

Un appareil nouveau pour déterminer les efforts dans les pièces élastiques planes

Autor(en): **Massonnet, Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **9 (1949)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9707>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Un appareil nouveau pour déterminer les efforts dans les pièces élastiques planes

Ein neuer Apparat zur Bestimmung der Kräfte in ebenen, elastischen Elementen

A new apparatus for determining the forces in plane, elastic elements

CH. MASSONNET, Chargé de Cours à l'Université de Liège

1. Principe de la méthode

J'ai cherché à développer une méthode théorique permettant d'obtenir aussi rapidement que possible l'état de tension dans une pièce plane de forme quelconque sollicitée sur ses bords par des forces distribuées de façon quelconque. En d'autres termes, de résoudre théoriquement les problèmes qui ne peuvent, à l'heure actuelle, être abordés que par la photoélasticité.

J'ai pensé qu'un procédé analytique ne pourrait convenir dans ce but, parce qu'il conduirait nécessairement à des développements d'algèbre inextricables si la pièce est de forme compliquée. Je me suis donc adressé à une méthode graphique ou, pour mieux dire, mécanique.

Le principe de la nouvelle méthode est de construire un état de tension quelconque dans une pièce plane en superposant un nombre suffisant d'états élastiques particuliers connus d'avance. Ces états particuliers doivent évidemment être aussi simples que possible, tout en possédant cependant une généralité suffisante pour pouvoir reproduire par superposition un état de tension quelconque. Et surtout, ils doivent être tels qu'on puisse déterminer aisément l'intensité de tous les états composants.

Reprenant une idée qui avait été émise par Monsieur Miche au Congrès de Mécanique Appliquée de Zurich de 1926, j'ai adopté comme état de tension fondamental la distribution radiale simple de tensions.

Rappelons brièvement en quoi cela consiste. Considérons une force P agissant sur la face rectiligne AB d'un disque demi-plan indéfini. Cette force est uniformément répartie sur l'épaisseur du disque, que nous supposons unitaire. On démontre que la distribution des tensions dans le disque est la suivante: au point C de coordonnées r, φ , les tensions principales sont radiale et circonférentielle. On a de plus

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad \text{et} \quad \sigma_\varphi = 0,$$

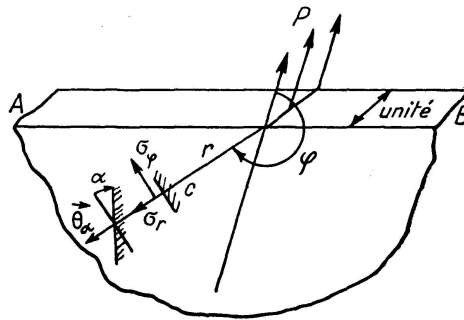


Fig. 1

c'est-à-dire qu'aux environs du point C règne un état de traction simple. D'après le cercle de Mohr, sur une facette dont la normale fait avec le rayon r l'angle α , le vecteur-tension est radial et vaut

$$\vec{\theta}_\alpha = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \cdot \vec{I}_r$$

en désignant par \vec{I}_r le vecteur-unitaire allongé sur le rayon r . Considérons maintenant un disque plan de contour quelconque C . Traçons la tangente au point Q du contour (fig. 2) et considérons le disque demi-plan indéfini qui

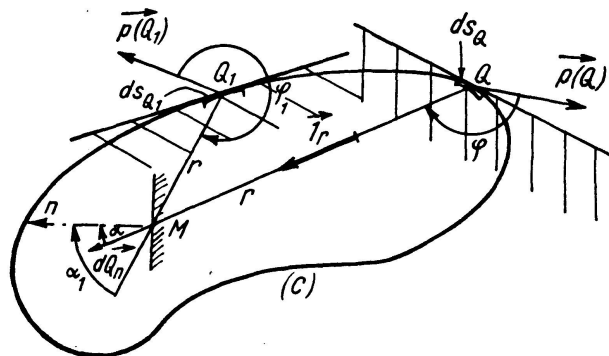


Fig. 2

s'étend sous cette tangente et que j'indique par des hachures. Si j'applique au point Q , sur l'élément ds_Q du contour de ce disque, une charge fictive élémentaire $\vec{p}(Q) ds_Q$, il va naître dans tout ce demi-plan une distribution radiale simple de tensions infiniment petites. En particulier, en tout point M intérieur du disque, il naîtra, sur une facette de normale n , un vecteur-tension infiniment petit

$$d\vec{\theta}_n(p) = -\frac{2}{\pi} p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \cdot \vec{I}_r ds_Q$$

et la somme des tensions principales en ce point vaudra

$$dS = -\frac{2P}{\pi} \cos \varphi ds_Q.$$

Au point Q où la charge est appliquée, nous aurons la tension $\vec{p}(Q)$ d'intensité finie.

Nous pouvons à présent prendre un autre point Q_1 du contour du disque, tracer la tangente au contour en ce point et considérer le disque demi-plan indéfini situé du même côté de cette tangente que le disque. Nous appliquerons en Q_1 la charge fictive élémentaire $\vec{p}(Q_1) ds_{Q_1}$ qui produira au point M le vecteur-tension élémentaire

$$d\vec{\theta}_n(p) = -\frac{2}{\pi} p(Q_1) \frac{\cos \varphi_1 \cos \alpha_1}{r} \cdot \vec{I}_r ds_{Q_1}.$$

Si nous opérons de même en tous les points du contour, nous réaliserons, par superposition, un état de tension tel que le vecteur-tension au point M vaudra

$$\vec{\theta}_n(p) = -\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r ds_Q \quad (1)$$

et la somme des tensions principales au même point sera

$$S(p) = -\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi}{r} ds. \quad (2)$$

En particulier, si le point intérieur M vient en Q sur le contour, l'expression (1) subit une discontinuité égale à $\vec{p}(Q)$, parce qu'il faut y ajouter l'effet direct du vecteur $\vec{p}(Q)$ appliqué en ce point. Le vecteur-tension sur la facette ds vaut par conséquent

$$\vec{\theta}_n(p) = \vec{p}(Q) - \frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r ds_Q. \quad (3)$$

Il importe de remarquer, pour éviter toute confusion, que les charges $\vec{p} ds$ que nous venons de distribuer sur tout le contour du disque sont appliquées chacune à un demi-plan indéfini différent, limité par la tangente au point correspondant du contour C . Ces charges $\vec{p} ds$ n'ont donc absolument rien de commun avec les forces réelles $\vec{t} ds$ appliquées à ce contour. C'est pour souligner ce fait que je les ai appelées des *charges fictives*.

