

# Les portiques dans l'espace

Autor(en): **Bažant, Zd.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **11 (1951)**

PDF erstellt am: **02.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-11426>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Les portiques dans l'espace

*Die räumlichen Rahmentragwerke*

*Spatial supporting frames*

Prof. Dr. ZD. BAŽANT, Prague

Les portiques plans sont le plus souvent reliés par des poutres perpendiculaires aux plans des portiques en un système spatial (fig. 1). Supposons dans les nœuds des assemblages rigides dans l'espace et envisageons un *système orthogonal* dont les barres sont parallèles aux trois axes perpendiculaires  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Supposons aussi que toutes les barres sont symétriques par rapport à deux plans passant par l'axe de chaque barre et parallèles aux axes des coordonnées  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ; ces plans sont les plans principaux des barres.

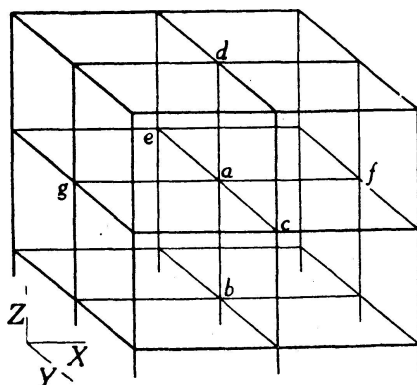


Fig. 1

Si la barre  $ab$  est sollicitée à la flexion dans le plan principal  $cab$ , les barres  $ac$ ,  $ad$ ,  $ae$  sont fléchies dans le même plan et les barres  $af$ ,  $ag$  sont sollicitées à la torsion. La flexion de la barre  $ab$  dans le plan  $bag$  sollicite à la flexion, dans le même plan, les barres  $ag$ ,  $ad$ ,  $af$  et à la torsion les barres  $ac$ ,  $ae$ . Si la barre  $ac$  est fléchie dans le plan horizontal, les barres  $ag$ ,  $ae$ ,  $af$  sont fléchies dans le même plan et les barres  $ab$ ,  $ad$  sont sollicitées à la torsion. Le système dans l'espace agit sur le nœud  $a$  par trois composantes des forces parallèles aux axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  et par trois moments  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  par rapport

aux axes  $X, Y, Z$ . Prenons pour positif chaque moment tournant autour d'un axe dans le sens des aiguilles d'une montre, si l'on regarde la barre suivant le sens positif de l'axe parallèle.

Le moment  $M_x$  qui tourne autour de l'axe  $X$  et agit dans le plan perpendiculaire à  $X$ , fléchit les barres situées dans ce plan et dont les axes sont parallèles à  $Y, Z$  et sollicite à la torsion les barres dont les axes sont parallèles à  $X$ . En négligeant l'effet des forces axiales (dilatation des barres), on constate que les nœuds  $a, c, f, e, g$  se déplacent dans le plan horizontal qui les contient. Si la barre  $ab \equiv I$  (fig. 2) est sollicitée à la flexion dans le plan perpendiculaire à l'axe  $X$  qui est le plan de symétrie de la barre, le moment  $M_{1a,x}$  au nœud  $a$  de la barre  $I$ , tournant autour de l'axe  $X$ , est donné par la formule connue de la méthode de déformation pour les systèmes plans:

$$M_{1a,x} = k_{1,x} (2\varphi_{a,x} + \varphi_{b,x} - 3\psi_{1,x}) + \mathfrak{M}_{1a,x}; \quad (1a)$$

$\varphi_{a,x}$  ( $\varphi_{b,x}$ ) est la rotation au point  $a$  ( $b$ ) de la barre  $ab$  dans le plan perpendiculaire à  $X$ ,  $\psi_{1,x}$  est l'angle formé par la corde de l'axe déformé de la barre  $I$  dans le plan perpendiculaire à  $X$  et  $\mathfrak{M}_{1a,x}$  est le moment au nœud  $a$  de la barre  $I$ , tournant autour de l'axe  $X$ , pour la barre  $ab$  encastree aux deux extrémités. Pour la flexion dans le plan vertical perpendiculaire à  $Y$ , on a:

$$M_{1a,y} = k_{1,y} (2\varphi_{a,y} + \varphi_{b,y} - 3\psi_{1,y}) + \mathfrak{M}_{1a,y}. \quad (1b)$$

Les coefficients de rigidité  $k_{1,x}, k_{1,y}$  ont les valeurs:

$$k_{1,x} = \frac{2EJ_{1,x}}{s_1}, \quad k_{1,y} = \frac{2EJ_{1,y}}{s_1}; \quad (2)$$

$s_1$  est la longueur de la barre  $I$ ,  $J_{1,x}$  ( $J_{1,y}$ ) le moment d'inertie de la section de la barre par rapport à l'axe central parallèle à  $X$  ( $Y$ ) et  $E$  le coefficient d'élasticité longitudinale.

Le moment agissant sur la barre  $ab$  dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Z$  parallèle à l'axe de la barre sollicite la barre à la torsion. L'angle de torsion pour l'unité de longueur est  $\vartheta = \frac{M_k}{GJ_k}$ , où  $M_k$  est le moment de torsion,  $G$  le coefficient d'élasticité transversale et  $J_k = \gamma hb^3$  le moment de rigidité à la torsion pour une section rectangulaire de dimensions  $b < h$ . Le coefficient numérique  $\gamma$  est une fonction du rapport  $h/b$ . L'angle de torsion de deux sections à la distance réciproque  $s$ , est  $\varphi_k = \vartheta s = \frac{M_k s}{GJ_k}$ . En posant:

$$\frac{GJ_k}{s} = k', \quad (3)$$

qui est le coefficient de rigidité à la torsion, on a  $M_k = k' \varphi_k$ . En désignant par  $\varphi_a, \varphi_b$  les angles de torsion aux points  $a, b$ , on obtient  $\varphi_k = \varphi_a - \varphi_b$ . Pour la barre  $I$ , sollicitée par un moment dans le plan perpendiculaire à  $Z$ , on a le moment de torsion au nœud  $a$ :

$$\mathfrak{M}_{1a,z} = k_{1,z} (\varphi_{a,z} - \varphi_{b,z}). \quad (4)$$

Le coefficient d'élasticité transversale est  $G = \frac{E m}{2(m+1)}$ ;  $m$  est la constante de Poisson. Pour le béton, on peut prendre  $m=6$ , alors  $G/E = 3/7$ . Si l'on prend dans le cas de la flexion:

$$k = \mu \frac{J}{s} \quad (2a)$$

au lieu de  $k = 2 EJ/s$ , en multipliant  $k$  par  $\mu/2E$ , on doit prendre dans le cas de la torsion au lieu de  $k' = G J_k/s$ , pour le béton, la valeur:

$$k' = \frac{\mu}{2E} \cdot \frac{G J_k}{s} = \mu \frac{J_k}{s} \cdot \frac{G}{2E} = \mu \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{J_k}{s}. \quad (3a)$$

D'après cette formule, on doit calculer pour une construction en béton le coefficient  $k_{1,z}$ .

