

La méthode des coupures dans la théorie des plaques

Autor(en): **L'Hermite, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **12 (1952)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12322>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La méthode des coupures dans la théorie des plaques

Die Schnittmethode in der Plattentheorie

The sectional method in slab theory

R. L'HERMITE, Directeur des Laboratoires du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris

Soit une plaque mince fléchie, dont l'équation de flexion répond à l'équation de LAGRANGE:

$$\Delta^2 \Delta^2 Z = \frac{q}{D} \quad 1)$$

posée sur son pourtour C (fig. 1). L'équation de LAGRANGE s'écrit encore:
 $\Delta^2 M_0 = -q$

avec

$$M_0 = \frac{M_x + M_y}{1 + \sigma}$$

et la condition aux limites est:

$$M_0 = 0 \text{ sur le contour } C.$$

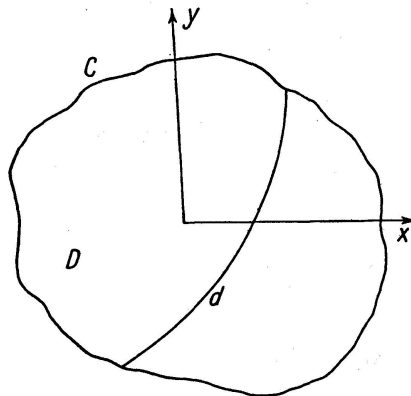


Fig. 1

Soit une courbe d continue ainsi que ses dérivées première et seconde, tracée dans le domaine D limité par le contour C . Faisons agir le long de cette courbe des moments de flexion tels que la somme soit:

¹⁾ Δ^2 Laplacien, Z flèche, q charge normale au feuillet moyen, $D = \frac{E h^3}{12(1 - \sigma^2)}$,
 E module d'élasticité, σ coefficient de Poisson, h épaisseur.

$$\frac{M_x' + M_y'}{1 + \sigma} = M_1(s)$$

s étant l'abscisse curviligne prise le long de cette courbe.

Il est bien évident que, sur le contour C : $M_1 = 0$.

Fixons pour M_1 les valeurs sur la courbe d telles que sur celle-ci $M_0 + M_1 = 0$.

Les moments totaux entre C et d sont définis par la relation:

$$\Delta^2 (M_0 + M_1) = -q$$

avec: $M_0 + M_1 = 0$ sur C et d .

Ecrivons maintenant la formule de GREEN dans le domaine A entre C et d , où M_1 est continue ainsi que ses dérivées première et seconde, sous la forme:

$$\int \int_A v \Delta^2 v d\sigma + \int \int_A \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \right] d\sigma = \int_c v \frac{dv}{dn} ds + \int_d v \frac{dv}{dn} ds$$

où n désigne la normale aux contours.

En faisant $v = M_1$ et puisque $\Delta^2 M_1 = 0$ et $M_1 = 0$ sur C , on trouve:

$$\int \int_A \left[\left(\frac{dM_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dM_1}{dy} \right)^2 \right] d\sigma = \int_d M_1 \frac{dM_1}{dn} ds$$

Or, si nous choisissons une courbe d de telle façon que $\frac{dM_0}{dn}$ y soit nul, c'est-à-dire que l'effort tranchant sur les fibres normales à cette courbe soit nul, et si nous imposons à M_1 de conserver cette condition de telle façon que d soit une rive sans effort tranchant, le second membre de l'équation précédente est nul. Il en résulte que M_1 est une constante dans tout le domaine A . Comme M_1 est nul sur le contour, il est nul sur tout le domaine A . Remarquons une fois de plus qu'il faut pour ceci que d soit une courbe continue ainsi que ses dérivées première et seconde, car une discontinuité sur cette courbe conduirait à avoir au point correspondant au moins deux valeurs $\frac{dM_1}{dn}$ qui ne peuvent satisfaire à la fois à la condition d'effort tranchant nul et M_1 ne serait plus nul au point considéré.

Il est alors possible d'énoncer le théorème suivant:

Théorèmes des coupures

Si, dans une plaque fléchie reposant librement sur son contour et soumise à un système de charges extérieures, on effectue une coupure le long d'une courbe d continue ainsi que ses dérivées première et seconde, normalement à laquelle les efforts tranchants sont nuls, cette coupure laisse constante la somme des courbures $\frac{M_x + M_y}{1 + \sigma}$ sur l'ensemble de la plaque.

