

Calcul des pylônes flexibles des ponts suspendus

Autor(en): **Courbon, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **9 (1949)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9695>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Calcul des pylônes flexibles des ponts suspendus

Die Berechnung der elastischen Pylone von Hängebrücken

Calculating the flexible pylons of suspension bridges

J. COURBON, Paris

Il est souvent possible dans les ponts suspendus à une seule travée, ou à trois travées d'une certaine importance d'encaster les pylônes à leur base, et de rendre les selles d'appui des câbles solidaires des sommets des pylônes. Les déformations du pont suspendu imposent alors des déplacements aux sommets des pylônes qui sont ainsi obligés de fléchir; ces déplacements peuvent être calculés par la théorie des ponts suspendus, car les réactions horizontales exercées par les pylônes sur les câbles peuvent être négligées. Le but de la présente note est d'exposer différentes méthodes permettant le calcul des efforts dans les pylônes.

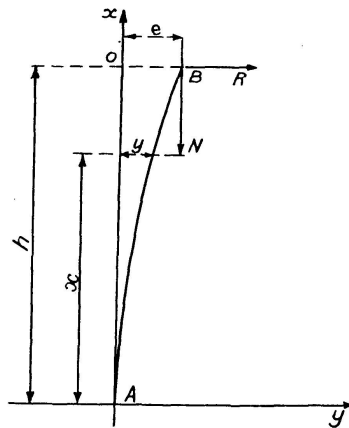


Fig. 1.

Le problème du pylône flexible est donc le suivant: le pylône AB est encasté en A , son extrémité B se déplace d'une quantité comme e , sous l'action de la réaction exercée par le câble en B ; cette réaction a pour composantes horizontale et verticale R et N . N est seul connu. Il s'agit de déterminer les moments fléchissants dans le pylône, et la composante horizontale inconnue R de la réaction d'appui des câbles, le moment d'inertie I de la section du pylône suivant une loi quelconque donnée.

Le problème ne peut être traité par la théorie classique des poutres, car l'effet de la composante N , qui est très élevée, est important, elle augmente la flexibilité du pylône, et c'est grâce à son action que l'on peut réaliser les pylônes flexibles.

A. Etude de trois cas pouvant être entièrement résolus analytiquement

Nous supposons que l'on puisse négliger l'effet du poids propre P du pylône sur la déformation (une remarque ultérieure précisera le sens de cette hypothèse); nous allons étudier trois lois d'inertie du pylône permettant de résoudre complètement le problème posé.

I. L'inertie I est constante

Soient x l'abscisse d'un point de la fibre moyenne du pylône comptée à partir de la section d'encastrement, y la déformation horizontale du pylône, h sa hauteur (fig. 1). Le moment fléchissant M au point d'abscisse x est

$$M = N(e - y) + R(h - x) \quad (1)$$

En particulier le moment d'encastrement M_0 à la base du pylône a pour valeur

$$M_0 = Ne + Rh \quad (2)$$

La relation (1) montre que y satisfait à l'équation différentielle

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = Ne + R(h - x) \quad (E \text{ est le module d'Young}) \quad (3)$$

En posant

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (4)$$

l'intégrale générale de l'équation (3) s'écrit, C et D étant 2 constantes arbitraires

$$y = C \cos kx + D \sin kx + e + \frac{R}{N}(h - x).$$

On déterminera C , D et R au moyen des conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad y(h) = e_1 \quad 1)$$

1) Cette dernière condition peut du reste être remplacée, en vertu de l'équation différentielle (3) par

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=h} = 0$$

soit, en posant: $u = kh$, ou $u^2 = \frac{N h^2}{EI}$ (5)

u est une quantité sans dimensions:

$$\begin{cases} C + e + \frac{Rh}{N} = 0 \\ Dk - \frac{R}{N} = 0 \\ C \cos u + D \sin u = 0. \end{cases}$$