Si au nœud  $a$  (fig. 2) on enlève les barres et si on les remplace par leurs actions au nœud (moments, forces axiales et transversales), on obtient un système de forces dans l'espace qui est lié par trois conditions d'équilibre des moments: pour les moments par rapport à l'axe  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ :

$$\sum_{i=1}^6 M_{ia,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 M_{ia,y} = 0, \quad \sum_{i=1}^6 M_{ia,z} = 0. \quad (5)$$

Au nœud  $a$  à l'intérieur du système, il y a six barres dont les axes sont parallèles à  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Parmi les six moments à chaque axe, il y a quatre moments de flexion et deux moments de torsion dans les barres dont les axes sont perpendiculaires à l'axe des moments. Dans le cas de la fig. 2, les moments  $M_{5a,x}$ ,  $M_{6a,x}$  sont des moments de torsion, les autres sont des moments de flexion. Quant aux moments par rapport à l'axe  $Y$  ( $Z$ ), les moments de torsion agissent sur les barres 2, 4 (1, 3). Dans les équations aux nœuds (5), on doit substituer, pour les moments de flexion, d'après les formules (1) et, pour les moments de torsion, d'après (4). Ces formules supposent que les forces agissant aux barres coupent leurs axes et que les barres sollicitées à la torsion ne sont pas sous l'effet des moments de torsion provenant par ex. des poutres perpendiculaires entre les nœuds.

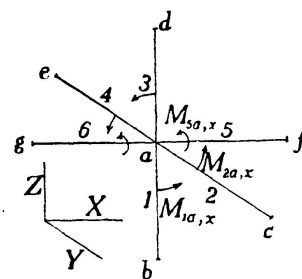


Fig. 2

Dans chaque nœud, il y a dans l'espace trois rotations inconnues  $\varphi$  et chaque nœud fournit trois équations des moments. On doit calculer aussi les déviations des barres  $\psi$  ou les translations des nœuds. Les translations indépendantes des nœuds s'obtiennent en supposant des articulations aux nœuds et aux appuis et en joignant au système un nombre de barres fictives nécessaire pour rendre ce système strictement indéformable; ces barres peuvent être des barres fictives d'appui, reliant les nœuds aux points fixes en dehors du système.

On obtient les équations pour le calcul des translations aux nœuds<sup>1)</sup> en appliquant le principe des travaux virtuels. Si l'on retient seulement l'effet des moments, le principe des travaux virtuels peut s'écrire sous la forme:

$$\sum P(\Delta p) = \sum \int \frac{M(M) ds}{E J};$$

le signe  $\int$  concerne chaque barre séparément et  $\Sigma$  à droite toutes les barres du système.  $P$  est la charge donnée,  $M$  le moment provenant des charges;  $(\Delta p)$  est une translation quelconque du point d'application de  $P$  dans la direction de la charge,  $(M)$  le moment correspondant à la déformation choisie  $(\Delta p)$ .

Pour obtenir l'équation nécessaire au calcul des translations des nœuds, on peut écrire la dernière équation pour le cas d'une dilatation  $\Delta_1 = 1$  d'une barre fictive, en supposant des dilatations nulles dans toutes les autres barres fictives et les rotations aux nœuds en tous sens  $\varphi = 0$ . Cette déformation exclut les torsions des barres et donne dans la barre  $i \equiv mn$  une déviation  $\psi_{iI}$  et les moments aux nœuds d'après (1)  $(M_{im}) = (M_{in}) = -3 k_i \psi_{iI}$ , car les barres sont exemptes de charges. Le moment fléchissant à la distance  $x$  ( $x'$ ) de  $m$  ( $n$ ) est

$$(M) = (M_{im}) \frac{x'}{s} - (M_{in}) \frac{x}{s} = -3 k_i \psi_{iI} \frac{x' - x}{s}; \quad s = mn.$$

Dans la même section les charges donnent le moment:

$$M = \mathfrak{M} + \frac{M_{im} x' - M_{in} x}{s},$$

si l'on désigne par  $\mathfrak{M}$  le moment d'une poutre simple; le sens positif des moments  $(M_{im})$ ,  $(M_{in})$  agissant sur la barre  $mn$  est opposé au sens des aiguilles d'une montre. Le principe des travaux virtuels est alors:

$$\sum P(\Delta p) = - \sum_{i=1}^r \int \left( \mathfrak{M} + \frac{M_{im} x' - M_{in} x}{s} \right) 3 k_i \psi_{iI} \frac{x' - x}{s_i} \cdot \frac{dx}{E J_i}.$$

La sommation concerne toutes les barres du système dont les déviations  $\psi_{iI}$  s'obtiennent à partir de la déformation du système définie par  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = \Delta_3 = \dots = 0$  et tous les  $\varphi = 0$ . En substituant  $k_i = 2 E J_i / s_i$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \sum P(\Delta p) = & -6 \sum_{i=1}^r \frac{\psi_{iI}}{s_i^2} \int \left( \mathfrak{M} + \frac{M_{im} x' - M_{in} x}{s_i} \right) (x' - x) dx \\ & -6 \sum_{i=1}^r \frac{\psi_{iI}}{s_i^2} \left[ \int \mathfrak{M} x' dx - \int \mathfrak{M} x dx + \frac{M_{im}}{s_i} \int (x' - x) x' dx - \frac{M_{in}}{s_i} \int (x' - x) x dx \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a:} \quad \int_0^s (x' - x) x dx &= \int_0^s (x' - x) x' dx = \frac{s^3}{6}, \quad 6 \left( \int \mathfrak{M} x' dx - \int \mathfrak{M} x dx \right) \\ &= -(\mathfrak{M}_{im} - \mathfrak{M}_{in}); \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> V. G. KRUCK: „Die Methode der Grundkoordinaten“, Zurich 1937.

$\mathfrak{M}_{im} (\mathfrak{M}_{in})$  est le moment d'appui de la barre  $mn$  encastree aux deux extremités.

Par suite: 
$$\sum P (\Delta p) = - \sum_{i=1}^r \psi_{iI} (M_{im} - \mathfrak{M}_{im} + M_{in} - \mathfrak{M}_{in}).$$

Les moments aux noeuds ont des valeurs:

$$M_{im} = k_i (2 \varphi_m + \varphi_n - 3 \psi_i) + \mathfrak{M}_{im}, M_{in} = k_i (2 \varphi_n + \varphi_m - 3 \psi_i) + \mathfrak{M}_{in}.$$

Pour chaque barre  $i \equiv mn$  on peut remplacer sa charge  $\Sigma P$  par des charges aux noeuds correspondant à une barre parfaitement encastree, parce que nous supposons tous les  $\varphi = 0$ . Les charges au point  $m$ , provenant ainsi de toutes les barres, donnent une resultanté horizontale  $H_m$  et une resultanté verticale  $V_m$ . La dilatation  $\Delta_1 = 1$  donne au point  $m$  une translation  $\rho_{mI}$  avec la composante horizontale  $\rho'_{mI}$  et la composante verticale  $\rho''_{mI}$ . On a alors  $\Sigma P (\Delta p) = \Sigma (H_m \rho'_{mI} + V_m \rho''_{mI})$ , en prennant les translations  $\rho$  positives dans le sens des forces  $H_m, V_m$  positives. L'équation resultanté est

$$\sum (H_m \rho'_{mI} + V_m \rho''_{mI}) = -3 \sum_{i=1}^r k_i \psi_{iI} (\varphi_m + \varphi_n - 2 \psi_i); \tag{6}$$

la somme à gauche contient tous les noeuds, la somme à droite toutes les barres dont le nombre est  $r$ .

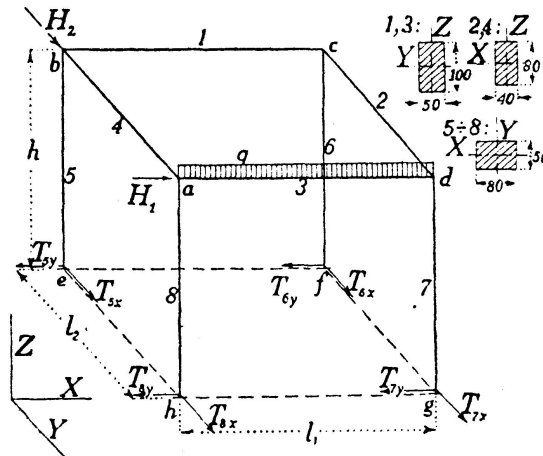


Fig. 3

*Exemple:* Quatre barres horizontales 1, 2, 3, 4 (fig. 3) sont soutenues par des barres verticales 5, 6, 7, 8 encastrees en bas. Les dimensions sont  $l_1 = 6, l_2 = 5, h = 4m$ . La barre  $ad$  porte une charge uniforme  $q = 2,8 \text{ t/m}$ ; aux noeuds  $a, b$  agissent des charges horizontales  $H_1 = 5, H_2 = 4 \text{ t}$  dans la direction des barres 3, 4. Les barres en beton ont des sections representees sur la fig. 3.

