

# Calcul des forces internes par l'emploi successif de petites matrices

Autor(en): **Frandsen, A.G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **23 (1963)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19400>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## **Calcul des forces internes par l'emploi successif de petites matrices**

*Berechnung der inneren Kräfte durch sukzessive Anwendung von kleinen Matrizen*

*Calculation of Interior Forces by the Successive Use of Small Matrices*

A. G. FRANDSEN

Ingénieur civil, Chr. Ostfeld & W. Jønson, Copenhague

### **Introduction**

Cet article présente le «calcul successif» classique dans une forme matricielle telle que ce principe de calcul avantageux puisse être employé pour des constructions variées, tant planes que dans l'espace.

La base en est la théorie technique de l'élasticité.

On ne se prononcera pas sur les conditions dans lesquelles ce principe devra être préféré à la théorie technique de la plasticité. On se bornera à constater qu'il existe, et qu'il y aura toujours, un certain besoin de calculs sur la base mentionnée.

### **Petit aperçu historique**

Les méthodes de calcul successif, on le sait, ne sont pas d'introduction récente dans la statique technique. Les procédés graphiques des foyers, qui peuvent être considérés comme précurseurs, étaient, selon NØKKENTVED [1] par exemple, connus dès 1860 environ.

Les idées de base du calcul successif de portiques plans, tel que beaucoup l'emploient encore, furent exposées par A. OSTENFELD en 1922, en liaison avec la présentation de la «méthode des déformations» [2]. Le principe du calcul successif devint généralement répandu, lié à la «méthode des moments primaires» de EFSSEN [3]. Dès sa publication en 1931, cette méthode fut très assidûment employée.

Pourtant, l'emploi par EFSSEN du calcul successif est plus limité que chez A. OSTENFELD, en ce sens que EFSSEN ne traite en principe que des moments et

des rotations, et que, en conséquence, il doit ajouter toutes les fixations nécessaires aux constructions à nœuds mobiles. Ceci peut se traduire par un grand nombre d'équations à résoudre. C'est pourquoi, dès l'article mentionné, OSTENFELD avait proposé de traiter aussi bien les moments que les forces, respectivement translations et rotations, dans le même processus de calcul successif. OSTENFELD attachait beaucoup de prix à ce que l'on choisît les inconnues de telle sorte que l'on soit toujours en mesure de résoudre une équation avec une seule inconnue à la fois.

De plus, dans sa «Statique technique» II, de 1925 [4], OSTENFELD proposa d'utiliser le calcul successif pour des constructions hyperstatiques dans l'espace. On peut se contenter ainsi de ne résoudre que 6 équations à la fois.

De nos jours, il serait naturel d'exprimer ces pensées sous la forme matricielle, par laquelle on aboutirait à la méthode de calcul exposée ici. Pourtant, à cette époque, le calcul matriciel n'était pas accepté comme auxiliaire naturel pour les staticiens — et ce n'est que depuis les dix dernières années qu'il tend à le devenir au Danemark.

Le calcul matriciel remonte aussi à environ 1860, et, au Danemark, il fut introduit dans l'enseignement théorique des ingénieurs vers 1930.

Après la dernière guerre, il y eut, dans des publications spécialisées, un grand nombre d'articles tendant à clarifier l'utilisation du calcul matriciel dans les problèmes statiques — et, dans les dernières années, particulièrement en relation avec l'utilisation de machines à calculer électroniques. S. O. ASPLUND est un partisan bien connu du calcul matriciel, qui a traité dans la presse suédoise et étrangère de nombreux problèmes intéressants. Au Danemark, K. W. JOHANSEN, particulièrement dans son livre sur les matrices, a contribué à leur diffusion.

Il ne sera pas possible ici de donner un compte rendu tant soit peu complet de l'imposante bibliographie sur le sujet. Les quelques références qui suivent concernent celle où sont exprimées des idées semblables à celles qui se trouvent à la base du présent article. Nommons particulièrement R. S. JENKINS, qui, dans son livre de 1947 "Theory and Design of Cylindrical Shell Structures" présente sous forme matricielle les équations nécessaires à la combinaison successive d'une série de coques cylindriques [7].

Pour le calcul des tensions dans les tuyauteries, influencées par de grandes variations de température, des méthodes pour le calcul successif sous forme matricielle se sont développées, voir F. I. N. NIORDSON [8]. Il semble y avoir un intérêt particulier chez les constructeurs d'avions pour les problèmes de calcul pouvant être résolus par ces méthodes. Une importante liste de référence se trouve chez B. KLEIN [9].

Dans d'autres domaines professionnels se rencontrent des tendances parallèles dans la technique des calculs. Citons seulement les théories de conductibilité thermique (problèmes de couches multiples), et l'électrotechnique.

Il faut mentionner à ce propos que le militant des tenseurs, l'américain

GABRIEL KRON, a cherché à étendre ses considérations topologiques du circuit électrique à d'autres domaines, y compris le nôtre, voir par ex. la bibliographie [10].

### Description de la méthode

On peut définir la méthode comme la construction graduelle, dans l'abstrait, d'une structure, au cours de laquelle on fait constamment appel aux connaissances déjà acquises sur les autres parties de l'ouvrage. Ce principe est déjà bien connu des méthodes classiques de calcul successif.

En posant les calculs sous la forme de matrices, on est à même de pouvoir traiter ensemble aussi bien les efforts que les moments, respectivement rotations et translations. On évite ainsi de devoir ajouter des fixations comme soutiens fictifs temporaires aux nœuds mobiles.

Les concepts familiers de coefficient de répartition ou de transfert ont dans la méthode présente leurs pendants directs. On peut ainsi définir:

matrices de répartition,  
matrices de transport,  
matrices de flexibilité, et  
matrices de rigidité

pour tout élément de construction ou nœud.

Élément de construction ou nœud seront ici compris de manière large: un élément de construction est toute partie de l'ouvrage, grande ou petite, qui, au point de vue de la technique de calcul, est traitée ensemble — et qui ainsi ne se compose pas nécessairement d'une seule poutre, d'une seule barre, etc... De même, le concept de nœud doit s'élargir jusqu'à comprendre le nombre de nœuds simples que l'élément de construction ainsi défini a en commun avec l'élément contigu — et qui sont traités ensemble.

Tout élément de construction a deux nœuds: un en contiguïté avec la partie de la construction déjà traitée (éventuellement la fondation), et un nœud libre. Un trait marquant de la méthode est l'utilisation des *consoles* (poutres en porte-à-faux), caractérisées précisément par la fixation d'un nœud pendant que l'autre est libre.

Dans sa forme la plus simple, la méthode utilise ainsi la poutre-console libre, et nos considérations préliminaires seront, pour plus de simplicité, liées à celle-ci. La forme généralisée, qui sera exposée en même temps que quelques exemples d'utilisation, permet, entre autres, l'élimination des conditions cycliques, mais peut aussi parfois être employée avantageusement en vue de la réduction de l'ordre des matrices.

On s'efforce d'aborder les problèmes en partant des connaissances sur la construction — et non du système d'équations pour l'ensemble de la construction. Les matrices utilisées ne sont donc pas des sous-matrices dans ce grand

système d'équations, mais ont naturellement une certaine relation avec celles-ci.

En ce qui concerne les calculs, on s'efforce de maintenir les matrices à l'ordre le plus bas possible — d'où l'expression «petites matrices».

\* \* \*

Dans les calculs, on imagine toutes les charges appliquées aux nœuds, et seules les charges aux nœuds sont traitées ici. Les charges entre les nœuds se traitent de la manière élémentaire (les forces aux nœuds sont définies en supposant une fixation momentanée de tous les nœuds, et sont ensuite considérées comme forces externes).