En éliminant C et D entre ces 3 équations, on obtient

$$R = \frac{Ne}{h} \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) - 1} \quad (6)$$

la formule (2) donne alors

$$M_0 = Ne \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right)}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) - 1}. \quad (7)$$

On peut résumer les 2 formules précédentes en les écrivant sous la forme:

$$\frac{M_0}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right)} = Rh = \frac{Ne}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) - 1}. \quad (8)$$

Le problème est ainsi complètement résolu. Notons encore la formule suivante, qu'on établit aisément par des calculs faciles

$$M = M_0 \frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}.$$

La force critique de flambement du pylône correspond à $\operatorname{tg} u = u$, elle a donc pour valeur

$$N_{crit} = 2,04576 \frac{\pi^2 EI}{h^2}.$$

Le pylône se comporte donc à ce point de vue comme une poutre encastrée à l'une de ses extrémités et articulée à l'autre.

II. La loi d'inertie est de la forme $I = \beta x^2$

Les abscisses sont comptées à partir de 0 (fig. 2).

Soient x_1 et x_2 les abscisses de A et B ; I_1 et I_2 les moments d'inertie du pylône en A et en B ; on déterminera aisément x_1 , x_2 et β à partir de I_1 , I_2 et h par les relations (sur la figure $I_1 > I_2$; si $I_1 < I_2$, x_1 et x_2 sont < 0).

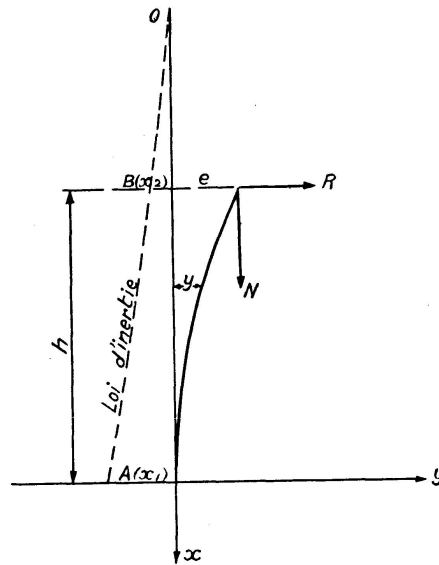


Fig. 2

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{x_1}{\sqrt{I_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{I_2}} = \frac{h}{\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}} \quad (9)$$

Les notations étant les mêmes que précédemment, on a :

$$M = N(e - y) + R(x - x_2) \quad (10)$$

$$M_0 = Ne + Rh \quad (11)$$

La déformation y satisfait à l'équation différentielle

$$E\beta x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = Ne + R(x - x_2). \quad (12)$$

Cette équation est une équation d'Euler; deux cas sont à distinguer pour l'intégration

1. $N > \frac{1}{4} E\beta$. En posant

$$\lambda^2 = \frac{N}{E\beta} - \frac{1}{4} \quad (\lambda > 0)$$

l'intégrale générale de l'équation (12) s'écrit, C et D étant 2 constantes arbitraires, et le signe log désignant le logarithme népérien

$$y = \sqrt{x} [C \cos(\lambda \log x) + D \sin(\lambda \log x)] + e + \frac{R}{N}(x - x_2).$$

En éliminant les constantes C et D entre les équations aux limites:

$$y(x_1) = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_1} = 0, \quad y(x_2) = e$$

et en tenant compte de la relation (11), on parviendra, par des calculs aisés que nous ne reproduisons pas, aux résultats suivants:

$$\frac{M_0}{(1 + \delta) \operatorname{tg} \varphi} = \frac{Rh}{\operatorname{tg} \varphi + 2\lambda} = \frac{Ne}{\delta \operatorname{tg} \varphi - 2\lambda} \quad (13)$$

δ et φ étant des nombres sans dimensions, définis par:

$$\delta = \frac{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}}{\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}}, \quad \varphi = \frac{\lambda}{2} \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right). \quad (14)$$

Les formules (13) et (14) sont encore valables si $I_1 < I_2$ (pylône plus mince à la base qu'au sommet); δ et φ sont alors négatifs.