En negligeant les dilatations des barres, on a toujours les noeuds  $a, b, c, d$ , dans le meme plan horizontal. Les barres verticales ont des deviations differentes  $\psi$ .

Pour les sections et longueurs données des barres, on calcule d'abord les coefficients de rigidité à la flexion par rapport à deux axes et à la torsion. Les moments d'inertie  $J$  (en  $m^4$ ) sont:

$$\text{pour la barre } 1, 3: J_y = \frac{1}{12} 0,5 \cdot 1^3 = 0,0417, J_z = \frac{1}{12} 1 \cdot 0,5^3 = 0,01042, \\ J_x = \gamma h b^3 = 0,2286 \cdot 1 \cdot 0,5^3 = 0,0286,$$

$$\text{pour la barre } 2, 4: J_x = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,8^3 = 0,0171, J_z = \frac{1}{12} 0,8 \cdot 0,4^3 = 0,00427, \\ J_y = \gamma h b^3 = 0,2286 \cdot 0,8 \cdot 0,4^3 = 0,0117,$$

$$\text{pour la barre } 5, 6, 7, 8: J_x = \frac{1}{12} 0,8 \cdot 0,5^3 = 0,00833, J_y = \frac{1}{12} 0,5 \cdot 0,8^3 = 0,0213, \\ J_z = \gamma h b^3 = 0,2023 \cdot 0,8 \cdot 0,5^3 = 0,02023.$$

Pour les moments de rigidité en torsion ( $J_x$  pour la barre 1, 3,  $J_y$  pour la barre 2, 4 et  $J_z$  pour les barres verticales), les coefficients numériques  $\gamma$ , dépendant des dimensions du rectangle, sont contenus dans les aide-mémoires de la résistance des matériaux.

Les coefficients de rigidité à la flexion  $k$  se calculent d'après les formules (2a), à la torsion d'après (3a). En prenant  $\mu = 1000$ , on obtient:

$$k_{1,x} = \frac{3}{14} \mu \frac{J_{1,x}}{l_1} = 1,02 = k_{3,x}, k_{1,y} = \mu \frac{J_{1,y}}{l_1} = 6,95 = k_{3,y}, \\ k_{1,z} = \mu \frac{J_{1,z}}{l_1} = 1,73 = k_{3,z};$$

$$k_{2,x} = k_{4,x} = \mu \frac{J_{2,x}}{l_2} = 3,42, k_{2,y} = k_{4,y} = \frac{3}{14} \mu \frac{J_{2,y}}{l_2} = 0,50, \\ k_{2,z} = k_{4,z} = \mu \frac{J_{2,z}}{l_2} = 0,85;$$

$$k_{5,x} = k_{6,x} = k_{7,x} = k_{8,x} = \mu \frac{J_{5,x}}{h} = 2,08, k_{5,y} = k_{6,y} = k_{7,y} = k_{8,y} = \mu \frac{J_{5,y}}{h} = 5,32, \\ k_{5,z} = k_{6,z} = k_{7,z} = k_{8,z} = \frac{3}{14} \mu \frac{J_{5,z}}{h} = 1,08.$$

La charge agit seulement sur la barre 3, pour laquelle on a:

$$\mathfrak{M}_{3a,y} = -\mathfrak{M}_{3d,y} = -\frac{1}{12} q l_1^2 = -8,4 \text{ tm.}$$

Les autres  $\mathfrak{M}_i$  sont nulles pour toutes les barres.

Choisissons comme inconnues les rotations des nœuds, à chaque nœud autour de trois axes dans l'espace:  $\varphi_{a,x}, \varphi_{a,y}, \varphi_{a,z}; \varphi_{b,x}, \varphi_{b,y}, \varphi_{b,z}; \dots$ . En outre, on doit calculer des déviations  $\psi_i$  des barres, avec pour chaque barre également trois composantes  $\psi_{i,x}, \psi_{i,y}, \psi_{i,z}$ . Ces déviations ne sont pas indépendantes; elles sont fonctions des translations des nœuds  $a, b, c, d$  dans le

plan horizontal qui les contient. Les translations indépendantes sont les dilatations des barres fictives d'appui qui complètent le système donné en un système strictement indéformable, en supposant des articulations aux nœuds et aux appuis. Pour cela il suffit de quatre barres d'appui  $I, II, III, IV$  qui relient les nœuds, dans le plan horizontal  $abcd$ , suivant le prolongement des côtés de ce rectangle, avec des points fixes  $p, q, r, s$  (fig. 4).

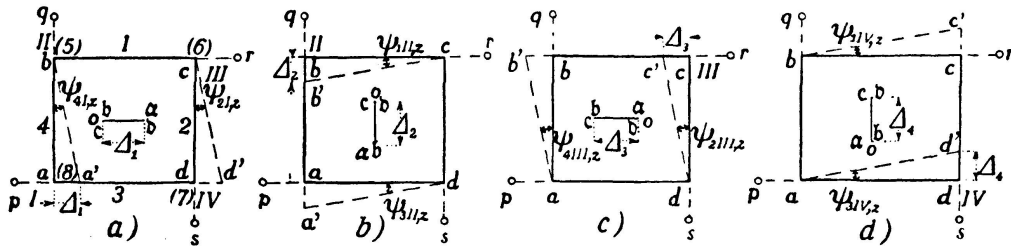


Fig. 4

Pour la dilatation  $\Delta_1 = \overline{aa'} = 1$  de la barre  $I \equiv pa$  (fig. 4a) la figure Williot ( $0abc'd$ ) donne pour le nœud  $d$  la translation  $\overline{dd'} = \overline{aa'}$ ; pour  $b, c$  la translation nulle. Cette déformation donne des déviations sur les barres 2, 4 et sur les barres verticales 7, 8. Sur les barres 2, 4, il y a rotation dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Z$ :  $\psi_{4I,z} = \psi_{2I,z} = -\frac{1}{l_2}$ ; sur les barres 7, 8 il se produit des déviations dans le plan perpendiculaire à  $Y$ :  $\psi_{7I,y} = \psi_{8I,y} = \frac{1}{h}$ . On prend ici comme positif les angles qui tournent dans le sens de l'horloge, si l'on regarde le plan de rotation de la barre du côté positif de l'axe des coordonnées, vers l'origine des coordonnées. Le sens positif des angles  $\varphi, \psi$  coïncide avec le sens positif des moments agissant aux extrémités des barres, sur les nœuds, dans les plans perpendiculaires aux axes des coordonnées. La translation  $\Delta_1 = 1$  ne produit aucune déviation sur les barres 1, 3, 5, 6.