### La poutre-console libre dans l'espace

La présentation ci-dessous suit les principes énoncés par NIORDSON [8]. Comme montré sur la fig. 1, nous imaginons une poutre-console placée dans un système de coordonnées orthogonales, avec le nœud de fixation placé à l'origine, et l'extrémité libre aux coordonnées  $(x, y, z)$ . La poutre n'est pas nécessairement rectiligne.

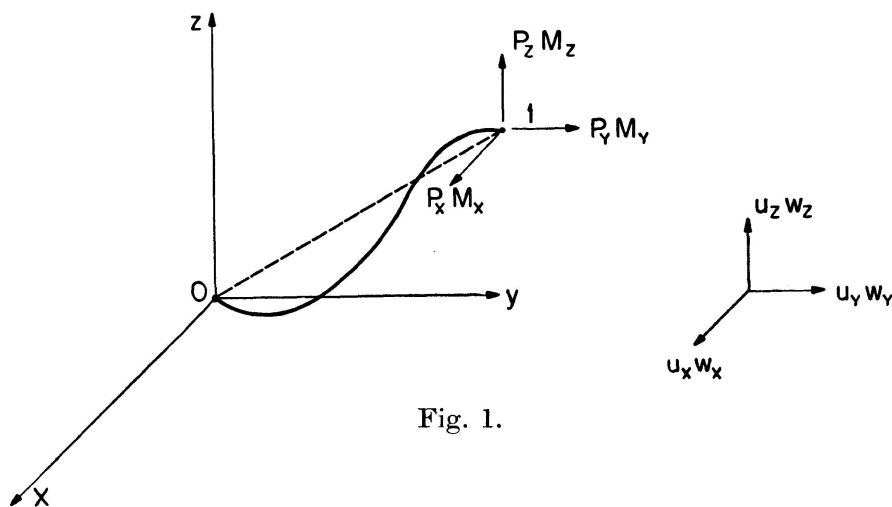


Fig. 1.

A son extrémité libre (point 1), la poutre est soumise à une force  $P_1$  et à un couple  $M_1$ , que nous supposons développés en leur composantes suivant les axes:

$$\begin{aligned} P_1 &= (P_x, P_y, P_z)_1, \\ M_1 &= (M_x, M_y, M_z)_1. \end{aligned}$$

Les coordonnées de la force et du couple sont comptées positives selon  $x, y, z$ .

Par ailleurs, on suppose la poutre-console non chargée. Les équations d'équilibre simple donnant les forces qui influent sur le nœud de fixation sont alors:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1, \\ M_0 &= r P_1 + M_1, \end{aligned}$$

où  $r = (x, y, z)$ , et  $r P$  représente le produit vectoriel.

Rassemblons maintenant, uniquement pour la technique de calcul, les vecteurs de la force et du couple en une colonne matricielle à 6 éléments:

$$K = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \{P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z\},$$

et transcrivons les équations en une « formule de transport » pour les « forces »  $K$ , en ne distinguant plus entre les forces et les couples:

$$K_0 = T K_1 = \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{0} \\ \bar{T} & \bar{E} \end{bmatrix} K_1,$$

où la matrice de transport  $T$  est une matrice carrée du 6e ordre contenant 4 matrices du 3e ordre, qui, ici, pour être distinguées des matrices du 6e ordre, sont surmontées d'un trait.  $\bar{E}$  représente une matrice unité (chiffres 1 en diagonale),  $\bar{0}$  représente une matrice zéro (zéros partout), et  $\bar{T}$  la matrice spéciale antisymétrique qui tient place du produit vectoriel:

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

En attribuant au point 0 une translation  $u_0 = (u_x, u_y, u_z)_0$  et une rotation  $w_0 = (w_x, w_y, w_z)_0$ , nous tirons les déplacements du point 1:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + w_0 r = u_0 - r w_0, \\ w_1 &= w_0, \end{aligned}$$

et pouvons alors, tout comme pour les forces, réunir  $u$  et  $w$  en une colonne matricielle  $U$ , et écrire

$$U_1 = T^* U_0.$$

le signe \* indiquant une transposition. Ceci est vérifié par le fait que  $\bar{T}$  est antisymétrique, et le changement de signe signifie donc simultanément une transposition, et l'on remarque que  $\bar{T}$  se déplace comme un tout.

On remarquera expressément que nous avons ici considéré les déplacements de la poutre-console comme un tout rigide, et que, en conséquence, la relation établie ne vaut que pour la partie des déplacements du point 1 qui ont leur origine dans les déplacements du point 0. La contribution des déformations de la poutre-console sur le segment 0-1 sous l'action des forces internes éventuelles doit être ajoutée séparément. Nous devons de plus souligner que

nous avons utilisé les présuppositions habituelles quant aux petites déformations.

Nous pouvons maintenant énoncer l'important théorème définissant la relation entre le transport des forces et celui des déplacements:

Les matrices de transport qui, pour une construction par ailleurs non chargée, représentent le transfert des forces du nœud libre au nœud fixe, et, réciproquement, le transfert des déplacements du nœud de fixation au nœud libre, se déduisent l'une de l'autre par transposition.

Ce théorème est une conséquence directe de l'hypothèse sur les petites déformations ainsi que des règles géométriques simples pour d'une part l'équilibre des forces, d'autre part les déplacements des corps rigides, mais, comme on le verra par la suite, il est valable aussi lorsqu'on intercale des soutiens élastiques entre les points 0 et 1, et peut ainsi être étendu jusqu'à valoir pour tout élément de construction. Ce théorème est d'ailleurs un cas particulier du «Théorème de KROHN» mentionné par ASPLUND [5].

\* \* \*

Si nous considérons ensuite les contributions de la poutre 0-1 même aux déformations (avec point 0 comme absolument fixe), il apparaît qu'une équation de ce type serait possible:

$$U_1 = B_1 K_1,$$

où  $B_1$  est une matrice carrée symétrique du 6e ordre, appelée *matrice de flexibilité*. Dans toute une série de cas simples, on peut poser directement cette matrice en connaissant la forme de la poutre, les constantes de section et les propriétés du matériau. On aura alors avantage à développer la poutre de la manière la plus simple possible sur des axes de coordonnées.

Si l'on connaît  $B'$  dans les axes de référence  $X'$ , on trouve aisément  $B$  dans le système  $X$ , connaissant la transformation orthogonale qui reporte les vecteurs d'un système à un autre. Si par ex.:

$$X = \bar{R} X',$$

on a 
$$K = R K', \quad \text{et} \quad U = R U',$$

où  $R = [\bar{R} \bar{R}]$  est une matrice quasidiagonale du 6e ordre, avec sous-matrices principales  $\bar{R}$ .

On reconnaît alors dans  $X'$  la relation  $U' = B' K'$ , et l'on voit que l'on a:

$$U = R B' R^* K, \quad \text{avec} \quad R^{-1} = R^*,$$

c'est-à-dire:

$$B = R B' R^*.$$

Si une poutre rassemble une série de segments à matrices de flexibilité ainsi connues, on obtient facilement les propriétés de l'ensemble de la poutre par la formule (voir fig. 2):

$$B_p = \sum T_{mp}^* B_m T_{mp}.$$

$T_{mp}$  y représente les matrices de transport pour les forces du point  $p$  au point  $m$ , qui est le point du segment  $m$  le plus proche de l'extrémité libre de la poutre, et  $B_m$  est la matrice de flexibilité pour le segment  $m$ .

