

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 8 (1947)

**Artikel:** Influence d'une partie centrale rigide sur la répartition des contraintes dans un élément tendu ou comprimé  
**Autor:** Szelagowski, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-8896>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# INFLUENCE D'UNE PARTIE CENTRALE RIGIDE SUR LA RÉPARTITION DES CONTRAINTES DANS UN ÉLÉMENT TENDU OU COMPRIMÉ

SPANNUNGSVERTEILUNG IN EINER AUF ZUG ODER DRUCK BEANSPRUCHTEN RECHTECKSCHEIBE MIT STARREM KERN

STRESS DISTRIBUTION IN A RECTANGULAR DISC WITH RIGID CORE WHEN SUBMITTED TO TENSION OR COMPRESSION IN ITS PLANE

Dr. Ing. F. SZELĄGOWSKI,

Professeur à l'Ecole Polytechnique de Varsovie (Warszawa).

En effectuant des essais sur quelques assemblages soudés<sup>1)</sup>, on a pu observer que dans une éprouvette tendue, portant un trou circulaire dans lequel se trouvait une barre de longueur plus grande que l'épaisseur de l'éprouvette et assemblée avec elle par soudure, il se manifestait, au voisinage de cette assemblage, des déformations différant considérablement des valeurs correspondant au cas d'une éprouvette homogène.

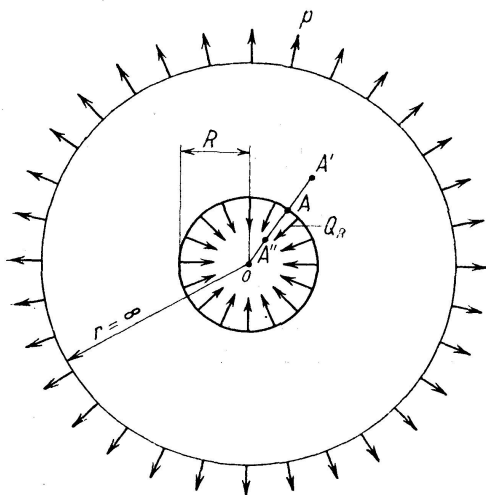


Fig. 1.

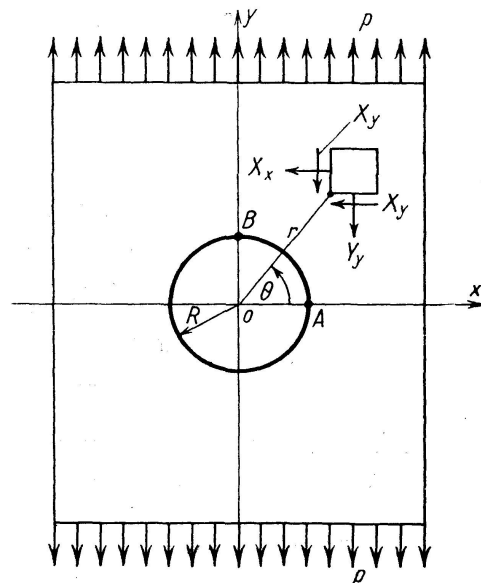


Fig. 2.

On peut certainement admettre que cette barre, dont les déformations sont relativement faibles par rapport aux déformations de la partie restante d'éprouvette, se comporte presque comme un corps rigide.

Il est donc intéressant d'étudier l'influence d'une telle barre, considérée

<sup>1)</sup> F. SZELĄGOWSKI et A. SZENICKI: Essais effectués sur quelques assemblages soudés. Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, Zürich 1936.

comme constituant une partie centrale rigide, sur la répartition des contraintes dans un élément d'ouvrage.

Considérons d'abord le cas simple, de la traction omnilatérale d'une tôle circulaire avec partie centrale rigide également circulaire (fig. 1).

En utilisant ici les formules connues de LAMÉ, on peut écrire que la déformation  $AA'$  d'une tôle circulaire avec un trou également circulaire, sous l'action d'une charge uniforme  $p$ , est:

$$u' = \frac{2pR}{E},$$

tandis que la déformation  $AA''$  de la même tôle, soumise seulement à quelques contraintes  $Q_R$ , uniformément réparties sur tout le contour du trou, est

$$u'' = -\frac{1 + \sigma}{E} \cdot Q_R \cdot R.$$

Dans le cas de l'existence d'une partie centrale rigide, nous avons la relation suivante:

$$u' + u'' = 0.$$

Nous en tirons la valeur de la contrainte  $Q_R$ :

$$Q_R = \frac{2}{1 + \sigma} \cdot p,$$

où  $\sigma$  est le coefficient de contraction transversale.

