

# Beitrag zur Plastizitätstheorie

Autor(en): **Stüssi, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **13 (1953)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-13208>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Beitrag zur Plastizitätstheorie

*Contribution to the theory of plasticity*

*Contribution à la théorie de plasticité*

Prof. Dr. F. STÜSSI, ETH, Zürich, Präsident der I. V. B. H.

### 1. Die drei Formen der Gestaltänderungshypothese

Die schon von J. C. MAXWELL im Jahre 1856 erstmals aufgestellte und heute mit den Namen HUBER-v. MISES-HENCKY verknüpfte Fließbedingung für isotrope, zähe Baustoffe sagt aus, daß die spezifische Gestaltänderungsarbeit  $A_g$  an der Fließgrenze eine Materialkonstante sei. Diese Hypothese sei zunächst kurz rekapituliert, wobei das betrachtete würfelförmige Körperelement auf die Hauptspannungsrichtungen 1, 2, 3 orientiert sein soll. Wir denken uns den Spannungszustand  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  aufgeteilt in den *hydrostatischen Spannungszustand*  $\sigma_m$ ,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

der nur eine Volumenänderung bei gleichbleibender Gestalt erzeugt, und den *Gestaltänderungs-Spannungszustand*

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_m, \quad \bar{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_m, \quad \bar{\sigma}_3 = \sigma_3 - \sigma_m,$$

der nur eine Gestaltänderung bei gleichbleibendem Volumen verursacht.

Die *Hypothese von der Konstanz der Gestaltänderungsarbeit* sagt nun aus, daß für das Eintreten des Fließzustandes nur die spezifische Gestaltänderungsarbeit  $A_g$ ,

$$A_g = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\sigma}_1 \cdot \epsilon_1 + \bar{\sigma}_2 \cdot \epsilon_2 + \bar{\sigma}_3 \cdot \epsilon_3), \quad (1)$$

maßgebend sei; dabei bedeuten  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  die durch die Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  verursachten spezifischen Dehnungen in den drei Hauptspannungsrichtungen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß Gleichung (1) mit den Bezeichnungen

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}$$

bzw.

$$\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_m, \quad \bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 - \epsilon_m, \quad \bar{\epsilon}_3 = \epsilon_3 - \epsilon_m$$

auch in der dualen Form

$$A_g = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \cdot \bar{\epsilon}_1 + \sigma_2 \cdot \bar{\epsilon}_2 + \sigma_3 \cdot \bar{\epsilon}_3) \tag{1a}$$

geschrieben werden kann. Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3 &= 0, \\ \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3 &= 0. \end{aligned}$$

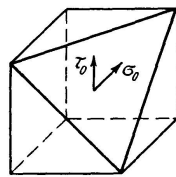
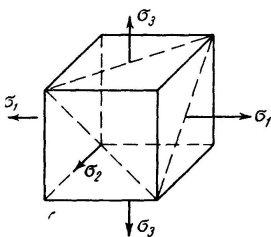


Fig. 1

Nun kann andererseits entweder auch die resultierende Schubspannung  $\tau_0$  in der Oktaederebene (Fig. 1) oder die resultierende Schiebung  $\gamma_0$ , ebenfalls in der Oktaederebene, als maßgebend für die Anstrengung zäher Baustoffe angenommen werden<sup>1)</sup>. Eine Gleichgewichtsbetrachtung liefert uns für die Oktaederebene eine Normalspannung

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m$$

und eine resultierende Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1}, \tag{2}$$

die auch in der Form

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} \tag{2a}$$

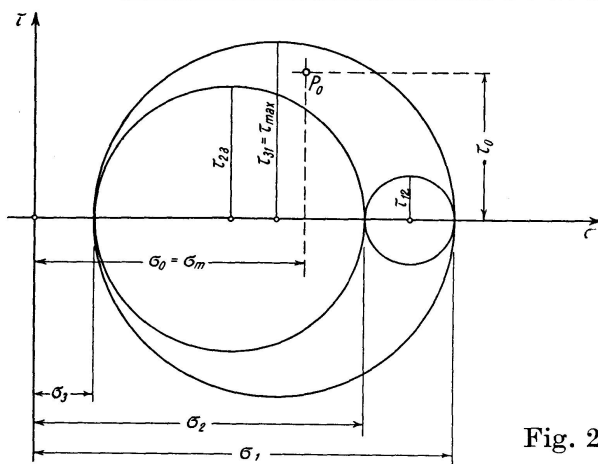


Fig. 2

geschrieben werden kann (Fig. 2).