2. $N < \frac{1}{4} E\beta$. En posant:

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} - \frac{N}{E\beta} \quad \lambda > 0 \quad (15)$$

l'intégrale générale de l'équation (12) s'écrit, C et D désignant 2 constantes arbitraires

$$y = \sqrt{x} [Cx^\lambda + Dx^{-\lambda}] + e + \frac{R}{N}(x - x_2).$$

En procédant comme on l'a fait dans le cas précédent, on obtient

$$\frac{M_0}{(1 + \delta) \operatorname{th} \varphi'} = \frac{Rh}{\operatorname{th} \varphi' + 2\lambda'} = \frac{Ne}{\delta \operatorname{th} \varphi' - 2\lambda'} \quad (16)$$

δ et φ' étant définis par

$$\delta = \frac{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}}{\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}}, \quad \varphi' = \frac{\lambda'}{2} \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right). \quad (17)$$

On pourra observer que

$$\operatorname{th} \varphi' = \frac{I_1^{\lambda'} - I_2^{\lambda'}}{I_1^{\lambda'} + I_2^{\lambda'}}.$$

Les formules (16) et (17) sont encore valables pour $I_1 < I_2$. On peut étudier la force critique de flambement du pylône à partir des équations

$$\delta \operatorname{tg} \varphi = 2\lambda \quad \text{ou} \quad \delta \operatorname{th} \varphi' = 2\lambda'.$$

Bornons-nous à indiquer les résultats; la force critique de flambement du pylône ne change pas que l'on encastre le pylône par l'une ou l'autre de ses extrémités. Soit donc, I et I' les moments d'inertie des extrémités du pylône, $I < I'$, on peut écrire la force critique sous la forme

$$N_{crit} = 2,04576 \frac{\pi^2 EI}{h^2} K \left(\frac{I'}{I} \right)$$

$K\left(\frac{I'}{I}\right)$ étant un coefficient qui ne dépend que du rapport $\frac{I'}{I}$, et dont voici quelques valeurs

$\frac{I'}{I}$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5	10	20	50	100
K	1	1,0962	1,1861	1,2710	1,3518	1,4292	1,6104	1,7782	2,0856	2,3658	3,5476	5,4268	9,8059	15,672

III. La loi d'inertie est de la forme $I = \beta x^4$

Les abscisses sont comptées à partir de 0 (fig. 2). Soient x_1 et x_2 les abscisses de x_1 et x_2 , I_1 et I_2 les moments d'inertie du pylône en A et en B ; on déterminera aisément x_1 , x_2 et β à partir de I_1 , I_2 et h par les relations

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}} = \frac{x_1}{\sqrt[4]{I_1}} = \frac{x_2}{\sqrt[4]{I_2}} = \frac{h}{\sqrt[4]{I_1} - \sqrt[4]{I_2}}. \quad (18)$$

On aura toujours les relations (10) et (11), et y satisfera à l'équation différentielle:

$$E \beta x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ny = Ne + R(x - x_2). \quad (19)$$

En posant :
$$k^2 = \frac{N}{E\beta}$$

l'intégrale générale de l'équation précédente s'écrit, C et D désignant 2 constantes arbitraires

$$y = x \left[C \cos\left(\frac{k}{x}\right) + D \sin\left(\frac{k}{x}\right) \right] + e + \frac{R}{N}(x - x_2).$$

En utilisant toujours les mêmes conditions aux limites, on obtiendra les résultats suivants

$$\frac{M_0}{\alpha \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right)} = \frac{Rh}{(\alpha - 1) \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) + 1} = \frac{Ne}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) - 1} \quad (20)$$

α et u étant des nombres sans dimensions, définis par:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{I_1}{I_2}}, \quad u^2 = \frac{Nh^2}{E \sqrt{I_1 I_2}} \quad (21)$$

Ces formules sont encore valables lorsque $I_1 < I_2$.