En posant pour l'acier  $\sigma = 0,3$ , la valeur de la contrainte est:

$$Q_R \cong 1,5 \cdot p.$$

Par suite de l'existence de la partie centrale rigide (de section circulaire), cette contrainte augmente de 50 % par rapport à la valeur qu'elle aurait dans le cas d'une tôle homogène.

Considérons ensuite le cas de la traction suivant une seule direction dans une tôle avec partie centrale rigide de section circulaire (fig. 2) et envisageons le problème d'une manière analogue au précédent.

Déterminons d'abord les déformations d'un point quelconque de l'arc circulaire de rayon  $R$  d'une tôle tendue suivant une seule direction, mais sans trou (fig. 3).

Dans ce cas la déformation verticale d'un point quelconque de l'arc du cercle de rayon  $R$  est

$$v_R(\theta) = \frac{p}{E} \cdot y_R = \frac{p}{E} R \sin \theta = v_R \cdot \sin \theta, \quad (1)$$

tandis que la déformation horizontale de ce point est exprimée par

$$u_R(\theta) = -\frac{\sigma p}{E} \cdot x_R = -\frac{\sigma p}{E} R \cos \theta = -u_R \cos \theta, \quad (2)$$

si l'on désigne par  $V_R$  la déformation verticale du point  $B$  et par  $U_R$  la déformation horizontale du point  $A$ .

Après la déformation, les coordonnées d'un point quelconque de l'arc du cercle sont représentées par les formules

$$x'_R = x_R - u_R(\theta) = x_R \left(1 - \frac{\sigma p}{E}\right) = a x_R,$$

$$y'_R = y_R + v_R(\theta) = y_R \left(1 + \frac{p}{E}\right) = b y_R,$$

d'où

$$x_R = \frac{x'_R}{a}, \quad y_R = \frac{y'_R}{b}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation du cercle

$$x_R^2 + y_R^2 = R^2,$$

on trouve directement

$$\frac{x_R'^2}{a'^2} + \frac{y_R'^2}{b'^2} = 1, \tag{3}$$

et l'on voit que

$$a' = a \cdot R,$$

$$b' = b \cdot R.$$

Il résulte de l'équation (3) que d'après l'allongement de la tôle, le contour du cercle se transforme suivant le contour d'une ellipse, dont les demi-axes sont:

$$a' = R - u_R,$$

$$b' = R + v_R.$$

Il faut mentionner ici, qu'en un point quelconque d'une tôle tendue, la contrainte de traction a pour valeur  $p$ .

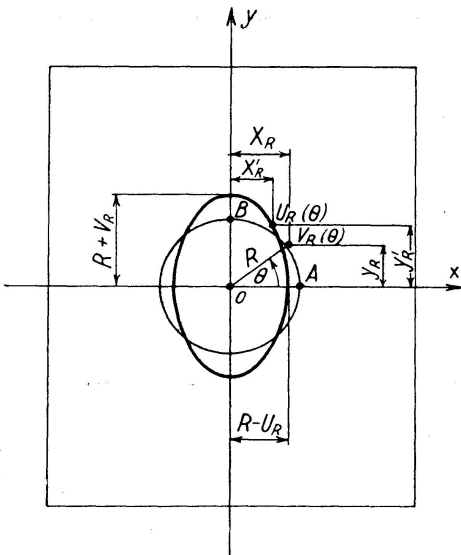


Fig. 3.

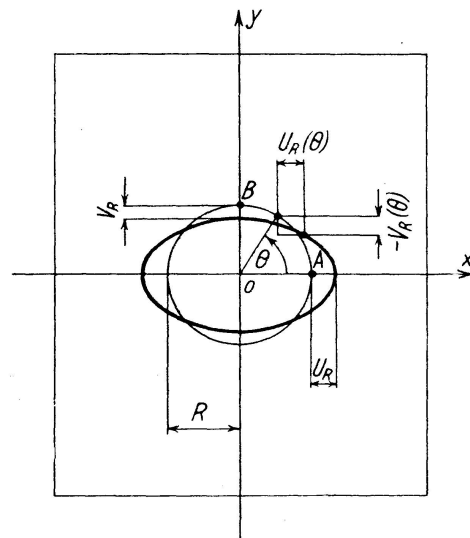


Fig. 4.