Supposons maintenant qu'on désire rechercher l'état de tension à l'intérieur d'un disque soumis sur son contour à des forces superficielles \vec{t} données. Il suffira de choisir la distribution des charges fictives \vec{p} de manière que, en tous les points du contour, le vecteur-tension intérieur $\vec{\theta}_n$ équilibre exactement la force superficielle extérieure donnée \vec{t} , c'est-à-dire qu'on ait

$$\vec{t}(Q) = \vec{\theta}_n(Q),$$

ou explicitement

$$\vec{t}(Q) = \vec{p}(Q) - \frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r ds_Q. \quad (4)$$

Cette égalité est une équation intégrale vectorielle linéaire. Pour simplifier sa résolution, on introduit la notation

$$\vec{B}(p) = -\frac{2}{\pi} \oint p(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{I}_r ds_Q, \quad (5)$$

qui permet d'écrire l'équation (4) sous la forme plus simple

$$\vec{t} = \vec{p} + \vec{B}(p) \quad (6)$$

2. Résolution de l'équation intégrale (6)

Il semble à première vue qu'on puisse résoudre aisément l'équation (6) par approximations successives de la façon suivante:

On part d'une distribution quelconque de vecteurs sur le contour du disque, par exemple les forces données \vec{t} , et on considère ces vecteurs comme une première approximation $\vec{p}^{(0)}$ des charges fictives cherchées \vec{p} . Pour obtenir une approximation meilleure $\vec{p}^{(1)}$, il suffit de tirer la valeur de \vec{p} de l'équation (6), puis de calculer une valeur approchée de l'intégrale en y remplaçant les \vec{p} inconnus par leur approximation $\vec{p}^{(0)}$. On obtient ainsi

$$\vec{p}^{(1)} = \vec{t} - \vec{B}(p^{(0)}). \quad (7)$$

Pour améliorer cette nouvelle distribution $\vec{p}^{(1)}$, il suffit de répéter le raisonnement précédent et d'écrire

$$\vec{p}^{(2)} = \vec{t} - \vec{B}(p^{(1)}), \quad (8)$$

et ainsi de suite.

Après un certain nombre d'approximations, on peut s'attendre à obtenir une distribution de vecteurs $\vec{p}^{(n)}$ qui ne se modifie pratiquement plus d'une approximation à la suivante. On peut alors admettre qu'on est arrivé à la distribution des charges fictives cherchées \vec{p} .

Un procédé d'approximations équivalent à celui que je viens de décrire a été proposé par *M. Miche*. Malheureusement, il peut se faire que les distributions de charges fictives $\vec{p}^{(n)}$, au lieu de tendre vers une distribution-limite déterminée, oscillent au contraire indéfiniment de part et d'autre d'une distribution moyenne.

Il est facile de s'en rendre compte sur un exemple particulier. Supposons qu'on ait à rechercher la distribution des p pour un disque à contour quelconque soumis à des tractions hydrostatiques d'intensité uniforme $\vec{t} = t \cdot \vec{I}_n$ (fig. 3). Il est facile de vérifier directement que la distribution correspondante des \vec{p} est également «hydrostatique constante», c'est-à-dire composée de vecteurs $\vec{p} = p \cdot \vec{I}_n$ normaux au contour et tous égaux à $t/2$. En effet, la figure 3 montre que

$$\frac{\cos \varphi}{r} ds = -da,$$

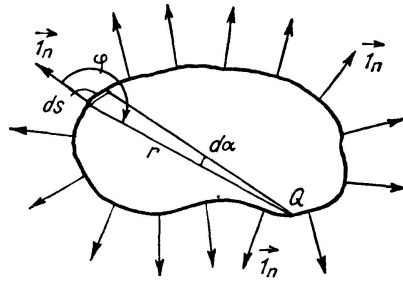


Fig. 3

de sorte que l'expression (5) de $\vec{B}(p)$ se réduit ici à

$$\vec{B}(p) = \frac{2p}{\pi} \oint \cos \alpha \vec{1}_r d\alpha = p \cdot \vec{1}_n. \quad (9)$$

Si l'on recherche les \vec{p} en appliquant le procédé d'approximations successives décrit ci-dessus, on obtient, par les formules (7), (8) et analogues,

$$\vec{p}^{(0)} = t \cdot \vec{1}_n; \quad \vec{p}^{(1)} = t \cdot \vec{1}_n - t \cdot \vec{1}_n = 0; \quad \vec{p}^{(2)} = t \cdot \vec{1}_n; \quad \vec{p}^{(3)} = t \cdot \vec{1}_n - t \cdot \vec{1}_n = 0; \quad \dots \text{etc.} \dots$$

ce qui montre bien que les approximations successives oscillent indéfiniment autour de la solution exacte $\vec{p} = \vec{t}/2$.

On peut, heureusement, pallier cette difficulté en modifiant le procédé d'approximations. Il suffit en effet de ne corriger à chaque étape que de la moitié de l'intégrale $\vec{B}(p)$, selon le schéma:

$$\vec{p}^{(0)} = \frac{\vec{t}}{2}; \quad \vec{p}^{(1)} = \frac{\vec{t}}{2} + \frac{\vec{p}^{(0)}}{2} - \frac{1}{2} \vec{B}(p^{(0)}); \quad \vec{p}^{(2)} = \frac{\vec{t}}{2} + \frac{\vec{p}^{(1)}}{2} - \frac{1}{2} \vec{B}(p^{(1)}); \quad \dots \text{etc.} \dots \quad (10)$$

J'ai pu démontrer que ce procédé modifié est toujours convergent, quelles que soient la forme du disque et sa sollicitation.

3. Propriétés des charges fictives

On peut établir que la distribution de charges fictives \vec{p} résolvant le problème est unique, si l'on impose aux vecteurs \vec{p} de former un système en équilibre.

Par contre, si l'on abandonne cette condition, le problème admet une triple infinité de solutions, c'est-à-dire qu'il existe une triple infinité de distributions différentes de charges fictives qui créent dans le disque le même état de tension. Ces distributions sont toutes «hors d'équilibre», sauf la seule et unique équilibrée, qu'on peut obtenir par le procédé d'approximations (10).

On saisira mieux ce résultat paradoxal sur un exemple déterminé: Envisageons un disque circulaire chargé sur son contour de forces arbitraires; c'est, à ma connaissance, le seul disque de dimensions finies pour lequel l'équation intégrale (5) peut se résoudre explicitement. Par des calculs assez longs, mais sans difficultés, on montre que sa solution générale est (fig. 4)

$$\vec{p}(Q) = \vec{t}(Q) - \frac{\vec{I}_n}{2\pi d} \oint t_n ds + \frac{\vec{\mathfrak{R}}}{\pi d} + \frac{2\mathfrak{M}}{\pi d^2} \vec{I}_s \quad (11)$$

Dans cette formule, $\vec{\mathfrak{R}}$ représente la résultante des charges fictives et \mathfrak{M} leur moment résultant par rapport au centre 0 du disque.

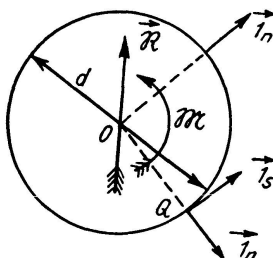


Fig. 4

Ces quantités peuvent être choisies arbitrairement d'une triple infinité de façons différentes, ce qui correspond bien à l'affirmation énoncée plus haut.

Si l'on s'impose la condition que les charges fictives soient en équilibre, $\vec{\mathfrak{R}} = \mathfrak{M} = 0$ et la formule (11) se réduit à la solution bien connue en élasticité plane¹⁾

$$p(Q) = t(Q) - \frac{\vec{I}_n}{2\pi d} \oint t_n ds.$$

C'est l'unique solution formée de vecteurs en équilibre.

Reprenons maintenant un disque de forme quelconque sollicité par des forces quelconques et envisageons deux distributions particulières, prises parmi la triple infinité des distributions «hors d'équilibre» de charges fictives. Par hypothèse, ces deux distributions produisent le même état de tension dans le disque. Leur différence est donc une distribution de charges \vec{p} hors d'équilibre qui donne un état de tension nulle dans tout l'intérieur de ce disque. Il y a une triple infinité de telles distributions «nulles». On peut aisément montrer que ces distributions se reproduisent sans modifications à chaque étape du procédé d'approximations successives. Elles n'empêchent donc pas ce procédé de converger, de sorte qu'on peut encore l'appliquer en partant d'une distribution $\vec{p}^{(0)}$ de vecteurs non en équilibre.

