Détermination du coefficient de sécurité des câbles des ponts suspendus

Détermination du coefficient de sécurité des câbles des ponts suspendus

Bestimmung des Sicherheitskoeffizienten von Kabeln bei Hängebrücken

Determining the factor of safety for cables of suspension bridges

Prof. Dr. WITOLD WIERZBICKI, Varsovie

Il faut préciser avant tout qu'il s'agit ici des câbles du type américain, c'est à dire des câbles composés de plusieurs centaines de fils parallèles de quelques millimètres de diamètre.

En tirant entièrement profit du matériau du câble, la rupture d'un fil entraîne celle du câble entier. Dans cet état de choses, nous n'avons à prendre en considération que la résistance d'un seul fil du câble.

Désignons par W_i la force qui rompt un fil du câble et par S le plus grand effort admissible dans le fil.

Nous supposons que le nombre d'essais de traction des mêmes fils dont sera composé le câble du pont suspendu est assez grand pour qu'on puisse, en se basant sur des essais, tracer le diagramme de la courbe des écarts de *Gauss* (fig. 1). Les abcisses de ce diagramme représentent les écarts $\Delta W = W_i - W_0$ de la valeur moyenne arithmétique, tandis que les ordonnées s'expriment par l'équation

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^z \tag{1}$$

où:

$$z = -h^2 \Delta W^2 \quad , \quad h = \frac{1}{\mu\sqrt{2}} \ , \tag{2}$$

et μ désigne la valeur de l'écart moyen ΔW.

Dans la suite, nous distinguerons d'une part *le coefficient de sécurité:*

$$n = \frac{W_0}{S} \tag{3}$$

où W_0 désigne la valeur moyenne des résultats de tous les essais effectués, d'autre part l'*indice de sécurité p*, probabilité qu'aucun des fils du câble, et par cela même le câble entier, ne soit rompu.

Nous considérons l'indice de sécurité comme fixé à l'avance. On peut l'établir par le calcul pratique, et en particulier en se basant sur la comparaison des probabilités d'événements tels que déraillement de trains, incendies etc., qui ont été bien étudiés du point de vue de la statistique.

En considérant l'indice de sécurité p comme valeur connue, nous calculons le coefficient de sécurité n en nous basant sur les considérations suivantes.

Du point O du diagramme de *Gauss* pour la relation $y = f(\varDelta W)$ nous portons dans le système de coordonées $\varDelta W O Y'$ (fig. 1) le segment OO_1, égal à W_0 et nous obtenons le diagramme de la relation $y = f(W)$ dans le système de coordonnés $W O_1 Y$ (fig. 2).

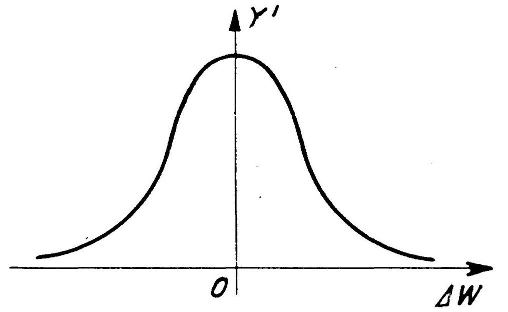

Fig. 1

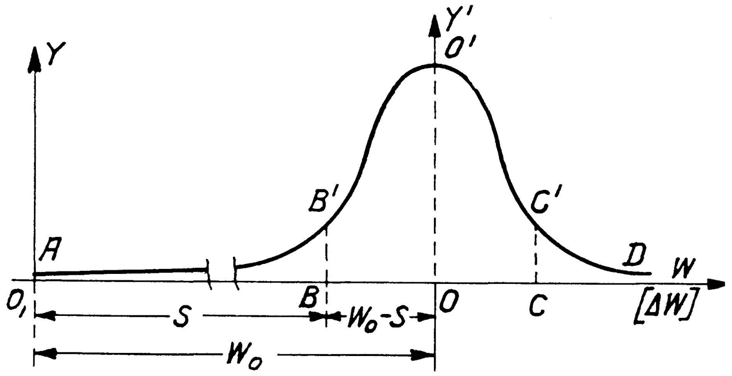

Fig. 2

Nous portons du point O_1, dans l'échelle de la figure, la force S. Si la valeur W de la charge de rupture du fil est égale ou inférieure à l'effort S dans le fil, le fil doit se rompre. Si au contraire W dépasse S, la rupture n'aura pas lieu. Dans ce dernier cas, la valeur W de l'effort qui provoque la rupture du fil se trouve entre les limites S et $+\infty$, ce qui correspond aux écarts $\varDelta W$ de la valeur W_0 contenue entre $-(W_0 - S)$ et $+\infty$ (l'origine des coordonnées étant O).