Vergleichen wir nun diese als maßgebend anzusehende resultierende Schubspannung  $\tau_0$  infolge des räumlichen Spannungszustandes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  mit dem entsprechenden Wert infolge eines einachsigen Spannungszustandes  $\sigma_1$ , so finden wir die Vergleichsspannung  $\sigma_g$ ,

<sup>1)</sup> M. Roš und A. EICHINGER: Versuche zur Klärung der Bruchgefahr. III. Metalle EMPA-Bericht Nr. 34, Zürich 1929.

$$\underline{\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1.} \quad (3)$$

Wie leicht nachzuweisen ist, gilt für die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  auch die Beziehung

$$\underline{\sigma_g^2 = \frac{3}{2} \cdot (\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2).} \quad (3a)$$

Fließen tritt immer dann ein, wenn die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  den Wert der Fließspannung  $\sigma_F$  im einachsigen Zugversuch erreicht; die *Fließbedingung* lautet somit

$$\underline{\sigma_g = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \tau_0 = \sigma_F.} \quad (4)$$

Auf ähnliche Weise läßt sich aus einer geometrischen Betrachtung in bezug auf die Oktaederebene eine spezifische Dehnung

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} = \epsilon_m$$

und eine *resultierende spezifische Schiebung*

$$\underline{\gamma_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 - \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 - \epsilon_3 \cdot \epsilon_1} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \epsilon_g} \quad (5)$$

bzw.

$$\underline{\gamma_0 = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2} \quad (5a)$$

bestimmen.

Setzen wir nun die spezifischen Dehnungen  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  nach dem *Hookeschen Gesetz*

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)),$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2))$$

in die Gleichungen (1) bzw. (5) ein, so erhalten wir für die spezifische Gestaltänderungsarbeit  $A_g$  den Wert

$$\underline{A_g = \frac{1 + \nu}{3 E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1) = \frac{1 + \nu}{3 E} \cdot \sigma_g^2,} \quad (6)$$

während sich die resultierende Schiebung  $\gamma_0$  mit

$$\underline{\epsilon_g = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sigma_g} \quad (7)$$

zu

$$\underline{\gamma_0 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1 + \nu}{E} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sigma_g} \quad (8)$$



ergibt. Ferner bestehen die Zusammenhänge

$$\gamma_0 = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_0 = \frac{\tau_0}{G} \quad (9)$$

und

$$A_g = \frac{\sigma_g \cdot \epsilon_g}{3} \quad (10)$$

Vergleichen wir die Werte  $A_g$  und  $\gamma_0$  nach den Gleichungen (6) und (8) mit den entsprechenden Werten für den einachsigen Spannungszustand  $\sigma_1 = \sigma_g$ , so erhalten wir wieder den gleichen Wert der Vergleichsspannung  $\sigma_g$ , den uns auch die resultierende Schubspannung  $\tau_0$  in Gleichung (3) geliefert hatte.

Die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  als Maß der Anstrengung hat somit eine dreifache Bedeutung; sie kann der Ausdruck einer eigentlichen Anstrengungshypothese ( $\tau_0$ ), einer Formänderungshypothese ( $\gamma_0$ ) oder auch einer Hypothese über die Gestaltänderungsarbeit  $A_g$  darstellen. Welche dieser drei Deutungen physikalisch maßgebend oder ursächlich ist, läßt sich zunächst nicht eindeutig entscheiden.

Es erscheint ferner nicht richtig, die Fließbedingung Gleichung (4) als eine Folge der Hypothese von der Konstanz der Gestaltänderungsarbeit zu bezeichnen, da die Vergleichsspannung  $\sigma_g$  aus der Gestaltänderungsarbeit ja mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes berechnet wird, das für den Fließzustand und auch für den Beginn des Fließens nicht mehr gültig ist.

Die dreifache Bedeutung der Vergleichsspannung, wie sie hier in der heute üblichen Form skizziert wurde, ist nur eine Folge davon, daß der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen nach dem Hookeschen Gesetz, also für den elastischen Bereich eingeführt wird. Dies bedeutet offensichtlich von vorneherein eine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der drei Hypothesen. Es darf erwartet werden, daß die drei Hypothesen an sich eine über den elastischen Bereich hinausgehende Gültigkeit besitzen und dann aber auch verschiedene Aussagen enthalten. Im nächsten Abschnitt wird versucht, auf Grund dieser Überlegungen eine Plastizitätstheorie für isotrope Baustoffe aufzustellen.