Pour illustrer ces résultats généraux, considérons encore le disque circulaire. Si l'on annule toutes les forces superficielles \vec{t} , la formule (11) se réduit à

$$\vec{p}(Q) = \frac{\vec{\mathfrak{R}}}{\pi d} + \frac{2\mathfrak{M}}{\pi d^2} \vec{I}_s.$$

C'est l'expression générale des distributions nulles dont il vient d'être question. On a représenté à la figure 5 celles de ces distributions qui correspondent aux cas particuliers $\mathfrak{M} = 0$, $2\mathfrak{M}/\mathfrak{R}d = 1$ $\mathfrak{R} = 0$.

¹⁾ Voir par exemple à ce sujet, S. Timoshenko, Théorie de l'élasticité, pp. 110 à 115

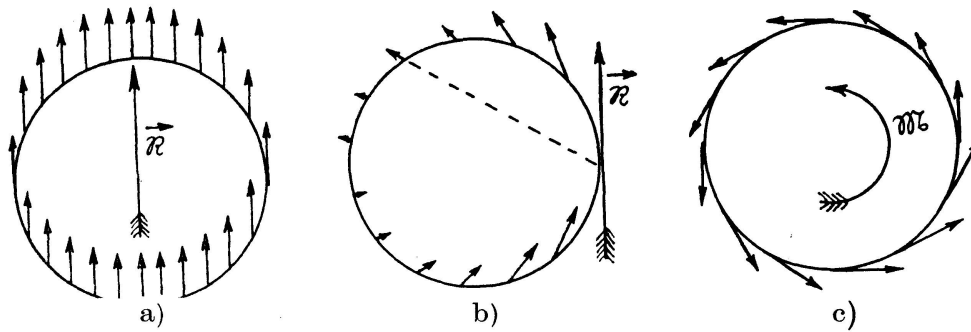


Fig. 5

Dès qu'on a déterminé par les approximations successives (10) la distribution des charges fictives \vec{p} , il est très facile de rechercher le vecteur-tension $\vec{\theta}_n$ sur n'importe quelle facette intérieure du disque, en effectuant l'intégrale (1). Si l'on peut calculer en même temps la somme S des tensions principales en ce point, donnée par l'intégrale (2), on a à sa disposition tout ce qu'il faut pour déterminer complètement, d'un seul coup, l'état de tension en tout point intérieur du disque.

Nous constatons ainsi qu'il suffit, pour résoudre le problème général de l'élasticité plane, de savoir calculer commodément les deux intégrales (1) et (2) rencontrées ci-dessus.

4. Principe de l'appareil sommateur

J'ai construit un appareil permettant d'effectuer ce calcul mécaniquement. Il était séduisant, à première vue, de réaliser un intégrateur; mais cet appareil n'aurait pu se prêter à l'étude des problèmes très nombreux où interviennent des forces concentrées. C'est pourquoi j'ai modifié le problème en divisant le contour du disque en segments Δs et en remplaçant la distribution continue de vecteurs \vec{t} et \vec{p} par les résultantes partielles \vec{T} et \vec{P} de ces vecteurs appliquées aux milieux des segments Δs . Les intégrales (1) et (2) se transforment alors en des sommes ordinaires de la forme

$$\vec{B}(P) = \vec{\theta}_n \Delta s = -\frac{2}{\pi} \Delta s \sum_{\text{contour}} P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{1}_r \quad (12)$$

$$S(P) = -\frac{2}{\pi} \Delta s \sum_{\text{contour}} P(Q) \frac{\cos \varphi}{r} \quad (13)$$

A. Envisageons d'abord la réalisation mécanique de la somme vectorielle $\vec{B}(P)$:

Pour faciliter la réalisation de cette somme, il est avantageux de faire tourner les vecteurs \vec{P} et $\vec{1}_r$ intervenant dans son expression de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 6); nous désignerons à partir de maintenant par un accent les vecteurs tournés de 90° : \vec{P}' , $\vec{1}_r'$, \vec{B}' .

Le sommateur se compose de deux mécanismes distincts:

a) Un mécanisme réalisant le vecteur élémentaire

$$\overline{\Delta B'} = -\frac{2\Delta s}{\pi} P'(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \mathbf{i}'_r$$

b) Un mécanisme opérant la somme vectorielle de ces vecteurs élémentaires. Soit R le point du disque où les sommes sont à calculer.

a) *Le premier mécanisme* (fig. 6) comprend un bras rectiligne TRQ pivotant autour du point R et que, pour simplifier, j'appellerai bras principal. Sur ce bras peut glisser un coulisseau Q qui porte une tringle SQ perpendiculaire au bras. Sur cette tringle glisse un second coulisseau S qui porte un dispositif optique formé d'une ampoule électrique et d'une lentille spéciale qui projette sur le papier un mince trait lumineux Ss parallèle au bras principal et servant de repère. On déplace le coulisseau S jusqu'à ce que le trait lumineux passe par l'extrémité du vecteur P' . On réalise ainsi sur la tringle QS la composante

$$\overline{QS} = P' \cos(\vec{P}', \mathbf{i}'_r) = P \cos \varphi.$$

Sur sa branche opposée, le bras principal porte un chariot à galets T sur lequel est fixée la tringle TV perpendiculaire au bras TRQ . La tringle TV est astreinte à passer par le point fixe V situé sur la normale Rn à la facette considérée au point R à la distance $RV = l$ de R . On réalise ainsi le triangle rectangle RTV dans lequel

$$\overline{RT} = \overline{RV} \cos \alpha = l \cos \alpha.$$

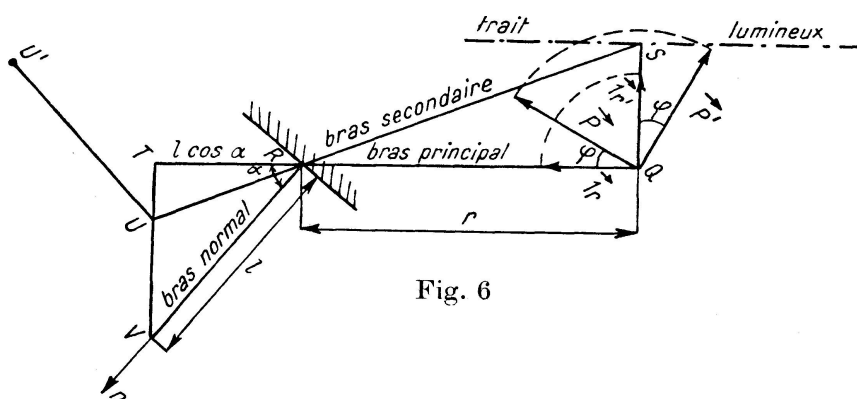


Fig. 6

Le mécanisme comprend aussi un bras secondaire URS pivotant autour du point R et astreint à passer par le point S . Sur sa branche RU , ce bras porte un coulisseau U astreint à se déplacer à la fois sur ce bras et sur la tringle TU perpendiculaire au bras principal. En résumé, tout cet ensemble de bras, tringles et coulisseaux a simplement pour but de réaliser les deux triangles rectangles semblables QRS et QTU ; on peut donc écrire en grandeur et en signe

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{RT}}$$

d'où
$$\overline{TU} = - \frac{\overline{QS} \cdot \overline{RT}}{\overline{QR}}.$$

Mais $\overline{QR} = r$. D'autre part, on s'est arrangé pour avoir

$$\overline{QS} = P \cos \varphi; \quad \overline{RT} = l \cos \alpha.$$

On trouve en remplaçant

$$\overline{TU} = - \frac{P \cos \varphi \cos \alpha}{r} l$$

Le vecteur \overline{TU} vaut ainsi

$$\overline{TU} = - \frac{P \cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{1}_r \cdot l$$