La force critique de flambement du pylône correspond à $\operatorname{tg} u = u$; elle a pour valeur

$$N_{crit} = 2,04576 \frac{\pi^2 E \sqrt{I_1 I_2}}{h^2}.$$

On remarquera que les calculs sont beaucoup plus simples avec cette loi qu'avec la précédente; en particulier en faisant $\alpha = 1$ dans les formules (20), on retombe immédiatement sur les formules (8) relatives à l'inertie constante.

En fait, les calculs numériques sont aussi rapides avec cette loi qu'avec l'inertie constante; or la loi $I = \beta x^4$ a une très grande importance pratique, puisqu'elle s'applique rigoureusement au cas d'un pylône homogène ayant la forme d'un tronc de cône ou de pyramide.

Dans le cas d'un pylône en béton armé (donc hétérogène) à section rectangulaire (ou même plus compliquée) dont les arêtes sont rectilignes, mais ne convergent pas nécessairement (c'est à dire qui n'est pas toujours un tronc de pyramide), la loi précédente permet en général une représentation de l'inertie réelle avec une très grande approximation (souvent à moins de 0,1 % près).

On voit donc l'intérêt pratique considérable présenté par cette solution.

Remarque générale sur les solutions précédentes — Exemple numérique

Il est intéressant de se rendre compte dans quelle mesure le poids propre P du pylône est effectivement négligeable; cela est aisé, il suffit de résoudre le problème deux fois, la première en négligeant le poids propre du pylône, la deuxième en le concentrant au sommet du pylône. Il est évident que la solution réelle est comprise entre ces deux solutions, et même, en raison de la forme de la fibre moyenne déformée du pylône, plus voisine de la première.

Un exemple numérique permettra de préciser le sens de cette remarque, et montrera qu'un poids propre P , même relativement important vis-à-vis de N peut être négligé.

Soit un pylône de hauteur $h = 35$ m (correspondant à un pont dont la travée centrale a environ 250 m de portée), d'inertie constante: $I = 1,2$ m⁴. La réaction verticale des câbles est 2000 tonnes, le poids propre du pylône 380 tonnes. Le déplacement e imposé au sommet du pylône est 0,10 m. Le pylône est en béton armé: $E = 2,10^6$ t/m². Les caractéristiques de la section de base du pylône sont: surface $S = 4,8$ m², module de résistance: $\frac{I}{v} = 1,333$ m³.

L'effort normal dans la section de base du pylône est 2380 tonnes et la contrainte normale moyenne 49,6 kg/cm².

a) Négligeons le poids propre du pylône dans le calcul de M_0 et de R ; nous obtenons:

$$u = 1,01036 \text{ radians} = 64,3215 \text{ grades, } \operatorname{tg} u = 1,59348$$

$$M_0 = 546,4 \text{ tonnes-mètre} \quad R = 9.900 \text{ kg.}$$

La contrainte normale correspondant à M_0 est $\pm 41,0$ kg/cm², de sorte que les contraintes extrêmes dans la section de base du pylône sont:

$$90,6 \text{ kg/cm}^2 \text{ et } 8,6 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Concentrons maintenant tout le poids du pylône à son sommet; nous avons $N = 2380$ tonnes, et nous obtenons:

$$u = 1,10218 \text{ radans} = 70,1670 \text{ grades, } \operatorname{tg} u = 1,97540$$

$$M_0 = 538,4 \text{ tonnes-mètre} \quad R = 8.583 \text{ kg.}$$

La contrainte normale correspondant à M_0 est $\pm 40,4 \text{ kg/cm}^2$, de sorte que les contraintes extrêmes dans la section de base du pylône sont:

$$90,0 \text{ kg/cm}^2 \text{ et } 9,2 \text{ kg/cm}^2.$$

On voit que la différence sur les contraintes est négligeable.