D'après les considérations que nous avons exposées, nous laisserons de côté la charge connue  $p$  et, en tous points de la circonférence du cercle de rayon  $R$ , nous appliquerons à la tôle qui se trouve à l'intérieur de ce cercle la contrainte  $p$  affectée du signe opposé. A la tôle située à l'extérieur du cercle, nous appliquerons des contraintes telles qu'elles transforment le contour circulaire en contour elliptique suivant les déformations représen-

tées par les formules (1) et (2), affectées d'un signe contraire (fig. 4), ces contraintes devant néanmoins impliquer des déformations nulles pour les parties de la tôle situées à l'infini.

On peut résoudre ce problème, en introduisant les quantités complexes<sup>2)</sup>  $z = re^{i\theta}$ , et  $z_1 = re^{-i\theta}$ .

Les déformations d'un point quelconque d'une tôle (à l'extérieur du cercle de rayon  $R$ ) prennent alors la forme suivante:

$$8\mu [-iv_r(\Theta) + u_r(\Theta)] = -z_1 \Phi(z) + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(z_1) dz_1 - 2i \int F(z) dz, \quad (4)$$

avec:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)},$$

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}.$$

Les fonctions  $\Phi(z)$  et  $F(z)$  doivent satisfaire aux conditions du problème posé et la fonction  $\Phi(z)$  se transforme en fonction  $\Phi_1(z_1)$ , si l'on remplace la quantité  $z$  par la quantité  $z_1$ .

Etant donné que dans le cas envisagé pour  $r = R$ , on a:

$$-iv_r(\Theta) + u_r(\Theta) = -i \frac{\rho R}{E} \sin \Theta + \frac{\sigma \rho R}{E} \cos \Theta = \frac{\rho R^2}{2E} \left( \frac{\sigma + 1}{z} + \frac{\sigma - 1}{z_1} \right),$$

et

$$z z_1 = R^2,$$

en introduisant ces valeurs dans l'expression (4), nous remarquons que les fonctions  $\Phi(z)$ ,  $\Phi_1(z_1)$  et  $F(z)$ , doivent pour satisfaire aux conditions du problème, prendre les formes suivantes:

$$\Phi(z) = \frac{2\rho R^2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(3 - 4\sigma)} \cdot \frac{1}{z^2}, \quad (5)$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{2\rho R^2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(3 - 4\sigma)} \cdot \frac{1}{z_1^2}, \quad (6)$$

$$F(z) = \frac{\rho R^2}{iz^2} \left[ 1 + \frac{3R^2(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(3 - 4\sigma)} \cdot \frac{1}{z^2} \right]. \quad (7)$$

Dans ces conditions, les fonctions  $\Phi(z)$ ,  $\Phi_1(z_1)$  et  $F(z)$  sont complètement déterminées.

Les valeurs des contraintes (à l'extérieur du cercle de rayon  $R$ ), dues aux déformations peuvent être obtenues en utilisant les deux équations<sup>3)</sup> suivantes:

$$2X'_y + i(X'_x - Y'_y) = -\frac{i}{2} z_1 \Phi'(z) + F(z)$$

$$X'_x + Y'_y = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_1(z_1)].$$

<sup>2)</sup> G. KOLOSOW: Sur les problèmes de l'élasticité à deux dimensions. C. R. 1908. — Sur les problèmes de l'élasticité à deux dimensions. C. R. 1909. — Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. Zeitschrift für Math. und Phys. 1914.

<sup>3)</sup> Ibid. 2.