## 2. Die Plastizitätstheorie isotroper Baustoffe

Eine Plastizitätstheorie hat die Aufgabe, die spezifischen Formänderungen unter beliebigen Beanspruchungszuständen anzugeben; liegen die Beanspruchungen im elastischen Bereich, so geht die Plastizitätstheorie in das Hookesche Gesetz über. An Stelle der Elastizitätskonstanten des Hookeschen Gesetzes treten in der Plastizitätstheorie die aus einachsigen Zug- oder Druckversuchen zu bestimmenden Spannungsdehnungsdiagramme.

Wir gehen nun davon aus, daß wir die Gültigkeit der Schubspannungshypothese voraussetzen; alle Beanspruchungszustände, die die gleiche resultierende Schubspannung  $\tau_0$  in der Oktaederebene, oder, was auf dasselbe

herauskommt, die gleiche Vergleichsspannung  $\sigma_g$  verursachen, sollen in bezug auf das Formänderungsvermögen *gleichwertig* sein. Ist das betrachtete Körperelement nicht auf die Hauptspannungsrichtungen, sondern auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem orientiert, so gilt statt Gleichung (3) die verallgemeinerte Beziehung

$$\underline{\sigma_g^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_z \cdot \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2.} \quad (3b)$$

Die Auswertung von Versuchsergebnissen legt nun die Folgerung nahe, daß die spezifischen Formänderungen infolge eines Spannungszustandes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  lineare Kombinationen der in einem einachsigen Zugversuch mit gleichwertiger Beanspruchung gefundenen spezifischen Dehnungen sind. Bezeichnen wir die im einachsigen Zugversuch  $\sigma_1 = \sigma_{10}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  gefundenen spezifischen Dehnungen mit  $\epsilon_{11}, \epsilon_{21}, \epsilon_{31}$  (und analog für  $\sigma_2 = \sigma_{20}, \sigma_3 = \sigma_{30}$ ), so betragen mit

$$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

und mit

$$\mu_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_g}, \quad \mu_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_g}, \quad \mu_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_g}$$

für die Beanspruchungen

$$\underline{\sigma_1 = \mu_1 \cdot \sigma_{10}, \quad \sigma_2 = \mu_2 \cdot \sigma_{20}, \quad \sigma_3 = \mu_3 \cdot \sigma_{30}} \quad (11)$$

die zugehörigen Dehnungen, in allgemeiner Form angeschrieben,

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 = \mu_1 \cdot \epsilon_{11} + \mu_2 \cdot \epsilon_{12} + \mu_3 \cdot \epsilon_{13}, \\ \epsilon_2 = \mu_1 \cdot \epsilon_{21} + \mu_2 \cdot \epsilon_{22} + \mu_3 \cdot \epsilon_{23}, \\ \epsilon_3 = \mu_1 \cdot \epsilon_{31} + \mu_2 \cdot \epsilon_{32} + \mu_3 \cdot \epsilon_{33}. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Wenn dieser Ansatz richtig sein soll, so muß er einerseits für den elastischen Bereich in das Hookesche Gesetz übergehen und andererseits die Hypothese der konstanten Gestaltänderungsarbeit (in ihrem Gültigkeitsbereich) erfüllen.

Im *elastischen Bereich* ist mit  $\sigma_{10} = \sigma_{20} = \sigma_{30}$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \frac{\sigma_{10}}{E},$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{13} = \epsilon_{32} = \epsilon_{21} = -\frac{\nu \cdot \sigma_{10}}{E}$$

und Gleichung (12) wird mit

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)),$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)),$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2))$$

zum Hookeschen Gesetz.

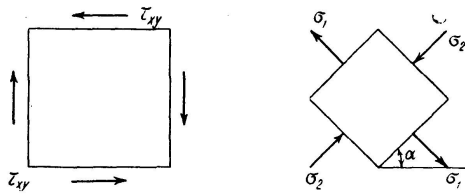


Fig. 3

Um die Formänderung  $\gamma_{xy}$  infolge einer Schubspannung  $\tau_{xy}$  zu bestimmen, ersetzen wir  $\tau_{xy}$  durch die gleichwertigen Hauptspannungen (Fig. 3)

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy};$$

mit

$$\sigma_g = \sqrt{3 \cdot \sigma_1^2} = \sigma_1 \cdot \sqrt{3},$$

$$\mu_{xy} = \mu_1 = -\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

finden wir die zur Schubspannung  $\tau_{xy} = \mu_{xy} \cdot \sigma_{10}$  zugehörigen Hauptdehnungen

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \mu_1 \cdot \epsilon_{11} + \mu_2 \cdot \epsilon_{12} = \mu_1 \cdot (\epsilon_{11} - \epsilon_{12}).$$

Da aus geometrischen Gründen (für  $\alpha = 45^\circ$ )

$$\gamma_{xy} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

ist, so wird

$$\underline{\gamma_{xy} = 2 \mu_{xy} \cdot (\epsilon_{11} - \epsilon_{12})} \quad (13)$$

oder für den elastischen Bereich

$$\underline{\gamma_{xy} = \tau_{xy} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{\tau_{xy}}{G}}.$$

Der Ansatz Gleichung (12) liefert uns somit für den elastischen Bereich, als Folge der vorausgesetzten Isotropie, den bekannten Wert des Schubmoduls  $G$ .