La probabilité Ω_3 que l'écart $\varDelta W$ soit contenu entre les limites $-(W_0 - S)$ et $+\infty$ et par cela même la probabilité que la charge de rupture W du fil soit contenue entre les limites S et $+\infty$ est exprimée sur la figure 2 par la surface $B\,B'\,D$, de sorte que

$$\Omega_3 = \text{surface } B\ B'\ O'\ C'\ D = \tfrac{1}{2} \text{ surface } B\ B'\ O'\ C'\ C + \tfrac{1}{2} \text{ surface } O\ O'\ D\ . \quad (4)$$

Autrement dit, c'est la probabilité que la charge de rupture du fil ne soit pas moindre que la force S.

Ainsi qu'il résulte des propriétés de la courbe de *Gauss:*

$$\text{la surface } B\ B'\ O'\ C'\ C = \Theta[h(W_0 - S)] \quad (5)$$

$$\text{la surface } O,\ O'\ D = 1 \quad (6)$$

où Θ désigne la fonction de *Laplace* et s'exprime par la formule

$$\Theta(h\Delta W) = 2\int_0^{\Delta W} \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^z d(\Delta W)\,. \quad (7)$$

Par conséquent, l'expression (4) prend la forme

$$\Omega_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Theta[h(W_0 - S)]\ . \quad (8)$$

Dans le cas traité, la probabilité Ω que la rupture du câble n'ait pas lieu est égale à la probabilité Ω_3, c'est-à-dire que:

$$\Omega = \Omega_3 \quad (9)$$

D'autre part, comme la probabilité que le fil ne soit pas rompu s'exprime par un certain indice de sécurité p connu et admis d'avance, nous arrivons à l'équation:

$$\Omega = p \quad (10)$$

Il résulte des formules (8), (9) et (10) que:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Theta[h(W_0 - S)] = p\ . \quad (11)$$

En résolvant l'équation (11) par rapport à S, à l'aide des tables de la fonction de *Laplace*, nous obtenons le plus grand effort S admissible. C'est à partir de la formule (1) que nous trouvons enfin le coefficient de sécurité n.

Si les hypothèses sur lesquelles nous nous sommes basés pour calculer l'effort dans le fil ne peuvent être considérées comme étant entièrement réalisées, l'équation (10) doit être remplacée par l'équation[1]) ou:

$$\Omega_1 \cdot \Omega_2 \cdot \Omega_3 = p \quad (12)$$

et dans l'équation (11) la quantité S doit être remplacée par

$$S_g = S(1 + \kappa) \quad (13)$$

---

[1]) Witold Wierzbicki, La sécurité des constructions considérée comme problème de probabilité. Annales de l'Académie Polonaise des Sciences Techniques, Vol. **VII**, Varsovie 1946.

Dans ces formules:

Ω_1 désigne la probabilité que les hypothèses sur lesquelles étaient basés les calculs de l'effort S ne provoquent pas un accroissement de cet effort au delà d'une certaine limite, Ω_2 désigne la probabilité que dans des systèmes hyperstatiques, les oscillations des coefficients d'élasticité E ne provoquent pas une augmentation de l'effort S au-delà d'une certaine limite, S désigne comme précédement l'effort dans le fil du câble détérminé, en admettant que les formules sur lesquelles on s'est basé pour le calculer sont exactes, κ désigne l'accroissement de l'effort S représenté comme fraction de cet effort et causé par la réalisation incomplète des hypothèses sur lesquelles a été basé le calcul de l'effort S (probabilité Ω_1) et par l'oscillation de la valeur du coefficient E (probabilité Ω_2) dans des systèmes hyperstatiques.

Tous les calcules ci-dessus sont basés sur la loi des écarts de *Gauss* qui s'exprime par l'équation (1) et s'appuie sur les principes suivants:

1. La valeur moyenne est la valeur la plus probable des résultats obtenus par expérience,
2. les mêmes écarts par rapport à la valeur moyenne arithmétique soit positifs, soit négatifs, sont également probables,
3. de plus petit écarts par rapport à la valeur moyenne sont plus probables que de grands écarts.

L'exactitude de ces principes a été confirmée par l'expérience.

Nous proposons encore, pour vérifier la loi de *Gauss*, une méthode simple basée sur la théorie de l'aiguille de *Buffon*.

D'après cette théorie, si on jette une aiguille de longueur a sur un système de droites parallèles éloignées l'une de l'autre de d, la probabilité que l'aiguille coupera une de ces droites est

$$\nu_0 = \frac{2\,a}{\pi\,d}\,. \tag{14}$$

Nous pouvons arriver à la valeur (14) d'une autre manière et par la voie de la statistique. Nous jetons à cet effet une aiguille a sur un système de parallèles à l'aide de séries de jets, avec k jets dans chaque série, N étant le nombre total de séries.