En introduisant ici les expressions précédentes (5), (6) et (7), on trouve, après quelques simplifications :

$$2X'_y + i(X'_x - Y'_y) = -ip \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{ (\cos 2\Theta - i \sin 2\Theta) - \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \left[ 2 - 3 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] (\cos 4\Theta - i \sin 4\Theta) \right\},$$

$$X'_x + Y'_y = \frac{2p(1-\sigma)}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\Theta,$$

d'où l'on peut tirer immédiatement les valeurs des contraintes :

$$X'_x = -\frac{p}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{ \left[ 1 - 2 \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \right] \cos 2\Theta - \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \left[ 2 - 3 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \cos 4\Theta \right\},$$

$$Y'_y = \frac{p}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{ \left[ 1 + 2 \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \right] \cos 2\Theta - \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \left[ 2 - 3 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \cos 4\Theta \right\},$$

$$X'_y = -\frac{p}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left\{ \sin 2\Theta - \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \left[ 2 - 3 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \sin 4\Theta \right\}.$$

Enfin, en ajoutant d'après le principe de superposition, les deux états de surcharge considérés plus haut, on obtient comme résultat définitif la traction (suivant une seule direction) d'une tôle avec partie centrale rigide de section circulaire.

Les expressions des contraintes s'écriront alors comme suit :

$$\begin{aligned} X_x &= X'_x, \\ Y_y &= Y'_y - p, \\ X_y &= X'_y. \end{aligned}$$

Il en résulte que la contrainte  $Y_y$  est maximum au point B du cercle de rayon  $R$  (fig. 2), c'est-à-dire pour l'angle  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ , et l'on trouve directement

$$Y_{y(B)} = -\frac{p}{2} \left[ 3 + \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \right].$$

Dans le cas de l'acier, si l'on introduit plus haut  $\sigma = 0,29$ , on trouve immédiatement :

$$Y_{y(B)} \cong 1,65 \cdot p.$$

On voit ainsi que la valeur de la contrainte, dans le cas de l'existence d'une partie centrale rigide de section circulaire, augmente de 65 % par rapport à la valeur de la contrainte correspondante au cas de la traction (suivant une seule direction) d'une tôle homogène.

Les essais effectués<sup>4)</sup> confirment le résultat, obtenu plus haut, car on a pu remarquer que les plus grandes déformations des éprouvettes se produisaient en effet au point B, — lieu d'une première fissuration.

Enfin, on peut encore mentionner, que dans une construction, les assemblages avec boulons soudés sont plus avantageux que les assemblages

4) Ibid. 1.

rivés, dans lesquels les trous provoquent l'augmentation des contraintes (au point A) qui atteignent des valeurs trois fois plus grandes, que dans une tôle homogène (tendue suivant une direction).

Il faut également remarquer, que la forme du contour d'une partie centrale rigide, et sa position par rapport à la direction de la charge, ont une grande influence sur l'augmentation des contraintes.

C'est pourquoi nous étudierons encore l'influence d'une partie centrale rigide de section elliptique sur la répartition des contraintes dans une tôle tendue suivant une seule direction (fig. 5).

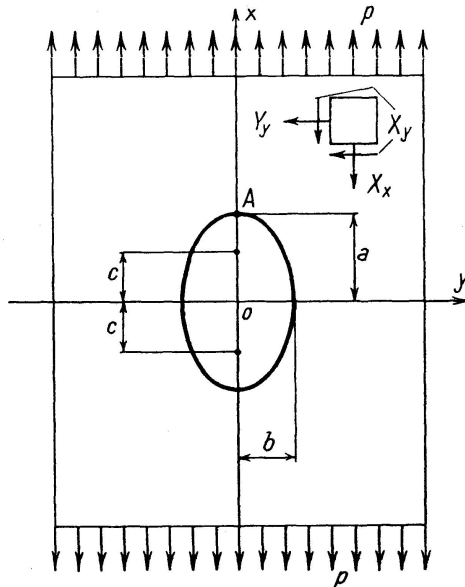


Fig. 5.

Nous introduirons dans ce problème la fonction  $f(\zeta)$ , exprimée par la formule:

$$z = f(\zeta) = \frac{c}{2} (e^{\zeta} + e^{-\zeta}), \quad (8)$$

dans laquelle  $c$  représente la distance du foyer, et

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Après quelques simplifications, la formule (8) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(\zeta) = x + iy = c \cos \eta \operatorname{Ch} \xi + ic \sin \eta \operatorname{Sh} \xi,$$

d'où nous obtenons immédiatement

$$x = c \cos \eta \operatorname{Ch} \xi, \quad (9)$$

$$y = c \sin \eta \operatorname{Sh} \xi. \quad (10)$$

Les paramètres  $\xi$  et  $\eta$  forment ici un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Nous déterminerons ensuite, comme dans le cas précédent, les déformations d'un point quelconque du contour elliptique de demi-axes  $a$  et  $b$  d'une tôle homogène, tendue suivant une direction.