Wenn wir unsern Ansatz Gleichung (12) noch daraufhin prüfen wollen, ob er die Hypothese von der *Konstanz der Gestaltänderungsarbeit* befriedigt, so ist zunächst festzustellen, daß diese Hypothese an sich, wie aus Gleichung (1) ohne weiteres ersichtlich ist, nur für *isotrope Baustoffe* gelten kann. Für diese ist aber mit  $\sigma_{10} = \sigma_{20} = \sigma_{30}$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{13} = \epsilon_{32} = \epsilon_{21}$$

und Gleichung (12) geht über in den speziellen Ansatz für *isotrope Stoffe*

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \mu_1 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_2 + \mu_3) \cdot \epsilon_{12}, \\ \epsilon_2 &= \mu_2 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_3 + \mu_1) \cdot \epsilon_{12}, \\ \epsilon_3 &= \mu_3 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_1 + \mu_2) \cdot \epsilon_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Setzen wir die Werte

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\mu}_1 \cdot \sigma_{10}, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{\mu}_2 \cdot \sigma_{10}, \quad \bar{\sigma}_3 = \bar{\mu}_3 \cdot \sigma_{10},$$

wobei

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 - \mu_m, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 - \mu_m, \quad \bar{\mu}_3 = \mu_3 - \mu_m$$

und

$$\mu_m = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3}$$

bedeuten, in Gleichung (1) ein, so finden wir

$$\begin{aligned}
 A_g &= \frac{1}{2} \cdot \sigma_{10} \cdot [\bar{\mu}_1 \cdot (\mu_1 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_2 + \mu_3) \cdot \epsilon_{12}) + \bar{\mu}_2 \cdot (\mu_2 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_3 + \mu_1) \cdot \epsilon_{12}) + \\
 &\quad + \bar{\mu}_3 \cdot (\mu_3 \cdot \epsilon_{11} + (\mu_1 + \mu_2) \cdot \epsilon_{12})] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sigma_{10} \cdot [\epsilon_{11} \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 3 \mu_m^2) + 2 \epsilon_{12} \cdot (\mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_2 \cdot \mu_3 + \mu_3 \cdot \mu_1 - 3 \mu_m^2)] \\
 A_g &= \frac{1}{3} \cdot \sigma_{10} \cdot (\epsilon_{11} - \epsilon_{12}) \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1 \cdot \mu_2 - \mu_2 \cdot \mu_3 - \mu_3 \cdot \mu_1);
 \end{aligned}$$

wegen 
$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1 \cdot \mu_2 - \mu_2 \cdot \mu_3 - \mu_3 \cdot \mu_1 = 1$$

wird somit 
$$A_g = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{10} \cdot (\epsilon_{11} - \epsilon_{12}). \tag{6a}$$

Die Hypothese der konstanten Gestaltänderungsarbeit ist also erfüllt.

Auf ähnliche Weise finden wir für die Vergleichsdehnung  $\epsilon_g$  den Wert

$$\epsilon_g = (\epsilon_{11} - \epsilon_{12}); \tag{7a}$$

auch die Hypothese der resultierenden Schiebung  $\gamma_0$  ist erfüllt. Nun zeigt uns aber der Vergleich der Gleichungen (6a) und (7a), daß auch außerhalb des elastischen Bereiches mit  $\sigma_{10} = \sigma_g$  die in Gleichung (10) für den elastischen Bereich gefundene Beziehung

$$A_g = \frac{\sigma_g \cdot \epsilon_g}{3}$$

gilt; da dies eine Folge der vorausgesetzten Isotropie ist, haben sachlich die beiden Gleichungen (6a) und (7a) die gleiche Bedeutung.