Il n'en est pas de même pour R , mais cela a moins d'importance, car l'influence de R , qui est très faible devant la poussée est négligeable dans le calcul des câbles porteurs et des poutres de rigidité du pont suspendu.

Il est intéressant de voir ce que l'on aurait trouvé si l'on avait considéré le pylône comme une simple console encastrée; on aurait eu:

$$R = \frac{3 E I e}{h^3} = 16,793 \text{ kg; } M_0 = N e + R h = 787,8 \text{ tonnes-mètre}$$

et les contraintes extrêmes dans le pylône auraient été de

$$49,6 \text{ kg/cm}^2 \pm 59,1 \text{ kg/cm}^2 \text{ soit } 108,7 \text{ kg/cm}^2, - 9,5 \text{ kg/cm}^2.$$

On voit que l'influence de la compression du pylône, qui a pour effet d'augmenter la flexibilité du pylône, ne peut être négligée.

B. Méthodes de calcul numérique dans le cas général

Les méthodes précédentes sont bien adaptées au calcul des pylônes des ponts suspendus courants; mais dans le cas d'ouvrages exceptionnels, de très grande portée par exemple, elles peuvent se révéler insuffisantes.

Nous allons donner deux méthodes permettant le calcul d'un pylône dans le cas où la loi d'inertie est quelconque (donnée par un tableau de valeurs numériques par exemple), et où l'influence du poids propre sur les déformations ne peut être négligée. On verra même aisément que l'on pourrait, sans aucune difficulté, tenir compte dans ces deux méthodes, d'autres forces connues appliquées au pylône.

I. Première méthode

Elle suppose que l'on peut décomposer la hauteur h du pylône en un certain nombre d'intervalles partiels de longueur h_1, h_2, \dots, h_n , à l'intérieur de chacun desquels l'inertie de la section et la force de compression totale peuvent être considérées comme constantes. Cela est toujours possible à condition de prendre assez d'intervalles. On a:

$$h = h_1 + h_2 + \dots + h_n.$$

Le déplacement e en tête du pylône est la somme des déplacements e_i le long de chaque tronçon $m_{i-1} m_i$ de hauteur h_i et d'inertie I_i constante.

Soient R et $N_1 = N$ les efforts en tête du pylône; au point m_{i-1} les tronçons supérieurs transmettent au tronçon $m_{i-1} m_i$ un effort normal N_i , un effort tranchant R et un moment fléchissant M_{i-1} . On a:

$$M_i - M_{i-1} = R h_i + N_i e_i. \tag{1}$$

Etudions la forme de la fibre moyenne déformée du tronçon $m_{i-1} m_i$ par rapport aux axes $m_i x_i y_i$, on a:

$$EI_i \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = M_i - N_i y_i - R x_i$$

car le moment fléchissant au point (x_i, y_i) est $M_i - N_i y_i - R x_i$.

On a donc, en posant

$$k_i^2 = \frac{N_i}{EI_i} \tag{2}$$

$$y_i = \frac{1}{N_i} [C_i \cos k_i x_i + D_i \sin k_i x_i + M_i - R x_i]. \tag{3}$$