Ces déformations seront:

$$u_\alpha = \frac{p}{E} c \cos \eta \operatorname{Ch} \alpha, \quad (11)$$

$$v_\alpha = -\frac{\sigma p}{E} c \sin \eta \operatorname{Sh} \alpha, \quad (12)$$

où  $u_\alpha$  exprime le déplacement vertical et  $v_\alpha$  le déplacement horizontal.

Nous laisserons maintenant de côté la charge connue  $p$  et, à tous les points du contour elliptique de demi-axes  $a$  et  $b$ , nous appliquerons à la tôle qui se trouve à l'intérieur de l'ellipse la contrainte  $p$  changée de signe (compression). A la tôle située à l'extérieur de l'ellipse, nous appliquerons des contraintes telles qu'elles provoquent en tous points des déformations représentées par les formules (11) et (12) mais changées de signe, ces contraintes devant toutefois impliquer des déformations nulles pour les points de la tôle situés à l'infini.

Les déformations d'un point quelconque de la tôle à l'extérieur de l'ellipse de demi-axes  $a$  et  $b$  peuvent alors s'écrire comme suit:

$$8\mu(-u_\alpha + i v_\alpha) = f(\zeta_1) \Phi(\zeta) - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \int \Phi_1(\zeta_1) f'_1(\zeta_1) d\zeta_1 + 2i \int F(\zeta) f'(\zeta) d\zeta, \quad (13)$$

où les fonctions  $\Phi(\zeta)$  et  $F(\zeta)$  doivent satisfaire aux conditions du problème posé, et la fonction  $\Phi(\zeta)$  se transforme en fonction  $\Phi_1(\zeta_1)$ , si l'on remplace la quantité  $\zeta$  par la quantité  $\zeta_1$ .

Etant donné que dans le cas considéré de l'ellipse à demi-axes  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire pour  $\xi = \alpha$ , nous avons

$$\begin{aligned} -u_\alpha + i v_\alpha &= -\frac{p}{E} c \cos \eta \operatorname{Ch} \alpha + \frac{i \sigma p}{E} c \sin \eta \operatorname{Sh} \alpha = \\ &= \frac{p c}{4 E} [e^{2\alpha - \zeta_1} (\sigma - 1) - e^{2\alpha - \zeta} (\sigma + 1) - e^{-\zeta_1} (\sigma + 1) + e^{-\zeta} (\sigma - 1)], \end{aligned}$$

et

$$\zeta_1 = 2\alpha - \zeta,$$

en introduisant ces valeurs dans l'expression (13), nous remarquons que les fonctions  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Phi_1(\zeta_1)$  et  $F(\zeta)$ , doivent, pour satisfaire aux conditions du problème posé, prendre les formes suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{2p}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \cdot \frac{e^{2\alpha-\zeta}(\sigma-1) - e^{-\zeta}(\sigma+1)}{(e^\zeta - e^{-\zeta})}, \\ \Phi_1(\zeta_1) &= \frac{2p}{(1+\sigma)(3-4\sigma)} \cdot \frac{e^{2\alpha-\zeta_1}(\sigma-1) - e^{-\zeta_1}(\sigma+1)}{(e^{\zeta_1} - e^{-\zeta_1})}, \\ F(\zeta) &= \frac{p}{i(\sigma+1)} \cdot \frac{[e^{2\alpha-\zeta}(\sigma+1) - e^{-\zeta}(\sigma-1)]}{(e^\zeta - e^{-\zeta})} + \\ &+ \frac{p[(\sigma+1) - e^{2\alpha}(\sigma-1)]}{i(\sigma+1)(3-4\sigma)} \cdot \frac{\{e^{-\zeta}[e^{2(\alpha-\zeta)} - e^{-2\alpha}] - 3e^{2\alpha-\zeta} - e^{-(2\alpha-\zeta)}\}}{(e^\zeta - e^{-\zeta})^3}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les fonctions  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Phi_1(\zeta_1)$  et  $F(\zeta)$  sont complètement déterminées.



