Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 14 (1954)

Artikel: Association d'équilibres instables en présence de charges excentrées
Autor: Giangreco, Elio
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13939

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Association d'équilibres instables en présence de charges excentrées

Stabilitätsprobleme bei exzentrischer Belastung

Stability problems with axially-eccentric loading

Prof. ing. Elio Giangreco, Napoli

1. Dans un récent travail sur l'instabilité de l'équilibre élastique des voûtes polygonales, paru dans cette Revue [1] il m'est arrivé de m'occuper de poutres cloisons soumises à l'action de charges concentrées ou réparties le long des bords; j'ai eu ainsi l'occasion de remarquer qu'en présence de forces axiales, il existe une charge critique de torsion qui vient à côté de la charge classique d'Euler, qui est indépendente de la longueur et de la nature des liaisons de la poutre dans son plan et qui n'est seulement fonction que de la rigidité torsionale et du rayon maximum d'inertie [2]. Dans le cas d'une poutre reposant sur appuis si l'on suppose que ses extrémités peuvent tourner librement par rapport aux axes principaux d'inertie de la section, tandis que leur rotation par rapport à l'axe géométrique est impossible, on a:

$$N_F = \frac{B\pi^2}{l^2} \qquad\qquad N_T = \frac{C}{\rho^2} \tag{1}$$

où N_F et N_T désignent la charge critique flexionale et torsionale, B la rigidité à flexion dans le plan XZ (v. fig. 1), et C la rigidité à torsion de la barre, l la longueur de la poutre et ρ le rayon d'inertie maximum. La charge critique N_T est en général beaucoup plus grande que la charge d'Euler et n'a pas d'importance pratique sauf dans le cas de certaines natures de liaisons du système pour lequel la charge d'Euler N_F est elle même très grande.

Dans le présent travail, je traite le problème général des forces parallèles à l'axe géométrique de la poutre. Pour le cas d'une force se trouvant à la distance e de l'axe OZ je suis arrivé à la formule très simple ci-dessous:

$$N_{cr} = \frac{N_F + N_T}{2\left(1-\frac{e^2}{\rho^2}\right)} \pm \frac{1}{2\left(1-\frac{e^2}{\rho^2}\right)} \sqrt{(N_F - N_T)^2 + 4 N_F N_T \frac{e^2}{\rho^2}} \tag{2}$$

valable seulement pour $e \neq \rho$.

Dans la formule (2) on retrouve, comme cas particuliers, certains résultats fournis par TIMOSHENKO [3]. Pour $e=0$ on tire évidemment les formules (1). J'ai encore remarqué que pour la force appliquée avec une excentricité égale à ρ on a une seule valeur critique:

$$N_{cr} = \frac{1}{\frac{1}{N_F} + \frac{1}{N_T}}. \tag{3}$$

Je me suis ensuite occupé de l'instabilité dûe aux charges axiales N et transversales F combinées. Pour une seule force transversale F concentrée au milieu de la portée dans le même système déjà considéré, je suis arrivé à l'équation déterminatrice de la valeur de F:

$$F_{cr}^2 + 2\frac{e}{\rho}\frac{N\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F N_T}} F_{cr} - \left(N_F N_T - N(N_F + N_T) + N^2\left(1 - \frac{e^2}{\rho^2}\right)\right)\frac{\overline{F}_{cr}^2}{N_F N_T} = 0 \tag{4}$$

où $\overline{F}_{cr}$ désigne la valeur critique de F dans le cas où la poutre n'est pas soumise aux forces axiales. De la formule (4) on peut tirer la valeur critique de F en connaissant N ou inversement. J'ai pu remarquer que l'existence de N_T tend à baisser la valeur critique de F pour la même valeur de N. J'ai retrouvé comme cas particulier le résultat fourni par KRALL [4]; lorsque N atteint les valeurs fournies par les formules (1), on doit forcément trouver $F=0$.

2. Dans la présente étude je me suis servi de considérations énergétiques en conformité du théorème de DIRICHLET [5, 6, 7, 8] exprimé par les équations:

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta u_i} = 0 \qquad \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta v_i} = 0 \qquad \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \delta w_i} = 0 \tag{5}$$

où δu_i, δv_i, δw_i, représentent les coefficients inconnus du développement en série des variations δu, δv, δw attribuées aux déplacements u, v, w à partir de la position initiale d'équilibre: $\delta_2 E$ désigne [9] la variation seconde de l'énergie potentielle totale (somme de l'énergie de déformation ϕ correspondant à la nouvelle position d'équilibre, du travail du deuxième ordre L_2, développé par les contraintes internes et du travail du deuxième ordre L_2' développé par les charges extérieures et changé de signe).

3. Considérons maintenant le problème en question. Soit fig. 1, une poutre appuyée aux extrémités, maintenues par un dispositif (fig. 1 c) qui les empêche de tourner dans son propre plan (autour de l'axe OZ), mais qui permet librement la rotation dans les deux autres plans orthogonaux. Cette poutre est soumise à l'action de deux forces axiales situées à une distance e de son axe géométrique. Ayant établi le système de coordonnées représenté sur la fig. 1 b, choisissons pour les déplacements les expressions suivantes:

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = (w_0 + \beta_0 y)\cos\frac{\pi x}{l} = \overline{w}_0(x) + \bar{\beta}_0(x)\, y \tag{6}$$

