Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 28 (1968)

Artikel: Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen
Autor: Hassan, Kamal
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22171

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen

On the Determination of the Buckling Length of Frame Columns

De la détermination de la longueur de flambage des poteaux de cadres

KAMAL HASSAN
Dr.-Ing., Lehrstuhl für Stahlbau und Holzbau, Technische Hochschule Stuttgart
Ass. Prof., Faculty of Engineering, Ain Shams University, Kairo

1. Einleitung

Die Praxis des Stahlbaues stellt häufig die Aufgabe der Bestimmung der Knicklänge von Rahmenstielen mit eingespannten Füßen, die an den Rahmenecken und zwischen diesen und den Stützenfüßen durch lotrecht angreifende Lasten beansprucht werden.

Dieser Rahmen soll hier untersucht werden, insbesondere wenn die am Stiel angreifenden Lasten verschiedene Verhältnisse zueinander aufweisen, da diesem Belastungsfall in der Praxis große Bedeutung zukommt.

2. Voraussetzungen

Wir untersuchen einen Rahmen, der aus geraden Stäben besteht und in den Knotenpunkten 1, 2, 1′, 2′ durch ein System lotrechter richtungstreuer Lasten beansprucht ist. Die Kraftwirkungslinien fallen mit den Stabachsen zusammen (s. Fig. 1). Versehen wir alle diese Lasten mit einem gemeinsamen Multiplikator ν, so lassen sich, wenn die üblichen idealisierenden Voraus-

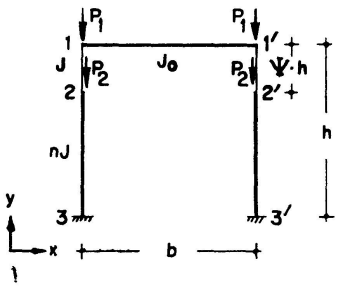


Fig. 1.

setzungen der Stabilitätstheorie (ideal gerade Stabachsen, ideal mittige Krafteinleitung, ideal homogener Werkstoff) erfüllt sind, bestimmte kritische Werte ν_{ki} angeben, die den idealen Knickbelastungszuständen (Verzweigungsstellen des Gleichgewichts) des Rahmens zugehören. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene Gleichgewichtsfiguren — die biegemomentenfreie und die infinitesimal ausgebogene — ausgebildet werden können. Der kleinste Wert stellt die Knicksicherheitszahl dar und bestimmt die ideale Knickbelastung des Rahmens.

Der Fall der symmetrisch gebauten Rahmen, bei denen die Riegel durch symmetrische Querlasten beansprucht werden und die daher schon vor dem Ausknicken Biegemomente und Querkräfte aufweisen, läßt sich mit ausreichender Näherung auf den untersuchten Fall zurückführen [1].

Eine Beschränkung auf kleine Ausbiegungen erlaubt den Zusammenhang zwischen der Achsenkrümmung $1/\rho$ und dem Biegemoment M_y weiterhin als linear anzunehmen, wenn auch die im Gleichgewichtszustand über die Querschnittsfläche F gleichmäßig verteilte Längsspannung $\sigma_0 = \frac{\nu S}{F}$ — wobei S die Stabkraft ist — die Proportionalitätsgrenze überschreitet.

Es wird weiter vorausgesetzt, daß die beim Ausknicken auftretenden elastischen Längsänderungen und Schubverformungen der Stäbe vernachlässigt werden, da sie keinen nennenswerten Einfluß auf die gesuchten Knicklängen der Rahmen ausüben.

3. Lösung des Stabilitätsproblems

Zur Lösung des Problems wird die von Beer [2] und Kupferschmid [3] vorgeschlagene Verknüppfung eines Ausgleichverfahrens mit dem Ostenfeldschen Formänderungsgrößenverfahren [4] verwendet. Wenn wir alle Knoten, Sprungstellen des Trägheitsmoments und Einspannstellen des Rahmens (Fig. 2a) durch Gelenke ersetzen, erhalten wir ein 3fach verschiebliches System

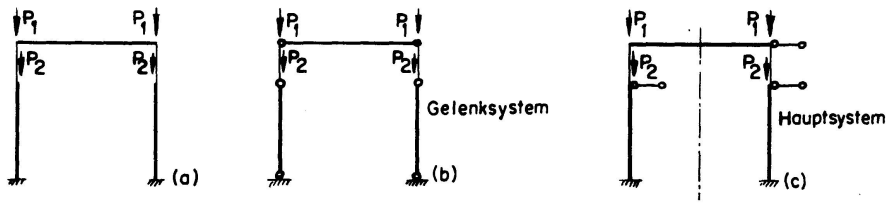


Fig. 2.

(Fig. 2b), bei dem leicht zu erkennen ist, wo die zur Gewinnung des unverschieblichen Hauptsystems benötigten 3 Ostenfeldschen Festhaltestäbe angeordnet werden müssen. Diese Festhaltestäbe sind starr und werden an den Knoten gelenkig angeschlossen. Unter der hier gegebenen Belastung weisen sie keine Kräfte auf ($Z_0 = 0$).

Da der biegemomentenfreien Gleichgewichtsfigur an der Stabilitätsgrenze eine antimetrische Knickfigur überlagert wird, müssen wir die der antimetrischen Knickfigur zugeordnete Teilknickbedingung herleiten. Die Mittelachse des Rahmens stellt in diesem Fall eine Antimetrieachse dar, und man kann sich dadurch auf die Untersuchung des in Fig. 3 mit nur zwei Festhaltestäben versehenen Teilsystems beschränken.

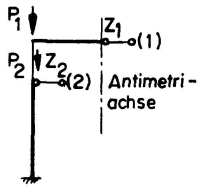


Fig. 3.

Unter einer gewählten Laststufe, die unterhalb der kritischen liegt, werden dem Hauptsystem Fig. 3 zwei Verschiebungszustände aufgezwungen:

1. Der Festhaltestab (1) wird aufgeschnitten und den Schnittufern eine gegenseitige Verschiebung $\zeta_1 = 1$ aufgezwungen. Bei diesem Zwängungszustand werden die Einspannmomente in den Stäben sowie die Ausgleichzahlen (Steifigkeits- und Fortleitungszahlen) unter Berücksichtigung der Axiallasteinflüsse ermittelt. Sie lassen sich mit Hilfe der «Chwalla-Hilfstafeln» [5] als Funktionen der Stabkennzahl

$$\epsilon_{ab} = l_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}}{E_{ab} I_{ab}}} \tag{1}$$

angeben, wobei hier l_{ab} die Länge, I_{ab} das Trägheitsmoment, E_{ab} der Elastizitätsmodul, S_{ab} die Axialkraft des Stabes ab bedeuten.

Nach dem Ausgleich der Momente sind die Festhaltekräfte Z_{11} und Z_{21} zu ermitteln. Sie ergeben sich sowohl aus dem Anteil der Endmomente als auch aus dem Anteil des Versetzungsmoments, das durch die richtungstreuen Axialkräfte erzeugt wird.

2. In gleicher Weise wird der Festhaltestab (2) aufgeschnitten und den Schnittufern eine gegenseitige Verschiebung $\zeta_2 = 1$ aufgezwungen. Die entstehenden Festhaltekräfte in den Stäben (1) und (2) werden mit Z_{12} und Z_{22} bezeichnet. Nach dem Satz von Betti ist $Z_{12} = Z_{21}$.

Bei gleichzeitigem Auftreten der Verschiebungszustände $\zeta_1 = 1$ und $\zeta_2 = 1$ ergeben sich die resultierenden Festhaltekräfte

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11}\,\zeta_1 + Z_{12}\,\zeta_2, \\ Z_2 &= Z_{21}\,\zeta_1 + Z_{22}\,\zeta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Da aber die Festhaltestäbe im tatsächlichen System nicht vorhanden sind, müssen die Knotenverschiebungen ζ_1 und ζ_2 so eingestellt werden, daß die Festhaltekräfte $Z_1 = Z_2 = 0$ sind. Anders ausgedrückt, bedeutet das, daß eine von der trivialen Nullage verschiedene Gleichgewichtslage existiert, wenn die aus den Z-Kräften gebildete Determinante

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ist. Diese Beziehung stellt das Knickkriterium dar. Ist $\Delta_k > 0$, dann ist der Rahmen noch stabil. Die Lasten werden gesteigert und der Rechnungsgang wird wiederholt bis eine Laststufe erreicht ist, bei der die Knickbedingung (3) erfüllt ist.

4. Grundbeziehungen für den Einzelstab

4.1. Starreinspannmoment unter Berücksichtigung der Axialkraft S

4.1.1. Beiderseits starr eingespannter, längsverschieblich gelagerter Stab bei einer Querversetzung Δ der beiden Enden

$$M^0_{ab} = M^0_{ba} = \frac{E\,I_{ab}}{l^2_{ab}}(A' + B')\,\Delta\,. \tag{4}$$

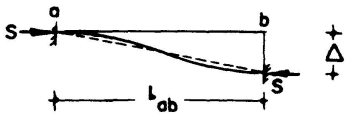


Fig. 4.

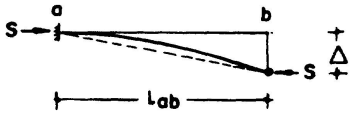


Fig. 5.

4.1.2. An einem Ende starr eingespannter, an dem anderen Ende gelenkig längsverschieblich gelagerter Stab

$$M^0_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l^2_{ab}}C'\,\Delta\,. \tag{5}$$

Hierbei sind:

$$A' = \frac{\epsilon \sin\epsilon - \epsilon^2 \cos\epsilon}{2\,(1 - \cos\epsilon) - \epsilon \sin\epsilon}, \tag{6}$$

$$B' = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin\epsilon}{2\,(1 - \cos\epsilon) - \epsilon \sin\epsilon}, \tag{7}$$

$$C' = \frac{\epsilon^2 \sin\epsilon}{\sin\epsilon - \epsilon \cos\epsilon}. \tag{8}$$

Diese Werte können den «Chwalla-Hilfstafeln» entnommen werden.

4.2. Die Steifigkeit s und die Fortleitungszahl c

4.2.1. Starr eingespannter Stab

$$s_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l_{ab}}A'\,. \tag{9}$$

Hierin ist statt A' bei Symmetrie $(A' - B')$, bei Antimetrie $(A' + B')$ zu setzen.

$$c_{ab} = \frac{B'}{A'}. \tag{10}$$

4.2.2. Gelenkstab

$$s_{ab} = \frac{E\,I_{ab}}{l_{ab}} C', \tag{11}$$

$$c_{ab} = 0. \tag{12}$$

5. Grundbeziehungen für den Rahmen

5.1. Grundwerte

Der Rahmen Fig. 6 weist folgende Grundwerte auf:

h = Höhe des Rahmens
b = Spannweite des Rahmens
Ψh = Länge des oberen Teils des Stieles ($\psi = 0{,}25,\ 0{,}30$)
I_0 = Trägheitsmoment des Riegels
I = Trägheitsmoment des oberen Teils des Stieles
$n\,I$ = Trägheitsmoment des unteren Teils des Stieles ($n = 1,\ 5,\ 10,\ 50$)
$c = \frac{b\,I}{h\,I_0}$ ($c = 0,\ 0{,}5,\ 1,\ 2,\ \infty$)
$\alpha = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$ ($\alpha = 0,\ 0{,}2,\ 0{,}5,\ 1$)

5.2. Vorzeichen

M: positiv wenn es den Knoten im Uhrzeigersinn dreht.
P: Druckkraft wird als positiv bezeichnet.
Z: Zugkraft wird als positiv bezeichnet.

5.3. Verschiebungszustände

5.3.1. Verschiebungszustand I

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\Psi h}{\sqrt{E\,I}} \sqrt{P_1},$$

$$\epsilon_{2,3} = \frac{(1-\Psi)\,h}{\sqrt{E\,I}} \sqrt{P_1 + P_2},$$

wenn $I_0 > 0$:

$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = \frac{E\,I}{(\Psi h)^2} (A' + B')_{1,2},$$

wenn $I_0 = 0$:

$$M_{12}^0 = 0,$$

$$M_{21}^0 = \frac{E\,I}{(\Psi h)^2} C'_{1,2}.$$

Mit Hilfe des Ausgleichverfahrens nach Cross werden die Endmomente M_{12}, M_{21}, M_{23}, M_{32} ermittelt.

Die Festhaltekräfte ergeben sich sowohl aus dem Anteil der Endmomente als auch aus dem Anteil des Versetzungsmoments $P_1 \zeta_1$, das durch die richtungstreue Druckkraft P_1 erzeugt wird.

$$Z_{11} = \frac{M_{12}+M_{21}}{\Psi h} - \frac{P_1 \zeta_1}{\Psi h}, \tag{13}$$

$$Z_{21} = \frac{M_{23}+M_{32}}{(1-\Psi)\,h} - \frac{M_{21}+M_{12}}{\Psi h} + \frac{P_1 \zeta_1}{\Psi h}. \tag{14}$$

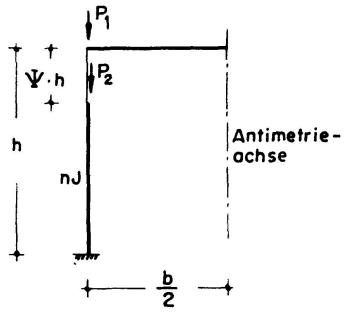


Fig. 6.

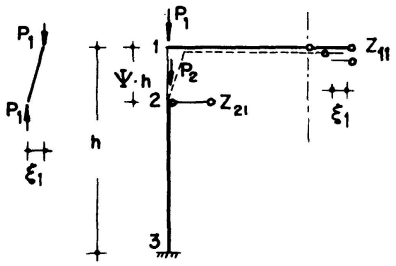


Fig. 7.

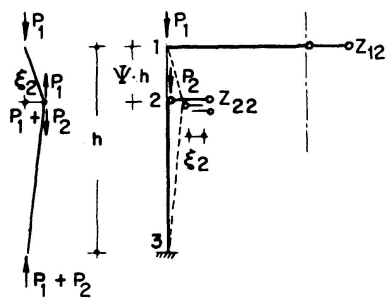


Fig. 8.

5.3.2. Verschiebungszustand II

Wenn $I_0 > 0$:

$$M_{12}^0 = M_{21}^0 = -\frac{E\,I}{(\Psi h)^2}(A'+B')_{1,2},$$

wenn $I_0 = 0$:

$$M_{12}^0 = 0,$$

$$M_{21}^0 = -\frac{E\,I}{(\Psi h)^2} C'_{1,2},$$

$$M_{23}^0 = M_{32}^0 = \frac{n\,E\,I}{[(1-\Psi)\,h]^2}(A'+B')_{2,3}.$$

Die Festhaltekräfte ergeben sich zu:

$$Z_{12} = \frac{M_{12}+M_{21}}{\Psi h} + \frac{P_1 \zeta_2}{\Psi h}, \tag{15}$$

$$Z_{22} = \frac{M_{23}+M_{32}}{(1-\Psi)\,h} - \frac{M_{21}+M_{12}}{\Psi h} - \frac{(P_1+P_2)\,\zeta_2}{(1-\Psi)\,h} - \frac{P_1 \zeta_2}{\Psi h}. \tag{16}$$

Nachdem die Festhaltekräfte ermittelt sind, bilden wir die Determinante und berechnen uns den Wert

$$\Delta_k = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}. \tag{17}$$

Der geschilderte Rechnungsgang ist für andere Laststufen so oft zu wiederholen, bis mit genügender Genauigkeit durch numerische oder graphische Interpolation die zu dem Wert $\Delta_k = 0$ gehörende Laststufe ermittelt ist.

Die kritische Last lautet:

$$(P_1 + P_2)_{ki} = \frac{\pi^2 E n I}{(\beta h)^2}. \tag{18}$$

Daraus wird der β-Wert ermittelt.

In den Fig. 9 bis 16 sind die β-Werte für $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$ in Abhängigkeit von c unter Berücksichtigung einiger Lastverhältnisse $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ und für $\Psi = 0{,}25$, bzw. $\Psi = 0{,}3$ dargestellt. Die Fig. 17 bis 20 zeigen die Abhängigkeit der Werte β von α für $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$ und $c = \infty$. Für die Grenzwerte von c $(c = 0,\ c = \infty)$ werden die β-Werte in Abhängigkeit von n in den Fig. 21 und 22 angegeben.

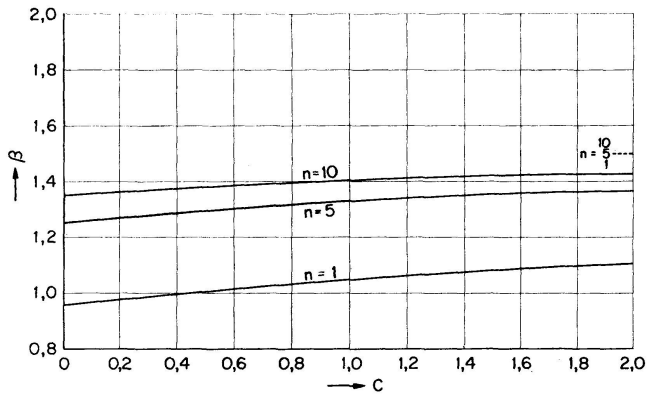


Fig. 9. $\alpha = 0$, $\Psi = 0{,}25$.

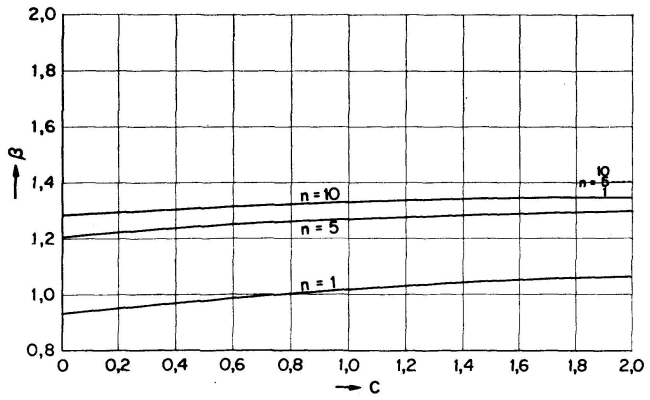
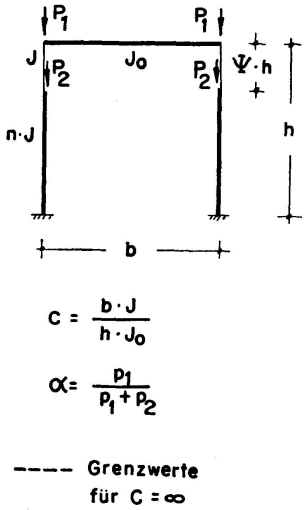


Fig. 10. $\alpha = 0$, $\Psi = 0{,}3$.



Erläuterung zu den Figuren 9—16.

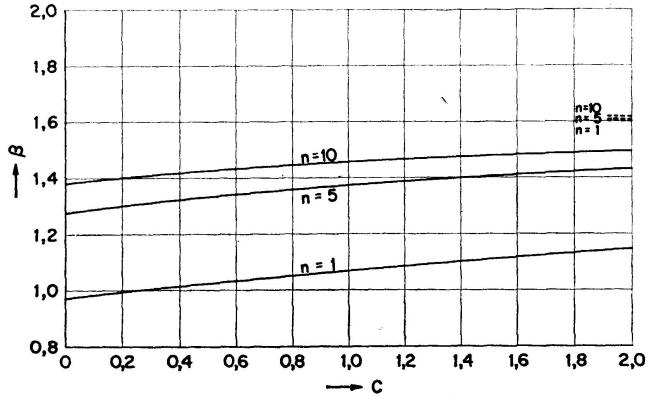


Fig. 11. $\alpha = 0{,}2$, $\Psi = 0{,}25$.

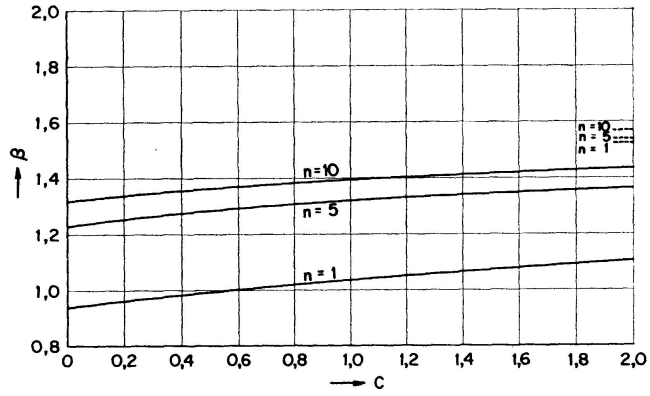


Fig. 12. $\alpha = 0{,}2$, $\Psi = 0{,}3$.

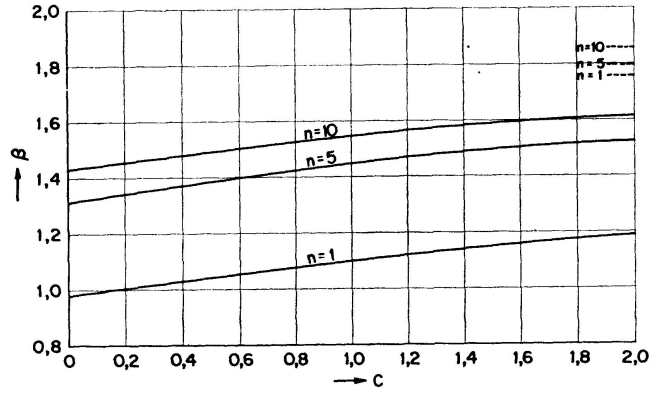


Fig. 13. $\alpha = 0{,}5$, $\Psi = 0{,}25$.

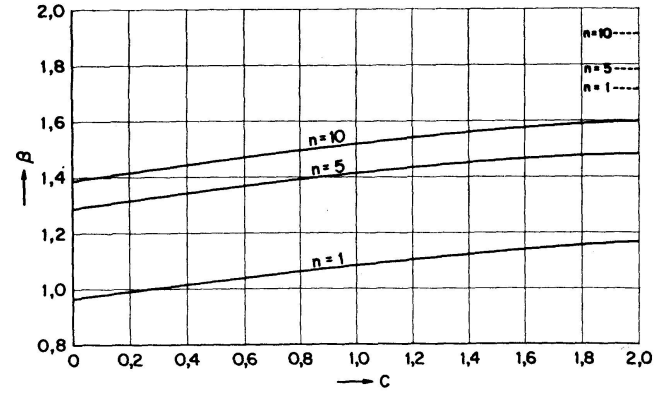


Fig. 14. $\alpha = 0{,}5$, $\Psi = 0{,}3$.

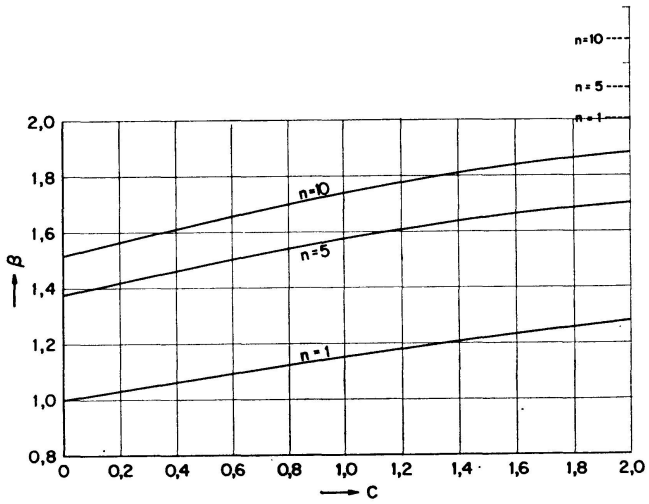


Fig. 15. $\alpha = 1{,}0$, $\Psi = 0{,}25$.

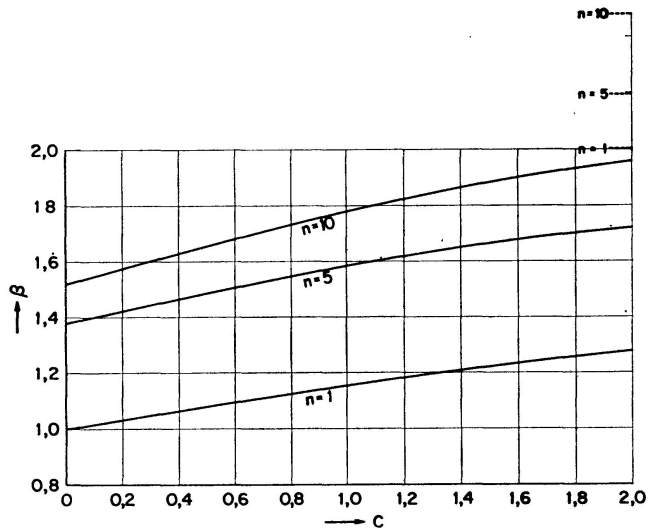


Fig. 16. $\alpha = 1{,}0$, $\Psi = 0{,}3$.

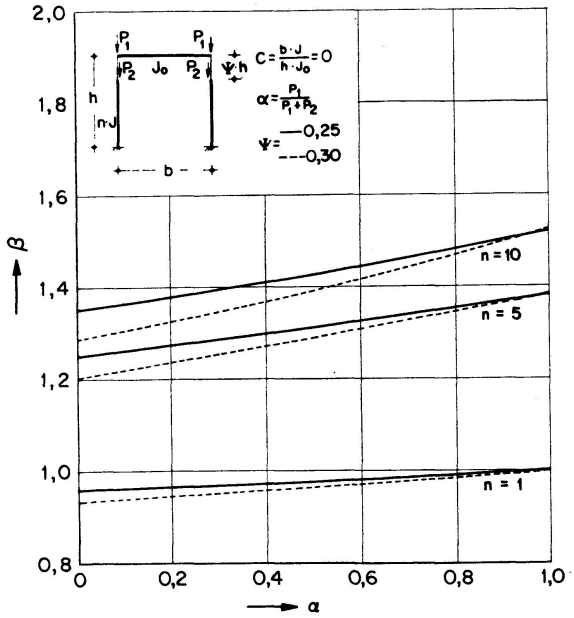


Fig. 17.

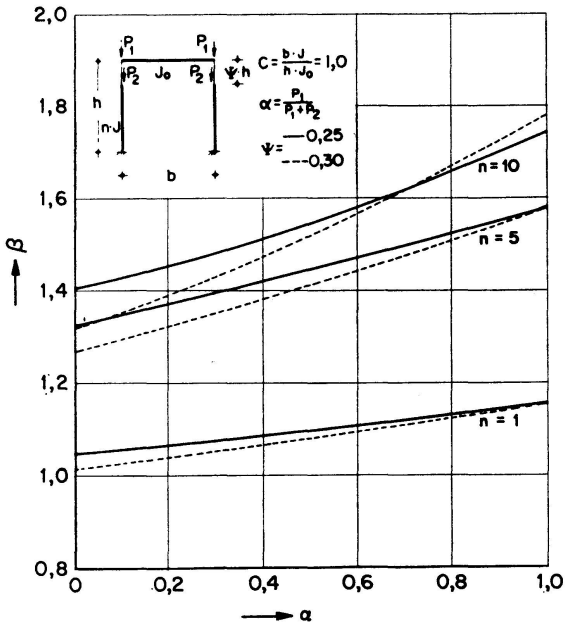


Fig. 18.

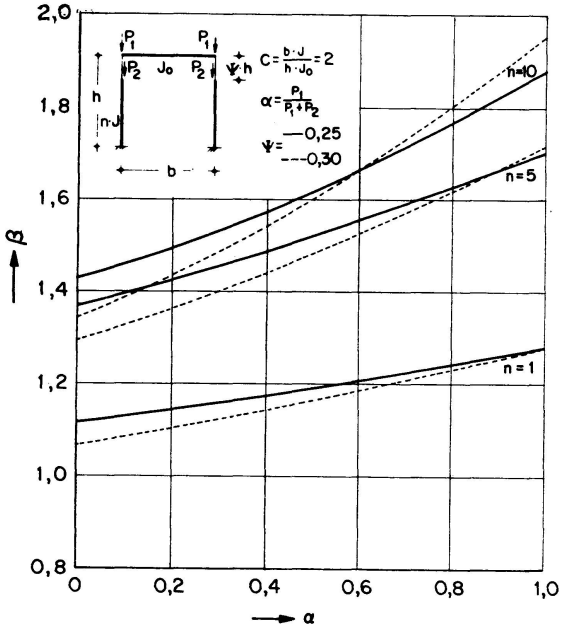


Fig. 19.

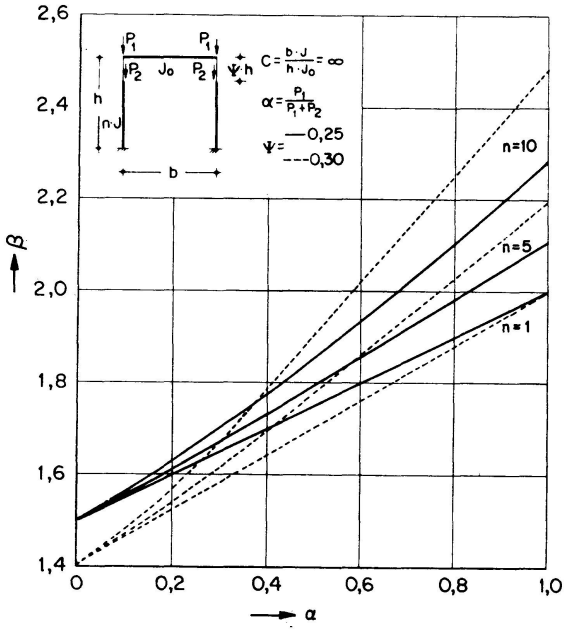


Fig. 20.

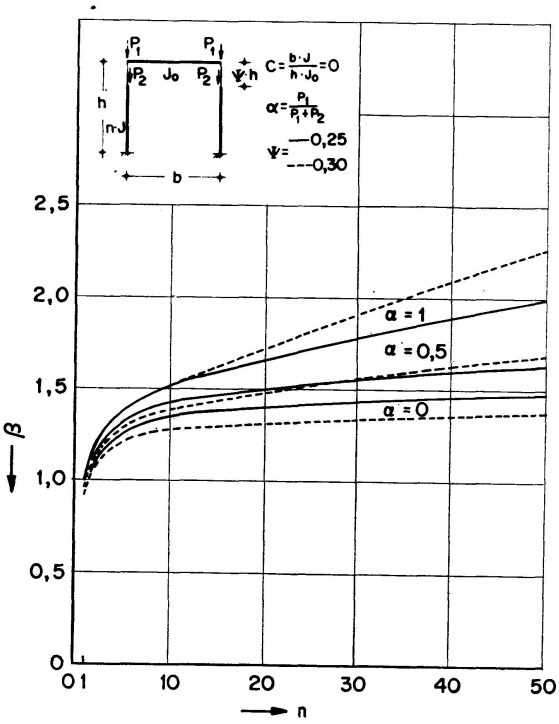


Fig. 21

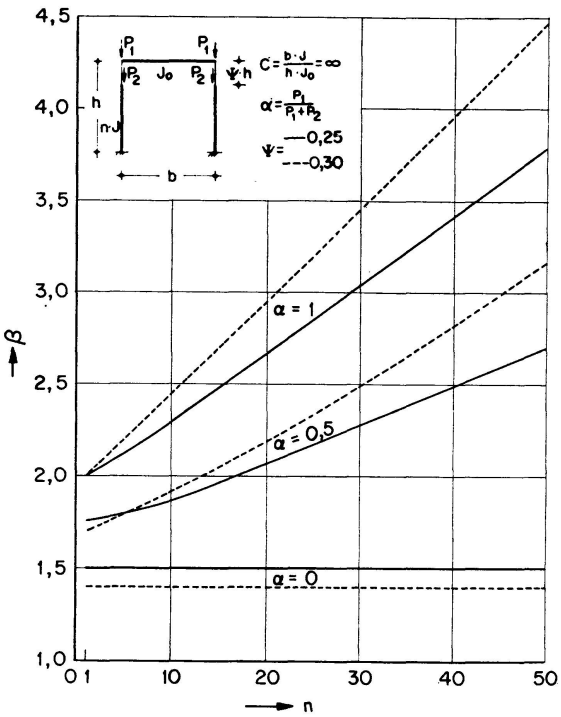


Fig. 22.

Literatur

1. CHWALLA, E. und JOKISCH, F.: Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens. Der Stahlbau 14 (1941), H. 8/9, S. 33.
2. BEER, H.: Beitrag zur Berechnung von räumlichen Rahmensystemen mit beweglicher Knickfigur. Österr. Bauzeitschrift 1948, S. 103.
3. KUPFERSCHMID, V.: Ebene und räumliche Rahmentragwerke. Wien: Springer 1952.
4. OSTENFELD, A.: Die Deformationsmethode. Berlin: Springer 1926.
5. CHWALLA, E.: Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen. Köln 1959, Stahlbau-Verlags-GmbH.
6. BÜLTMANN, W.: Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens. Der Stahlbau 14 (1941), H. 1/3, S. 3.
7. RESINGER, F.: Beitrag zur Lösung von Stabwerksproblemen der Theorie II. Ordnung. Der Stahlbau 28 (1959), H. 3, S. 75.

Zusammenfassung

Für Rahmenstiele mit eingespannten Füßen, die an den Rahmenecken und zwischen diesen und den Stützenfüßen durch lotrecht angreifende Lasten beansprucht sind, wurden die Beiwerte β für die Knicklänge in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern graphisch angegeben.

Summary

The coefficients β for the buckling lengthes of frame columns fixed at their base and subjected to vertical loads acting at the corners as well as within the column height are given in curves as functions of various parameters.

Résumé

Les coefficients β pour la longueur de flambage des poteaux de cadres, encastrés à leur base et soumis à des charges verticales agissant aux nœuds et sur les poteaux, ont été représentés en courbes, fonctions de différents paramètres.

Leere Seite
Blank page
Page vide