En ce qui concerne les valeurs des contraintes dues aux déformations à l'extérieur de l'ellipse  $\xi = \alpha$ , on pourrait les obtenir en utilisant les deux équations suivantes:

$$2X'_y + i(X'_x - Y'_y) = -\frac{i}{2} f_1(\zeta_1) \Phi'(\zeta) \cdot \frac{1}{f'(\zeta)} + F(\zeta),$$

$$X'_x + Y'_y = \frac{1}{2} [\Phi(\zeta) + \Phi_1(\zeta_1)].$$

En introduisant ici les expressions précédentes, et en faisant également intervenir les expressions suivantes:

$$a = c \operatorname{Ch} \alpha = c \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2},$$

$$b = c \operatorname{Sh} \alpha = c \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

après quelques simplifications, on trouve pour la plus grande valeur de la contrainte  $X'_x$  au point  $A$  de l'ellipse, c'est-à-dire pour  $\xi = \alpha$  et  $\eta = 0$ , l'expression:

$$X'_{x(A)} = -\frac{p}{2(\sigma+1)(3-4\sigma)} \cdot \left(\frac{a}{b} - \sigma\right) \left\{ 2 + \left(\frac{a}{b} + 1\right) \left[ \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{a}{b} - \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} \right) \right] \right\} - \frac{p}{2(\sigma+1)} \cdot \left(\frac{a}{b} + \sigma\right). \quad (14)$$

Enfin, en superposant les deux états de charge considérés plus haut, nous obtenons la traction (suivant une seule direction) dans une tôle avec partie centrale rigide de section elliptique.

La plus grande valeur de la contrainte au point  $A$  est ainsi exprimée par la formule suivante:

$$X_{x(A)} = X'_{x(A)} - p.$$

Il en résulte que la valeur de la contrainte de traction au point  $A$  d'une tôle augmentera considérablement si la section de la partie centrale rigide diminue.

### Résumé

L'auteur étudie le problème de l'accroissement des contraintes dans une pièce de tôle soumise à la traction ou à la compression et comportant un dégagement central circulaire ou elliptique dans lequel est placée une barre assemblée par soudure, de longueur plus grande que l'épaisseur de la tôle et sollicitée en même temps que cette tôle.

Il admet que cette barre, dont les déformations sont relativement faibles par rapport à celles de la partie restante de la tôle, se comporte sensiblement comme un milieu rigide. Dans ces conditions, et dans le cas d'une contrainte omnilatérale de traction, l'accroissement de la contrainte dans la section de la partie rigide est de 50 % lorsque cette section est circulaire. Cet accroissement est de 65 % dans le cas où la contrainte est unilatérale.

Lorsque la section rigide est elliptique, l'accroissement de la contrainte dépend en général du rapport entre les deux axes de l'ellipse. La contrainte augmente considérablement avec le rétrécissement de la section.

### Zusammenfassung

Der Verfasser untersucht die Spannungen in einer auf Zug oder Druck beanspruchten gelochten Scheibe für den Fall, daß sich im kreisrunden oder elliptischen Loch ein satt eingepaßter oder eingeschweißter Stab mit größerer Länge als Scheibendicke befindet.

Unter der Voraussetzung, daß die kleinen Stabverformungen vernachlässigt werden können und der Stab somit als starrer Kern aufgefaßt werden kann, beträgt die Spannungszunahme im Scheibenquerschnitt durch Kernmitte unter allseitiger Zugspannung 50 % und unter einseitiger (einaxiger) Zugspannung 65 % für runden Kern.

Bei elliptischem Kern hängt die Spannungszunahme von der Ellipsenform ab. Bei Verminderung des Kernquerschnittes nimmt die Spannung erheblich zu.

### Summary

The author investigates the stresses in a perforated disc submitted to tension or compression, in the case where a bar whose length is greater than the thickness of the disc is fitted tightly, or welded, in a circular or elliptical hole.

Assuming that the slight deformations in the bar can be neglected and that the bar may therefore be regarded as having a rigid core, the increase in stress in the disc cross-section through the middle of the core amounts to 50 % for all-sided tensile stressing and to 65 % for one-sided (unaxial) tensile stressing for a circular core.

With an elliptical core the increase in stress depends on the form of the ellipse. The stress increases considerably as the cross-section at the core diminishes.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide