Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 28 (1968)

Artikel: Flambement des arcs
Autor: Courbon, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22179

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Flambement des arcs

Bogenknicken

Buckling of Arches

J. COURBON
Prof., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris

Nous exposerons deux méthodes de calcul de la poussée critique de flambement dans son plan d'un arc de section quelconque soumis à des charges verticales: la méthode des approximations successives et la méthode de l'énergie. Nous examinerons les divers types d'arcs classiques: arc encastré, arc à deux articulations, arc à une seule articulation et arc à trois articulations.

Il existe une théorie élémentaire du flambement des arcs fondée sur l'hypothèse simplificatrice qui consiste à négliger la composante horizontale du déplacement d'un point de la fibre moyenne. Cette théorie, qui ramène l'étude du flambement d'un arc à celle d'une poutre droite, n'est valable que pour des arcs très surbaissés; dès que la flèche de l'arc est notable, la théorie élémentaire donne des valeurs beaucoup trop fortes pour la poussée critique.

Il faut donc tenir compte de la composante horizontale du déplacement d'un point de la fibre moyenne. Dans ce cas, il convient de distinguer deux modes d'application des charges:

A. Charges liées à l'arc: les charges sont appliquées aux points matériels de l'arc. La ligne d'action d'une charge se déplace donc en même temps que le point d'application de la charge.

B. Charges liées a l'espace: les lignes d'action des charges sont fixes dans l'espace. Une charge appliquée initialement à un point matériel de l'arc, n'est donc plus appliquée au même point matériel de l'arc après déformation de l'arc.

Ces deux modes d'application des charges conduisent, pour un arc donné, à des valeurs légèrement différentes de la poussée critique. C'est le cas des charges liées à l'arc qui présente évidemment le plus d'intérêt pour le constructeur.

I. Etude géométrique des déformations de l'arc

1. Les fonctions considérées dans la déformation d'un arc

Les axes Ox et Oy étant rectangulaires, la fibre moyenne AB d'équation $y=y(x)$ vient, après déformation, en $A'B'$ (fig. 1). Un point matériel P de

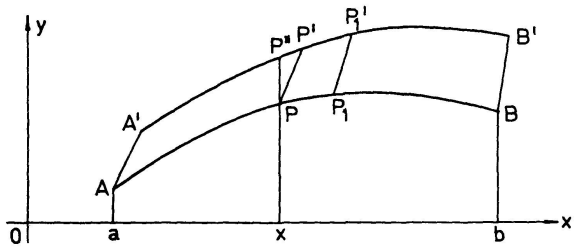

Fig. 1.

AB de coordonnées (x, y) vient, après déformation en un point P' de $A'B'$ de coordonnées $(x+\delta x,\ y+\delta y)$.

L'axe Ox fait avec la tangente en P à la fibre moyenne l'angle θ et avec la tangente en P' à la fibre moyenne déformée l'angle $\theta+\delta\theta$. Nous poserons:

$$\delta x=u, \qquad \delta y=v, \qquad \delta\theta=\varphi.$$

Enfin il existe un point P'' de $A'B'$ qui a même abscisse que P. Nous poserons $\overline{PP''}=z$.

Les fonctions u, v, φ, z sont des fonctions de x que nous considèrerons comme des infiniments petits au premier ordre. Nous allons montrer que la connaissance de la fonction v entraîne celle des fonctions u, φ, z.

a) *Calcul de la fonction u.* Un point P_1 de AB voisin de P a pour coordonnées $(x+dx, y+dy)$. Ce point vient en un point P_1' de $A'B'$ voisin de P' de coordonnées $(x+u+dx+du, y+v+dy+dv)$.

En écrivant que $PP_1=P'P_1'$ nous obtenons:

$$dx^2+dy^2 = (dx+du)^2+(dy+dv)^2$$

soit en désignant par y', u' et v' les dérivées de y, u et v:

$$u'+v'y' = -\tfrac{1}{2}(u'^2+v'^2).$$

$u'+v'y'$ étant du second ordre, nous pouvons, au troisième ordre, près, remplacer dans le second membre de l'équation précédente u' par $-v'y'$. Nous obtenons ainsi:

$$u'+v'y' = -\tfrac{1}{2}(1+y'^2)v'^2. \tag{1}$$

Lorsqu'on néglige les termes du second ordre, la relation précédente se réduit à:

$$u'+v'y' = 0. \tag{2}$$

Donc, si l'on se donne $v(x)$, la fonction $u(x)$ a pour expression:

$$u(x) = u(a) - \int_a^x v'(\xi)\, y'(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

a désignant l'abscisse de l'origine A de la fibre moyenne.

b) *Calcul de la fonction* φ. Des relations:

$$\operatorname{tg}\theta = y', \qquad \operatorname{tg}(\theta+\varphi) = \frac{y'+v'}{1+u'}$$

on déduit sans difficulté, en négligeant les termes d'ordre égal ou supérieur au second, la relation:

$$\varphi = v'. \tag{4}$$

c) *Calcul de la fonction* z. Au voisinage du point P', les équations paramétriques de la fibre moyenne déformée s'écrivent:

$$X = x + u + (1+u')\,dx + \tfrac{1}{2}u''\,dx^2 + \cdots$$
$$Y = y + v + (y'+v')\,dx + \tfrac{1}{2}(y''+v')\,dx^2 + \cdots$$

Dans les expressions précédentes, dx est le paramètre variable, x et y sont les coordonnées du point P, et u, v, u', v', u'', v'' les valeurs des fonctions u, v et de leurs dérivées au point P.

Le paramètre dx du point P'' correspond à $X = x$ donc:

$$u + (1+u')\,dx + \tfrac{1}{2}u''\,dx^2 + \cdots = 0$$

d'où il résulte que, en négligeant les termes d'ordre supérieur du second:

$$dx = -u + u\,u'.$$

On en déduit immédiatement l'ordonnée Y de P'' et la valeur de $z = Y - y$. On trouve ainsi en négligeant les termes d'ordre égal ou supérieur au second:

$$z = v - u\,y'. \tag{5}$$

d) *Calcul de la variation de courbure de la fibre moyenne.* La courbure de la fibre moyenne en P est $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$ et la courbure de la fibre moyenne déformée en P' est $\frac{1}{R'} = \frac{d(\theta+\varphi)}{ds}$ puisque les éléments d'arc ont la même longueur. La variation de courbure est donc:

$$\delta\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds} = \varphi'\cos\theta.$$

Si E est le module d'Young et I le moment d'inertie de la section, le moment fléchissant résultant de la variation de courbure a donc pour valeur:

$$M = E\,I\,\delta\frac{1}{R} = E\,I\,\varphi'\cos\theta.$$

En désignant par $J = I \cos\theta$ le moment d'inertie réduit de la section et l'arc, et par D le produit EJ nous avons donc:

$$M = D\varphi' = Dv''. \tag{6}$$

Cette relation peut également être déduire des formules de Bresse, à condition de négliger les déformations dues à l'effort normal et l'effort tranchant.

2. Conditions aux limites vérifiées par le déplacement vertical

Nous définirons la déformation de l'arc par la fonction $v(x)$. Dans chaque cas particulier, cette fonction doit vérifier certaines conditions aux limites que nous allons préciser.

a) *Arc encastré.* Les axes étant choisis comme il est indiqué sur la fig. 2, la déformation est définie par la fonction $v(x)$, x étant compris entre 0 et l portée de l'arc. La fonction est nulle pour $x=0$ et $x=l$; la formule (4) montre qu'il en est de même pour la fonction $v'(x)$. Enfin $u(0)$ et $u(l)$ sont nuls. Il en résulte le cinq conditions aux limites:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \qquad v(l) = 0, \\ v'(0) &= 0, \qquad v'(l) = 0, \\ &\int_0^l v'\,y'\,dx = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

la dernière résultant de la formule (3).