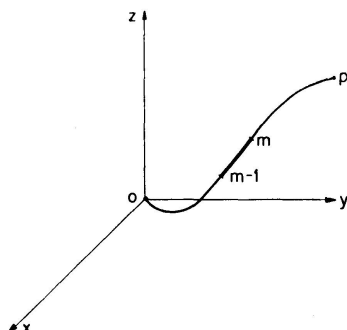


Fig. 2.

Si l'on réduit au fur et à mesure les segments, l'addition peut être remplacée par une intégration.

Pour une poutre à peu près droite, dans laquelle les axes principaux sont en même temps axes de symétrie, on peut poser une expression très simple des matrices de flexibilité  $B'$  des segments (à l'intérieur du système de référence «propre» au tronçon de poutre), en écrivant avec les symboles facilement compréhensibles:

$$dB' = ds \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ EA & GA_1 & GA_2 & GK & EJ_1 & EJ_2 \end{array} \right],$$

c'est-à-dire une pure matrice diagonale. On a donc pour tout le membre  $0 - p$ :

$$B = \int_0^p T_{sp}^* R(s) dB' R^*(s) T_{sp},$$

où l'on reconnaîtra, avec un peu de fantaisie, les expressions bien connues pour la détermination des déformations à l'aide de l'équation du travail.

\* \* \*

Comme on le sait, on néglige bien souvent les déformations qui proviennent des efforts normaux ou tranchants.

Les matrices  $dB'$  deviennent donc singulières, et  $B$  de même, si l'axe de la poutre est rectiligne. Si au contraire l'axe de la poutre s'écarte de la ligne droite entre  $0$  et  $p$ ,  $B$  devient positive définie. Ces considérations sur la singularité ne sont pas sans portée quand on utilisera les approximations mentionnées.

Elles jouent aussi un rôle important dans certains raisonnements que l'on peut être amené à faire dans la recherche d'une formulation sans dimensions. Comme on l'aura noté, entrent dans les colonnes matricielles  $K$  et  $U$  des éléments de dimensions variées. Ceci est sans grande importance, mais, intuitivement, on préférera une formulation dans laquelle les éléments de chaque colonne matricielle seront de même espèce, et, étant donné que les efforts que



l'on portera dans ce sens aideront en même temps à clarifier les lois d'extrapolation, nous nous penchons maintenant sur cette question.

Nous reprendrons les matrices jusqu'ici présentées  $K'$  et  $U'$ , et en tirerons de nouvelles par les transformations:

$$K = \begin{bmatrix} \bar{E} & \frac{1}{a} \bar{E} \end{bmatrix} K', \quad U = \frac{E J}{a^3} [\bar{E} \ a \bar{E}] U'.$$

$E$ ,  $J$ , et  $a$  sont des valeurs de référence arbitrairement choisies pour le module d'élasticité, le moment d'inertie, et la longueur. Tous les éléments des colonnes matricielles  $K$  et  $U$  ont maintenant la même dimension, à savoir la force.

Les matrices de transport deviennent:

$$T = \begin{bmatrix} \bar{E} & \frac{1}{a} \bar{E} \end{bmatrix} T' [\bar{E} \ a \bar{E}] = \begin{bmatrix} \bar{E} & \bar{0} \\ \frac{1}{a} \bar{T}' & \bar{E} \end{bmatrix}.$$

Cette transformation est du type  $C^{-1} A C$ , appelée transformation de similarité. Les transformations de ce type conservent les caractéristiques de sommation et de multiplication dans les matrices transformées.

Les matrices de flexibilité se transforment d'une manière un peu différente:

$$B = \frac{E J}{a^3} [\bar{E} \ a \bar{E}] B' [\bar{E} \ a \bar{E}].$$

Cette transformation n'est pas une transformation de similarité, mais a les mêmes caractéristiques simples concernant la sommation.

Ces transformations faites, tous les éléments des matrices  $B$  et  $T$  sont des chiffres purs.

Si l'on considère  $B'$  et  $B$  divisées en sous-matrices du 3e ordre, on trouve les relations suivantes entre l'une et l'autre forme:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11} &= \frac{E J}{a^3} \bar{B}'_{11}, & \bar{B}_{12} &= \frac{E J}{a^2} \bar{B}'_{12}, \\ \bar{B}_{21} &= \frac{E J}{a^2} \bar{B}'_{21}, & \bar{B}_{22} &= \frac{E J}{a} \bar{B}'_{22}. \end{aligned}$$

Comme on peut s'en rendre compte facilement, les sous-matrices de  $B'$  sont cependant liées aux facteurs de proportionnalité suivants:

$$\begin{aligned} \bar{B}'_{11} &: \frac{L}{E A} \quad \text{et} \quad \frac{L^3}{E J}, & \bar{B}'_{12} &: \frac{1}{E A} \quad \text{et} \quad \frac{L^2}{E J}, \\ \bar{B}'_{21} &: \frac{1}{E A} \quad \text{et} \quad \frac{L^2}{E J}, & \bar{B}'_{22} &: \frac{L}{E J} \end{aligned}$$

où  $L$ ,  $E$ ,  $A$ , et  $J$  représentent respectivement la longueur de la poutre, le coefficient d'élasticité du matériau, une section caractéristique et un moment d'inertie caractéristique.

On voit ainsi que si l'on désire, pour deux poutres à même forme d'axe et même variation de section suivant l'axe, amener les matrices  $B$  à exactement la même forme, on devra d'abord choisir les caractéristiques convenables de la

poutre comme valeurs de référence, et ensuite soit avoir complète similitude, soit négliger les contributions de moindre importance des efforts normaux et tranchants. Dans ce dernier cas, on peut se permettre d'avoir différents facteurs de proportionnalité pour les longueurs et sections respectives, et l'on peut donc très facilement poser les matrices de flexibilité.

### Composition des éléments

Comme montré plus haut pour la poutre-console libre dans l'espace, on pourrait caractériser la situation d'un tel élément par des relations du type:

$$\begin{aligned} U_1 &= T_1^* U_0 + B_1 K_1, \\ K_0 &= T_1 K_1, \end{aligned}$$

valables pour l'élément lorsque celui-ci est soumis aux déplacements  $U_0$  au nœud 0 et aux forces  $K_1$  au nœud 1.

Pour trouver la distribution des efforts internes dans l'ensemble de la construction, on doit considérer l'élément comme mis en contiguïté avec les autres éléments. Pour cela, on utilise les deux principes suivants (appelés par NIORDSON [8] respectivement groupement par série et groupement parallèle):

1. Prolongation d'une partie de la construction déjà calculée par une partie libre, ne s'appuyant que sur cette partie connue.
2. Mise en contiguïté de deux parties connues dont les systèmes de support sont indépendants l'un de l'autre.

Par utilisation successive de ces deux principes, qui dans certaines variantes de la méthode sont très rapprochés, on calcule progressivement la construction d'un bout à l'autre. Parfois, on calcule la construction deux fois (ou plus) dans d'autres directions. Ceci dans un but de vérification, et pour simplifier la distribution des charges sur la construction à mener ensuite.

### *Opération de prolongation*

Penchons-nous maintenant sur le premier de ces deux principes, et considérons que le point 0 (fig. 3) est un nœud (dans la partie déjà calculée de la construction) à propriétés de déformation connues par:

$$U_0 = A_0 K_0.$$

On voit de là que la formule globale pour le déplacement du point 1 devient:

$$U_1 = (T_1^* A_0 T_1 + B_1) K_1 = A_1 K_1,$$

par laquelle la matrice de flexibilité résultante,  $A_1$ , pour le point 1 est définie.

Si l'on désire connaître le déplacement du point 0 en fonction d'un déplacement provoqué du point 1, on calcule la matrice de transport,  $C_1$ , définie par:

$$U_0 = A_0 T_1 A_1^{-1} U_1 = C_1 U_1.$$

Les formules présentées dans ce chapitre sont susceptibles d'être un peu modifiées, au cas où l'on traiterait d'éléments- consoles généralisés, voir plus bas.