Die Entscheidung darüber, ob eine Hypothese richtig und damit brauchbar ist, kann nur der Vergleich mit Versuchsergebnissen liefern. Der Ansatz Gleichung (12a), in Verbindung mit den zugehörigen gleichwertigen Span-

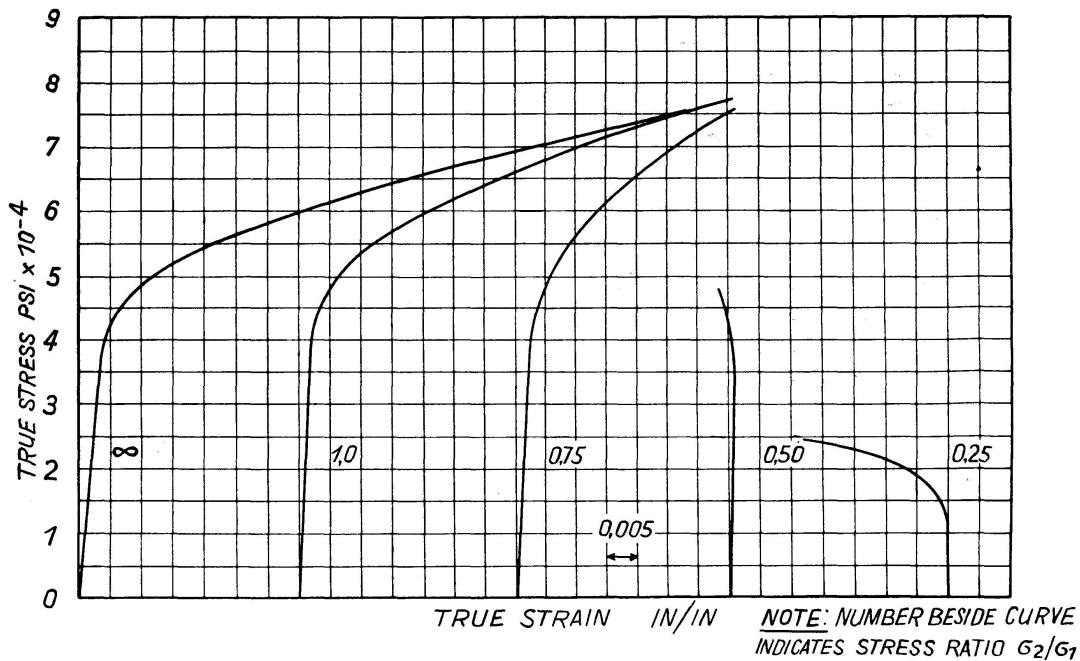


Fig. 4

nungen, soll deshalb nachstehend noch mit den Ergebnissen von zwei Versuchsreihen verglichen werden.

Als erste Versuchsreihe wählen wir diejenige, die J. MARIN<sup>2)</sup> mit einer Aluminiumlegierung Alcoa 24 S-T für verschiedene Kombinationen der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  an Hohlzylindern durchgeführt hat. Fig. 4 zeigt die gemessenen Spannungsdehnungskurven in Richtung  $\sigma_2 - \epsilon_2$  für verschiedene Verhältnisse von  $\sigma_2/\sigma_1$ . Die Kurve für  $\sigma_2/\sigma_1 = \infty$ , d. h. für  $\sigma_1 = 0$  entspricht in unserer Bezeichnung der Kurve  $\epsilon_{22} - \sigma_{20}$ , während die Kurve  $\epsilon_{21}$  nicht angegeben ist. Nun kann aber für jeden Punkt jeder dieser Kurven eine Gleichung (12a)

$$\epsilon_2 = \mu_2 \cdot \epsilon_{22} + \mu_1 \cdot \epsilon_{21}$$

unter Beachtung der zugehörigen Spannungen nach Gleichung (11) angeschrieben werden; da fünf Versuchskurven vorhanden sind, besitzen wir fünf Reihen von Bestimmungsgleichungen für die beiden Kurven  $\epsilon_{22}$  und  $\epsilon_{21}$ , so daß wir durch passende Kombination dieser Gleichungen Mittelwerte von  $\epsilon_{22}$  und  $\epsilon_{21}$  erhalten und somit die Streuungen der Versuchswerte teilweise eliminieren. Aus diesen beiden gemittelten Kurven  $\epsilon_{22}$  und  $\epsilon_{21}$  sind nun die Kurven  $\epsilon_2$  für die verschiedenen Verhältnisse von  $\sigma_2/\sigma_1$  berechnet und in Fig. 5 in einer der Fig. 4 entsprechenden Anordnung aufgetragen worden. Die gemessenen und die berechneten Kurven stimmen in ihrem Verlauf im allgemeinen recht gut überein; eine Ausnahme ist am ehesten für das Verhältnis  $\sigma_2/\sigma_1 = 0.50$  festzustellen. Ich habe deshalb auch noch die Kurve  $\epsilon_2$  für  $\sigma_2/\sigma_1 = 0.45$  berechnet und in Fig. 5 eingetragen; der Verlauf dieser Kurve stimmt grundsätzlich mit