Il sera égal au vecteur élémentaire $\overline{\Delta B}' = - \frac{2}{\pi} P(Q) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{1}_r \cdot \Delta s_Q$

si l'on réalise la condition
$$l = \frac{2 \Delta s_Q}{\pi}.$$

L'appareil a été conçu pour travailler sur des contours dont les points extrêmes ne sont pas distants de plus de 320 millimètres, et sur des vecteurs \vec{P} dont la grandeur maximum est de 100 millimètres. On a admis comme dimension normale des segments Δs 60 millimètres, ce qui impose de prendre pour l la valeur

$$l = \frac{2 \cdot 60}{\pi} = 38,197 \text{ millimètres.}$$

Si les segments Δs n'ont que 30 millimètres, on obtient le vecteur $\overline{\Delta B}'$ en double grandeur. On peut d'ailleurs employer l'appareil avec des segments Δs quelconques; il suffit de multiplier le vecteur obtenu par le rapport $\Delta s/60$.

b) Il nous faut maintenant réaliser la somme vectorielle de tous les vecteurs élémentaires $\overline{\Delta B}'$; c'est le but du *second mécanisme* (fig. 6).

Ce mécanisme se compose d'une tringle UU' articulée en U sur le coulisseau placé à l'intersection du bras secondaire SQU et de la tringle TU . Cette tringle UU' porte un chariot à galets U' muni d'une pointe pouvant se piquer dans le papier de dessin.

En U se trouve un électro-aimant annulaire qui, lorsque le courant y passe, bloque angulairement la tringle UU' sur le coulisseau U' et réalise l'invariabilité de l'angle TUU' . Le chariot U' est muni d'un second électro-aimant qui, lorsque le courant y passe, bloque ce chariot sur la tringle UU' et soulève la pointe au-dessus du papier.

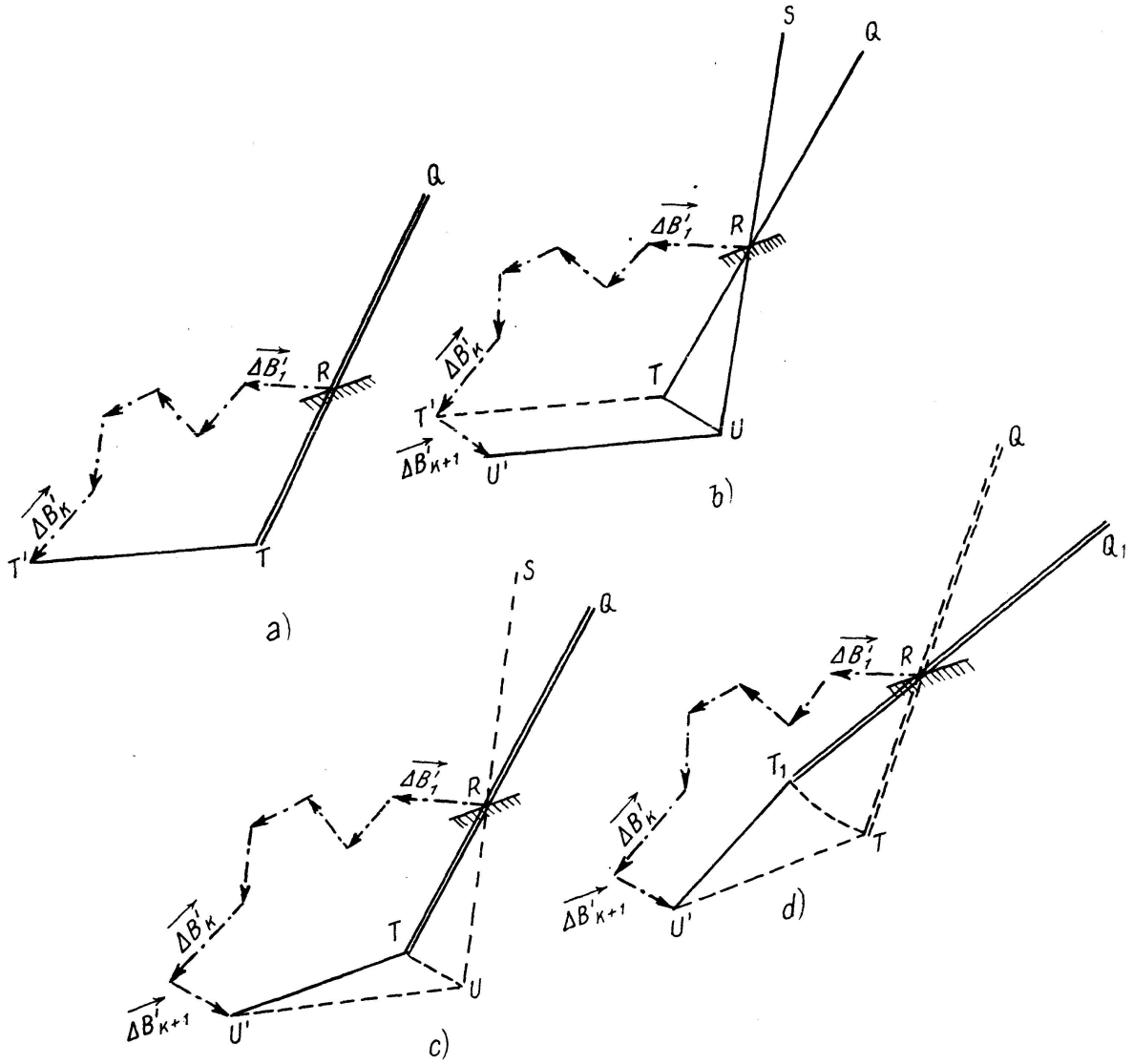


Fig. 7

Supposons qu'à un moment donné de l'opération, la somme vectorielle partielle soit représentée par le vecteur $\vec{RT'} = \sum_1^K \vec{\Delta B'}$ et voyons comment on va ajouter à cette somme le vecteur élémentaire $\vec{T'U} = \vec{\Delta B'_{k+1}}$.

1. Le bras secondaire SRU est initialement appliqué contre le bras principal QRT (fig. 7a). La tringle UU' est à ce moment dans la position TT' . En poussant sur un interrupteur placé au point S , on ferme le circuit des deux électros susdits, ce qui fixe rigidement la tringle TT' sur le coulisseau T et le coulisseau T' sur cette tringle.

2. On déplace le bras secondaire de la position TRQ à la position URS (fig. 7b). La tringle TT' se déplace par translation et vient en UU' . La pointe située en T' décrit le vecteur $\vec{T'U}$ équipollent à $\vec{TU} = \vec{\Delta B'_{k+1}}$. La somme vectorielle $\sum_1^{K+1} \vec{\Delta B'}$ est effectuée, puisque

$$\overrightarrow{RU'} = \overrightarrow{RT'} + \overrightarrow{T'U'} = \sum_1^K \overrightarrow{\Delta B'} + \overrightarrow{\Delta B'_{K+1}}.$$

3. On lâche l'interrupteur en S , ce qui coupe le courant des deux électros et libère la pointe U' qui, sous l'effet d'un ressort, s'enfonce dans le papier; puis on ramène le bras secondaire de sa position URS à sa position TRQ contre le bras principal (fig. 7c). Le chariot U' reste fixé au papier par la pointe dont il est muni et la tringle UU' pivote autour du point fixe U' pour prendre la position TU' .