*Opération de mise en contiguïté*

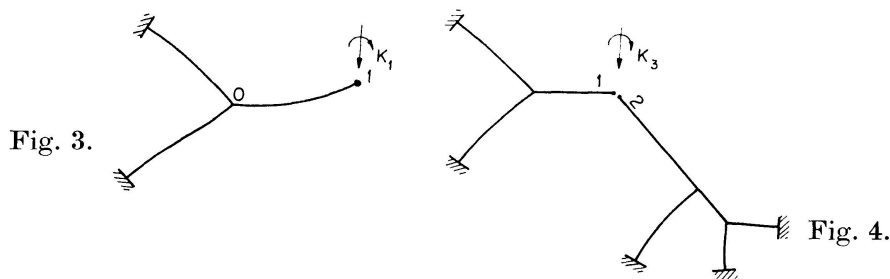
Considérons deux nœuds libres, 1 et 2 (fig. 4) dont nous connaissons les matrices de flexibilité  $A_1$  et  $A_2$ . Nous désirons réunir ces deux nœuds en un nœud commun, 3, dont nous chercherons la matrice de flexibilité  $A_3$  ainsi que la distribution d'une charge  $K_3$  entre les deux nœuds.

On suppose d'abord que, en l'absence de charge, les deux nœuds se confondent, et l'on a alors:

$$U_1 = A_1 K_1 = U_2 = A_2 K_2 = U_3 = A_3 K_3 \text{ et} \\ K_3 = K_1 + K_2$$

et, en supposant que  $A_1$  et  $A_2$  sont régulières:

$$U_3 = (A_1^{-1} + A_2^{-1})^{-1} K_3 = A_3 K_3, \\ K_1 = A_1^{-1} A_3 K_3 = D_1 K_3, \\ K_2 = A_2^{-1} A_3 K_3 = D_2 K_3.$$



On obtient ainsi la matrice de flexibilité résultante,  $A_3$ , et les deux matrices de distribution  $D_1$  et  $D_2$ , dont l'une ressort facilement de l'autre, leur somme étant la matrice unité  $E$ .

S'il existe au départ une «brèche» entre les deux nœuds non chargés, les équations deviennent:

$$U_1 = U_1^0 + A_1 K_1 = U_2 = U_2^0 + A_2 K_2 = U_3, \quad \text{et} \quad K_1 + K_2 = 0,$$

qui ont pour solutions:

$$U_3 = (A_1^{-1} + A_2^{-1})^{-1} A_1^{-1} U_1^0 + (A_1^{-1} + A_2^{-1})^{-1} A_2^{-1} U_2^0, \quad \text{ou} \\ U_3 = D_1^* U_1^0 + D_2^* U_2^0, \quad \text{et} \\ K_1 = -K_2 = A_2^{-1} (U_2^0 - U_3) = A_2^{-1} D_1^* (U_2^0 - U_1^0) = F_3 (U_2^0 - U_1^0).$$

Dans ce cas, on trouve donc une expression des forces internes résultantes sous la forme d'une matrice de rigidité  $F_3$ , multipliée par la brèche  $U_2^0 - U_1^0$ , ainsi qu'une expression du déplacement résultant comme quotes-parts des

déplacements initiaux des nœuds. Ces quotes-parts sont exprimées à l'aide des matrices de distribution transposées pour les nœuds en question.

Nous avons en même temps montré que la formulation déjà établie pour les forces et le transport des déformations est valable même si un élément a un support élastique. Si nous considérons par ex. le nœud 2 comme un tel support pour l'élément 0-1, nous voyons que :

$$\begin{aligned} K_0 &= T_1 D_1 K_3, \quad \text{pendant que} \\ U_3 &= D_1^* T_1^* U_0, \quad \text{avec} \quad U_1^0 = T_1^* U_0. \end{aligned}$$

Cependant, nous pouvons aussi constater qu'un déplacement imposé,  $U_0$ , du nœud de fixation entraîne certaines contraintes :

$$K_0 = -T_1 F_3 T_1^* U_0 = -F_0 U_0.$$

Nous sommes ainsi conduits à une formulation plus générale des conditions de déformation et d'équilibre de l'élément console, que nous tenterons d'approcher ci-dessous.

En résumé, nous pouvons constater que le résultat de l'opération de composition dépend entièrement des trois matrices  $A_3$ ,  $D_1$  et  $F_3$ , étant donné que l'on a :

$$\begin{aligned} U_3 &= A_3 K_3 + D_1^* U_1^0 + D_2^* U_2^0, \\ K_1 &= D_1 K_3 - F_3 U_1^0 + F_3 U_2^0, \\ K_2 &= D_2 K_3 + F_3 U_1^0 - F_3 U_2^0. \end{aligned}$$

Les matrices sont calculées le plus facilement dans un ordre de succession donné. Les formules appropriées sont données ci-dessous, l'expression développée ci-dessus (nommée ici 1re variation) étant transcrite de plus en deux autres variations pouvant être utiles dans certaines situations.

<i>1re variation</i>	1er pas: $A_3 = (A_1^{-1} + A_2^{-1})^{-1}$
	2e pas: $D_1 = A_1^{-1} A_3$
	3e pas: $F_3 = D_1 A_2^{-1}$
<i>2e variation</i>	1er pas: $F_3 = (A_1 + A_2)^{-1}$
	2e pas: $D_1 = F_3 A_2$
	3e pas: $A_3 = A_1 D_1$
<i>3e variation</i>	1er pas: $D_1 = (E + A_2^{-1} A_1)^{-1}$
	2e pas: $A_3 = A_1 D_1$
	3e pas: $F_2 = D_1 A_2^{-1}$

Dans toutes les variations,  $D_2$  ressort de :

$$D_2 = E - D_1.$$

La première variation, utilisant les matrices de rigidité  $A^{-1}$  dans les opérations de composition, est considérée comme la plus utilisable. Ainsi, il est possible

de faire entrer en une fois de nombreux éléments dans le même nœud. Par contre, la méthode ne permet pas l'emploi d'approximations rendant les matrices  $A$  singulières.

Si l'on se décide à utiliser cette variation, on cherchera naturellement à transcrire l'opération de prolongation de façon à ne devoir employer que les matrices de rigidité. Les avantages n'en semblent pourtant pas très grands, dans la mesure où les matrices de flexibilité sont régulières, mais la méthode peut être nécessaire si l'élément a un appui incomplet au point 0.

La seconde variation est souvent la plus avantageuse, lorsque les possibilités de son emploi sont réunies. Si ne se trouvent nulle part des conditions d'appui incomplet, les matrices de flexibilité pourront toujours être écrites avec des chiffres définis, et la variation être alors utilisée même si, séparément, les matrices de flexibilité sont, à cause des approximations faites, singulières.

La troisième variation s'emploie avec avantage surtout si la construction considérée contient une série d'appuis uniformes, ayant tous une matrice de rigidité singulière.

### **Élément console généralisé**

La poutre-console simple est statiquement déterminée, et les déplacements imposés au nœud de fixation n'entraînent aucune contrainte. Comme nous l'avons vu ci-dessus, un appui élastique d'un élément modifiera cependant ce rapport, sans néanmoins changer le fait que le transport des déplacements respectifs des forces entre le nœud libre et le nœud fixe sera exprimé par des matrices de transport transposées. D'une façon plus générale, des rapports similaires sont applicables à tous les éléments dont les déformations doivent entrer en ligne de compte dans la recherche des conditions d'équilibre. Nommons par exemple les poutres sur soubassement élastique, les barres minces de traction ou de compression, les parties complexes d'une construction prises comme éléments, etc...

