	+2.1,23		-24,40	-6100	0				4080	- 2020

Weiter berechnet man $P = -\mu\cdot\Delta C$ (absolute Werte, die Kräfte sind gegen die Trägermitte gerichtet), daraus durch Addieren vom Stützpunkt *0* die Kräfte T_P, die man mit den Differenzen der Ordinaten $\Delta y = \Delta z = z_m - z_{m-1}$ multipliziert und diese Produkte wieder vom Stützpunkt aus angefangen addiert; das ergibt die Momente M_P. Die resultierenden Momente sind $M = M_P + M_Q$. Die ganze Berechnung ist in Tab. 4 enthalten.

Die Kräfte Q erzeugen negative, P positive Momente. Die resultierenden Momente sind hier negativ, was eine umgekehrte als die vorausgesetzte Krümmung der Biegelinie bedeutet. Um positive Momente zu erhalten, müßte man die Kräfte P, also den Sicherheitsgrad μ vergrößern. Für die gewählte Form der Biegelinie würde man also einen Sicherheitsgrad gegen Ausbiegung bekommen, der viel größer als 4 ist.

b) Setzen wir nun eine gegensymmetrische Biegelinie nach Fig. 1c voraus und wählen deren Ordinaten z (von der Sehne $a'c$ gemessen) nach dem Gesetze einer quadratischen Parabel; die absolute Größe der Ordinaten ist gleichgültig, weil die Bruchlast das Gleichgewicht bei jeder Ausbiegung hält. Wir wählen wieder den Sicherheitsgrad $\mu = 4$.

Man berechnet zuerst die Abszisse c aus Gl. (12). Die Berechnung der Hilfswerte ist in Tab. 5 enthalten; β entnimmt man aus Tab. 3, P aus Tab. 4. Die Kräfte P sind in t, die Längen x', z in cm. Es folgt hier $c = 1000 \cdot \frac{720 - 3302}{300\,000 - 2\,252\,500} = 1{,}323$ cm.

Tab. 6 enthält die Berechnung der Biegungsmomente. Dazu braucht man

$$y = z - c\frac{x'}{l}, \quad Q = \beta y;$$

T_Q, M_Q/a und M_Q berechnet man wie in Tab. 4. Weiter bekommt man aus den Kräften P durch Addieren von oben T_P, berechnet $T_P \cdot \Delta y$ und durch Addieren von oben M_P. Die resultierenden Momente sind $M = M_P + M_Q$. Als Kontrolle dient, daß im Punkte $4 \equiv c$ das Moment $M_c = 0$ sein muß, also $M_P = -M_Q$.

Tab. 5.

Knoten	z	x'	P	Pz	Px'	$\beta x'$	$\beta x' z$	$\beta x'^2$
0	0	1000	168	0	168 000	1627	0	1 627 000
1	3	750	120	360	90 000	602	1 806	451 500
2	4	500	72	288	36 000	296	1 184	148 000
3	3	250	24	72	6 000	104	312	26 000
4	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sum_0^l =$				720	300 000		3 302	2 252 500

Tab. 6.

Knoten	$c\frac{x'}{l}$	y	Q	T_Q	$\frac{M_Q}{a}$	M_Q	P	T_P	Δy	$T_P \cdot \Delta y$	M_P	$M_P + M_Q$
0	1,323	-1,323	-2,15 $\downarrow$		0	0	168 $\downarrow$				0	0
				-2,15 $\downarrow$				168	+3,331	+559,5 $\downarrow$		
1	0,992	+2,008	+1,61		-2,15	-537,5	120				+559,5	+ 22
				-0,54				288	+1,330	+ 383,0		
2	0,662	+3,338	+1,98		-2,69	-672,5	72				+942,5	+270
				+1,44				360	-0,669	- 241,0		
3	0,331	+2,669	+1,10		-1,25	-312,5	24				+701,5	+389
				+2,54				384	-2,669	-1024,0		
4	0	0	0		+1,29	+322,5	0				-322,5	0