4. On déplace ensemble les bras principal et secondaire de manière à passer du point Q du contour du disque au point suivant Q_1 . Le point T vient en T_1 et la tringle UT en UT_1 , mais son chariot U' reste fixé au papier par sa pointe en U' (fig. 7d).

A ce moment, l'appareil est prêt à recommencer les opérations 1. à 3. et à ajouter un nouveau vecteur $\overrightarrow{\Delta B'}$ à la somme vectorielle $\sum_1^{K+1} \overrightarrow{\Delta B'}$. Et ainsi de suite.

B. Passons maintenant à l'examen de *la réalisation mécanique de la somme scalaire*

$$S(P) = -\frac{2}{\pi} \Delta s \sum_{\text{contour}} P(Q) \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Le bras principal ORQ (fig. 8) porte une crémaillère OP qui lui est perpendiculaire. Sur cette crémaillère roule un pignon P entraîné par le bras secondaire PRS . Lorsqu'on déplace ce bras de la position ORQ à la position PRS , le pignon parcourt le chemin OP . Les triangles rectangles semblables RSQ et ORP donnent

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{RQ}},$$

ou encore
$$\overline{OP} = \overline{OR} \frac{\overline{SQ}}{\overline{RQ}} = a \frac{P \cos \varphi}{r}.$$

Le pignon entraîne un compte-tours, qui tourne donc d'une quantité proportionnelle à OP . La longueur $\overline{OR} = a$ et le diamètre du pignon sont choisis de manière que le compte-tours fournisse la quantité

$$\frac{2}{\pi} \frac{P \cos \varphi}{r} \Delta s \quad (12)$$

à l'échelle 5 unités = 1 millimètre. L'addition de ces quantités s'effectue par l'intermédiaire d'un électro-aimant E_3 en série avec les électros E_1 et E_2 , de la manière suivante:

1. Le bras secondaire est initialement appliqué contre le bras principal.
2. Quand on déplace le bras secondaire de la position ORQ à la position PRS en pressant sur l'interrupteur S , le courant passe dans l'électro E_3 et rend

le compte-tours solidaire du pignon. Le compte-tours tourne donc de la quantité (12).

3. On lâche l'interrupteur S , ce qui coupe le courant dans l'électro E_3 et la liaison entre le pignon et le compte-tours. On ramène le bras secondaire à sa position initiale ORQ contre le bras principal.

4. On déplace ensemble les deux bras, de manière à passer du point Q du contour au point suivant Q_1 . L'appareil est prêt à recommencer les opérations 2. à 3. et à ajouter un nouveau terme à la somme S .

Il est à peine besoin de signaler que les manoeuvres de l'appareil décrites ci-dessus sont exactement les mêmes que celles nécessaires pour obtenir la somme vectorielle \vec{B} étudiée précédemment. En réalité, l'appareil fait donc «d'une pierre deux coups» sans demander à l'opérateur aucun effort supplémentaire.

Cet exposé détaillé du principe de fonctionnement de l'appareil pourrait faire croire que son maniement est complexe. En réalité, tous les mouvements décrits ci-dessus s'effectuent d'une manière très rapide et quasi-automatique.

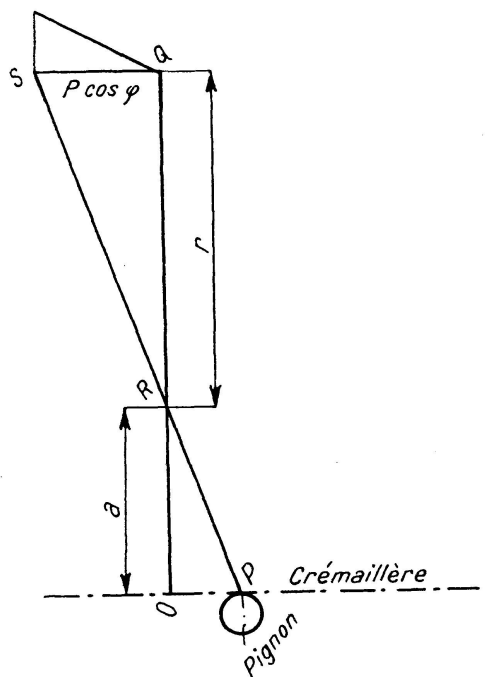


Fig. 8

5. Description du sommateur

En ce qui concerne la réalisation pratique des principes décrits ci-dessus, remarquons que le sommateur doit pouvoir fonctionner en un point intérieur quelconque du disque, c'est-à-dire que le bras principal doit pouvoir effectuer sans entrave un tour complet autour de son pivot.

D'autre part, l'appareil doit pouvoir fonctionner quelle que soit la forme, convexe ou non, du contour C , la grandeur et la direction des charges fictives \vec{P} , et l'orientation de la normale n à la facette considérée.

L'obligation de respecter ces diverses conditions entraîne de sérieuses difficultés d'ordre mécanique et, par conséquent, une certaine complication dans l'agencement des différentes pièces. On s'en rendra compte en examinant les photographies ci-après.

J'ai pu réaliser pratiquement un sommateur fonctionnant suivant les principes décrits grâce à des subventions du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique et du Patrimoine de l'Université de Liège. Je saisis l'occasion qui m'est offerte de les en remercier publiquement. Le cadre de cet article ne me permettant pas de décrire l'appareil en détail je me borne à en donner quelques photographies (fig. 9 à 11). La photo 9 montre la table circulaire de travail, couverte d'un papier de dessin, et le dispositif de suspension réglable qui permet d'amener l'axe R de l'appareil au-dessus de n'importe quel point du dessin.

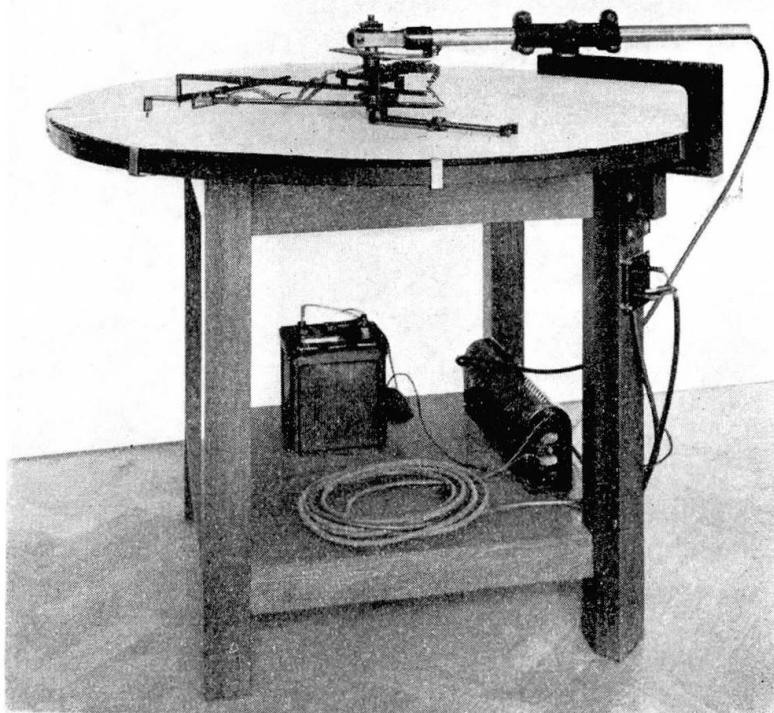


Fig. 9

La vue d'ensemble de l'appareil proprement dit est représentée à la figure 10. La figure 11 donne une vue plus détaillée du mécanisme central. Les lettres indiquées sur ces figures correspondent exactement aux lettres employées dans