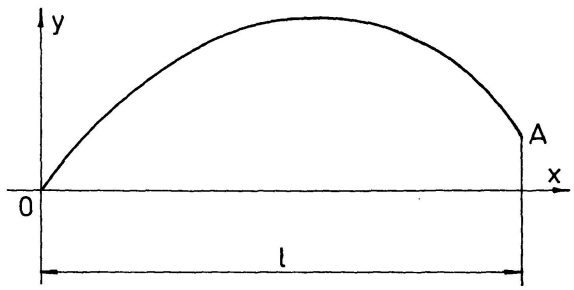

Fig. 2.

b) *Arc à deux articulations.* Les axes étant toujours ceux de la fig. 2, $v(x)$ est nul pour $x=0$ et $x=l$; il en est de même de $v''(x)$ puisque le moment fléchissant est nul aux extrémités de l'arc. Enfin $u(0)$ et $u(l)$ sont nuls. Nous avons donc les cinq conditions aux limites:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \qquad v(l) = 0, \\ v''(0) &= 0, \qquad v''(l) = 0, \\ &\int_0^l v'\,y'\,dx = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

c) *Arc à une seule articulation.* Nous choisirons deux systèmes d'axes $O_1 x_1 y_1$ et $O_2 x_2 y_2$ comme il est indiqué sur la fig. 3. La déformation est alors définie par:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{pour } 0 \leqq x \leqq a_1 \quad (O_1 A), \\ v_2(x) & \text{pour } 0 \leqq x \leqq a_2 \quad (O_2 A) \end{cases}$$

les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ devant satisfaire aux huit conditions aux limites:

$$\begin{aligned} &v_1(0) = 0, && v_1'(0) = 0, && v_1''(a_1) = 0, \\ &v_2(0) = 0, && v_2'(0) = 0, && v_2''(a_2) = 0, \\ &v_1(a_1) = v_2(a_2), && \int_0^{a_1} v_1' y_1' dx + \int_0^{a_2} v_2' y_2' dx = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

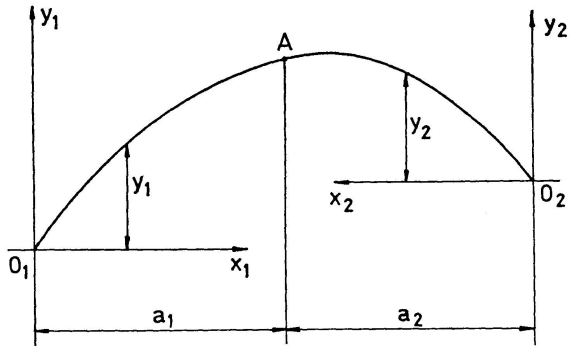

Fig. 3.

Les sept premières sont évidentes; la dernière exprime, d'après la formule (3), que le déplacement horizontal de l'articulation A est le même lorsqu'on considère cette articulation comme appartenant soit à $O_1 A$ soit à $O_2 A$.

Les fonctions y_1 et y_2 sont les ordonnées des arcs de fibre moyenne $O_1 A$ et $O_2 A$ rapportées aux axes $O_1 x_1 y_1$ et $O_2 x_2 y_2$.

d) *Arc à trois articulations.* En conservant les axes de la fig. 3, la déformation est encore définie par:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{pour } 0 \leqq x \leqq a_1 \quad (O_1 A), \\ v_2(x) & \text{pour } 0 \leqq x \leqq a_2 \quad (O_2 A) \end{cases}$$

les fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$ devant satisfaire aux huit conditions aux limites:

$$\begin{aligned} &v_1(0) = 0, && v_1''(0) = 0, && v_1''(a_1) = 0, \\ &v_2(0) = 0, && v_2''(0) = 0, && v_2''(a_2) = 0, \\ &v_1(a_1) = v_2(a_2), && \int_0^{a_1} v_1' y_1' dx + \int_0^{a_2} v_2' y_2' dx = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

II. L'équation fondamentale vérifiée par la composante verticale du déplacement

1. Cas des charges liées à l'arc

Prenons pour origine des axes Oxy le centre de gravité de la section d'extrémité de gauche (fig. 4), et supposons l'arc *funiculaire* de la densité de charge $p(x)$ qui lui est appliquée.

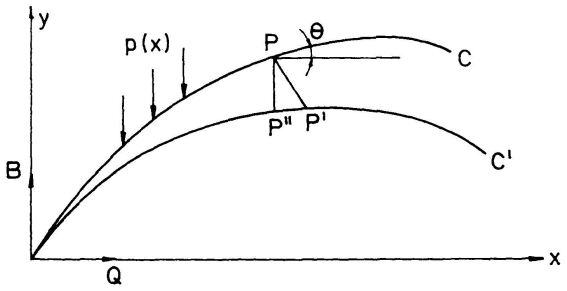

Fig. 4.