La dilatation de la barre  $bq \equiv II$  seule  $\Delta_2 = \overline{bb'} = 1$  (fig. 4b) produit des déviations sur les barres 1, 3 dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Z$ :  $\psi_{1II,z} = \psi_{3II,z} = -\frac{1}{l_1}$  et sur les barres 5, 8 dans le plan perpendiculaire à  $X$ :  $\psi_{5II,x} = \psi_{8II,x} = -\frac{1}{h}$ . La dilatation  $\Delta_3 = \overline{cc'} = 1$  de la barre  $cr \equiv III$  seule (fig. 4c) donne dans le plan perpendiculaire à  $Z$  des déviations  $\psi_{2III,z} = \psi_{4III,z} = -\frac{1}{l_2}$  et dans le plan perpendiculaire à  $Y$  des déviations  $\psi_{5III,y} = \psi_{6III,y} = -\frac{1}{h}$ . Enfin la dilatation  $\Delta_4 = \overline{dd'} = 1$  de la barre  $ad \equiv IV$  seule (fig. 4d) produit dans le plan perpendiculaire à  $Z$  les déviations  $\psi_{1IV,z} = \psi_{3IV,z} = -\frac{1}{l_1}$  et dans le plan perpendiculaire à  $X$ :  $\psi_{6IV,x} = \psi_{7IV,x} = \frac{1}{h}$ .

La déviation totale de la barre  $i$  dans le plan perpendiculaire à  $X$  est

$$\psi_{i,x} = \Delta_1 \psi_{iI,x} + \Delta_2 \psi_{iII,x} + \Delta_3 \psi_{iIII,x} + \Delta_4 \psi_{iIV,x};$$

des formules analogues s'appliquent aux axes  $Y, Z$ . Les barres 1, 2, 3, 4



restent dans le plan horizontal et subissent seulement une déviation dans le plan perpendiculaire à  $Z$ :

$$\psi_{1,z} = \psi_{3,z} = \Delta_2 \psi_{1II,z} + \Delta_4 \psi_{1IV,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1},$$

$$\psi_{2,z} = \psi_{4,z} = \Delta_1 \psi_{2I,z} + \Delta_3 \psi_{2III,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}.$$

Sur les barres verticales, il se produit des déviations dans les plans perpendiculaires à  $X$  et  $Y$ :

$$\psi_{5,x} = \psi_{8,x} = \Delta_2 \psi_{5II,x} = -\frac{\Delta_2}{h}, \quad \psi_{5,y} = \psi_{6,y} = \Delta_3 \psi_{5III,y} = -\frac{\Delta_3}{h},$$

$$\psi_{6,x} = \psi_{7,x} = \Delta_4 \psi_{6IV,x} = \frac{\Delta_4}{h}, \quad \psi_{7,y} = \psi_{8,y} = \Delta_1 \psi_{7I,y} = \frac{\Delta_1}{h}.$$

Toutes les autres valeurs  $\psi$  sont nulles. Aux appuis encastés, on a:

$$\varphi_e = \varphi_f = \varphi_g = \varphi_h = 0.$$

Chaque nœud  $m$  donne trois équations d'équilibre des moments:

$$\sum_{i=1}^n M_{im,x} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{im,y} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{im,z} = 0;$$

ces équations expriment l'équilibre des moments dans le plan perpendiculaire à  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  au point  $m$  et concernent toutes les  $n$  barres  $i$  assemblées au nœud  $m$ .

Au nœud  $a$  sont assemblées les barres 3, 4, 8 et on a ici les équations:

$$M_{3a,x} + M_{4a,x} + M_{8a,x} = 0, \quad M_{3a,y} + M_{4a,y} + M_{8a,y} = 0, \quad M_{3a,z} + M_{4a,z} + M_{8a,z} = 0.$$

$M_{3a,x}$ ,  $M_{4a,y}$ ,  $M_{8a,z}$  sont des moments de torsion pour lesquels on substitue d'après la formule (4); les autres sont des moments de flexion donnés par l'équation (1a). On a alors

$$M_{3a,x} = k_{3,x} (\varphi_{a,x} - \varphi_{d,x}), \quad M_{4a,x} = k_{4,x} (2\varphi_{a,x} + \varphi_{b,x} - 3\psi_{4,x}),$$

$$M_{8a,x} = k_{8,x} (2\varphi_{a,x} + \varphi_{h,x} - 3\psi_{8,x}).$$

La première équation d'équilibre donne:

$$\varphi_{a,x} (k_{3,x} + 2k_{4,x} + 2k_{8,x}) + k_{4,x} \varphi_{b,x} - k_{3,x} \varphi_{d,x} - 3k_{8,x} \psi_{8,x} = 0.$$

En substituant  $\psi_{4,x} = 0$ ,  $\varphi_{h,x} = 0$ ,  $\psi_{8,x} = -\frac{\Delta_2}{h}$  et les valeurs numériques  $k$ ,  $h$ , on obtient:

$$12,02 \varphi_{a,x} + 3,42 \varphi_{b,x} - 1,02 \varphi_{d,x} = -1,56 \Delta_2. \quad (a_x)$$

La deuxième équation donne d'une manière analogue:

$$k_{3,y} (2\varphi_{a,y} + \varphi_{d,y} - 3\psi_{3,y}) + M_{3a,y} + k_{4,y} (\varphi_{a,y} - \varphi_{b,y}) + k_{8,y} (2\varphi_{a,y} + \varphi_{h,y} - 3\psi_{8,y}) = 0.$$

On a ici:  $\psi_{3,y} = 0$ ,  $\varphi_{h,y} = 0$ ,  $\psi_{8,y} = \frac{\Delta_1}{h}$ ,  $M_{3a,y} = -\frac{1}{12} q l_1^2 = -8,4 \text{ tm}$ ;

pour  $h$ ,  $k$  on substitue les valeurs numériques et le résultat est:

$$25,04 \varphi_{a,y} - 0,50 \varphi_{b,y} + 6,95 \varphi_{d,y} = 3,99 \Delta_1 + 8,4. \quad (a_y)$$

La troisième équation pour le nœud  $a$  est:

$$k_{3,z}(2\varphi_{a,z} + \varphi_{d,z} - 3\psi_{3,z}) + k_{4,z}(2\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} - 3\psi_{4,z}) + k_{8,z}((\varphi_{a,z} - \varphi_{h,z})) = 0.$$

Pour  $\varphi_{h,z} = 0$ ,  $\psi_{3,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1}$ ,  $\psi_{4,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}$  et avec les valeurs données de  $k$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  on obtient:  $6,24 \varphi_{a,z} + 0,85 \varphi_{b,z} + 1,73 \varphi_{d,z} = -0,51 \Delta_1 - 0,865 \Delta_2 - 0,51 \Delta_3 - 0,865 \Delta_4.$   $(a_z)$

Au nœud  $b$  il y a trois équations d'équilibre:

$$M_{1b,x} + M_{4b,x} + M_{5b,x} = k_{1,x}(\varphi_{b,x} - \varphi_{c,x}) + k_{4,x}(2\varphi_{b,x} + \varphi_{a,x} - 3\psi_{4,x}) + k_{5,x}(2\varphi_{b,x} + \varphi_{e,x} - 3\psi_{5,x}) = 0;$$

en substituant  $\psi_{4,x} = 0$ ,  $\varphi_{e,x} = 0$ ,  $\psi_{5,x} = -\frac{\Delta_2}{h}$  et les valeurs de  $h$ ,  $k$ , on a

$$3,42 \varphi_{a,x} + 12,02 \varphi_{b,x} - 1,02 \varphi_{c,x} = -1,56 \Delta_2. \quad (b_x)$$

De même:  $M_{1b,y} + M_{4b,y} + M_{5b,y} = k_{1,y}(2\varphi_{b,y} + \varphi_{c,y} - 3\psi_{1,y}) + k_{4,y}(\varphi_{b,y} - \varphi_{a,y}) + k_{5,y}(2\varphi_{b,y} + \varphi_{e,y} - 3\psi_{5,y}) = 0$ ,