Dans tous ces cas, on pourra en général écrire:

$$\begin{aligned} U_1 &= T_1^* U_0 + B_1 K_1, \\ K_0 &= -F_0 U_0 + T_1 K_1. \end{aligned}$$

Les matrices de flexibilité et de transport contenues seront déterminées en tenant compte de l'indétermination statique, mais il est capital d'avoir introduit une matrice de rigidité (éventuellement singulière), exprimant la résistance de l'élément au déplacement dans le nœud de fixation, point 0.

L'opération de prolongation ne peut alors pas être menée aussi aisément qu'auparavant, mais doit être exécutée comme une opération de mise en contiguïté. Si l'on imagine l'élément, 0-1, composé sans contrainte avec la construction servant de support, puis soumis à une charge extérieure  $K_0^0$ , seule une certaine part,  $K_0'$ , en influencera la construction de support (selon

les formules de la «3e variation»):

$$K'_0 = D_0 K_0^0, \quad D_0 = (E + F_0 A_0)^{-1}.$$

En chargeant le nœud 1 par  $K_1$ , le transport au point 0 pourra être exprimé ainsi:

$$K'_0 = D_0 T_1 K_1 = T'_1 K_1.$$

Puis on définit la matrice de flexibilité résultante pour le nœud 1 par:

$$A_1 = T_1^* A_0 T'_1 + B_1.$$

Nous avons là un exemple de ce que le transport des forces à un nœud élastique ne correspond pas au transport transposé de déplacements absolus venant de ce nœud.

L'expression du transport devient à nouveau valable lorsqu'on introduit, au lieu de déplacements absolus, une brèche  $\Delta U_0$  au nœud. Le déplacement absolu du nœud 0 dans l'élément 0-1 devient alors:

$$U_0 = D_0^* \Delta U_0,$$

et le déplacement résultant du nœud 1 devient:

$$U_1 = T_1^* D_0^* \Delta U_0 = T_1'^* \Delta U_0.$$

### Conditions de support incomplet

Nous avons jusqu'ici supposé que l'élément de construction considéré était supporté de telle manière que des forces de réaction de toutes sortes pouvaient se présenter en n'entraînant que des déplacements limités du nœud de support. Les déplacements sont supposés élastiques, éventuellement tous nuls.

D'autres conditions de support, celles qui, par ex., permettent certains types de déplacements sans contrainte, ne limitent pourtant pas le champ d'application de la méthode.

Bien entendu, il n'est alors pas possible d'utiliser une matrice de flexibilité confondant ensemble l'élément et le support, étant donné qu'une telle matrice comprendrait des éléments indéfiniment grands. Il n'est souvent pas possible, non plus, formellement, de poser une matrice de flexibilité ou de rigidité pour le support seul, étant donné que ces deux formes, en raison d'hypothèses idéalisées, comprendraient des éléments indéfiniment grands. Pour le système support plus élément, il sera pourtant toujours possible de poser une relation du type:

$$K_1 = A_1^{-1} U_1,$$

où la matrice de rigidité  $A_1^{-1}$  est d'un ordre correspondant à celui du groupe de forces pouvant être supportées par l'appui. Le processus de l'établissement de  $A_1^{-1}$  dépend des conditions données. Il sera alors possible de passer ensuite au calcul ultérieur suivant une des variations données.

### Exemples pratiques

Pour illustrer plus clairement le mode de calcul, sont présentés ci-dessous quelques exemples, choisis assez simples pour que la plupart puissent être traités par les méthodes habituelles de calcul manuel. Les constructions traitées dans ces exemples sont en conséquence planes, et même choisies de façon à ce que l'on puisse ne mettre en œuvre que des matrices du second ordre. Il n'y a aucun inconvénient à aborder ainsi les questions. Les constructions dans l'espace ne se distinguent que par la quantité, et non la nature des calculs nécessaires.

En chemin, nous serons amenés à traiter du problème des conditions cycliques, et montrerons comment on peut éviter les difficultés à leur sujet. Ceci ne pourra naturellement se faire qu'en choisissant des éléments plus composés, augmentant par là l'ordre des matrices. Dans chaque cas, il faudra donc se demander si l'utilisation du procédé est justifiée. Cela nous entraînerait trop loin de reproduire le développement des formules employées, qui sont d'ailleurs, dans la plupart des cas, faciles à vérifier.

#### *Poutres continues avec appuis et encastremets élastiques*

Une poutre uniforme, continue, encastrée dans une série de supports offrant résistance élastique tant à l'enfoncement qu'à la rotation, est un des systèmes statiques auxquels la présente méthode de calcul est particulièrement bien appropriée.

Ce système statique peut se présenter soit comme idéalisation d'un pont de bateaux, entre autres (fig. 5), soit au cours des calculs de répartition des charges pour les poutres maîtresses résistant à la torsion.

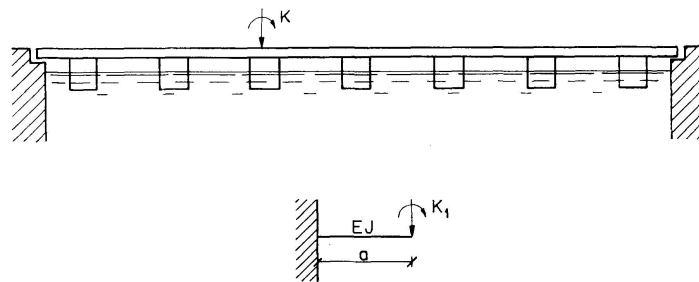


Fig. 5.

On ne prend en considération que les charges verticales, et l'on a ainsi un problème « plan droit », où chaque nœud a deux degrés de liberté.

La poutre-console simple (fig. 5) est utilisée comme élément de construction dans la composition graduelle envisagée. On comprend immédiatement que pour une telle poutre-console de longueur  $a$  et à rigidité constante  $EJ$ , les matrices de flexibilité et de transport sont (sans tenir compte de la contribution des efforts tranchants aux déformations):

$$B'_1 = \begin{bmatrix} \frac{a^3}{3 EJ} & \frac{a^2}{2 EJ} \\ \frac{a^2}{2 EJ} & \frac{a}{EJ} \end{bmatrix}, \quad T'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on amène ces matrices à une forme sans dimensions par la transformation précédemment décrite, et si l'on choisit les propres caractéristiques de la poutre comme valeurs de référence, on trouve:

$$B_1 = \frac{EJ}{a^3} [1 \ a] B'_1 [1 \ a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} T'_1 [1 \ a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices de forces et de flexion correspondantes sont alors:

$$K = \left\{ P, \frac{M}{a} \right\} \quad \text{et} \quad U = \frac{EJ}{a^3} \{u, aw\}.$$

Cette transcription est avantageuse, les éléments étant uniformes.

Les matrices de flexibilité des supports sont supposées connues, et on procède naturellement à la même transformation que pour la poutre-console. Pour des supports chargés au centre, les matrices de flexibilité sont en diagonale:

$$A_2 = [fv],$$

mais les supports chargés excentriquement sont traités aussi aisément. On procède aux calculs de cette manière: on commence par le support (par ex.) de gauche, pour lequel on pose:

$$A_0 = A_2.$$

On «prolonge» maintenant le support par la première poutre-console de la partie considérée, et la matrice de flexibilité résultante pour le point 1 dans la première partie est définie par la simple opération de prolongation:

$$A_1 = T_1^* A_0 T_1 + B_1,$$

Après quoi nous pouvons lier cette partie au support n° 2 et définir la matrice de flexibilité résultante  $A_3$ , la matrice de répartition  $D_1$  et la matrice de rigidité  $F_3$  (pour éviter un trop grand usage d'indices, doubles, les indications de points 0, 1, 2, et 3 sont utilisées ici avec la même signification relative pour toutes les parties).