Corollaires

Le long de la coupure les moments sur les fibres normales à celle-ci sont nuls et les moments sur les fibres tangentiels sont égaux à la somme des moments agissant au même point sur deux fibres orthogonales dans la plaque sans coupure.

L'utilisation de ce théorème peut être fort utile car elle permet de résoudre très simplement de nombreux cas de bords libres rectilignes grâce à l'emploi préalable de la symétrisation.

Considérons une plaque limitée par un contour C appuyé simplement et par une droite sans appui d .

Par rapport à cette droite AA' traçons l'image symétrique C' de C (fig. 2) et effectuons un chargement symétrique.

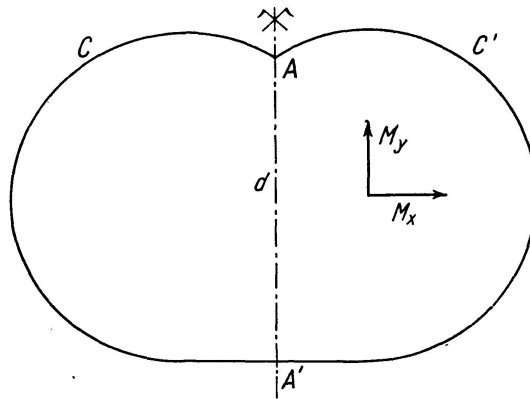


Fig. 2

Supposons que le calcul de la plaque limitée par C et C' soit possible. Nous connaissons en chaque point la valeur $(M_x + M_y)$ qui sera le même pour le contour $AA'C$ que pour le contour CC' . Le long de AA' le moment M_y sur le bord libre, après coupure sur cette droite, sera égal à $M_x + M_y$ puisque M_x devient nul.

Nous pourrions aussi résoudre très facilement le problème de la dalle triangulaire rectangle par symétrisation suivant une diagonale, le problème du demi-cercle par symétrisation suivant un diamètre. Par contre, nous ne pouvons résoudre directement le problème du quart de cercle, car nous introduisons une discontinuité au centre avec un moment et une réaction au sommet de l'angle qu'il faudrait réduire par un procédé auxiliaire.

Nous avons appliqué ce procédé à l'étude de la dalle rectangulaire appuyée sur deux côtés opposés et libre sur les deux autres²⁾. On y parvient facilement

²⁾ Note à propos de la théorie des plaques fléchies. R. L'HERMITE, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Juin 1951.

en partant d'une bande indéfinie chargée comme l'indique la figure 3. Le long des axes AA , $A'A'$, BB , $B'B'$, les efforts tranchants sont nuls.

On peut donc y effectuer des coupures sans changer les valeurs de $M = M_x + M_y$.

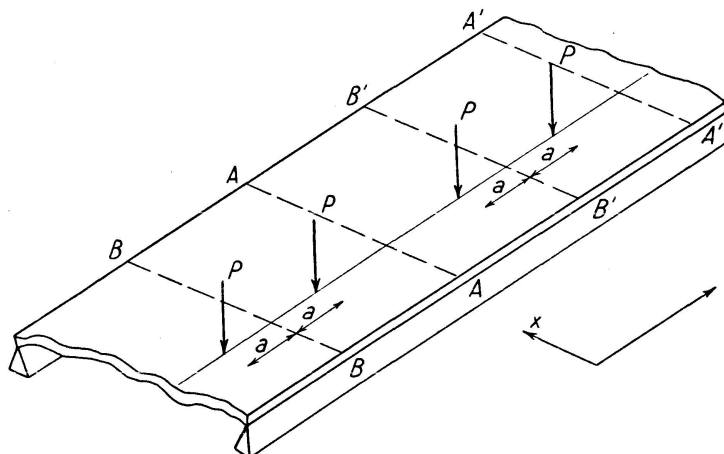


Fig. 3

Nous avons également appliqué ce procédé au calcul des planchers dits „champignons“ à bordure libre. Par symétrisation on peut déterminer en chaque point de la bordure les moments tangentiels supplémentaires apportés par la coupure et en déduire après coup leur influence dans l'ensemble de la plaque. Un cas particulier fort simple est celui de la plaque rectangulaire supportée par quatre appuis aux angles. Les coupures donnent $M_n = 0$ sur les bords mais subsistent des moments d'encastrement sur les poteaux dont la somme $M_x + M_y$ reste constante. Pour obtenir la solution du même problème sans encastrement, il faut après coup étudier l'action sur la dalle des quatre moments sur appuis.