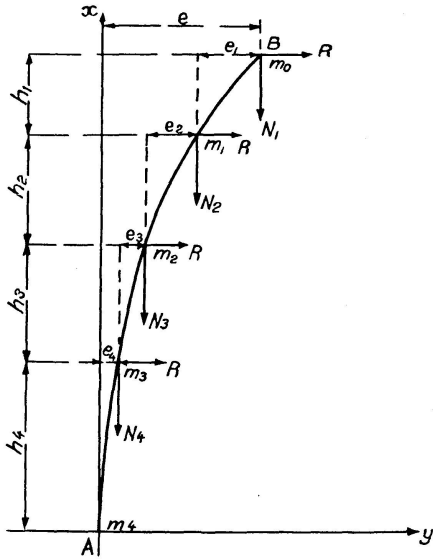


Fig. 3

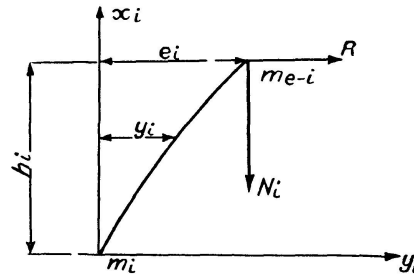


Fig. 4

Déterminons les constantes C_i et D_i de façon que

$$y_i(0) = 0 \quad y_i(h_i) = 0$$

soit, compte tenu de la relation (1):

$$\begin{cases} C_i + M_i = 0 \\ C_i \cos k_i h_i + D_i \sin k_i h_i + M_{i-1} = 0. \end{cases}$$

Portons les valeurs de C_i et D_i tirées de ces relations dans (3); il vient:

$$N_i y_i = M_i - R x_i - \frac{M_i \sin k_i (h_i - x_i) + M_{i-1} \sin k_i x_i}{\sin k_i h_i}. \quad (4)$$

On en déduit, en notant les dérivées par des accents, et en posant pour simplifier l'écriture

$$c_i = \cos k_i h_i, \quad \lambda_i = \frac{k_i}{N_i \sin k_i h_i} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} y_i'(0) &= -\frac{R}{N_i} + \lambda_i M c_i - \lambda_i M_{i-1} \\ y_i'(h_i) &= -\frac{R}{N_i} + \lambda_i M_i - \lambda_i c_i M_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La condition de raccordement de 2 tronçons en M_i : $y_i'(0) = y_{i+1}'(h_{i+1})$ est donc:

$$\lambda_i M_{i-1} - (\lambda_i c_i + \lambda_{i+1} c_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} = -\left(\frac{1}{N_i} - \frac{1}{N_{i+1}}\right) R. \quad (7)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation des trois moments dans l'étude des poutres continues.

Pour le premier intervalle, on a tenu compte de ce que $M_0 = 0$

$$-(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) M_1 + \lambda_2 M_2 = -\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N_2}\right) R. \quad (7)'$$

Enfin pour le dernier intervalle $y_n'(0) = 0$ se traduit par

$$\lambda_n M_{n-1} - \lambda_n c_n M_n = -\frac{1}{N_n} R. \quad (7)''$$

On remarque que les équations (7)' et (7)'' se déduisent de l'équation (7) dans laquelle on fait $i = 0$ ou $i = n$, en tenant compte de $M_0 = 0$, et en annulant tous les termes d'indice -1 ou $n+1$ qui ne sont pas définis.

Les équations (7), (7)' et (7)'' forment un système d'équations linéaires étagées dont la résolution, très simple, fournira pour M_i une expression de la forme, les seconds membres étant homogènes en R

$$M_i = \mu_i R. \quad (8)$$

La relation (1) donnera ensuite

$$e_i = \frac{M_i - M_{i-1} - R h_i}{N_i} = \left[\frac{\mu_i - \mu_{i-1} - h_i}{N_i} \right] R = \epsilon_i R. \quad (9)$$

On en déduira:

$$e = \Sigma e_i = R \Sigma \epsilon_i = \epsilon R. \quad (10)$$

Le moment fléchissant à la base du pylône est

$$M_n = \mu_n R = \left(\frac{\mu_n}{\epsilon} \right) e. \quad (11)$$

Les formules (8) à (11) font connaître, en fonction de e , la réaction R , la distribution des moments fléchissants dans le pylône: M_i , et la forme de la fibre moyenne déformée du pylône, caractérisée par les déplacements e_i .

II. Deuxième méthode

Nous allons chercher à déterminer le moment fléchissant $M(x)$ à l'abscisse x de la fibre moyenne du pylône comptée à partir de la section d'encastrement.