On peut maintenant poursuivre les calculs, en considérant le nœud marginal venant d'être calculé comme le support de la prochaine poutre-console, et ainsi de suite.

En cas de nombreuses parties uniformes, on peut interrompre les calculs, lorsque les matrices de flexibilité pour les nœuds marginaux ne se modifient plus. En cas de symétrie, un calcul dans une direction est suffisant, mais autrement un second calcul dans la direction opposée est souhaitable, sinon absolument nécessaire.

Si l'on désire maintenant définir les effets sur l'ensemble de la construction d'une charge sur un nœud donné, on procède en ce nœud à la composition des



deux systèmes partiels contigus, après quoi les forces sont définies par utilisation successive des matrices de distribution et de transport.

Si l'on désire au contraire calculer les effets sur une section donnée d'une charge arbitrairement choisie sur tous les nœuds, on peut établir des matrices d'influence de la façon suivante: on introduit une brèche unité  $U = E$  dans la section, et définit les déformations  $y$  correspondantes dans tous les nœuds à l'aide des matrices de transport  $C_1$ . Ces matrices de déformation sont les matrices d'influence transposées pour les effets étudiés. Ce procédé bien connu est aussi basé sur le « théorème de KROHN ».

Si l'on envisage de mettre en œuvre ce dernier procédé, il sera avantageux d'utiliser la première variation décrite plus haut de l'opération de composition.

### Exemple numérique

Comme illustration supplémentaire, nous donnons ici un extrait d'un calcul pour une construction du type décrit.

Pour les poutres-consoles, on a trouvé, dans une forme sans dimensions, la matrice de flexibilité  $B_1$  et celle de transport  $T_1$ :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.213 & 0.359 \\ 0.359 & 0.718 \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans  $B_1$ , on a affaire à une rigidité variable.

Pour les supports, on a de même trouvé une matrice de flexibilité  $A_2$ :

$$A_2 = [0.0881 \quad 0.0724].$$

On pose alors, au premier nœud:

$$A_0 = [0.0881 \quad 0.0724].$$

Après prolongation par la première poutre-console:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3735 & 0.4314 \\ 0.4314 & 0.7904 \end{bmatrix}.$$

Après composition avec le second support:

$$F_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4616 & 0.4314 \\ 0.4314 & 0.8628 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 4.066 & -2.033 \\ -2.033 & 2.175 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.358 & -0.147 \\ -0.179 & 0.157 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.642 & 0.147 \\ 0.179 & 0.843 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.0565 & 0.0130 \\ 0.0130 & 0.0610 \end{bmatrix}.$$

Le calcul peut maintenant continuer exactement de la même manière, en posant  $A_0$  égale à la matrice  $A_3$  qui vient d'être trouvée, en prolongeant avec la console suivante. Nous nous limiterons ici cependant à définir l'influence sur le premier support d'une charge  $K_3$  sur l'autre nœud du système ainsi composé:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0.358 & -0.147 \\ 0.179 & 0.010 \end{bmatrix} K_3.$$

Si l'on avait au contraire utilisé des considérations de déformations dans la définition de la matrice d'influence, on aurait dû, dans l'opération de prolongation ci-dessus, définir:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.638 & -0.348 \\ 0.238 & -0.038 \end{bmatrix}.$$

Une brèche unité entre les nœuds 1 et 2 au second support résulte en un déplacement au point 1:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0.642 & 0.179 \\ 0.147 & 0.843 \end{bmatrix},$$

et le déplacement du nœud 0 qui s'ensuit est:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0.358 & -0.179 \\ 0.147 & 0.010 \end{bmatrix}.$$

Par transposition, on a alors la matrice d'influence pour l'effet sur le second support d'une charge sur le premier:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.358 & 0.147 \\ -0.179 & 0.010 \end{bmatrix} K_0$$

en accord avec le résultat précédemment trouvé.

### *Poutre continue sur supports élastiques mais incomplets*

Dans le cas où la liaison entre la poutre et le support est telle que seules des forces verticales à l'axe de la poutre peuvent être transmises (fig. 6), les matrices de flexibilité  $A_2$  contiendront un chiffre infiniment grand pour  $v$ . Il faudra donc prévoir d'introduire la matrice de rigidité:

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ f & 0 \end{bmatrix},$$

et de conduire les calculs avec utilisation de la variation 3 de l'opération de composition.

Le début des calculs doit s'effectuer de façon particulière, en définissant:

$$\begin{aligned} A_1'^{-1} &= T_1^{-1} A_0^{-1} T_1'^{-1}, \\ A_1^{-1} &= (E + A_1'^{-1} B_1)^{-1} A_1'^{-1}. \end{aligned}$$

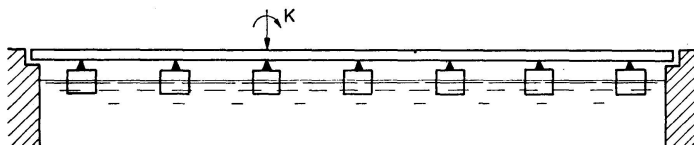


Fig. 6.

Pour les autres nœuds, on pourra cependant calculer les matrices de flexibilité régulières  $A_1$  de la façon normale.

\* \* \*

Les supports ne pouvant recevoir que des moments sont déterminés en relation avec les poutres Vierendeel symétriques à membrures parallèles (fig. 7). Si une telle poutre est soumise à une charge antisymétrique, il est clair que l'on peut considérer chacune des membrures comme une poutre continue sur supports à matrices de rigidité:

$$A_2'^{-1} = \frac{E_b J_b}{b} [0 \ 6].$$

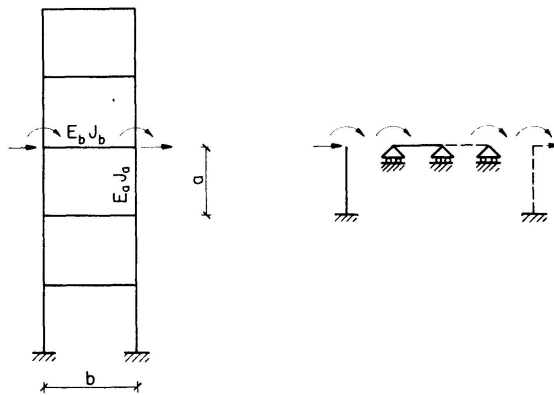


Fig. 7.

Par la transformation précédemment décrite, on aboutit à la forme sans dimensions:

$$A_2^{-1} = \frac{E_b J_b a}{E_a J_a b} [0 \ 6].$$

Dans ces deux cas non réguliers, les calculs chiffrés deviennent tout-à-fait simples du fait des singularités dans les matrices de rigidité des supports, mais ils sont conduits par ailleurs comme décrit précédemment.

#### *Généralisation de la poutre sur supports élastiques*

En plan, chaque nœud en soi a trois degrés de liberté, étant donné qu'il peut exécuter des déplacements tant verticaux qu'horizontaux, ainsi que de rotation. En principe, les calculs devront donc être exprimés en matrices du troisième ordre, autrement on ne peut pas toujours utiliser la poutre-console comme élément de construction.

Si l'on considère ainsi (fig. 8) un portique à 1 étage continu, à montants verticaux sur fondations indépendantes l'une de l'autre, on voit qu'il n'y a, en négligeant les tassements verticaux et les raccourcissements des poteaux, en fait que deux degrés de liberté pour chaque nœud: une rotation et une translation horizontale.