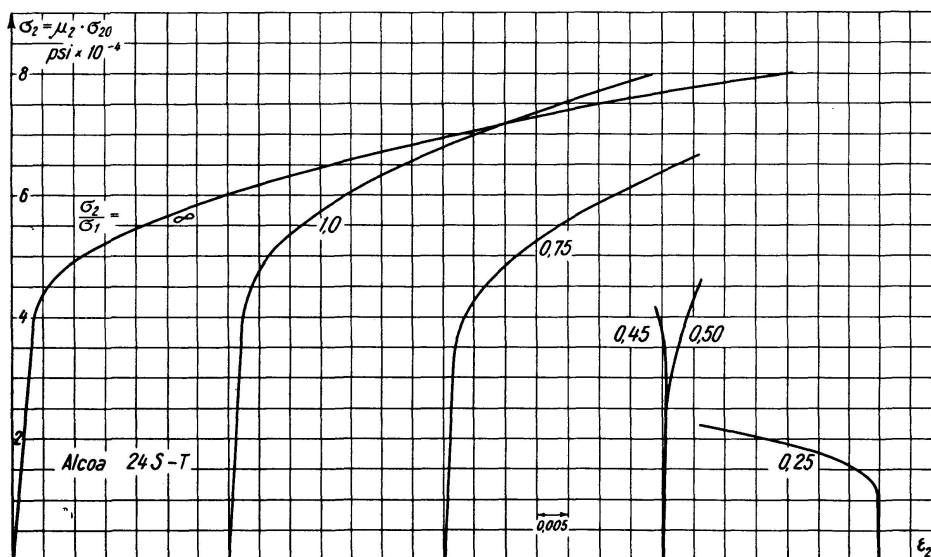


Fig. 5

<sup>2)</sup> J. MARIN: A biaxial stress machine for the determination of plastic stress-strain relations. Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. VII, 1, 1949. Unsere Fig. 4 entspricht der Fig. 11 dieses Berichtes.