Désignons par b_i le nombre d'intersections dans la série i et par K_i celui des séries ayant b_i intersections et formons le diagramme de la relation

$$\nu = f(\varDelta\, b) \tag{15}$$

entre le rapport $\nu = K_i : N$ et l'écart $\varDelta\, b$ d'une certaine valeur b_i par rapport à la valeur moyenne arithmétique b_0, obtenue à partir de toutes les valeurs b_i. Le diagramme ainsi tracé porte le nom de polygone de probabilité (fig. 3). En recouvrant ce polygone par la courbe (1), calculée pour les écarts $\varDelta\, b$, nous

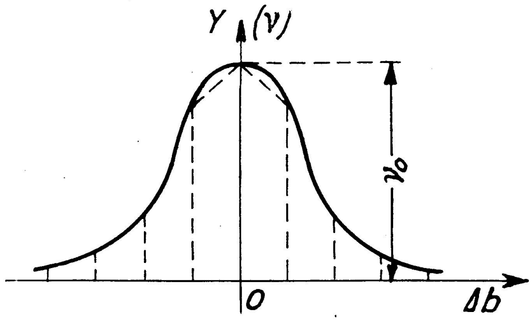

Fig. 3

devrions obtenir entre les ordonnées de la courbe et de celles du polygone une conformité d'autant plus étroite que le nombre des essais est plus grand.

Les calculs effectués pour $N = 160$ et $k = 50$ ont donné des résultats favorables.

Résumé

Ce mémoire expose l'application, aux câbles composés de fils, de la méthode (publiée auparavant par le même auteur) de détermination des coefficients de sécurité sur la base des probabilités. La résistance du câble est déterminée complètement par la résistance du fil W. W_0 désigne la valeur moyenne des valeurs W_i, données par les essais. Les écarts $W_i - W_0$ forment la courbe de Gauss (fig. 1, formule 1). Le coefficient de sécurité n s'exprime par la formule (3) où S désigne l'effort admissible dans le fil. La surface $B\ B'\ O'\ C'\ D$ (fig. 2) exprime la probabilité Ω_3 que $W > S$, c'est-à-dire que la rupture du câble n'ait pas lieu. L'effort S est donné par l'équation (11) où p désigne *le coefficient de sécurité*, c'est-à-dire une certaine valeur de probabilité, donnée a priori. Si les hypothèses sur lesquelles est basé le calcul de l'effort dans le fil ne sont pas entièrement réalisées, il faut remplacer l'équation (10) par l'équation (12) où $\Omega_1 \cdot \Omega_2$ désigne la probabilité que l'effort dans le fil ne dépasse pas une certaine valeur limite S_g. Enfin l'auteur propose une nouvelle méthode pour vérifier la loi de Gauss. Cette méthode est basée sur la théorie de l'aiguille de Buffon.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Anwendung der schon früher durch den gleichen Autor veröffentlichten Methode der Bestimmung des Sicherheitskoeffizienten auf Grund der Wahrscheinlichkeit für Drahtseilkabel. Die Festigkeit des Kabels ist vollständig bestimmt durch die Festigkeit des Drahtes W. W_0 bedeutet das Mittel der Werte W_i, welche durch Versuche gegeben sind. Die Differenzen $W_i - W_0$ bilden die Gauss'sche Kurve (Fig. 1, Formel 1). Der Sicherheitskoeffizient n wird ausgedrückt durch die Formel (3) worin S die

zulässige Drahtkraft bedeutet. Die Fläche $BB'O'C'D$ (Fig. 2) drückt die Wahrscheinlichkeit Ω_3 aus, daß $W > S$, das heißt, daß der Bruch des Kabels nicht eintritt. Die Kraft S ist durch die Gleichung (11) gegeben, wobei p den Sicherheitskoeffizient bedeutet, der zum Vornherein in der Berechnung als ein Wahrscheinlichkeitswert gegeben ist. Wenn die Voraussetzungen, auf denen die Berechnung der Drahtkraft aufbaut, nicht ganz erfüllt sind, so muß die Gleichung (10) durch Gleichung (12) ersetzt werden, in der Ω_1, Ω_2 die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, daß die Drahtkraft einen gewissen Grenzwert S_g nicht überschreitet. Zum Schluß schlägt der Autor eine neue Methode zur Nachprüfung des Gesetzes von Gauss vor. Diese beruht auf der Theorie des Nadelproblems von Buffon.

Summary

The present paper relates to the application of the method, already published by the same author, for determining the factors of safety for wire rope cables on the basis of probability. The strength of the cable is fully determined from the strength of the wire W. W_0 signifies the average of the values W, which are found by testing. The differences $W_i - W_0$ form the Gauss curve (Fig.1, formula 1). The factor of safety n is expressed by the formula (3), where S signifies the admissible force in the wire. The area $BB'O'C'D$ (Fig. 2) expresses the probality Ω_3 that $W > S$, i.e. that rupture of the cable does not occur. If the assumptions on which the calculation of the force in the wire is based are not perfectly fulfilled, equation (10) must be replaced by equation (12), in which Ω_1, Ω_2 signify the probability that the force in the wire does not exceed a certain limit S_g. The author concludes by proposing a new method for checking the Gauss law. This method is based on Buffon's theory of the needle problem.