$\psi_{1,y} = 0$ ,  $\varphi_{e,y} = 0$ ,  $\psi_{5,y} = -\frac{\Delta_3}{h}$  et le résultat numérique est:

$$-0,50 \varphi_{a,y} + 25,04 \varphi_{b,y} + 6,95 \varphi_{c,y} = -3,99 \Delta_3. \quad (b_y)$$

Enfin:  $M_{1b,z} + M_{4b,z} + M_{5b,z} = k_{1,z}(2\varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} - 3\psi_{1,z}) + k_{4,z}(2\varphi_{b,z} + \varphi_{a,z} - 3\psi_{4,z}) + k_{5,z}(\varphi_{b,z} - \varphi_{e,z}) = 0$ ,

$$\psi_{1,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1}, \quad \psi_{4,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}, \quad \varphi_{e,z} = 0;$$

la troisième équation numérique est:

$$0,85 \varphi_{a,z} + 6,24 \varphi_{b,z} + 1,73 \varphi_{c,z} = -0,51 \Delta_1 - 0,865 \Delta_2 - 0,51 \Delta_3 - 0,865 \Delta_4. \quad (b_z)$$

Au nœud  $c$ :

$$M_{1c,x} + M_{2c,x} + M_{6c,x} = k_{1,x}(\varphi_{c,x} - \varphi_{b,x}) + k_{2,x}(2\varphi_{c,x} + \varphi_{d,x} - 3\psi_{2,x}) + k_{6,x}(2\varphi_{c,x} + \varphi_{f,x} - 3\psi_{6,x}) = 0,$$

$$\psi_{2,x} = 0, \quad \varphi_{f,x} = 0, \quad \psi_{6,x} = \frac{\Delta_4}{h}, \quad -1,02 \varphi_{b,x} + 12,02 \varphi_{c,x} + 3,42 \varphi_{d,x} = 1,56 \Delta_4; \quad (c_x)$$

$$M_{1c,y} + M_{2c,y} + M_{6c,y} = k_{1,y}(2\varphi_{c,y} + \varphi_{b,y} - 3\psi_{1,y}) + k_{2,y}(\varphi_{c,y} - \varphi_{d,y}) + k_{6,y}(2\varphi_{c,y} + \varphi_{f,y} - 3\psi_{6,y}) = 0,$$

$$\psi_{1,y} = 0, \quad \varphi_{f,y} = 0, \quad \psi_{6,y} = -\frac{\Delta_3}{h}, \quad +6,95 \varphi_{b,y} + 25,04 \varphi_{c,y} - 0,50 \varphi_{d,y} = -3,99 \Delta_3; \quad (c_y)$$

$$M_{1c,z} + M_{2c,z} + M_{6c,z} = k_{1,z}(2\varphi_{c,z} + \varphi_{b,z} - 3\psi_{1,z}) + k_{2,z}(2\varphi_{c,z} + \varphi_{d,z} - 3\psi_{2,z}) + k_{6,z}(\varphi_{c,z} - \varphi_{f,z}) = 0,$$

$$\psi_{1,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1}, \quad \psi_{4,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}, \quad \varphi_{f,z} = 0,$$

$$+1,73 \varphi_{b,z} + 6,24 \varphi_{c,z} + 0,85 \varphi_{d,z} = -0,51 \Delta_1 - 0,865 \Delta_2 - 0,51 \Delta_3 - 0,865 \Delta_4. \quad (c_z)$$

Au nœud  $d$ :

$$M_{2d,x} + M_{3d,x} + M_{7d,x} = k_{2,x}(2\varphi_{d,x} + \varphi_{c,x} - 3\psi_{2,x}) + k_{3,x}(\varphi_{d,x} - \varphi_{a,x}) + k_{7,x}(2\varphi_{d,x} + \varphi_{g,x} - 3\psi_{7,x}) = 0,$$

$$\psi_{2,x} = 0, \varphi_{g,x} = 0, \psi_{7,x} = \frac{\Delta_4}{h}, \quad -1,02\varphi_{a,x} + 3,42\varphi_{c,x} + 12,02\varphi_{d,x} = 1,56\Delta_4; \quad (d_x)$$

$$M_{2d,y} + M_{3d,y} + M_{7d,y} = k_{2,y}(\varphi_{d,y} - \varphi_{c,y}) + k_{3,y}(2\varphi_{d,y} + \varphi_{a,y} - 3\psi_{3,y}) + k_{7,y}(2\varphi_{d,y} + \varphi_{g,y} - 3\psi_{7,y}) = 0,$$

$$\psi_{3,y} = 0, \varphi_{g,y} = 0, \mathfrak{M}_{3d,y} = +\frac{1}{12}ql_1^2 = +8,4 \text{ tm}, \quad \psi_{7,y} = \frac{\Delta_1}{h},$$

$$6,95\varphi_{a,y} - 0,50\varphi_{c,y} + 25,04\varphi_{d,y} = 3,99\Delta_1 - 8,4; \quad (d_y)$$

$$M_{2d,z} + M_{3d,z} + M_{7d,z} = k_{2,z}(2\varphi_{d,z} + \varphi_{c,z} - 3\psi_{2,z}) + k_{3,z}(2\varphi_{d,z} + \varphi_{a,z} - 3\psi_{3,z}) + k_{7,z}(\varphi_{d,z} - \varphi_{g,z}) = 0,$$

$$\psi_{2,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}, \quad \psi_{3,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1}, \quad \varphi_{g,z} = 0,$$

$$1,73\varphi_{a,z} + 0,85\varphi_{c,z} + 6,24\varphi_{d,z} = -0,51\Delta_1 - 0,865\Delta_2 - 0,51\Delta_3 - 0,865\Delta_4. \quad (d_z)$$

Outre les équations aux nœuds, on peut disposer pour le calcul des inconnues  $\varphi$  et  $\Delta$  des équations du type (6). Comme nous négligeons l'effet de la dilatation des barres, il n'y a pas de translations verticales aux nœuds:  $\rho'' = 0$ . La dilatation de la barre fictive d'appui  $\Delta_n = 1$  (les autres  $\Delta = 0$  et tous les  $\varphi = 0$ ) ne produit de la torsion dans aucune barre et l'équation (6) vaut pour un système dans l'espace. Pour  $\Delta_1 = 1$  l'équation donne ici:

$$-3[k_{8,y}\psi_{8I,y}(\varphi_{a,y} + \varphi_{h,y} - 2\psi_{8,y}) + k_{7,y}\psi_{7I,y}(\varphi_{d,y} + \varphi_{g,y} - 2\psi_{7,y}) + k_{4,z}\psi_{4I,z}(\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} - 2\psi_{4,z}) + k_{2,z}\psi_{2I,z}(\varphi_{c,z} + \varphi_{d,z} - 2\psi_{2,z})] = H_1\rho'_{aI}.$$

D'après la fig. 4a, on a:  $\rho'_{aI} = \rho'_{dI} = 1$ ,  $\rho'_{bI} = \rho'_{cI} = 0$ ,  $\varphi_{h,y} = \varphi_{g,y} = 0$ ; nous avons obtenu déjà:

$$\psi_{7I,y} = \psi_{8I,y} = \frac{1}{h}, \quad \psi_{4I,z} = \psi_{2I,z} = -\frac{1}{l_2}, \quad \psi_{8,y} = \psi_{7,y} = \frac{\Delta_1}{h}, \quad \psi_{2,z} = \psi_{4,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{l_2}.$$

Les valeurs numériques de  $h$ ,  $l_2$ ,  $k$ ,  $H_1$  mènent à l'équation:

$$-3,99\varphi_{a,y} - 3,99\varphi_{d,y} + 0,51\varphi_{a,z} + 0,51\varphi_{b,z} + 0,51\varphi_{c,z} + 0,51\varphi_{d,z} + 4,398\Delta_1 + 0,408\Delta_3 = 5. \quad (I)$$