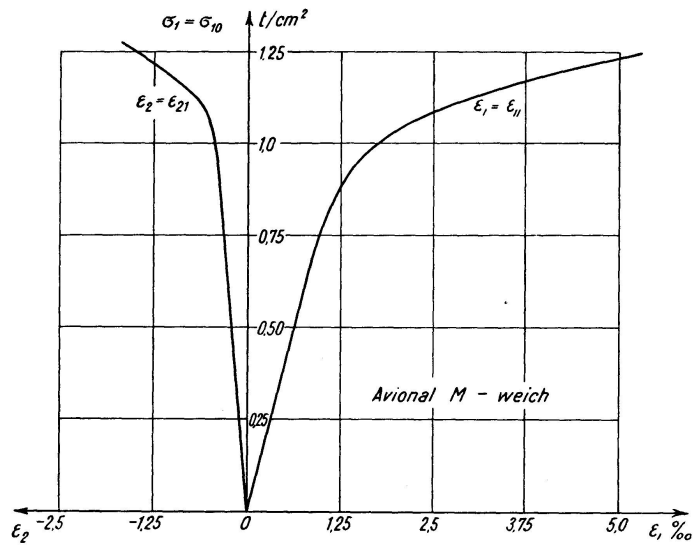


Fig. 6

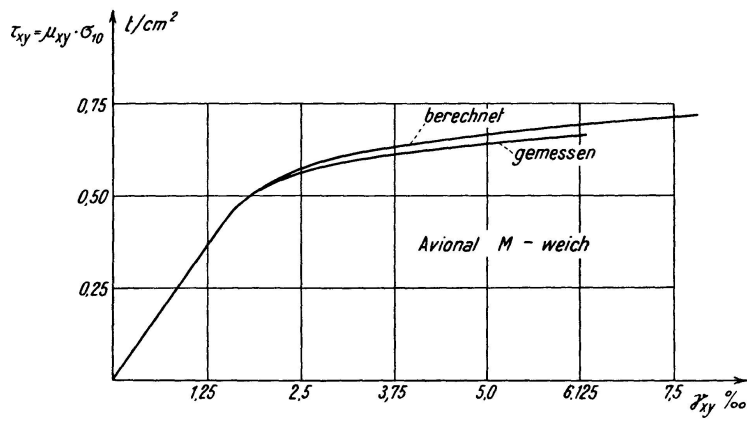


Fig. 7

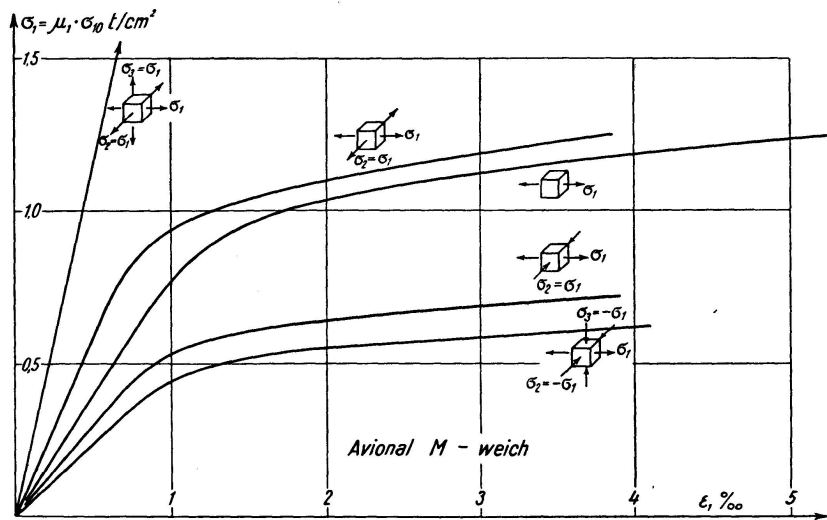


Fig. 8

der gemessenen Kurve für  $\sigma_2/\sigma_1 = 0.50$  überein. Mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Streuungen der Versuchswerte, die von Streuungen der Materialeigenschaften, von Abweichungen des Spannungsverhältnisses  $\sigma_2/\sigma_1$  gegenüber dem Sollwert oder von Ungenauigkeiten der Dehnungsmessungen herrühren können, darf die Übereinstimmung von Versuch und Rechnung als gut bezeichnet werden.

In den Fig. 6 und 7 ist noch der Vergleich der hier entwickelten Theorie mit eigenen Versuchen an Hohlzylindern aus Avional M- weich gezeigt<sup>3)</sup>. Fig. 6 zeigt die Kurven  $\epsilon_{11}$  und  $\epsilon_{21}$  für einachsigen Zug  $\sigma_{10}$ , während in Fig. 7 die aus Fig. 6 berechneten Werte der Schubverformungen  $\gamma_{xy}$  den im Torsionsversuch gemessenen Werten gegenübergestellt sind. Auch hier ist die Übereinstimmung von Versuch und Rechnung gut. Damit darf wohl der durch die Gleichungen (11) und (12) gegebene Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen im überprüften Gültigkeitsbereich, nämlich für isotrope Baustoffe, als gesichert angesehen werden.

Fig. 8 zeigt noch, aus den Kurven  $\epsilon_{11}$  und  $\epsilon_{21}$  der Fig. 6 berechnet, die Spannungsdehnungsdiagramme einiger charakteristischer Spannungskombinationen, womit eine versuchstechnisch bekannte Erscheinung auch rechnerisch ihre zwanglose Deutung findet. Eine besondere Bemerkung ist dabei vielleicht für den Fall des allseitigen Zuges  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  angezeigt; hier werden wegen  $\sigma_g = 0$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \infty$  in der Darstellung der Gleichungen (11) und (12) sowohl die Spannungen  $\mu \cdot \sigma$  wie die Dehnungen unendlich groß. Da aber  $\mu = \infty$  nur bedeutet, daß unter endlichen Spannungen hier kein Überschreiten der Proportionalitätsgrenze möglich ist, verschwindet die scheinbare Unbestimmtheit  $\frac{\infty}{\infty}$  beim Übergang auf das Hookesche Gesetz.

### 3. Schlußbemerkungen

Die hier vorgelegte Plastizitätstheorie isotroper Baustoffe beschäftigt sich mit den Zusammenhängen zwischen Spannungen und Dehnungen; sie sagt jedoch an sich nichts aus über die Bruchgefahr. Für den Bruch selber ist offenbar die Mohrsche Bruchtheorie, die auf die größte Schubspannung  $\tau_{max}$  orientiert ist, maßgebend. Es liegt also hier der wohl unschwer verständliche Unterschied vor, daß für den Formänderungszustand die resultierende Schubspannung  $\tau_0$  in der Oktaederebene, für den Bruch dagegen die größte Schubspannung  $\tau_{max} = \tau_{13}$  maßgebend ist. Das Verhältnis dieser beiden Werte kann, je nach der Größe der mittleren Hauptspannung  $\sigma_2$ , zwischen

<sup>3)</sup> Die Durchführung dieser Versuche in meiner Abteilung des Institutes für Bau- statik an der ETH verdanke ich meinem Assistent-Konstrukteur Dipl.-Ing. M. Walt.