Désignons par Q et B les composantes horizontale et verticale de la réaction d'appui en O et par $-A$ le moment par rapport à 0 (compté positivement dans le sens trigonométrique) de cette réaction d'appui. En écrivant que le moment fléchissant au point P de coordonnées (x, y) de la fibre moyenne est nul, nous obtenons:

$$m(x) + A + Bx - Qy = 0 \tag{11}$$

expression dans laquelle $m(x)$ désigne la part du moment fléchissant due à la densité de charge $p(x)$:

$$m(x) = -\int_0^x p(\xi)(x-\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Dérivons l'équation (11) par rapport à x, nous obtenons:

$$-\int_0^x p(\xi)\,d\xi + B - Qy'(x) = 0. \tag{13}$$

Une nouvelle dérivation donne la relation classique:

$$Qy''(x) = -p(x). \tag{14}$$

Si l'on fait $x = 0$ dans (13), on obtient la relation:

$$B = Qy'(0). \tag{15}$$

Donnons une déformation à l'arc; le point matériel P de coordonnées (x, y) vient au point P' de coordonnées $(x+u, y+v)$. Les quantités A, B, Q deviennent $A+\delta A$, $B+\delta B$, $Q+\delta Q$. Le moment fléchissant $M(x)$ au point P' de la fibre moyenne déformée a pour valeur, en désignant par $m(x)+\delta m(x)$ la part de ce moment due à la densité de charge $p(x)$:

$$M(x) = m(x) + \delta m(x) + A + \delta A + (B+\delta B)(x+u) - (Q+\delta Q)(y+v)$$

soit, en tenant compte de (11) et en négligeant les termes du second ordre:

$$M(x) = \delta m(x) + B u - Q v + \delta A + x \delta B - y \delta Q. \tag{16}$$

Calculons $\delta m(x)$; *puisque les charges sont appliquées aux points matériels de l'arc*, nous avons:

$$m(x) + \delta m(x) = -\int_0^x p(\xi)[x + u(x) - \xi - u(\xi)]\, d\xi$$

donc, en retranchant membre à membre l'équation (12) de l'équation précédente, nous obtenons:

$$\delta m(x) = -\int_0^x p(\xi)[u(x) - u(\xi)]\, d\xi$$

soit compte tenu de (14):

$$\delta m(x) = Q \int_0^x y''(\xi)[u(x) - u(\xi)]\, d\xi.$$

Une intégration par parties transforme l'équation précédente en:

$$\delta m(x) = -Q y'(0) u(x) + Q \int_0^x y'(\xi) u'(\xi)\, d\xi$$

soit en tenant compte des relations (2) et (15):

$$\delta m(x) = -B u(x) - Q \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi)\, d\xi.$$

Reportons cette valeur dans l'expression (16), nous obtenons:

$$M(x) = -Q\left[v + \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi)\, d\xi\right] + \delta A + x \delta B - y \delta Q.$$

Et, puisque $M = D v''$, la composante verticale du déplacement est une solution de *l'équation fondamentale:*

$$D v'' + Q[v + \psi_1] = \delta A + x \delta B - y \delta Q \tag{17}$$

dans laquelle ψ_1 est une fonction de x qui se déduit de la fonction $v(x)$ par *l'opérateur linéaire* L_1:

$$\psi_1 = L_1[v] = \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

La solution générale de l'équation (17) dépend de façon linéaire et homogène de cinq constants: δA, δB, δQ et deux constantes d'intégration. En effet $v(x)$ est l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre:

$$(D v'')' + Q(1 + y'^2) v' = \delta B - y' \delta Q$$

déduite de l'équation (18) par dérivation.