Ceci correspond précisément aux degrés de liberté des têtes de montants, et il n'y a en conséquence aucune difficulté à formuler les matrices de flexibilité pour ces éléments. Si l'on désire tenir compte de l'influence des déformations, on procédera comme montré dans un paragraphe spécial ci-dessous.

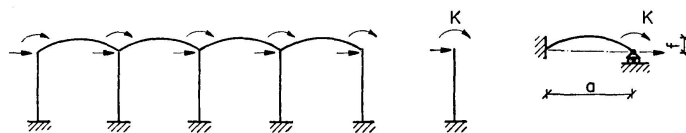


Fig. 8.

Pour la poutre, on doit cependant supposer introduits des mécanismes de guidage tels que l'extrémité libre ne puisse se mouvoir qu'horizontalement ou en rotation. Pour des arcs paraboliques plats, par ex. (fig. 8), avec  $EJ \cos \varphi$  constant, on a :

$$B'_1 = \frac{1}{EJ \cos \varphi} \begin{bmatrix} \frac{f^2 a}{5} & -\frac{f a}{6} \\ -\frac{f a}{6} & \frac{a}{4} \end{bmatrix}, \quad T'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F'_0 = \frac{EJ \cos \varphi}{a} [0 \ 3],$$

ou, sous une forme sans dimensions obtenue selon la transformation habituelle :

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \left(\frac{f}{a}\right)^2 & -\frac{1}{6} \frac{f}{a} \\ -\frac{1}{6} \frac{f}{a} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{f}{a} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad F_0 = [0 \ 3].$$

L'opération de prolongation doit être ici menée comme précédemment décrit pour les éléments-consoles généralisés, mais le mode de calcul ne s'en trouve pas modifié.

Pour ce type de constructions aussi, la méthode de calcul décrite s'avère bien appropriée.

### *Elimination des conditions cycliques*

Le bon aboutissement des calculs successifs dépend de la manière dont on suivra une « route » bien définie à l'avance dans la construction, et dont, sur cette route, on passera par tous les éléments en une seule fois.

S'il intervient des ramifications en cours de route, les rameaux devront avoir des supports indépendants. Si par contre les rameaux rejoignent le tronç central, nous sommes en présence de conditions cycliques, et l'utilisation simple du calcul successif en est rendue plus difficile. On pourra toujours pourtant résoudre sans trop de difficulté des boucles isolées simples.

Pourtant, si le nombre des boucles est trop élevé, la besogne de distribution des forces dans la construction peut devenir si compliquée qu'une autre manière de procéder doit être adoptée.

D'après ce qui précède, on voit que ce qui est déterminant à cet égard est

le concept de «route», et, comme il comprend une série d'éléments de construction, il s'agira de choisir ces derniers assez «larges» pour que des conditions cycliques soient évitées. Ceci sera toujours faisable.

Pour illustrer ceci, considérons le portique étagé multiple représenté à la fig. 9. Pour éviter des conditions cycliques dans le calcul de cette construction, on choisira, comme élément de construction, des étages-cadres entiers, se composant des poteaux solidaires avec la poutre. Ce système partiel est traité comme élément-console généralisé. On recherche alors à connaître les effets des forces au nœud libre 1 (les trois points de la face supérieure), pendant que le nœud 0 (les trois pieds de poteau) est maintenu fixe.

On définit ainsi la matrice de flexibilité  $B_1$  ainsi que la matrice de transport  $T_1$  pour l'élément. On définit de même la résistance aux déplacements au nœud 0 exprimée par la matrice de rigidité  $F_0$  et comme contrôle  $T_1^*$  pour le transport des déplacements au nœud libre 1.

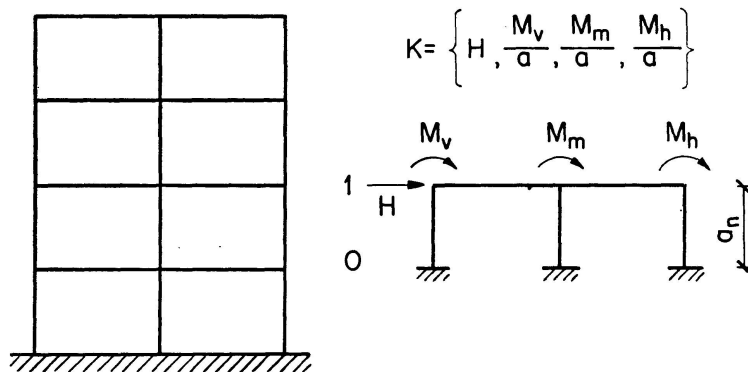


Fig. 9.

L'obtention de ces matrices peut se faire de n'importe quelle manière, par exemple selon la méthode décrite ici.

Si nous nous autorisons à utiliser les mêmes approximations que plus haut et à négliger les raccourcissements des barres, nous avons, dans ce cas précis, 4 degrés de liberté à chaque nœud: un déplacement horizontal (commun à tous les points du même nœud) et trois rotations individuelles des points. Si nous considérons spécialement une construction symétrique soumise à une charge antisymétrique, les rotations pour les poteaux externes seront identiques, et nous pouvons donc dans ce cas réduire à trois l'ordre des matrices. Remarquons de plus que la matrice  $F_0$  n'a que le deuxième rang, ce qui simplifie le calcul de composition.

En utilisant des éléments- consoles généralisés, nous avons changé une construction cyclique en une construction acyclique, et le calcul dans ce cas se ramène à une opération de prolongation.

Comme mentionné plus haut, cette généralisation entraînera une élévation de l'ordre des matrices, et il faudra donc se demander pour chaque cas si le procédé est rentable.

*Poteaux*

En considération de leur utilisation, nous donnons ci-dessous les matrices de flexibilité, transport et rigidité pour la flexion latérale d'un poteau-console mince soumis à une force normale  $P$  restant constante en cours de flexion. Voir fig. 10.  $Y$  est donnée la forme sans dimensions obtenue par la transformation précédemment décrite lorsqu'on choisit comme rigidité de référence  $E_a J_a$  et longueur de référence  $a$ , pendant que la longueur et la rigidité du poteau sont  $L$  et  $EJ$ .

$$B_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\text{tg}(kL) - kL}{(kL)^3} \gamma^2 & \frac{\sec(kL) - 1}{(kL)^2} \gamma \\ \frac{\sec(kL) - 1}{(kL)^2} \gamma & \frac{\text{tg}(kL)}{(kL)} \end{bmatrix}, \quad F_1 = \mu [0 \quad -(kL) \text{tg}(kL)],$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\text{tg}(kL)}{(kL)} \gamma & \sec(kL) \end{bmatrix}$$

où:  $k^2 = \frac{P}{EJ}, \quad \gamma = \frac{L}{a}, \quad \mu = \frac{EJ}{L} \frac{a}{E_a J_a}.$

On voit facilement, du développement en série des fonctions contenues, que les matrices, pour de petites valeurs de  $P$ , et donc de  $(kL)$  se rapprochent des expressions usuelles pour les poutres.

Une formulation équivalente pourrait être posée pour les tiges minces.

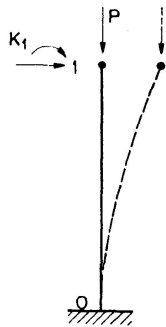


Fig. 10. N.B.  $P$  n'entre pas dans:  $K_1 = (H, M/a)_1.$

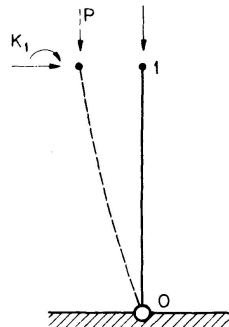


Fig. 11. N.B.  $P$  n'entre pas dans:  $K_1 = (H, M/a)_1.$

\* \* \*

Particulièrement pour les barres tendues ou comprimées, où l'effort normal est indépendant des charges transversales et de la flexion, on peut poser la matrice de flexibilité pour une poutre-console imparfaitement soutenue, avec charnière au point 0.