Positive Momente bedeuten, daß die Biegelinie nach oben hohl ist, wie vorausgesetzt wurde. Wir berechnen nun die elastischen Gewichte mit vorläufiger Außerachtlassung des ständigen Faktors $a/6E$, also laut Formel

$$\mathfrak{P}_m = \frac{M_{m-1} + 2M_m}{J_m} + \frac{2M_m + M_{m+1}}{J_{m+1}}; \tag{11 b}$$

die Trägheitsmomente J des Obergurtes sind in Tab. 1 enthalten. Es folgt:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{0 + 2 \cdot 22}{2000} + \frac{2 \cdot 22 + 270}{2000} = +0{,}157, \quad \mathfrak{P}_2 = \frac{22 + 2 \cdot 270}{2000} + \frac{2 \cdot 270 + 389}{3000} = +0{,}591,$$

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{270 + 2 \cdot 389}{3000} + \frac{2 \cdot 389 + 0}{4000} = +0{,}544, \quad \mathfrak{P}_4 = \frac{389 + 2 \cdot 0}{4000} + \frac{2 \cdot 0 - 389}{4000} = 0.$$

Die Belastung ist gegensymmetrisch, weshalb in symmetrischen Knotenpunkten die Momente M und elastische Gewichte $\mathfrak{P}$ denselben Wert und entgegengesetztes Vorzeichen haben; in der Mitte ist $\mathfrak{P}_4 = 0$.

Die Biegungsordinaten, von der Sehne $a'c$ gemessen (Fig. 1c), ermittelt man (Tab. 7) als Biegungsmomente eines durch die Gewichte $\mathfrak{P}$ belasteten einfachen Trägers ac. Der Auflagerwiderstand in a ist

$$\mathfrak{A} = \frac{3}{4}\mathfrak{P}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{P}_3 = +0{,}549.$$

Von diesem Wert zieht man die Gewichte $\mathfrak{P}$ ab, wodurch die Querkräfte $\mathfrak{T}$ bestimmt werden; deren Addieren von oben gibt $\mathfrak{M}/a$. Daraus folgen die wirklichen Biegungsordinaten durch Multiplikation mit

$$a \cdot \frac{a}{6E} = \frac{250^2}{6 \cdot 2150} = 4{,}85\,.$$

Das ergibt die Ordinaten $z' = 4{,}85\,\mathfrak{M}/a$. Zur Kontrolle dient, daß $z'_4 = 0$ ist.

Tab. 7.

Knoten	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{T}$	$\frac{\mathfrak{M}}{a}$	z'
0	0 ↓		0	0
		+0,549 ↓		
1	+0,157		+0,549	2,66
		+0,392		
2	+0,591		+0,941	4,56
		−0,199		
3	+0,544		+0,742	3,60
		−0,743		
4	0		−0,001	0

Gegenüber den gewählten Ordinaten z (Tab. 5) sind die errechneten z' bis auf den Punkt *1* größer. Das bedeutet, daß wir den Sicherheitsgrad $\mu = 4$ zu groß gewählt haben. Durch Änderung von μ ändert sich die ganze Berechnung, auch die Verhältnisse der Ordinaten. Um uns den richtigen Werten zu nähern, wählen wir z nach dem Ergebnis der vorherigen Berechnung; zum besseren Vergleich wählen wir $z_2 = 4$.

Tab. 8.

Knoten	z	y	Q	M_Q	P	M_P	$M_P + M_Q$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{T}$	$\frac{\mathfrak{M}}{a}$	z'
0	0	−1,153	−1,882	0	151,2	0	0	0 ↓		0	0
									+0,369 ↓		
1	2,2	+1,335	+1,081	−471	108,0	+376	−95	−0,017		+0,369	1,79
									+0,386		
2	4,0	+3,424	+2,047	−671	64,8	+917	+246	+0,493		+0,755	3,66
									−0,107		
3	3,2	+2,912	+1,201	−359	21,6	+751	+392	+0,539		+0,648	3,14
									−0,646		
4	0	0	0	+254	0	−254	0	0		+0,002	0

Wir nehmen jetzt den Sicherheitsgrad $\mu = 3{,}6$ an. Wie oben (Tab. 2, 3) würde man $\beta = 1{,}632$; $0{,}810$; $0{,}598$; $0{,}414$; $0{,}244$ bekommen. Der Vergleich mit β in Tab. 3 zeigt, daß der Sicherheitsgrad die Werte β verhältnismäßig wenig beeinflußt, sodaß man auch sehr angenähert mit den Werten β für $\mu = 4$ rechnen könnte. Wir sahen schon, daß die erste Form der Ausbiegung (nach Fig. 1b) nur für einen Sicherheitsgrad möglich ist, der viel höher als 4 ist. Man kann also gleich den zweiten Fall annehmen (Fig. 1c).