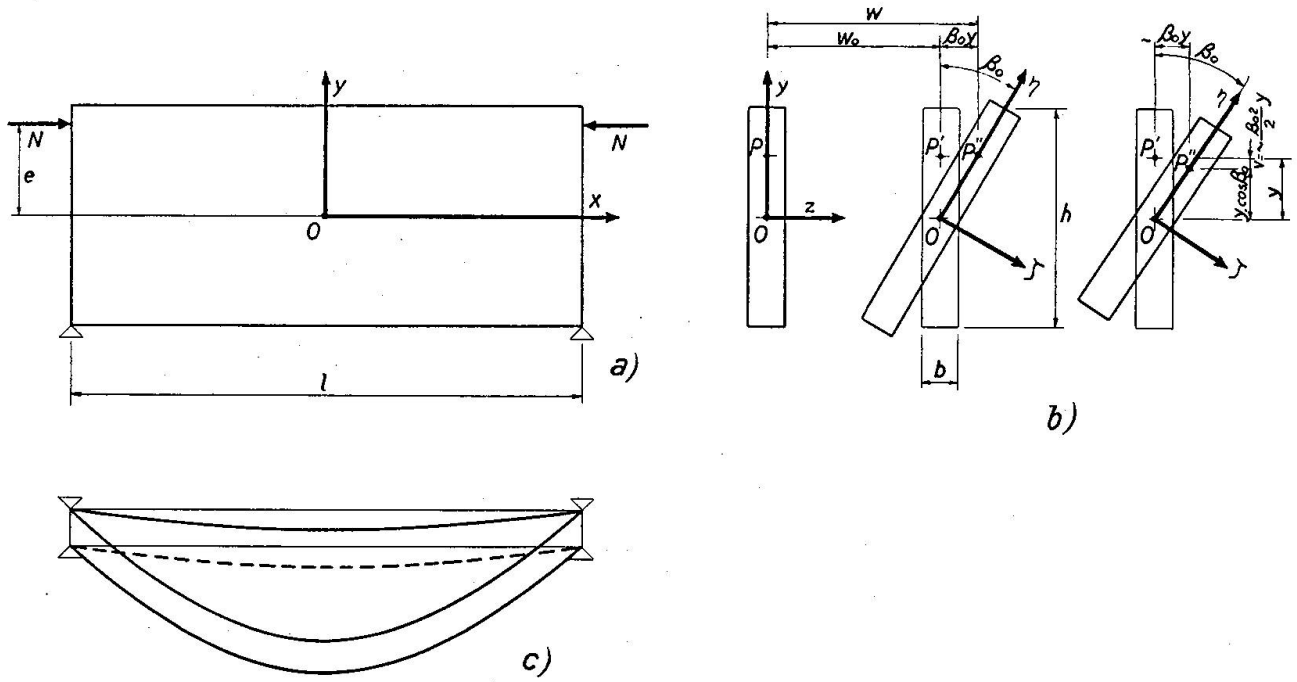

Fig. 1

qui correspondent à la déformation indiquée sur la fig. 1b et qui respectent les conditions aux extrémités, β_0 représentant l'angle de torsion et w_0 le déplacement transversal du centre de gravité[1].

Les déplacements choisis annulent évidemment le travail L_2': on a

$$\phi = B\int_0^{l/2}\left(\frac{d^2\overline{w}_0}{dx^2}\right)^2 dx + C\int_0^{l/2}\left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx}\right)^2 dx = \frac{B\pi^4}{4l^3}w_0^2 + \frac{C\pi^2}{4l}\beta_0^2$$

$$L_2 = \int_V \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV$$

où

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} - \frac{Ne}{I}y \text{ [2]} \qquad \epsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

---

[1]) En effet la véritable déformation est celle consignée sur la fig. 1a où le point P a, à cause de la rotation autour de 0, une composante du déplacement suivant Z (qui est une partie du déplacement total), fournie par $y \sin\beta_0 \sim y\beta_0$ et une composante suivant y donnée par la différence $v = y - y\cos\beta_0 \sim \frac{y\beta_0^2}{2}$ qui est une quantité infinitésimale d'ordre supérieur par rapport à $w = w_0 + \beta_0 y$ et par conséquent négligeable: c'est pour cela que nous avons considéré la déformation correspondant à la fig. 1b en supposant que la position finale du point P soit $1''$ est encore sur la ligne PP'.

[2]) On pourrait dire qu'à cause de la présence de v il y a une déformation $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ qui est une quantité infinitésimale du 2e ordre et qui interviendrait dans l'expression de L_2 pourvu que ne soit pas nulle la contrainte correspondante σ_y. Le seul effet produit par la v est de modifier L'_2 s'il y a des charges transversales appliquées dans un point de coordonnée y (1).

et par conséquent:

$$L_2 = -\frac{N\pi^2}{4l}\left(w_0^2+\beta_0^2\frac{I}{A}+2\beta_0 w_0 e\right)^{3)}.$$

On a ainsi, en appelant ρ le rayon d'inertie maximum:

$$\delta_2 E = \left(\frac{B\pi^4}{4l^3}-\frac{N\pi^2}{4l}\right)w_0^2+\left(\frac{C\pi^2}{4l}-\frac{N\pi^2}{4l}\rho^2\right)\beta_0^2-\frac{N\pi^2}{2l}\,e w_0\beta_0. \tag{7}$$

Le déterminant critique correspondant est:

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{2l^3}-\frac{N\pi^2}{2l} & -\frac{N\pi^2}{2l}e \\ -\frac{N\pi^2}{2l}e & \frac{C\pi^2}{2l}-\frac{N\pi^2}{2l}\rho^2 \end{vmatrix} = 0$$

dont le développement fournit l'équation du deuxième degré:

$$N^2(\rho^2-e^2)-N\left(\frac{B\pi^2}{l^2}\rho^2+C\right)+B\frac{C\pi^2}{l^2} = 0 \tag{8}$$

qui a pour racines:

$$N_{cr} = \frac{\frac{B\pi^2}{l^2}\rho^2+C}{2(\rho^2-e^2)} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{B\pi^2}{l^2}\rho^2+C\right)^2}{4(\rho^2-e^2)^2}-\frac{BC\pi^2}{l^2(\rho^2-e^2)}}. \tag{9}$$