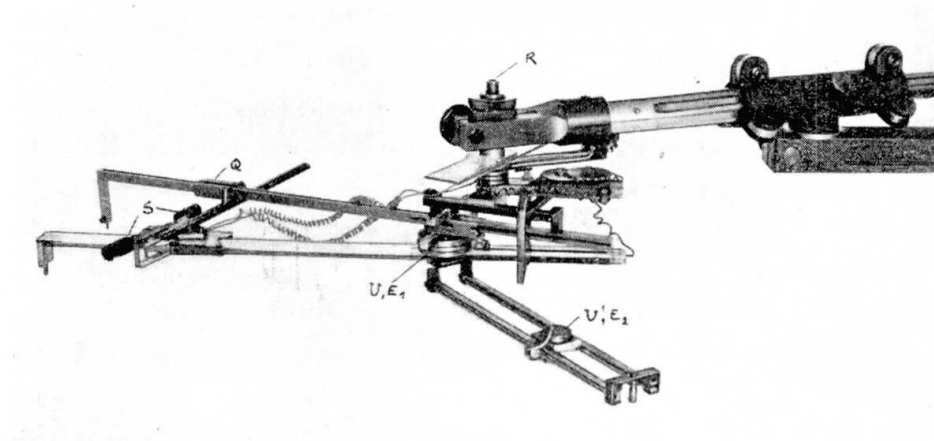


Fig. 10

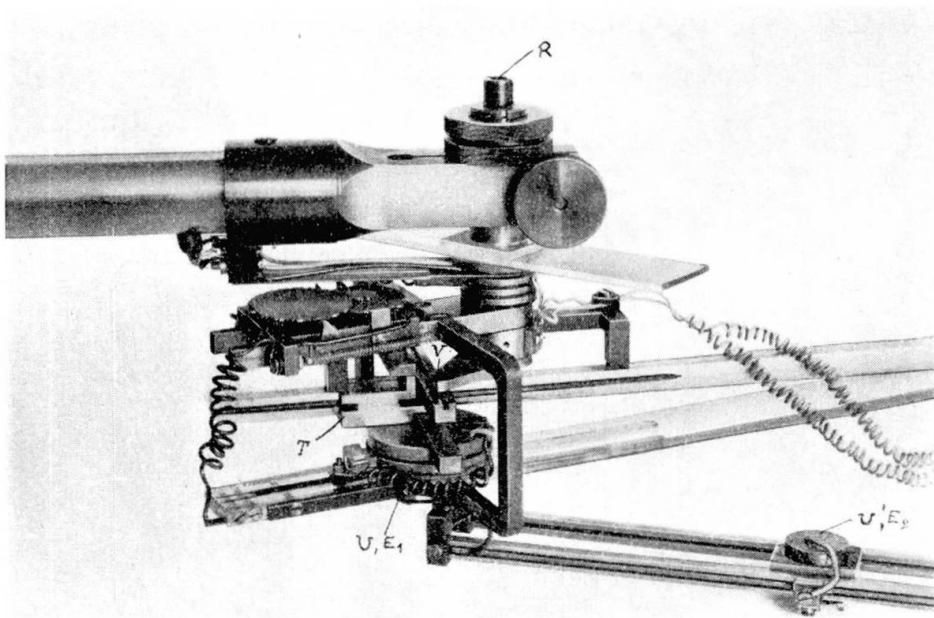


Fig. 11

les schémas de principe des figures 6 à 8, ce qui permet de comprendre le rôle que jouent les différentes pièces.

6. Applications pratiques

L'appareil qui vient d'être décrit a déjà servi à résoudre de nombreux problèmes pratiques. La place dont je dispose ne me permet de reproduire que deux d'entre eux.

La figure 12 représente un noeud plan à trois branches soumis à la flexion. On y a indiqué les efforts extérieurs, ainsi que la distribution des charges fictives obtenue en divisant le contour du disque en 37 segments. L'état de

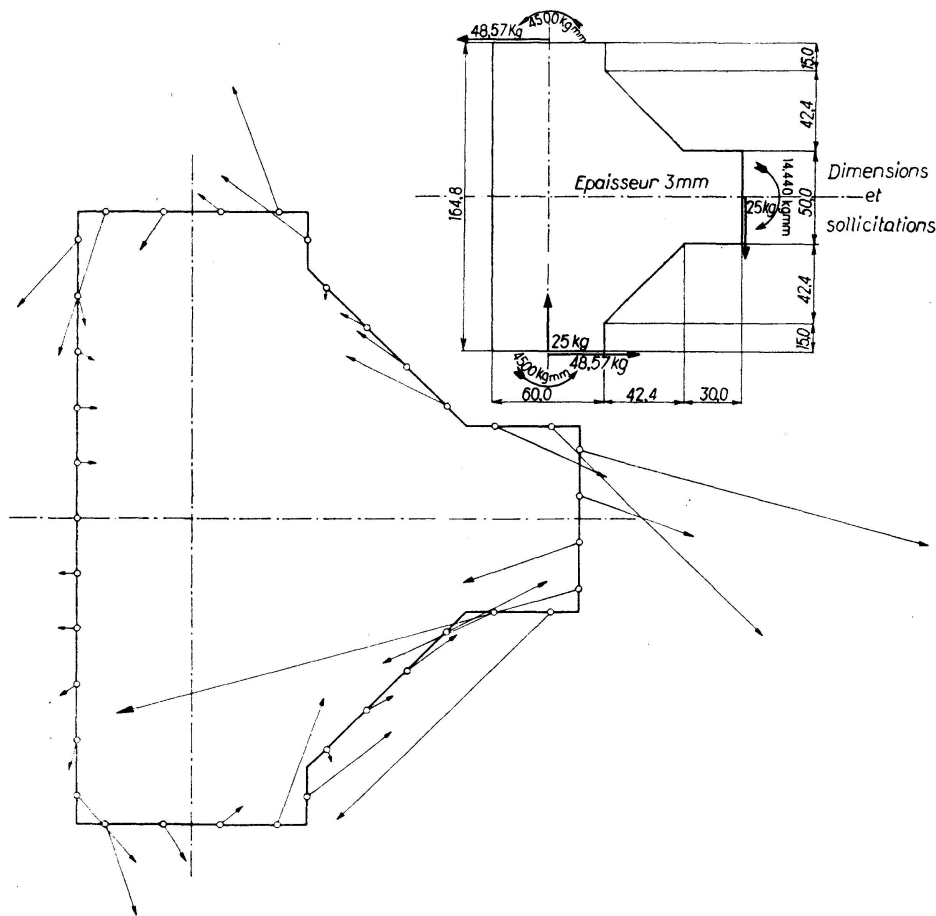


Fig. 12

tension déduit de ces charges fictives à l'aide du sommateur est représenté à la figure 13; on y a reporté les directions principales cotées en valeurs des tensions principales, les deux familles de lignes isostatiques et le diagramme des tensions au contour du disque²⁾.

La figure 14 représente le profil d'un ancien barrage bien connu en Belgique, celui de la Gileppe. J'ai supposé que ce barrage faisait corps avec le terrain rocheux de fondation et j'ai étudié les tensions dues au poids propre du barrage. Ce cas de pièce pesante peut s'étudier avec la même facilité qu'une pièce supposée sans poids, grâce à un théorème démontré par M. Biot³⁾; on suppose d'abord la pièce non pesante, mais plongée dans un liquide fictif ayant le même poids spécifique que la pièce. Il suffit alors de déterminer les tensions intérieures provoquées dans la pièce par les pressions hydrostatiques

²⁾ Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus antérieurement en mesurant les déformations d'un modèle en acier de ce noeud au moyen de tensomètres Huggenberger. — Voir à ce sujet *F. Campus*, Nouveaux Essais sur Modèles de Noeuds Rigides, l'Ossature Métallique, 1940, p 125.