$$\frac{\tau_0}{\tau_{max}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165 \quad \text{und} \quad \frac{\tau_0}{\tau_{max}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} = 0.9428$$

variieren. Dagegen ist die Plastizitätstheorie *in Verbindung mit der Mohrschen Bruchtheorie* in der Lage, etwas über die *Art des Bruches* auszusagen: liegt für den zu untersuchenden Spannungszustand der dem Wert  $\sigma_g = \sigma_F$  ( $\sigma_F$  = Fließgrenze) entsprechende Hauptkreis innerhalb der Mohrschen Hüllkurve, so ist ein Gleitbruch zu erwarten; schneidet dagegen der Hauptkreis für  $\sigma_g = \sigma_p$  ( $\sigma_p$  = Proportionalitätsgrenze) die Hüllkurve, so tritt ein Trennbruch oder Spröbruch ein.

Es sei nochmals ausdrücklich festgehalten, daß die durch die Gleichungen (11) und (12a) angegebenen Zusammenhänge nur für isotrope oder annähernd isotrope Baustoffe gelten, da sie nur für diese durch den Vergleich mit Versuchsergebnissen gesichert sind. Diese Zusammenhänge gelten somit auch nicht für Beanspruchungen eines früher schon über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht gewesenen Materials, denn durch eine solche erste Beanspruchung über die Proportionalitätsgrenze hinaus (Bauschinger-Effekt) geht die Isotropie verloren; das Material verhält sich unter späteren Belastungen anisotrop bzw. orthotrop<sup>4</sup>). Ob für orthotropes Materialverhalten der Ansatz der Gleichungen (11) und (12) noch gültig ist, kann erst nach Durchführung entsprechender Versuche entschieden werden.

### Zusammenfassung

Für statische Beanspruchung  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  isotroper Baustoffe lassen sich die spezifischen Formänderungen als lineare Kombinationen der Spannungsdehnungsdiagramme für einachsige Beanspruchungen darstellen, wenn die Beanspruchungen „gleichwertig“ sind, d. h. wenn der Spannungszustand  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  die gleiche resultierende Schubspannung in der Oktaederebene oder, was damit identisch ist, die gleiche Vergleichsspannung  $\sigma_g$ ,

$$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1,$$

verursacht, wie der verglichene einachsige Spannungszustand. Der vorgeschlagene Ansatz erfüllt für isotrope Baustoffe die Hypothese von der Konstanz der Gestaltänderungsarbeit und geht für unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegende Beanspruchungszustände in das Hookesche Gesetz über. Dagegen gelten diese Zusammenhänge dann nicht, wenn der Baustoff über die Proportionalitätsgrenze hinaus beansprucht war, weil durch eine solche Vorbelastung die Isotropie verloren geht.

<sup>4</sup>) Vergl. F. Stüssi: Die Grundlagen der mathematischen Plastizitätstheorie und der Versuch. Zeitschr. f. angew. Math. u. Physik, ZAMP, Vol. I, 1950.



### Summary

For static stressing  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  of isotropic material, the specific deformations may be represented as linear combinations of the stress-strain diagrams for single-axis stressing, if the stresses are "equivalent", i. e. if the stress condition  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  causes the same resulting shearing stress in the octahedral plane or, what comes to the same thing, the same comparison stress  $\sigma_g$ ,

$$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

as the compared single-axis stress causes. The proposed allowance satisfies the hypothesis of the constancy of the work of structural deformation for isotropic materials and passes over into Hook's law for stress conditions lying below the limits of proportionality. On the other hand, these connections do not hold good, if the material has previously been stressed beyond the limit of proportionality, since after such a loading the material behaves no longer isotropic.

### Résumé

Pour la contrainte statique  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  des matériaux isotropes, on peut représenter les déformations spécifiques sous la forme de combinaisons linéaires des diagrammes d'allongement pour des contraintes mono-axiales, lorsque les contraintes sont „équivalentes“, c'est-à-dire lorsque le régime de contrainte  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  donne lieu au même cisaillement résultant dans le plan octaèdre, ou ce qui revient au même, à la même contrainte de comparaison  $\sigma_g$ :

$$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

que le régime de contrainte mono-axial comparé.

Cette proposition satisfait, pour les matériaux isotropes, à l'hypothèse de la constance du travail de déformation et elle aboutit à la loi de Hooke pour les régimes de contrainte inférieurs à la limite de proportionnalité. Par contre, ces relations ne sont pas valables lorsque le matériau considéré était antérieurement chargé au-dessus de la limite de proportionnalité, car une telle charge préalable détruit l'isotropie.