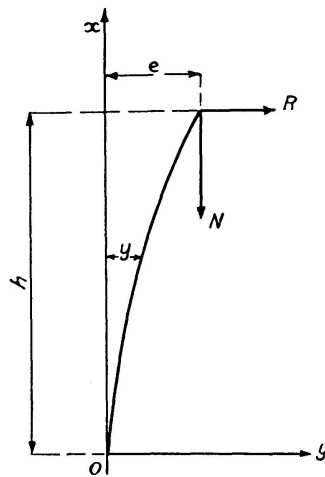


Fig. 5

De l'équation

$$EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) \quad (1)$$

on déduit, en tenant compte des conditions aux limites pour $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{M(u) du}{EI(u)} \quad (2)$$

$$y = \int_0^x dv \int_0^v \frac{M(u) du}{EI(u)}. \quad (3)$$

Or, on a, $p(\xi) d\xi$ étant le poids propre de l'élément $d\xi$ du pylône entourant le point d'abscisse ξ :

$$M(x) = R(h-x) + N(e-y) + \int_x^h p(\xi) [y(\xi) - y(x)] d\xi.$$

En dérivant par rapport à x cette équation, on obtient:

$$\frac{dM}{dx} = -R - \left[N + \int_x^h p(\xi) d\xi \right] \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Posons
$$\mathfrak{N}(x) = N + \int_x^h p(\xi) d\xi. \quad (5)$$

$\mathfrak{N}(x)$ a une signification physique évidente: c'est l'effort normal dans la section d'abscisse x du pylône.

L'équation (4) devient alors, compte-tenu de (2) et de (5):

$$\frac{dM}{dx} = -R - \mathfrak{N}(x) \int_0^x \frac{M(u) du}{EI(u)}$$

Intégrons cette équation; en remarquant que $M(x)$ s'annule pour $x = h$, il vient:

$$M(x) = R(h - x) + \int_x^h \mathfrak{N}(v) dv \int_0^v \frac{M(u) du}{EI(u)}.$$

La double intégration qui figure au second membre représente l'intégrale double de la fonction $\frac{M(u) \mathfrak{N}(v)}{EI(u)}$ étendue au trapèze hachuré de la figure ci-contre.

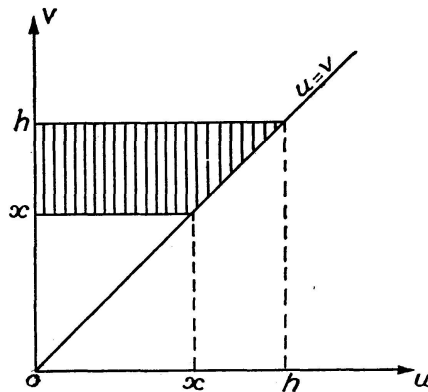


Fig. 6

Intervertissons l'ordre des intégrations; on trouve:

$$M(x) = R(h - x) + \int_0^x \frac{M(u) du}{EI(u)} \int_x^h \mathfrak{N}(v) dv + \int_x^h \frac{M(u) du}{EI(u)} \int_u^h \mathfrak{N}(v) dv. \quad (6)$$

Définissons alors la fonction $\mathfrak{N}_1(x)$ par la relation

$$\mathfrak{N}_1(x) = \int_x^h \mathfrak{N}(v) dv \quad (7)$$

L'équation (6) s'écrit alors

$$M(x) = R(h-x) + \int_0^x \frac{\mathfrak{N}_1(x) M(u) du}{EI(u)} + \int_x^h \frac{\mathfrak{N}_1(u) M(u) du}{EI(u)}. \quad (8)$$