³⁾ *M. A. Biot*, Journal of Applied Mechanics, juin 1935, pp. 41 à 45.

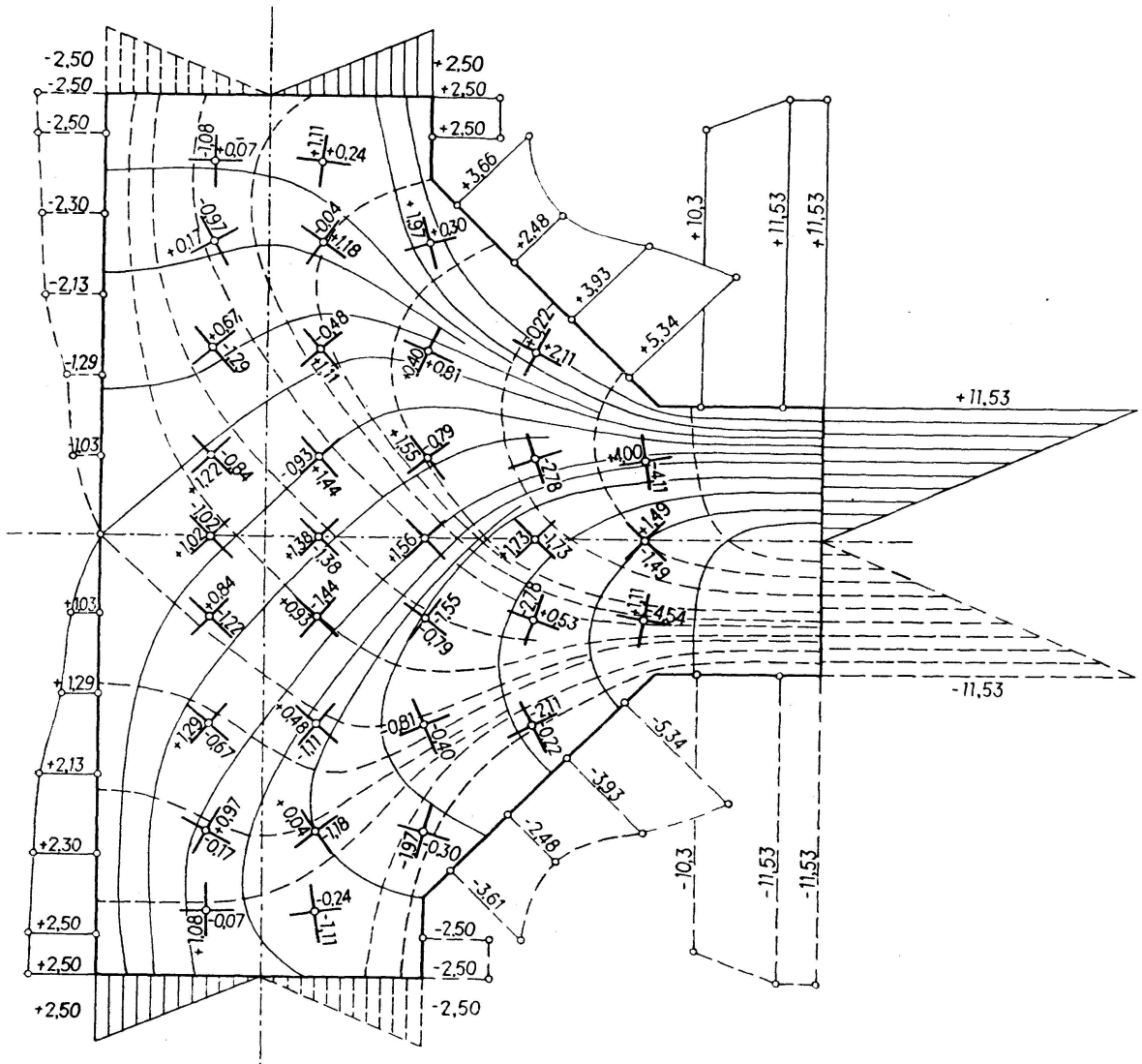


Fig. 13

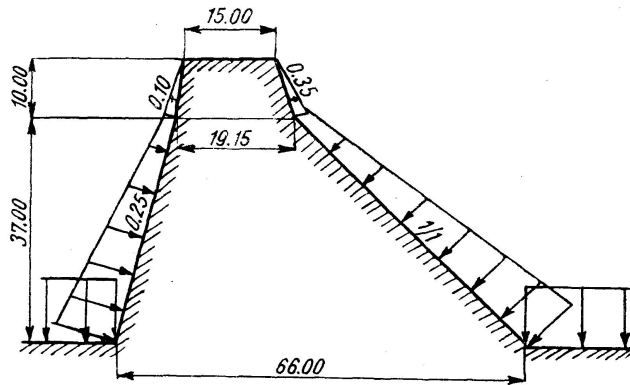


Fig. 14

de ce liquide fictif (fig. 14), puis de soustraire des tensions principales trouvées en chaque point la pression hydrostatique fictive au niveau de ce point. La figure 15 donne la distribution de charges fictives qui correspond à la sollicitation auxiliaire représentée figure 14, ainsi que les tensions principales réelles et le champ complet des lignes isostatiques.

Je crois pouvoir souligner que l'analyse du présent problème par la photo-élasticité soulèverait des difficultés considérables, car il est malaisé d'appliquer le long d'un modèle transparent des pressions variant d'une manière continue suivant une loi fixée d'avance.