Pour $e=0$ (charge centrée) on a:

$$N_{cr}^{(1)} = \frac{B\pi^2}{l^2} \qquad N_{cr}^{(2)} = \frac{C}{\rho^2},$$

la première racine correspondant au cas classique d'Euler et la deuxième indépendente de la longueur de la poutre et de la nature de ses liaisons, mais fonction seulement de la rigidité à torsion et de la hauteur de la section transversale. On conviendra ensuite de désigner ces deux charges critiques à flexion et à torsion par N_F et N_T: on peut alors écrire respectivement les formules (8) et (9) de la façon suivante:

$$N^2\left(1-\frac{e^2}{\rho^2}\right)-N(N_F+N_T)+N_F N_T = 0 \tag{8'}$$

---

3) Il faut remarquer qu'en choisissant pour les déplacements les expressions suivantes: $u=0$, $v=0$, $w=w_o\cos\frac{\pi x}{2l}$, les contraintes dûes au moment fléchissant ne travaillent pas parce qu'il s'agit évidemment d'une distribution anti-symétrique de contraintes et d'une distribution symétrique de déformations.

$$N_{cr} = \frac{N_F + N_T}{2(1-e^2/\rho^2)} \pm \sqrt{\frac{(N_F+N_T)^2}{4(1-e^2/\rho^2)^2} - \frac{N_F N_T}{1-e^2/\rho^2}} =$$

$$= \frac{N_F + N_T}{2(1-e^2/\rho^2)} \pm \frac{1}{2(1-e^2/\rho^2)} \sqrt{(N_F - N_T)^2 + 4 N_F N_T \frac{e^2}{\rho^2}}\,. \tag{9'}$$

Si $e = \rho$ la formule (9') perd sa validité et il faut alors tirer la valeur de N de la (8') qui se réduit en ce cas à une équation du premier degré. On a:

$$N_{cr} = \frac{N_F N_T}{N_F + N_T} = \frac{1}{\frac{1}{N_F} + \frac{1}{N_T}}\,.$$

Il est intéressant de remarquer que si l'on néglige dans le développement du déterminant de la page 4 le second terme de la deuxième ligne, et si l'on prend $M = N e$ on parvient à l'équation:

$$\frac{M^2}{BC}\left(1 + \frac{NC}{M^2}\right) = \frac{\pi^2}{l^2}$$

laquelle est parfaitement coïncidente avec celle qui est fournie par TIMOSHENKO [3].

4. Examinons et discutons la formule (8'); il s'agit de l'équation d'une quartique qu'il nous convient de mettre dans la forme suivante plus simple et expressive:

$$y^2(x^2-1) + a y + b = 0 \tag{8''}$$

dans laquelle, en se référant au problème que l'on envisage, on fait les hypothèses suivantes:

$$a > 0 \qquad b > 0 \qquad a^2 - 4b > 0 \tag{10}$$

La quartique est symétrique par rapport à l'axe $0y$ et possède à l'infini dans la direction de l'axe $0y$ un point double à tangentes distinctes (lesquelles ont respectivement les équations $x+1=0$ et $x-1=0$); la quartique possède encore à l'infini dans la direction de l'axe $0x$ un point double avec deux branches de côtés opposés par rapport à la tangente. De la formule (8') écrite dans la forme:

$$x^2 = \frac{y^2 - a y + b}{y^2} \tag{11}$$

on remarque que les coordonnées des points qui appartiennent à la courbe doivent satisfaire la relation:

$$y^2 - a y + b \geqq 0 \tag{11'}$$

laquelle, pour la troisième des hypothèses (10), étant donné que les racines du trinome du deuxième degré (au numérateur de la (11)) sont réelles, est vérifiée par:

$$y_1 \leqq y \leqq y_2$$

et étant $b > 0$ on a aussi $a > \sqrt{a^2 - 4b}$, par couséquent:

$$y_1 > 0 \qquad y_2 > 0$$

De la (8″) on tire les équations représentatives des deux branches de la quartique:

$$y_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b(x^2-1)}}{2(x^2-1)} \qquad y_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b(x^2-1)}}{2(x^2-1)}.$$

On remarque que:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ -0}} y_2(x) = \infty \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ +0}} y_2(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} y_2(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} y_1(x) = 0 \quad \text{et encore} \quad \lim_{x \to 1} y_1(x) = \lim \frac{2b}{a + \sqrt{a^2 + 4b(x-1)}} = \frac{b}{a}$$ [4])

et la fonction $y_1(x)$ est définie par continuité pour $x = 1$ en posant:

$$y_1(1) = \lim_{x \to 1} y_1(x) = \frac{b}{a}$$

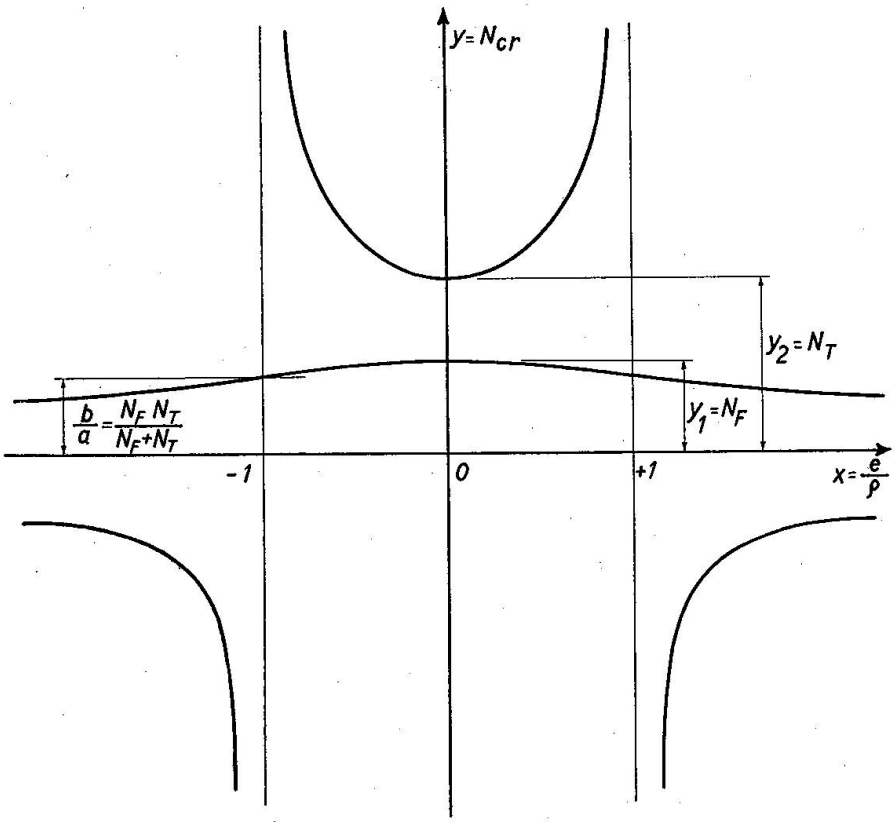

Fig. 2

[4]) On retrouve ainsi la valeur tirée de l'équation linéaire $a\,y - b = 0$ qui fournit:

$$N_{cr} = \frac{N_F N_T}{N_F + N_T}$$

Sur la fig. 2 on a représenté l'allure de la quartique précitée. Les valeurs physiquement acceptables pour la charge critique sont celles qui appartiennent au premier quadrant et en particulier, en pratique, celles de la branches $y_1(x)$.

Si $a^2 - 4b = 0$ soit $N_F = N_T$ (c'est à dire pour une valeur spéciale du rapport ρ/l la courbe a un point double $(0, a/2)$ et se réduit à deux hyperboles dont les équations sont:

$$2xy + 2y - a = 0 \qquad 2xy - 2y + a = 0 \tag{12}$$

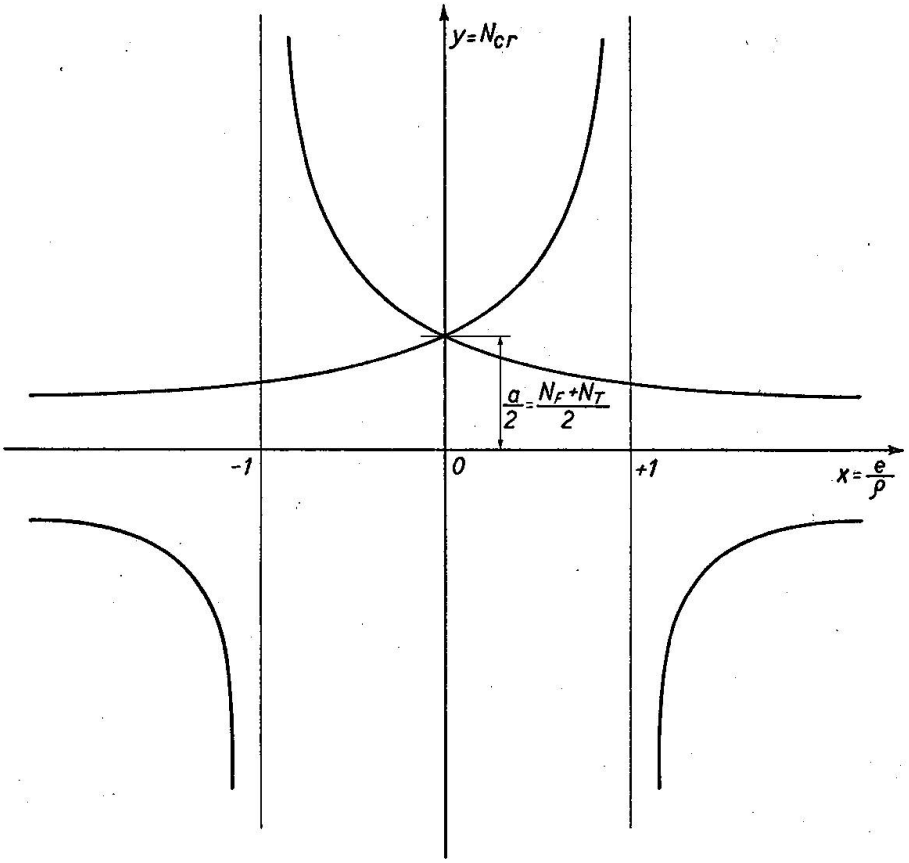

Fig. 3

et dont l'allure est consignée sur la fig. 3. Les valeurs physiquement possibles sont celles positives de la branche $y_1(x)$.

5. Les deux équilibres instables correspondant à la force axiale, coïncident lorsque:

$$N_F = N_T \quad \text{soit} \quad \frac{\rho^2}{l^2} = \frac{C}{B\pi^2}. \tag{13}$$

En généralisant les résultats obtenus on a pour tous les cas d'Euler:

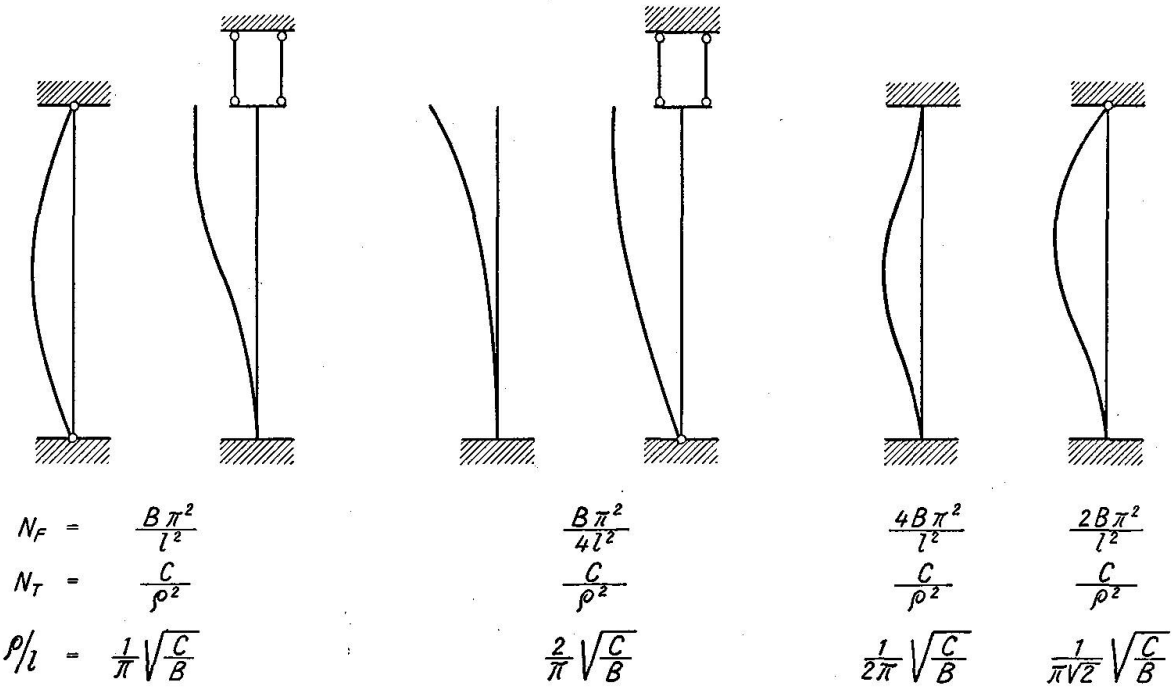

Fig. 4

Les rapports ρ/l indiqués sur la figure 4 pour chaque cas correspondent à la coexistence possible des deux équilibres instable à flexion et à torsion. En particulier pour une section rectangulaire de béton beaucoup plus haute que large ($\rho^2 = \frac{h^2}{12}$; $u \sim 0$; $C \sim 2\,B$) on a en correspondance à la fig. 4:

$\frac{h}{l} =$	1,103	2,205	0,551	0,780

6. Examinons maintenant le cas d'une distribution quelconque de forces axiales qui engendrent dans une section quelconque un moment fléchissant M (considéré comme positif s'il produit une traction dans les fibres inférieures) et un effort normal N (considéré comme positif s'il est une traction): on a

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} - \frac{M\,y}{I}$$

et:

$$L_2 = \frac{-\pi^2}{4\,l}\,(N\,w_0{}^2 + N\,\beta_0{}^2\,\rho^2 + 2\,M\,\beta_0\,w_0).$$

L'expression de la variation seconde de l'énergie potentielle totale devient alors:

$$\delta_2 E = \left(\frac{B\,\pi^4}{4\,l^3} - \frac{N\,\pi^2}{4\,l}\right) w_0{}^2 + \left(\frac{C\,\pi^2}{4\,l} - \frac{N\,\pi^2}{4\,l}\,\rho^2\right)\beta_0{}^2 - \frac{\pi^2\,M\,\beta_0\,w_0}{2\,l} \tag{14}$$

et le déterminant critique est:

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{2l^3} - \frac{N\pi^2}{2l} & -\frac{\pi^2 M}{2l} \\ -\frac{\pi^2 M}{2l} & \frac{C\pi^2}{2l} - \frac{N\pi^2}{2l}\rho^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Prenons maintenant en considération deux cas particuliers:

1) $M = 0$ $\qquad N = -2N_1$ (fig. 5)

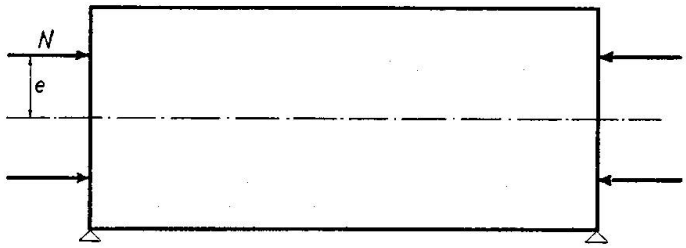

Fig. 5

$$N_F = \frac{B\pi^2}{2l^2} \qquad N_T = \frac{C}{2\rho^2} \tag{15}$$

2) $M = 2N_1 e_1$ $\qquad N = 0$ (fig. 6)

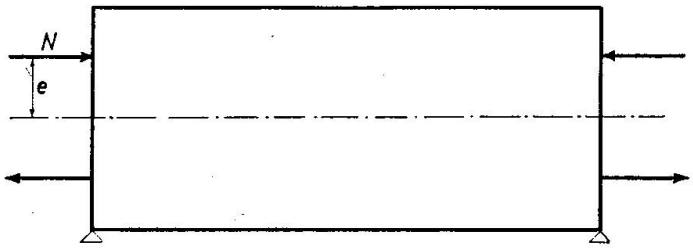

Fig. 6

$$N_{cr} = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{BC}}{el} \tag{16}$$

7. Dans l'étude que nous venons de développer nous aurions pu choisir pour les déplacements les expressions suivantes:

$$u = -\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x\,0)\right)^2 dx \qquad v = 0 \qquad w = (w_0 + \beta_0 y)\cos\frac{\pi x}{2l}. \tag{17}$$

On a alors:

$$u(l) = -\frac{\pi^2}{4l} w_0^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\pi^2}{2l^2} w_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{2l}$$

et outre le travail du deuxième ordre des contraintes internes:

$$L_2 = -\frac{N\pi^2}{4l}\left(\beta_0{}^2\frac{I}{A} + 2ew_0\beta_0\right)$$

on a encore un travail du deuxième ordre des forces extérieures:

$$L_2' = \frac{N\pi^2}{4l}w_0{}^2 .$$

La différence $L_2 - L_2'$ est égale au travail L_2 précédemment trouvé et l'expression [7] de $\delta_2 E$ demeure la même. Il est important de remarquer que le choix que l'on a fait pour u est tel que la contrainte σ_x travaille aussi pour la composante $\frac{\partial u}{\partial x}$ de la déformation. Cette composante, qui est en apparence du premier ordre, est en effet une quantité infinitésimale du deuxième ordre à cause du choix fait pour u.