Die Berechnungen würde man wie oben in Tabellen durchführen (Tab. 5, 6). Für die neu gewählten Durchbiegungen z (Tab. 8) würde man aus Gl. (12) $c = 1{,}153$ erhalten; es ist dann $y = z - cx'/l$, $Q = \beta y$ und daraus folgen die Momente M_Q. Aus den Kräften $P = -\mu \cdot \Delta C$ ermittelt man die Momente M_P und aus den resultierenden Momenten $M = M_P + M_Q$ die Gewichte $\mathfrak{P}$ laut Gl. (11b), aus ihnen durch bloßes Abziehen vom Auflagerwiderstand $\mathfrak{A} = +0{,}369$ die Querkräfte $\mathfrak{T}$ und durch Addieren die Werte $\mathfrak{M}/a$ (Tab. 8).

Die Lasten P und Q erzeugen die Biegungsordinaten $z' = \frac{a^2}{6E} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{a} = 4{,}85\,\frac{\mathfrak{M}}{a}$, die kleiner als die gewählten Ordinaten z sind. Daraus ergibt sich der wirkliche Sicherheitsgrad etwas größer als 3,6. Hätten wir für zwei Werte des Sicherheitsgrades μ zu denselben gewählten Ordinaten z die Ordinaten z' berechnet, so könnten wir annähernd den wirklichen Sicherheitsgrad durch geradlinige Interpolation aus der Bedingung $z' = z$ bekommen. Wir würden in diesem Falle $\mu = 3{,}66$ berechnen; für diesen Sicherheitsgrad würde annähernd das Gleichgewicht für jede Durchbiegung bestehen, d. h. die gewählten (z) und berechneten Ordinaten (z') wären einander gleich, wenn die Form der Biegelinie wenigstens annähernd richtig gewählt wäre.

Die obigen Berechnungen setzen voraus, daß die Spannung bei kritischer Belastung die Elastizitätsgrenze nicht übersteigt. Bei dem Sicherheitsgrad $\mu = 3{,}66$ hat man in den Obergurtstäben die Kräfte

$$-\mu C = 153{,}72;\ 263{,}52:\ 329{,}40;\ 351{,}36\,\text{t},$$

denen für einfachen Druck die Spannungen entsprechen

$$-\frac{\mu C}{F} = 1{,}397;\ 2{,}396;\ 2{,}353;\ 2{,}342\,\text{t/cm}^2,$$

weil bis zur kritischen Belastung keine Biegung zustande kommt. In den Stäben C_2, C_3, C_4 übersteigen diese Spannungen die Elastizitätsgrenze von St 37; die wirklichen Spannungen wären hier in dem Verhältnis kleiner, in welchem im unelastischen Bereich die Knickspannungen σ_k kleiner sind als die nach Euler errechneten Spannungen σ_E. Es ist $\sigma_E = \pi^2 \frac{E i^2}{l^2}$; daraus folgt der Schlankheitsgrad $\frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_E}}$.

Für den Stab C_2, wo die Spannung am größten ist, erhält man für $E = 2150\,\text{t/cm}^2$

$$\frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{2150}{2{,}396}} = 94\,.$$

Laut der tschechoslowakischen Brückennorm (ČSN 1230—1937) entspricht diesem Verhältnis der Knickkoeffizient $c = 1{,}928$, also die Knickspannung

$$\sigma_K = \frac{\varkappa''}{c} = \frac{3{,}7}{1{,}928} = 1{,}918\,\text{t/cm}^2,$$

da für St 37 die Bruchgrenze $\varkappa'' = 3{,}7\,\text{t/cm}^2$ beträgt. Im Stabe C_2 ist dann der wirkliche Sicherheitsgrad

$$\mu = \frac{\sigma_K \cdot F}{-C_2} = \frac{1{,}918 \cdot 110}{72} = 2{,}93\,.$$

Für C_3, C_4 bekommt man $\mu = 2{,}96$.

Wenn der errechnete Sicherheitsgrad μ zu klein wäre, müßte man die Brücke verstärken, und zwar die Trägheitsmomente J der Querschnitte der Obergurt- und Füllstäbe zur Achse in der Trägerebene vergrößern.