Pour un *potreau* de cette sorte (cf. fig. 11), on a :

$$B_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{-\gamma^2}{(kL)^2} & \frac{-\gamma}{(kL)^2} \\ \frac{-\gamma}{(kL)^2} & \frac{-1}{(kL) \operatorname{tg}(kL)} \end{bmatrix}.$$

\*            \*            \*

On voit que les poutres minces peuvent être traitées comme éléments- consoles généralisés, lorsqu'on y connaît par avance les efforts normaux. Comme dans toute autre méthode de calcul mettant en ligne de compte l'effet de flexions, on doit donc évaluer une répartition des efforts normaux, et éventuellement recalculer, au cas où le calcul montre de grandes variations. Pour des constructions à cadre normales, il sera pourtant rarement difficile de prévoir des valeurs sûres pour les efforts normaux.

### Remarques finales

De nombreux autres exemples pourraient être invoqués, où il s'avère avantageux d'employer les « petites matrices », avec calcul successif des efforts internes. Une des premières occasions où l'auteur a employé le principe fut en relation avec des réservoirs cylindriques, et il fut alors automatiquement amené à utiliser des éléments- consoles généralisés. Par l'introduction de ceux-ci, le domaine d'application possible de la méthode est en fait illimité, sans préjuger toutefois de son intérêt dans tous les cas.

Comme on le sait, une formulation matricielle devra toujours être très brève et générale dans ses symboles, et plus elle sera brève et générale, plus grandes et moins nombreuses seront les matrices employées. Le calcul de constructions portantes selon la théorie technique de l'élasticité pourra toujours être ramené à l'inversion d'une grande matrice, avec le calcul de routine des efforts internes qui s'ensuit — mais autant de tels calculs sont facilement concevables en théorie — autant ils sont difficiles à effectuer et à vérifier, lorsque les matrices sont grandes.

Dans l'inversion des grandes matrices, on est amené à divers artifices, tel qu'usage de sous-matrices. Ceux-ci sont de pures méthodes auxiliaires mathématiques pouvant être mises en œuvre dans un système d'équations proposé. Du point de vue de l'ingénieur, de telles méthodes purement mathématiques sont moins tentantes que les méthodes dans lesquelles on se passe tout à fait de longs systèmes d'équations et où les résultats intermédiaires ont une réelle signification physique.

L'auteur a donc insisté sur l'emploi successif de « petites matrices ». On en obtient des relations simples entre les propriétés de la construction et les éléments matriciels, et l'on conserve une certaine intuition de la vraisemblance

des résultats. Citons enfin qu'une division appropriée de la construction au point de vue de la conduite des calculs correspond souvent à des systèmes partiels survenant au cours de l'exécution de l'ouvrage, et que l'on désire étudier.

### Bibliographie

1. CHR. NØKKENTVED: «Teknisk Statik I.» Copenhague 1942.
2. A. OSTENFELD: «Deformationsmethoden, II.» Ingeniøren, Copenhague, 31<sup>e</sup> année. 1922, n° 46—47, pp. 285—296.
3. A. EFSSEN: «Die Methode der primären Momente.» Copenhague 1931.
4. A. OSTENFELD: «Teknisk Statik II.» 3<sup>e</sup> éd. Copenhague 1925.
5. S. O. ASPLUND: «A Unified Analysis of Indeterminate Structures.» Chalmers Tekn. Högsk. Hdgr. n° 243, Gothenburg 1961, et nombreux autres travaux.
6. K. W. JOHANSEN: *Matricer*, Copenhague 1957.
7. R. S. JENKINS: «Theory and Design of Cylindrical Shell Structures.» Londres 1947.
8. F. I. N. NIODSON: «Hållfasthetsberäkning av rörsystem.» Bygn. Medd., vol. 33, 1962, p. 1—16.
9. B. A. KLEIN: «Simple Method of Matric Structural Analysis.» *J. aeronautic Sciences*, vol. 24, p. 39—46, 813—820, 1957.
10. G. KRON: «Tensors for Circuits.» Dover Publ., New York 1959.

### Résumé

L'article décrit une méthode matricielle générale pour la détermination par étapes faciles des forces internes dans des constructions, composées de cadres tridimensionnels. Les relations de la méthode aux méthodes antérieures sont indiquées dans les grandes lignes. La méthode peut être considérée comme un développement des méthodes mises en œuvre pour le calcul des contraintes thermiques dans les tuyauteries, bien qu'elle ait été établie indépendamment de celles-ci.

L'élément de base est la poutre en porte-à-faux, mais cet élément est généralisé en tenant compte, par ex., des supports élastiques. Des parties plus grandes, composées de plusieurs éléments de base, peuvent aussi être traitées comme éléments de base généralisés. L'emploi des éléments généralisés permet parfois l'élimination des conditions cycliques et parfois aussi une réduction du nombre des inconnues à traiter à chaque étape. Des matrices de flexibilité ou de rigidité peuvent être appliquées, au choix, et des variantes de la méthode permettent le traitement des matrices singulières. Celles-ci entrent dans le calcul du fait soit des simplifications apportées, soit des conditions spéciales de support.

L'application de la méthode est montrée sur des constructions simples choisies de telle sorte qu'elles peuvent être traitées par les moyens de calcul ordinaire.



### Zusammenfassung

Der Artikel beschreibt eine allgemeine Matrizenmethode zur Bestimmung der inneren Kräfte von räumlichen Rahmenkonstruktionen in bequemen Schritten. Die Beziehungen zu früheren Methoden werden aufgezeigt. Die Methode kann, obwohl unabhängig ausgearbeitet, als eine weitere Entwicklung entsprechender Methoden für die Berechnung von Rohrsystemen betrachtet werden.

Das grundlegende freie Kragelement ist verallgemeinert, indem z. B. elastische Unterstüztungen berücksichtigt werden. Auch größere Konstruktionselemente sind als verallgemeinerte Kragelemente zu betrachten, wobei in gewissen Fällen zyklische Bedingungen eliminiert oder die Anzahl der Unbekannten, die bei jedem Schritt zu behandeln sind, verkleinert werden kann. Steifigkeits- und Flexibilitätsmatrizen sind dem Bedarf entsprechend zu gebrauchen und Variationen der Methode gestatten eine Behandlung singulärer Matrizen, die auf Grund von vereinfachenden Annahmen oder besonderen Unterstüztungsbedingungen entstehen.

Die Anwendung der Methode ist an Hand einiger sehr einfacher Konstruktionen erläutert, die so gewählt wurden, daß sie leicht mittels Handrechnung behandelt werden können.

### Summary

The article describes a general matrix method for the determination, by easy stages, of interior forces in framed space structures. The relationships of this method to previous methods are outlined. The method, although established independently, may be regarded as a further development of similar methods employed for the calculation of thermal stresses in pipe system.

The basic element is a free cantilever and this is generalised, taking into account e. g., elastic supports. Larger structural parts, consisting of several basic elements, can also be used as generalised cantilever elements. The use of generalised elements sometimes enables cyclic conditions to be eliminated and also, in certain cases, permits the number of unknowns to be treated at each stage to be reduced. Stiffness or flexibility matrices may be used, as may be convenient, and variants of the method allow of the treatment of singular matrices, such as may arise as a result of simplifying assumptions or special support conditions. The application of the method is demonstrated on some simple structures, chosen so that they can be treated by ordinary manual calculation.