8. Envisageons maintenant les équilibres instables qui proviennent de la coéxistence de charges axiales excentrées et de charges transversales. Considérons la poutre déjà étudiée et chargée par une force F concentrée au milieu. En tenant compte dans l'expression de $\delta_2 E$ du travail du deuxième ordre développé par les contraintes internes[5]),

$$L_2 = \int_v \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV + \int_v \tau_{xy}\gamma_{xy}^{(2)} dV = F\frac{4+\pi^2}{16}\beta_0 w_0 \tag{18}$$

on a:

$$\delta_2 E = \left(\frac{B\pi^4}{4l^3} - \frac{N\pi^2}{4l}\right)w_0{}^2 + \left(\frac{C\pi^2}{4l} - \frac{N\pi^2}{4l}\rho^2\right)\beta_0{}^2 - \left(\frac{N\pi^2}{2l}e + F\frac{4+\pi^2}{16}\right)\beta_0 w_0 \tag{19}$$

---

[5]) En effet:

$$\sigma_x = \frac{F}{2}\frac{l-x}{I}y \qquad \tau_{xy} = -\frac{F}{4I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\epsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

On a ainsi:

$$L_2 = \frac{F\beta_0 w_0}{16}(\pi^2 - 4) + \frac{F\beta_0 w_0}{2} = F\frac{4+\pi^2}{16}\beta_0 w_0$$

à laquelle on pouvait parvenir plus directement en considérant dans une section quelconque la courbure $\frac{1}{r}$ et la rotation relative $\frac{d^2 w}{dx^2}dx$ qui fait développer à la composante $M\beta$ du moment fléchissant autour de ξ, un travail fourni par:

$$2\int_0^{l/2} M\beta\frac{d^2 w}{dx^2}dx = 2F\int_0^{l/2}\beta\frac{d^2 w}{dx^2}(l-x)\,dx = F\frac{4+\pi^2}{16}\beta_0 w_0 .$$

Le déterminant critique correspondant est:

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{2l^3} - \frac{N\pi^2}{2l} & -\frac{N\pi^2}{2l}e - F\frac{4+\pi^2}{16} \\ -\frac{N\pi^2}{2l}e - F\frac{4+\pi^2}{16} & \frac{C\pi^2}{2l} - \frac{N\pi^2}{2l}\rho^2 \end{vmatrix} = 0$$

lequel développé fournit l'équation:

$$\frac{BC\pi^6}{4l^4} - \frac{N\pi^2}{2l}\left(\frac{B\pi^4}{2l^3}\rho^2 + \frac{C\pi^2}{2l}\right) + \left(\frac{N\pi^2}{2l}\right)^2\rho^2 - \left(\frac{N\pi^2}{2l}e + F\frac{4+\pi^2}{16}\right)^2 = 0. \qquad (20)$$

En posant comme précédemment:

$$N_F = \frac{B\pi^2}{l^2} \qquad N_T = \frac{C}{\rho^2}$$

et encore

$$\overline{F}_{cr} = \frac{8\pi^3}{4+\pi^2}\frac{\sqrt{BC}}{l^2}$$

on peut écrire:

$$F_{cr}^2 + 2\frac{e}{\rho}\frac{N\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F N_T}}F_{cr} - \left(N_F N_T - N(N_F+N_T) + N^2\left(1-\frac{e^2}{\rho^2}\right)\right)\frac{\overline{F}_{cr}^2}{N_F N_T} = 0. \quad (21)$$

Si l'on veut déterminer la valeur critique de F en connaissant N, ou inversement:

$$N_{cr}^2\left(1-\frac{e^2}{\rho^2}\right) - N_{cr}\left(N_F+N_T+2\frac{e}{\rho}\frac{F}{\overline{F}_{cr}}\sqrt{N_F N_T}\right) + N_F N_T\left(1-\frac{F^2}{F_{cr}^2}\right) = 0. \quad (22)$$

Examinons maintenant les formules (18) et (19) et discutons-les séparemment. La formule (21) fournit, si l'on ne tient pas compte de la racine négative:

$$F_{cr} = \frac{\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F N_T}}\left(\sqrt{N^2 - N(N_F+N_T) + N_F N_T} - N\frac{e}{\rho}\right) \qquad (23)$$

relation de laquelle on peut remarquer que l'excentricité e de la force N baisse la valeur de F_{cr}; on a $F = F_{cr}$ pour $N = 0$ et $F = 0$ pour cette valeur de N égale à la valeur critique que l'on a en l'absence de F.

Si $e = \rho$ on a l'instabilité pour:

$$F_{cr} = \frac{\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F N_T}}\left[N_F N_T - N(N_F+N_T)\right] \qquad (23')$$

et F s'annule pour $N = \frac{N_F N_T}{N_F+N_T}$ valeur correspondant à l'instabilité flexio-torsionale en l'absence de charges transversales. Si $e = 0$:

$$F_{cr} = \frac{\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F N_T}}\sqrt{(N_F - N)(N_T - N)} \qquad (23'')$$

Dans ce cas on a l'instabilité pour ces valeurs de la charge axiale N qui sont fournis par les formules (1), correspondant séparément à l'instabilité à flexion ou à torsion.

Envisageons maintenant dans le cas de $e \neq \rho$ la formule (19) dont la solution est:

$$N_{cr} = \frac{N_F + N_T}{2} + \frac{e}{\rho} \frac{F}{\overline{F}_{cr}} \sqrt{N_F N_T} \pm \sqrt{\left(\frac{N_F + N_T}{2}\right)^2 + N_F N_T \left[\frac{F^2}{\overline{F}_{cr}^2}\left(1 + \frac{e^2}{\rho^2}\right) - 1\right]} \tag{24}$$

laquelle fournit pour $F = 0$

$$N_{cr}^{(1)} = N_F \qquad N_{cr}^{(2)} = N_T$$

et pour $F = \overline{F}_{cr}$

$$N_{cr}^{(1)} = 0 \qquad N_{cr}^{(2)} = N_F + N_T + 2\frac{e}{\rho}\sqrt{N_F N_T}.$$

Si $e = \rho$ la formule (22) se réduit à une équation de premier degré et donne:

$$N_{cr} = \frac{N_F N_T}{N_F + N_T + 2\frac{e}{\rho}\frac{F\overline{F}_{cr}}{\sqrt{N_F F_T}}}\left(1 - \frac{F^2}{\overline{F}_{cr}^2}\right) \tag{24'}$$

laquelle s'annule forcément pour cette valeur de la charge transversale qui correspond à l'instabilité du système en l'absence de forces axiales. Si $e = 0$ on a:

$$N_{cr} = \frac{N_F + N_T}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_F + N_T}{2}\right)^2 - N_F N_T \left(1 - \frac{F^2}{\overline{F}_{cr}^2}\right)} \tag{24''}$$

avec laquelle

$$\text{pour } F = \overline{F}_{cr} \qquad N_{cr}^{(1)} = 0 \qquad N_{cr}^{(2)} = N_F + N_T$$

$$\text{pour } F = 0 \qquad N_{cr}^{(1)} = N_F \qquad N_{cr}^{(2)} = N_T.$$

Il est interessant de remarquer les effets dûs à la présence de N_T soit sur N_{cr} soit sur F_{cr}; en effet en négligeant N_T on a le déterminant (4):

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{2l^3} - \frac{N\pi^2}{2l} & -F\frac{4+\pi^2}{16} \\ -F\frac{4+\pi^2}{16} & \frac{C\pi^2}{2l} \end{vmatrix} = 0$$

et en conséquence l'équation:

$$\frac{BC\pi^6}{4l^4} - \frac{N\pi^4}{4l^2}C - F^2\left(\frac{4+\pi^2}{16}\right)^2 = 0 \tag{25}$$

qui par exemple, pour une valeur établie de N fournit:

$$F_{cr}^{(0)} = \frac{8\pi^2}{4+\pi^2}\frac{\sqrt{C}}{l}\sqrt{N_F - N}.$$

On a ainsi, avec la formule (24″)

$$F_{cr} = F_{cr}^{(0)} \sqrt{1 - \frac{N}{N_T}} < F_{cr}^{(0)} .$$

Pour une charge uniformément répartie, nous avons[6])

$$\delta_2 E = \left(\frac{B\pi^4}{4l^3} - \frac{N\pi^2}{4l}\right) w_0^2 + \left(\frac{C\pi^2}{4l} - \frac{N\pi^2}{4l}\rho^2\right) - \left(\frac{N\pi^2 e}{2l} + \frac{\pi^2+3}{24} pl\right) \beta_0 w_0 \tag{26}$$

et le déterminant critique correspondant est:

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{2l^3} - \frac{N\pi^2}{2l} & -\frac{Ne\pi^2}{2l} - \frac{\pi^2+3}{24} pl \\ -\frac{Ne\pi^2}{2l} - \frac{\pi^2+3}{24} pl & \frac{C\pi^2}{2l} - \frac{N\pi^2}{2l}\rho^2 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Voici une application concrète pour le cas d'une poutre cantilever (v. fig. 7).

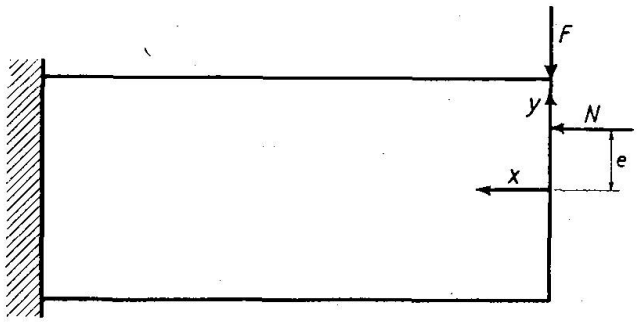

Fig. 7

Choisissons pour les composantes du déplacement les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} w &= \bar{w}_0(x) + \bar{\beta}_0(x)\, y \\ \bar{w}_0(x) &= w_0\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l}\right) \qquad \bar{\beta}_0(x) = \beta_0 \cos\frac{\pi x}{2l}. \end{aligned} \tag{27}$$

On a alors pour les contraintes, en appelant M le moment fléchissant dû à l'excentricité de la force N:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} - \frac{My}{I} + \frac{Fxy}{I}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

---

[7]) En conformité à ce qu'on a dit dans le renvoi (5) on a: $L'_2 = 0$: $L_2 = p\, l\, \frac{\pi^2+3}{24}\, \beta_0\, w_0\,(1)$

et pour la variation seconde de l'énergie potentielle totale:

$$\delta_2 E = \left(\frac{B\pi^4}{64\,l^3} - \frac{N\pi^2}{16\,l}\right) w_0{}^2 + \left(\frac{C\pi^2}{16\,l} - \frac{N\pi^2}{16\,l}\rho^2\right)\beta_0{}^2 - \left(\frac{M\pi}{4\,l} + \frac{F\pi}{8}\right)\beta_0 w_0 \,. \quad (28)$$

Le déterminant critique vaut:

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{32\,l^3} - \frac{N\pi^2}{8\,l} & -\frac{M\pi}{4\,l} - \frac{F\pi}{8} \\ -\frac{M\pi}{4\,l} - \frac{F\pi}{8} & \frac{C\pi^2}{8\,l} - \frac{N\pi^2}{8\,l}\rho^2 \end{vmatrix} = 0.$$

En l'absence de M il fournit:

$$\frac{F^2 l^2}{\rho^2 \pi^2} = N^2 - N(N_F + N_T) + N_F N_T \quad (29)$$

au lieu de (4)

$$\begin{vmatrix} \frac{B\pi^4}{32\,l^3} - \frac{N\pi^2}{8\,l} & -\frac{F\pi}{8} \\ -\frac{F\pi}{8} & \frac{C\pi^2}{8\,l} \end{vmatrix} = 0$$

qui fournit:

$$F_{cr}^{(0)} = \frac{\pi\sqrt{C}}{l}\sqrt{N_F - N}$$

dont:

$$F_{cr} = F_{cr}^{(0)}\sqrt{1 - \frac{N_T}{N}} < F_{cr}^{(0)}$$

10. Pour une poutre cantilever qui a les caractéristiques élastiques et géométriques suivantes:

$$l = 60\ \text{m} \qquad h = 15\ \text{m} \qquad b = 3\ \text{m}$$

$$B = 67{,}5 \cdot 10^6\ \text{t m}^2 \qquad C = 107{,}26 \cdot 10^6\ \text{t m}^2 \qquad \rho = 4{,}33\ \text{m}$$

et qui est soumise à une force axiale de 600 t on trouve:

$$N_F = 46{,}26 \cdot 10^3\ \text{t} \qquad N_T = 5720 \cdot 10^3\ \text{t}$$

$$F_{cr}^{(0)} = 115{,}74 \cdot 10^3\ \text{t} \qquad F_{cr} = 113{,}60 \cdot 10^3\ \text{t}.$$

Bibliographie

1. V. Giangreco: Instabilité de l'équilibre des voûtes polygonales. Association Internationale des Ponts et Charpentes. Zurich 1953.
2. V. Franciosi: Instabilità flessio-torsionale nelle travi alte in conglomerato precompresso. Giornale del Genio Civile. Aprile 1953.
3. V. Timoshenko: Theory of elastic stability. Ed. McGraw-Hill 1936.
4. Krall: Sicurezza rispetto ad una associazione dei tre casi d'instabilità di Eulero. Mitchell-Prandt e Reissner. Acc. Lincei. Aprile 1946.
5. Dirichlet: Über die Stabilität des Gleichgewichts. Journ. f. r. u. Angew. Math., Bd. 32.
6. Liapounoff: Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de force n'est pas maximum. Journal de Lionville. Ve série, 18/1897.
7. Levi, Civita; Amaldi: Meccanica Razionale. Vol. II, parte I. Ed. Zanichelli 1926.
8. V. Krall: Meccanica tecnica delle vibrazioni. Parte I. Ed. Zanichelli 1940.
9. V. Krall: Stabilità dell'equilibrio elastico. Annali di matematica pura e applicata. Serie IV. Tomo XXIX. Ed. Zanichelli 1949.

Résumé

L'auteur étudie l'association des équilibres instables dûs à l'action contemporaine de forces axiales et de forces transversales. En utilisant la méthode énergétique il trouve pour une force excentrée agissant parallèlement à l'axe de la poutre deux valeurs critiques de la charge, fonctions de la longueur de la barre, de la rigidité flexionale et torsionale, de l'excentricité de la force et du rayon maximum d'inertie.

Après avoir étudié certains cas particuliers qui se déduisent des formules trouvées, l'auteur envisage le problème de l'instabilité de la même barre soumise aussi à l'action de forces transversales. Il parvient à des expressions qui fournissent la valeur critique de la charge axiale, la charge transversale ayant été établie, ou inversement.

Il expose enfin une application numérique et détermine les valeurs critiques de la charge correspondant à l'instabilité par flexion et à l'instabilité par torsion.

Zusammenfassung

Der Verfasser behandelt das Stabilitätsproblem bei gleichzeitiger Beanspruchung in Richtung der Achse und senkrecht dazu. Unter Verwendung der Energie-Methode findet er für eine parallel zur Trägerachse wirkende exzentrische Kraft zwei kritische Lastwerte, welche von der Balkenlänge, der Biegungs- und Torsionssteifigkeit, der Exzentrizität der angreifenden Kraft und dem maximalen Trägheitsradius abhängig sind.

Nach der Beschreibung einiger Sonderfälle, welche aus den gefundenen Formeln abgeleitet werden, behandelt der Verfasser das Stabilitätsproblem des gleichen Balkens, welcher außerdem noch von einer Kraft senkrecht zur Achse beansprucht wird. Die erhaltenen Formeln erlauben die Bestimmung der kritischen Axiallast bei gegebener Belastung senkrecht zur Achse und umgekehrt.

Schließlich wird ein numerisches Beispiel behandelt und gezeigt, wie die kritischen Lasten von den Grenzwerten der Biegungs- und Torsionsstabilität abhängen.

Summary

The author treats the stability problem of simultaneous loading in the direction of the axis and normal to it. By application of the energy method, he finds two critical load-values, for an eccentric load acting parallel to the girder axis, which depend on the column-length, the bending- and torsion-stiffness, the eccentricity of the applied load and the limiting radius of gyration.

After detailing a few particular cases, which are derived from the formulas already found, the author discusses the stability problem of the same column which is now also loaded by a force normal to the axis. Formulas are derived which enable the critical axial load to be estimated for any given loading normal or skew to the axis.

In conclusion a numerical example is worked out and it is shown how the critical loads depend on the limiting values of the bending and torsional stability.