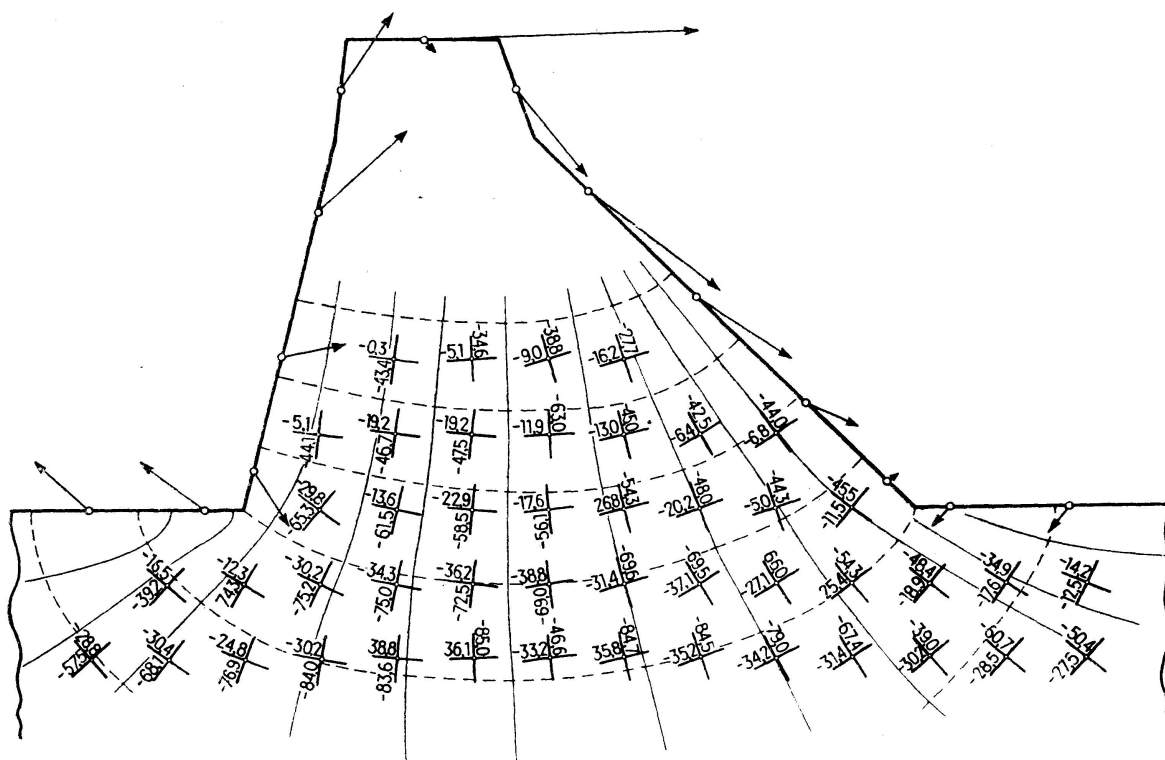


Fig. 15

7. Précision et rapidité du procédé

La précision que donne la nouvelle méthode varie évidemment selon le problème traité et la position du point considéré par rapport au contour de disque. Dans le cas analytiquement connu d'un disque carré soumis à la traction simple, j'ai obtenu des résultats exacts à 2 % près. L'appareil lui-même introduit une erreur négligeable; les erreurs principales sont dues à ce qu'on ne pousse jamais le procédé d'approximations jusqu'à la limite et surtout à ce qu'on remplace la distribution continue des efforts \vec{p} et \vec{t} par leurs résultantes concentrées sur des tronçons de longueur finie. Remarquons que, d'après le principe de Saint-Venant, cette dernière erreur ne se fait sentir que pour les

points du disque dont la distance au bord est moindre que Δs . En ces points, on peut aisément augmenter la précision en fractionnant en deux composantes la ou les deux résultantes \vec{P} les plus proches du point considéré.

En ce qui concerne le temps nécessaire à l'application de la méthode, il est proportionnel au carré du nombre de segments Δs . Pour les deux exemples traités, la distribution des charges fictives peut s'obtenir en 6 à 8 heures de travail. La détermination des tensions intérieures demande à peu près le même temps.

8. *Autres problèmes solubles à l'aide du sommateur*

Les deux exemples que j'ai examinés plus haut rentrent dans la catégorie dite des «problèmes aux tensions», parce qu'on suppose connues les tensions sur le contour du disque. C'est d'ailleurs de loin le groupe de problèmes le plus important en élasticité plane.

Mais l'appareil sommateur a des possibilités plus vastes; il permet de résoudre pratiquement un grand nombre d'autres problèmes d'élasticité; la place dont je dispose ne me permet de donner à ce sujet que de très brèves indications.

Tout d'abord, la méthode peut s'appliquer aux pièces possédant des cavités intérieures; les opérations de calcul deviennent cependant plus complexes que dans les disques pleins.

On peut aussi traiter les «problèmes aux déplacements», c'est-à-dire ceux dans lesquels, au lieu de connaître les vecteurs forces extérieures appliquées au contour, on connaît les vecteurs-déplacements \vec{u} des points de ce contour. On obtient dans ce cas une équation intégrale un peu plus complexe que l'équation (6) et qui se résout également par approximations successives.

Soulignons en passant que la méthode peut s'appliquer aussi bien aux problèmes mixtes, où l'on donne les efforts sur une partie du contour et les déplacements sur le restant. Un tel problème se présente par exemple quand on veut analyser l'état de tension dans une éprouvette comprimée entre les deux plateaux indéformables d'une machine d'essais. Quant aux pièces planes bordées de semelles, ou pièces à plan moyen, j'en ai fait l'analyse antérieurement⁴⁾ et montré que la condition d'équilibre le long d'une semelle s'écrivait

$$\vec{\theta}_n = \frac{1}{h} \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{h} \frac{d}{ds} [\Omega (\sigma_s - \eta \sigma_n) \vec{I}_s]. \quad (13)$$

D'après les formules (3) et (5), on a

$$\vec{\theta}_n = \vec{p} + \vec{B}(p).$$

⁴⁾ Ch. Massonnet: Le calcul des pièces à plan moyen. — Congrès de l'A.I.P.C., Liège, 1948, Rapport Final.

Par ailleurs, σ_n est la projection du vecteur $\vec{\theta}_n$ sur la normale au contour de l'âme, et $\sigma_s = S - \sigma_n$, où S est donné par la formule (2). On peut donc exprimer toutes les quantités intervenant dans l'équation (13) en fonction des charges fictives \vec{p} . En substituant, on obtient une équation intégrale du même type que l'équation (6) et qui se résout encore par approximations successives.

Enfin, l'appareil sommateur permet de traiter tous les problèmes de plaques fléchies par des forces transversales, quelles que soient leur forme, leur mode d'appui et les charges appliquées. Les plaques encastrees, si difficiles à analyser par les méthodes habituelles, se calculent de façon particulièrement simple. J'espère développer cette question dans un mémoire ultérieur.

En terminant, je signale que les nombreux points qui n'ont pu qu'être effleurés ou mentionnés sans démonstration dans cette courte note seront traités en détail dans le mémoire in-extenso qui paraîtra prochainement sur le même sujet⁵).

Résumé

L'auteur expose un nouveau moyen théorique de rechercher les tensions dans un disque élastique plan, quelles que soient sa forme et sa sollicitation. Il étudie ensuite les propriétés générales de la solution proposée.

Les opérations de calcul sont réalisées par un appareil sommateur dont on donne le principe de fonctionnement et la description sommaire. La méthode est ensuite appliquée à deux cas pratiques: un noeud plan à trois branches et un barrage-poids; on donne à ce propos quelques renseignements sur sa précision et sa rapidité.

Pour terminer, l'auteur passe brièvement en revue plusieurs autres problèmes d'élasticité que le nouvel appareil permet de résoudre pratiquement.

Zusammenfassung

Der Verfasser beschreibt eine neue theoretische Methode zur Bestimmung der Spannungen in einer elastischen Scheibe von beliebiger Form und für beliebige Beanspruchung. Die Hauptmerkmale der vorgeschlagenen Berechnungsmethode werden anschließend diskutiert.

Die Rechenoperationen werden ausgeführt von einem Summationsapparat, dessen Arbeitsprinzip erklärt und dessen Konstruktion kurz beschrieben wird. Die Methode wird auf zwei praktische Fälle angewendet: Auf einen ebenen Knotenpunkt mit 3 Anschlußstäben und eine Schwergewichtsmauer. Bei dieser

⁵) Ce mémoire sera publié en septembre 1949 dans le tome IV du Bulletin du Centre d'Etudes, de Recherches et d'Essais scientifiques des Constructions du Génie Civil de l'Université de Liège.

Gelegenheit werden einige Angaben über ihre Genauigkeit und ihre Konvergenz gegeben.

Schließlich erinnert der Verfasser an verschiedene andere Probleme der Elastizitätstheorie, deren praktische Lösung durch den neuen Apparat ermöglicht wird.

Summary

The author describes a new theoretical method for determining the stresses in an elastic disc of any desired shape and for any desired straining. The main features of the proposed method of calculation are then discussed.

The calculating operations are carried out by a summation apparatus, whose working principle is explained and whose construction is briefly described. The method is applied to two practical cases: To a plane assembly point with three connecting members, and to a gravity dam. Opportunity is then taken to give some particulars concerning its accuracy and its convergence.

Finally the author refers to several other problems of the theory of elasticity, whose practical solution is rendered possible by the new apparatus.