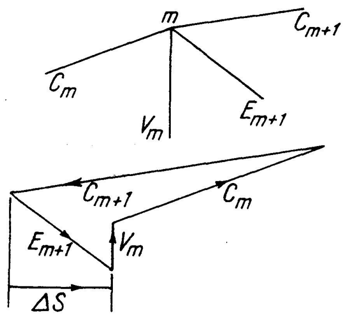

Fig. 4.

Es könnte geschehen, daß die Ausbiegung des Obergurtes in drei Halbwellen erfolgen würde. Wenn die Berechnung des zweiten Falles (zwei Halbwellen nach Fig. 1c) darauf hinweisen würde, könnte man ähnlich wie im ersten Fall (Fig. 1b) rechnen. Aus allen möglichen Fällen der Ausbiegung wäre natürlich derjenige maßgebend, welcher zum kleinsten Sicherheitsgrad führt, und das wäre der wirkliche Sicherheitsgrad der Brücke.

Ähnlich wie den Parallelträger könnte man auch den Träger mit gekrümmten Obergurt berechnen (Fig. 4). Für ΔS nimmt man hier die waagrechte Komponente der Mittelkraft der Stabkräfte E_{m+1}, V_m, weil deren lotrechte Komponente kein Biegungsmoment zur lotrechten Achse ergibt, was wir hier brauchen. Anstatt der Feldlängen würde man hier die Längen der Obergurtstäbe nehmen. Sonst wäre der Gang der Berechnung derselbe. Die gekrümmte Gurtung würde sich bei der Ausbiegung auch verdrehen; ihren Verdrehungswiderstand kann man aber vernachlässigen.

Dieselbe Berechnungsart kann man auch zur Kontrolle des gedrückten Obergurtes der Vollwandträger anwenden. Anstatt der Differenz der Stabkräfte in den Obergurten würde man hier die innere Schubkraft einsetzen, welche zwischen dem Obergurt des Trägers und dem Stehblech auf die Feldlänge a wirkt; sie hat den Wert

$$\mathfrak{T} = \frac{a\, T\, \mathfrak{M}_c}{J},$$

wenn $\mathfrak{M}_c$ das statische Moment des Obergurtquerschnittes (Lamellen und Winkeleisen) zur neutralen Achse, T die Querkraft bedeutet. Zur Berechnung der Beiwerte β würde man die Querträger und die lotrechten Steifen des Hauptträgers in Rechnung ziehen.

Bei einem strebenlosen Fachwerk (Vierendeelträger) wäre dieselbe Methode wie beim gewöhnlichen Fachwerkträger anzuwenden.

Ist der mittlere Brückenteil mit Quer- und Windverstrebung versehen, so genügt es, eine symmetrische Ausbiegung (nach Fig. 1b) vorauszusetzen; der verstrebte Trägerteil würde gerade und parallel zur ursprünglichen Lage bleiben.

Zusammenfassung.

Die Knicksicherheit des Druckgurtes einer offenen Brücke läßt sich (nach M. Keelhoff) dadurch ermitteln, daß man die Ausbiegung des Obergurtes in der waagrechten Ebene wählt, daraus bei gewähltem Sicherheitsgrad die auf den Obergurt wirkenden Momente ermittelt und dann die entsprechende Biegelinie des Obergurtes berechnet. Durch wiederholte Rechnung bekommt man die kritische Belastung (die Knicksicherheit), bei der die gewählte und die daraus berechnete Ausbiegung identisch sind.

Résumé.

La stabilité de la membrure comprimée d'un pont métallique peut être vérifiée (d'après M. Keelhoff) en choisissant la déviation de la membrure dans le plan horizontal et en calculant d'abord les moments fléchissants dûs à cette déviation et au degré de sécurité choisi, et ensuite la ligne élastique de la membrure. Par un calcul répété, on obtient la charge critique (le degré de sécurité) pour laquelle la ligne élastique choisie et celle qui a été calculée sont identiques.

Summary.

The stability of the compression chord of a bridge truss can be calculated (method of M. Keelhoff) by choosing the deflection of the chord in the horizontal plane and determining from it and from the chosen degree of safety the bending moments and the bending line of the chord. By repeating this calculation we obtain the critical load (the degree of safety) at which the chosen and the calculated deflections are identical.