D'une manière analogue on obtient pour  $\Delta_2 = 1$  l'équation:

$$-3[k_{8,x}\psi_{8II,x}(\varphi_{a,x} + \varphi_{h,x} - 2\psi_{8,x}) + k_{5,x}\psi_{5II,x}(\varphi_{b,x} + \varphi_{e,x} - 2\psi_{5,x}) + k_{1,z}\psi_{1II,z}(\varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} - 2\psi_{1,z}) + k_{3,z}\psi_{3II,z}(\varphi_{a,z} + \varphi_{d,z} - 2\psi_{3,z})] = H_2\rho'_{bII}.$$

On substitue ici:  $\rho'_{bII} = 1$ ,  $\varphi_{h,x} = \varphi_{e,x} = 0$ ,  $\psi_{5II,x} = \psi_{8II,x} = -\frac{1}{h}$ ,  $\psi_{1II,z} = \psi_{3II,z} = -\frac{1}{l_1}$ ,  $\psi_{5,x} = \psi_{8,x} = -\frac{\Delta_2}{h}$ ,  $\psi_{1,z} = \psi_{3,z} = -\frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1}$  et l'équation devient avec les valeurs numériques de  $h$ ,  $l_1$ ,  $k$ ,  $H_2$ :

$$1,56\varphi_{a,x} + 1,56\varphi_{b,x} + 0,865(\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} + \varphi_{d,z}) + 2,126\Delta_2 + 0,576\Delta_4 = 4. \quad (II)$$

La dilatation  $\Delta_3 = 1$  fournit:

$$-3 [k_{5,y} \psi_{5III,y} (\varphi_{b,y} + \varphi_{e,y} - 2\psi_{5,y}) + k_{6,y} \psi_{6III,y} (\varphi_{c,y} + \varphi_{f,y} - 2\psi_{6,y}) + k_{2,z} \psi_{2III,z} (\varphi_{c,z} + \varphi_{d,z} - 2\psi_{2,z}) + k_{4,z} \psi_{4III,z} (\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} - 2\psi_{4,z})] = 0;$$

les valeurs connues:

$$\psi_{5III,y} = \psi_{6III,y} = -\frac{1}{h}, \quad \psi_{2III,z} = \psi_{4III,z} = -\frac{1}{l_2}, \quad \psi_{5,y} = \psi_{6,y} = -\frac{\Delta_3}{h},$$

$$\psi_{2,z} = \psi_{4,z} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2}, \quad \varphi_{e,y} = \varphi_{f,y} = 0$$

et les valeurs numériques de  $h, l_2, k$  donnent l'équation:

$$3,99 \varphi_{b,y} + 3,99 \varphi_{c,y} + 0,51 (\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} + \varphi_{d,z}) + 0,408 \Delta_1 + 4,398 \Delta_3 = 0. \quad (\text{III})$$

Enfin  $\Delta_4 = 1$  fournit l'équation:

$$-3 [k_{6,x} \psi_{6IV,x} (\varphi_{c,x} + \varphi_{f,x} - 2\psi_{6,x}) + k_{7,x} \psi_{7IV,x} (\varphi_{d,x} + \varphi_{g,x} - 2\psi_{7,x}) + k_{1,z} \psi_{1IV,z} (\varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} - 2\psi_{1,z}) + k_{3,z} \psi_{3IV,z} (\varphi_{a,z} + \varphi_{d,z} - 2\psi_{3,z})] = 0;$$

avec

$$\varphi_{f,x} = \varphi_{g,x} = 0, \quad \psi_{6IV,x} = \psi_{7IV,x} = \frac{1}{h}, \quad \psi_{1IV,z} = \psi_{3IV,z} = -\frac{1}{l_1},$$

$$\psi_{6,x} = \psi_{7,x} = \frac{\Delta_4}{h}, \quad \psi_{1,z} = \psi_{3,z} = -\frac{(\Delta_2 + \Delta_4)}{l_1}$$

et avec les valeurs numériques de  $h, l_1, k$  on obtient:

$$-1,56 \varphi_{c,x} - 1,56 \varphi_{d,x} + 0,865 (\varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} + \varphi_{d,z}) + 0,576 \Delta_2 + 2,136 \Delta_4 = 0. \quad (\text{IV})$$

Les seize équations résultantes forment quatre groupes de quatre équations. Les équations  $(a_x), (b_x), (c_x), (d_x)$  contiennent les inconnues  $\varphi_{a,x}, \varphi_{b,x}, \varphi_{c,x}, \varphi_{d,x}, \Delta_2$  et  $\Delta_4$ ; on peut déterminer ainsi les rotations  $\varphi$  en fonction des translations  $\Delta_2, \Delta_4$ . La matrice de ces équations linéaires est:

Équation	Côté gauche				Côté droit	
	$\varphi_{a,x}$	$\varphi_{b,x}$	$\varphi_{c,x}$	$\varphi_{d,x}$	$\Delta_2$	$\Delta_4$
$(a_x)$	+ 12,02	+ 3,42	-	- 1,02	- 1,56	-
$(b_x)$	+ 3,42	+ 12,02	- 1,02	-	- 1,56	-
$(c_x)$	-	- 1,02	+ 12,02	+ 3,42	-	+ 1,56
$(d_x)$	- 1,02	-	+ 3,42	+ 12,02	-	+ 1,56

En résolvant ces équations (par ex. à l'aide des déterminants), on obtient:

$$\varphi_{a,x} = \varphi_{b,x} = -0,1015 \Delta_2 + 0,0067 \Delta_4, \quad \varphi_{c,x} = \varphi_{d,x} = -0,0067 \Delta_2 + 0,1015 \Delta_4.$$

Le groupe des équations  $(a_y) \dots (d_y)$  contient aussi quatre angles  $\varphi$  et deux translations  $\Delta_1, \Delta_3$  outre le membre absolu  $\mathfrak{M}$ ; la matrice est:

Équation	Côté gauche				Côté droit		
	$\varphi_{a,y}$	$\varphi_{b,y}$	$\varphi_{c,y}$	$\varphi_{d,y}$	$\Delta_1$	$\Delta_3$	$\mathfrak{M}$
$(a_y)$	+ 25,04	- 0,50	-	+ 6,95	+ 3,99	-	+ 8,4
$(b_y)$	- 0,50	+ 25,04	+ 6,95	-	-	- 3,99	-
$(c_y)$	-	+ 6,95	+ 25,04	- 0,50	-	- 3,99	-
$(d_y)$	+ 6,95	-	- 0,50	+ 25,04	+ 3,99	-	- 8,4

La solution donne:

$$\begin{aligned} \varphi_{a,y} &= 0,1251 \Delta_1 - 0,00195 \Delta_3 + 0,4662, & \varphi_{b,y} &= 0,00195 \Delta_1 - 0,1251 \Delta_3 + 0,0129, \\ \varphi_{c,y} &= 0,00195 \Delta_1 - 0,1251 \Delta_3 - 0,0129, & \varphi_{d,y} &= 0,1251 \Delta_1 - 0,00195 \Delta_3 - 0,4662. \end{aligned}$$

Dans le groupe des équations  $(a_z) \dots (d_z)$ , il y a quatre angles  $\varphi$  et quatre translations  $\Delta$  comme inconnues; la matrice des équations est:

Équation	Côté gauche				Côté droit			
	$\varphi_{a,z}$	$\varphi_{b,z}$	$\varphi_{c,z}$	$\varphi_{d,z}$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$
$(a_z)$	+ 6,24	+ 0,85	-	+ 1,73	- 0,51	- 0,865	- 0,51	- 0,865
$(b_z)$	+ 0,85	+ 6,24	+ 1,73	-	- 0,51	- 0,865	- 0,51	- 0,865
$(c_z)$	-	+ 1,73	+ 6,24	+ 0,85	- 0,51	- 0,865	- 0,51	- 0,865
$(d_z)$	+ 1,73	-	+ 0,85	+ 6,24	- 0,51	- 0,865	- 0,51	- 0,865

On obtient ici simplement:

$$\begin{aligned} \varphi_{a,z} = \varphi_{b,z} = \varphi_{c,z} = \varphi_{d,z} &= \frac{-0,51 \Delta_1 - 0,865 \Delta_2 - 0,51 \Delta_3 - 0,865 \Delta_4}{6,24 + 0,85 + 1,73} \\ &= -0,0578 \Delta_1 - 0,0981 \Delta_2 - 0,0578 \Delta_3 - 0,0981 \Delta_4. \end{aligned}$$

En substituant dans les équations (I), (II), (III), (IV) les valeurs calculées des angles  $\varphi$ , on obtient finalement quatre équations pour les translations  $\Delta_1 \dots \Delta_4$ . Le calcul est fait dans le tableau pour l'équation (I):

	Côté gauche				Côté droit
	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	
(I)	+ 4,3980	-	+ 0,4080	-	+ 5
- 3,99 $\varphi_{a,y}$	- 0,4992	-	+ 0,0078	-	+ 1,86
- 3,99 $\varphi_{d,y}$	- 0,4992	-	+ 0,0026	-	- 1,86
+ 0,51 $\varphi_{a,z}$	- 0,0294	- 0,0501	- 0,0294	- 0,0501	-
+ 0,51 $\varphi_{b,z}$	- 0,0294	- 0,0501	- 0,0294	- 0,0501	-
+ 0,51 $\varphi_{c,z}$	- 0,0294	- 0,0501	- 0,0294	- 0,0501	-
+ 0,51 $\varphi_{d,z}$	- 0,0294	- 0,0501	- 0,0294	- 0,0501	-
(I')	+ 3,2820	- 0,2004	+ 0,3060	- 0,2004	+ 5

La même transformation des équations (II), (III), (IV) donne les équations (II'), (III'), (IV'); la matrice des nouvelles équations est:

Équation	Côté gauche				Côté droit
	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	
(I')	+ 3,2820	- 0,2004	+ 0,3060	- 0,2004	+ 5
(II')	- 0,2004	+ 1,4796	- 0,2004	+ 0,2574	+ 4
(III')	+ 0,3060	- 0,2004	+ 3,2820	- 0,2004	-
(IV')	- 0,2004	+ 0,2574	- 0,2004	+ 1,4796	-

Le résultat de la solution des équations (I'), (II'), (III'), (IV') est:

$$\Delta_1 = + 1,6872, \Delta_2 = + 2,9832, \Delta_3 = + 0,0074, \Delta_4 = - 0,2894.$$

On peut calculer maintenant les angles  $\varphi, \psi$  d'après leurs relations par rapport à  $\Delta$  antérieurement obtenues:

$$\begin{aligned} \varphi_{a,x} = \varphi_{b,x} &= - 0,1015 \Delta_2 + 0,0067 \Delta_4 = - 0,3046, \\ \varphi_{c,x} = \varphi_{d,x} &= - 0,0067 \Delta_2 + 0,1015 \Delta_4 = - 0,0494, \\ \varphi_{a,y} &= 0,1251 \Delta_1 - 0,00195 \Delta_3 + 0,4662 = + 0,6772, \\ \varphi_{b,y} &= 0,00195 \Delta_1 - 0,1251 \Delta_3 + 0,0129 = + 0,0153, \\ \varphi_{c,y} &= 0,00195 \Delta_1 - 0,1251 \Delta_3 - 0,0129 = - 0,0105, \\ \varphi_{d,y} &= 0,1251 \Delta_1 - 0,00195 \Delta_3 - 0,4662 = - 0,2552, \\ \varphi_{a,z} = \varphi_{b,z} = \varphi_{c,z} = \varphi_{d,z} &= - 0,0578 \Delta_1 - 0,0982 \Delta_2 - 0,0578 \Delta_3 - 0,0982 \Delta_4 = - 0,3625, \end{aligned}$$

$$\psi_{1,z} = \psi_{3,z} = - \frac{\Delta_2 + \Delta_4}{l_1} = - 0,4490, \quad \psi_{2,z} = \psi_{4,z} = - \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{l_2} = - 0,3389,$$

$$\psi_{5,x} = \psi_{8,x} = - \frac{\Delta_2}{h} = - 0,7458, \quad \psi_{6,x} = \psi_{7,x} = \frac{\Delta_4}{h} = - 0,0723,$$

$$\psi_{5,y} = \psi_{6,y} = - \frac{\Delta_3}{h} = - 0,0018, \quad \psi_{7,y} = \psi_{8,y} = \frac{\Delta_1}{h} = + 0,4218.$$

Pour les barres 1, 2, 3, 4 qui restent dans le plan horizontal, il n'y a pas de déviations  $\psi$  dans les plans perpendiculaires à  $X$  et  $Y$ , donc  $\psi_{i,x} = \psi_{i,y} = 0$  pour  $i = 1$  à 4.

Les moments aux nœuds sont donnés par les formules (1), (4); les résultats en  $tm$  sont:

$$\begin{aligned} M_{3a,x} = k_{3,x} (\varphi_{a,x} - \varphi_{d,x}) &= - 0,260, & M_{3a,y} = k_{3,y} (2 \varphi_{a,y} + \varphi_{d,y}) + \mathfrak{M}_{3a,y} &= - 0,761, \\ M_{3a,z} = k_{3,z} (2 \varphi_{a,z} + \varphi_{d,z} - 3 \psi_{3,z}) &= + 0,449; & M_{4a,x} = k_{4,x} (2 \varphi_{a,x} + \varphi_{b,x}) &= - 3,125, \\ M_{4a,y} = k_{4,y} (\varphi_{a,y} - \varphi_{b,y}) &= + 0,331, & M_{4a,z} = k_{4,z} (2 \varphi_{a,z} + \varphi_{b,z} - 3 \psi_{4,z}) &= - 0,060; \\ M_{8a,x} = k_{8,x} (2 \varphi_{a,x} - 3 \psi_{8,x}) &= + 3,387, & M_{8a,y} = k_{8,y} (2 \varphi_{a,y} - 3 \psi_{8,y}) &= + 0,474, \\ M_{8a,z} = k_{8,z} \varphi_{a,z} &= - 0,392; & M_{1b,x} = k_{1,x} (\varphi_{b,x} - \varphi_{c,x}) &= - 0,260, \\ M_{1b,y} = k_{1,y} (2 \varphi_{b,y} + \varphi_{c,y}) &= + 0,140, & M_{1b,z} = k_{1,z} (2 \varphi_{b,z} + \varphi_{c,z} - 3 \psi_{1,z}) &= + 0,449. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient:

$$\begin{aligned}
M_{4b,x} &= -3,125, & M_{4b,y} &= -0,331, & M_{4b,z} &= -0,060; \\
M_{5b,x} &= +3,387, & M_{5b,y} &= +0,192, & M_{5b,z} &= -0,392; \\
M_{1c,x} &= +0,260, & M_{1c,y} &= -0,040, & M_{1c,z} &= +0,454; \\
M_{2c,x} &= -0,507, & M_{2c,y} &= +0,122, & M_{2c,z} &= -0,060; \\
M_{6c,x} &= +0,246, & M_{6c,y} &= -0,083, & M_{6c,z} &= -0,392; \\
M_{2d,x} &= -0,507, & M_{2d,y} &= -0,122, & M_{2d,z} &= -0,060; \\
M_{3d,x} &= +0,260, & M_{3d,y} &= +9,559, & M_{3d,z} &= +0,449; \\
M_{7d,x} &= +0,246, & M_{7d,y} &= -9,447, & M_{7d,z} &= -0,392; \\
M_{8h,x} &= +4,020, & M_{8h,y} &= -3,129, & M_{8h,z} &= +0,392; \\
M_{5e,x} &= +4,020, & M_{5e,y} &= +0,110, & M_{5e,z} &= +0,392; \\
M_{6f,x} &= +0,246, & M_{6f,y} &= -0,027, & M_{6f,z} &= +0,392; \\
M_{7g,x} &= +0,246, & M_{7g,y} &= -8,090, & M_{7g,z} &= +0,392.
\end{aligned}$$

Le calcul peut être contrôlé par les équations d'équilibre des moments aux nœuds, par ex. au nœud  $b$ :

$$\begin{aligned}
M_{1b,x} + M_{4b,x} + M_{5b,x} &= +0,002 \doteq 0, & M_{1b,y} + M_{4b,y} + M_{5b,y} &= +0,001 \doteq 0, \\
M_{1b,z} + M_{4b,z} + M_{5b,z} &= -0,003 \doteq 0.
\end{aligned}$$

De même les équations d'équilibre des moments aux autres nœuds sont satisfaites, du moins très approximativement.

D'autres contrôles du calcul peuvent résulter de l'équilibre des forces horizontales, si l'on remplace les barres verticales aux appuis ainsi que les forces axiales et les moments aux nœuds par les efforts tranchants  $T_{5,x}$ ,  $T_{5,y}$ ,  $T_{6,x}$ ,  $T_{6,y}$ ,  $T_{7,x}$ ,  $T_{7,y}$ ,  $T_{8,x}$ ,  $T_{8,y}$  dont les directions positives sont représentées sur la fig. 3. La condition d'équilibre pour les forces parallèles à  $X$  est  $H_1 - \sum_5^8 T_y = 0$  et pour les forces parallèles à  $Y$ :  $H_2 + \sum_5^8 T_x = 0$ . L'effort tranchant dans la barre  $mn$  non chargée a une valeur constante  $T = -\frac{M_m + M_n}{s}$ ;  $s$  est la longueur de la barre. On peut alors calculer (*ent*):

$$\begin{aligned}
T_{5,y} &= -\frac{M_{5e,y} + M_{5b,y}}{h} = -0,075, & T_{6,y} &= -\frac{M_{6f,y} + M_{6c,y}}{h} = +0,028, \\
T_{7,y} &= -\frac{M_{7g,y} + M_{7d,y}}{h} = +4,384, & T_{8,y} &= -\frac{M_{8h,y} + M_{8a,y}}{h} = +0,684.
\end{aligned}$$

Ensuite on a  $\sum T_y = 5,021 \doteq H_1$ . De la même manière on obtient:

$$\begin{aligned}
T_{5,x} &= -\frac{M_{5e,x} + M_{5b,x}}{h} = -1,852, & T_{6,x} &= -\frac{M_{6f,x} + M_{6c,x}}{h} = -0,123, \\
T_{7,x} &= -\frac{M_{7g,x} + M_{7d,x}}{h} = -0,123, & T_{8,x} &= -\frac{M_{8h,x} + M_{8a,x}}{h} = -1,852,
\end{aligned}$$

$$\sum T_x = -3,950 \doteq -H_2.$$

Pour connaître à fond les tensions dans toutes les barres, il faudrait calculer les efforts tranchants dans une direction verticale et horizontale pour les barres 1, 2, 3, 4 et les forces axiales (normales) dans toutes les barres qui résultent des conditions d'équilibre aux nœuds. Les réactions aux appuis s'annulent avec les efforts normaux et tranchants dans les barres appuyées et les moments dans ces barres aux points d'appui.

### Résumé

Les barres d'un portique dans l'espace avec assemblages rigides aux nœuds sont sollicitées pour une charge quelconque par des forces axiales, des forces tangentielles dans deux directions perpendiculaires et des moments par rapport à trois axes; les moments par rapport aux axes situés dans le plan de la section sollicitent la barre en flexion et le moment par rapport à l'axe de la barre produit une torsion. Le système peut être calculé pour une charge quelconque par la méthode des déformations. En négligeant l'effet des forces normales, on obtient les équations pour le calcul des rotations inconnues aux nœuds sous forme d'équations d'équilibre des moments aux nœuds (au nombre de trois pour chaque nœud). On déduit les équations pour le calcul des déplacements des nœuds par application du principe des travaux virtuels à la déformation produite dans le système par la dilatation d'une barre fictive de support, en ajoutant au système avec articulations supposées aux nœuds le nombre des barres de support nécessaire pour que le système soit strictement indéformable.

Cette méthode générale est appliquée au calcul numérique d'un portique composé d'un rectangle horizontal dont les sommets sont joints aux fondations par des barres verticales. Le portique est sollicité par une charge uniforme verticale et deux forces horizontales perpendiculaires. Les équations donnent quatre groupes dont chaque groupe contient quatre inconnues.

### Zusammenfassung

Die Stäbe eines räumlichen Rahmenwerkes mit steifen Anschlüssen in den Knotenpunkten werden bei beliebiger Belastung durch Normalkräfte, Querkkräfte in zwei zueinander senkrechten Richtungen und durch Momente um drei verschiedene Axen beansprucht; die Momente um die beiden in der Querschnittsebene gelegenen Axen beanspruchen den Stab auf Biegung, das Moment um die Stabaxe ergibt eine Torsionswirkung. Das Rahmenwerk kann für eine beliebige Belastung mit Hilfe der Deformationsmethode berechnet werden. Wenn man die Wirkung der Normalkräfte vernachlässigt, erhält man die Gleichungen zur Bestimmung der unbekanntenen Knotendrehwinkel als



Momenten-Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten (je drei für jeden Knoten). Die Grundgleichungen für die Berechnung der Knotenverschiebungen ergeben sich durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf die Verformungen, die im System durch die Längenänderung eines gedachten Stützstabes hervorgerufen werden; dabei seien so viele Stützstäbe angenommen, als zur vollständigen Unverschieblichkeit des in allen seinen Knoten mit fiktiven Gelenken versehenen Systems erforderlich sind.

Die Anwendung dieser allgemeinen Methode wird an Hand der Berechnung eines horizontalen, in seinen Ecken mit vertikalen, unten eingespannten Auflagerstützen versehenen rechteckigen Rahmens gezeigt. Dieser Rahmen wird durch eine gleichmäßig verteilte vertikale Belastung und zwei horizontale, senkrecht aufeinander stehende Einzellasten beansprucht. Die Bestimmungsgleichungen zerfallen in vier Gruppen von je vier Unbekannten.

### Summary

The bars in a stiff jointed frame are stressed with any desired load by normal forces, transverse forces in two directions at right angles to each other and moments about three axes; the moments about the two axes in the plane of the section produce bending, and the moment about the axis of the bar produces torsion. The calculation of the system for any load can be made by the slope-deflection method. If we neglect the effect of normal forces, we obtain the equations for determining the unknown rotations at the joints as equations of moment-equilibrium at the joints (three for each joint). The fundamental equations for calculating the unknown displacements of the joints are given by the principle of virtual displacements applied to the deformation of the system caused by the change in length of an imaginary bar, if the system with articulations at the joints is provided with as many supporting bars as are necessary for a geometrically determinate system.

This general method is carried out on the example of a frame consisting of a horizontal rectangle supported at the corners with fixed bars for connecting to the base. The frame is loaded with a vertical uniform load and with two horizontal forces at right angles to each other. The equations for unknown quantities can be divided into four groups, each containing four unknowns.