Cette équation est une équation intégrale de Fredholm:

$$M(x) = R(l-x) + \int_0^h K(x, u) M(u) du \quad (9)$$

dont le noyau $K(x, u)$ est connu:

$$K(x, u) \begin{cases} \frac{\mathfrak{N}_1(x)}{EI(u)} & \text{si } u < x \\ \frac{\mathfrak{N}_1(u)}{EI(u)} & \text{si } u > x \end{cases} \quad (10)$$

On effectuera alors le calcul numérique de la façon suivante: on se donnera une valeur R_0 quelconque pour R ; on résoudra alors l'équation (6) par les méthodes d'approximations successives propres aux équations intégrales; soit $M_0(x)$ la fonction ainsi trouvée (moment fléchissant correspondant à R_0), on en déduira par (3) le déplacement correspondant e_0 en tête du pylône; e_0 sera en général différent du déplacement imposé e au sommet du pylône. Mais on voit immédiatement sur les équations (9) et (3) que si l'on multiplie R par un facteur constant, $M(x)$ et y sont multipliés par ce facteur constant; on aura donc:

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(\frac{R_0}{e_0} \right) e \\ M(x) &= \left(\frac{R}{R_0} \right) M_0(x) = \left(\frac{e}{e_0} \right) M_0(x). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ces relations achèvent donc la résolution du problème.

On peut remarquer que y satisfait à l'équation linéaire du 3^e ordre:

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{dy}{dx} \right] + \mathfrak{N}(x) \frac{dy}{dx} + R = 0.$$

Bien entendu, la méthode précédente est applicable lorsqu'on néglige l'influence du poids propre du pylône; on a alors:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(x) &= N \\ \mathfrak{N}_1(x) &= N(h-x). \end{aligned}$$

Résumé

Il est souvent possible d'encastrier les pylônes des ponts suspendus, car leur forte compression leur permet de supporter, sans contraintes excessives, les flexions résultant des déplacements en tête qui leur sont imposés par les déformations des travées suspendues.

Plusieurs méthodes de calcul sont indiquées dans le mémoire.

Les trois premières sont relatives à des pylônes dont le poids propre peut être négligé et dont la loi d'inertie a une forme particulière permettant d'exprimer la solution sous forme finie; deux des lois d'inertie envisagées concernent un pylône de section constante, et un pylône ayant la forme d'un tronc de pyramide.

Les deux dernières méthodes permettent d'aborder numériquement le cas d'un pylône de poids non négligeable et de loi d'inertie quelconque.

Zusammenfassung

Es ist oft möglich, die Pylone der Hängebrücken am Fuße einzuspannen, da durch die großen Druckkräfte die Spannungen infolge der Verschiebungen am Kopf, die hervorgerufen werden durch die Deformation der Kabel, ohne Überbeanspruchung aufgenommen werden können.

Im Beitrag werden mehrere Berechnungsmethoden angegeben.

Die ersten drei beziehen sich auf Pylone mit vernachlässigbarem Eigengewicht und einem Gesetz für den Trägheitsmomentenverlauf, das ermöglicht, die Lösung des Problems in geschlossener Form zu finden. Zwei der betrachteten Gesetze beziehen sich auf den Pylon mit konstantem Querschnitt und den Pylon, der die Form eines Pyramidenstumpfes hat.

Die beiden letzten Methoden gestatten die Berechnung eines Pylons, dessen Eigengewicht nicht vernachlässigt werden kann und dessen Trägheitsmoment beliebig variiert.

Summary

It is often possible to fix the feet of pylons of suspension bridges, since the stresses occurring in consequence of the displacements at the top, which are caused by the deformation of the cables, can be taken by the big compressive forces without over-stressing.

Several methods of making the calculations are given in the article.

The first three refer to pylons whose own weight is negligible and with a law for the run of the moments of inertia which enables the solution of the problems to be found in a consistent form. Two of the laws thus considered refer to a pylon with constant cross-section and to a pylon which has the shape of a truncated pyramid.

Two other methods make it possible to calculate a pylon whose weight cannot be neglected and whose moment of inertia varies in any desired manner.