Le théorème des coupures est directement utilisable lorsqu'on emploie pour le calcul d'une dalle la méthode d'approximation dite par relaxation.

Nous savons que cette méthode, partant de l'équation $\Delta^2 \left(\frac{M_x + M_y}{I + \sigma} \right) = -q$ permet, grâce à l'utilisation d'un opérateur très simple, de déterminer en chaque point d'un réseau $M = M_x + M_y$. On peut, d'autre part, par symétrisation, opération élémentaire dans la méthode indiquée, obtenir des lignes de coupure sans difficulté. Connaissant $M = (M_x + M_y)$ en tous les points, les flèches sont données par la seconde équation $\Delta^2 Z = -\frac{M}{D}$. Les conditions aux limites sont: $Z = 0$ sur les bords appuyés. Sur les bords libres supposés linéaires et parallèles à $0x$, nous avons déjà $Q_y = 0$. La condition complémentaire est $M_y = 0$ qui s'écrit:

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \frac{M}{D(1 - \sigma)}$$

En faisant le calcul aux différences finies et en appliquant celui-ci à la détermination des clefs de relaxation, on obtient une clef dans la partie courante correspondant au Laplacien (fig. 4a) et une clef bordure correspondant à la figure 4b.

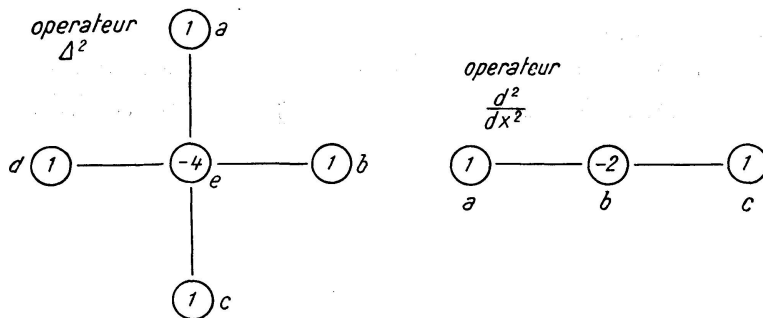


Fig. 4

$$a + b + c + d - 4e = -\frac{M}{D}$$

a) partie courante

$$a + c - 2b = -\frac{M}{D(1-\sigma)}$$

b) bordure

En d'autres termes, ceci veut dire que les déformations en bordure sont déterminées directement à partir des valeurs $M_x = M$ déjà connues, ce qui détermine toutes les conditions aux limites pour Z .

Après détermination des valeurs Z à l'intérieur, la distribution des moments de torsion et de flexion dans les deux directions orthogonales, est tirée par dérivation suivant l'opérateur b .

Résumé

Après avoir établi un théorème des coupures valable pour une plaque fléchie reposant librement sur son contour et soumise à un système de charges extérieures, l'auteur tire de ce théorème une méthode de calcul par symétrisation des dalles appuyées et des planchers champignons à bordure libre.

La méthode d'approximation dite méthode de relaxation permet d'appliquer ces calculs à la détermination des moments en tous points d'une dalle.

Zusammenfassung

Nachdem der Verfasser eine Schnittlinientheorie für am Rande frei aufliegende und durch äußere Lasten auf Biegung beanspruchte Platten aufgestellt hatte, leitet er daraus durch Symmetrisierung eine Berechnungsmethode für Platten und Pilzdecken mit freien Rändern ab.

Die Näherungsmethode der Relaxation erlaubt die Anwendung dieser Berechnungen zur Bestimmung der Momente in allen Punkten einer Platte.

Summary

After the author has prepared a theory of intersection of slabs supported freely at the edge and subjected to bending by external loads, he derives from this, by symmetrisation, a method of calculation for slabs and flat coverings with free edges.

The approximation method of relaxation allows these calculations to be adopted for determining the moments at all points of a slab.