2. *Cas des charges liées à l'espace*

Conservons les hypothèses et les notations du paragraphe précédent mais calculons le moment fléchissant $M(x)$ au point $P''(x, y+z)$ de la fibre moyenne déformée qui a même abscisse que P. Puisque *les charges ont des lignes d'action fixes,* le moment des charges appliquées par rapport au point P'' est égal au moment $m(x)$ de ces mêmes charges par rapport au point P. Nous avons donc:

$$M(x) = m(x) + A + \delta A + (B + \delta B)x - (Q + \delta Q)(y + z)$$

soit en tenant compte de (11) et en négligeant l'infiniment petit du second ordre $z\,\delta Q$:

$$M(x) = \delta A + x\,\delta B - y\,\delta Q - z\,Q.$$

La relation $M = D\,v''$ nous donne donc l'équation:

$$D\,v'' + Q\,z = \delta A + x\,\delta B - y\,\delta Q.$$

En tenant compte des relations (2) et (5) que nous rappelons:

$$u' + v'\,y' = 0 \qquad z = v - u\,y'$$

nous voyons que les fonctions u et v sont des intégrales du système différentiel linéaire du troisième ordre:

$$D\,v'' + Q\,(v - u\,y') = \delta A + x\,\delta B - y\,\delta Q,$$
$$u' + v'\,y' = 0.$$

La fonction $v(x)$ dépend donc de façon linéaire et homogène de cinq constantes: δA, δB, δQ et deux constantes d'intégration.

Désignons par ψ_2 la fonction $-u\,y'$; nous voyons que la composante verticale du déplacement est une solution de *l'équation fondamentale:*

$$D\,v'' + Q\,[v + \psi_2] = \delta A + x\,\delta B - y\,\delta Q \tag{19}$$

dans laquelle la fonction φ_2 est une fonction de x qui se déduit de la fonction $v(x)$ par *l'opérateur linéaire* L_2:

$$\psi_2 = L_2[v] = y'(x)\int_0^x y'(\xi)\,v'(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

3. *Conséquences des résultats précédents*

Pour les deux modes d'application des charges envisagés, la composante verticale $v(x)$ est une solution de l'équation fondamentale:

$$D\,v'' + Q\,[v + \psi] = \delta A + x\,\delta B - y\,\delta Q \tag{21}$$

dans laquelle ψ se déduit de v par l'opérateur linéaire L_1 dans le cas des charges liées à l'arc, et par l'opérateur L_2 dans le cas des charges liées à l'espace.

Le terme ψ est un terme correctif d'autant plus faible que l'arc est plus surbaissé. Lorsqu'on néglige le terme ψ ce qui revient à négliger les déplace-

ments horizontaux de la fibre moyenne, on retrouve l'équation différentielle de la théorie élémentaire du flambement des arcs.

a) *Méthode théorique de calcul de la poussée critique:* Le calcul de la poussée critique est aisé lorsqu'on sait intégrer formellement l'équation fondamentale.

Examinons d'abord le cas d'un *arc encastré* ou d'un *arc a deux articulations* (fig. 2). La donction $v(x)$ dépend de façon linéaire et homogène de cinq constantes. Les cinq conditions aux limites (7) ou (8) fournissent donc cinq équations linéaires et homogènes entre ces cinq constantes; l'élimination des constantes entre ces équations donne une équation en Q dont la plus petite racine positive est la poussée critique.

Dans le cas d'un *arc à une seule articulation* ou d'un *arc à trois articulations* (fig. 3), nous devons écrire l'équation fondamentale pour chacun des arcs $O_1 A$ et $O_2 A$. Le déplacement vertical dépend donc de façon linéaire et homogène de dix constantes:

$$\delta A_1, \delta A_2, \delta B_1, \delta B_2, \delta Q_1, \delta Q_2$$

et quatre constantes d'intégration. Mais ces dix constantes se réduisent à huit, car les équations d'équilibre de la statique exigent que:

$$\delta Q_1 = \delta Q_2 = \delta Q, \qquad \delta B_1 = -\delta B_2 = \delta B.$$

Les huit conditions aux limites (9) ou (10) donnent alors huit équations linéaires et homogènes entre les huit constantes; l'élimination des constantes entre ces équations donne une équation en Q dont la plus petite racine positive est la poussée critique.

b) *Cas d'un arc non funiculaire:* Dans ce cas le moment fléchissant $\mathfrak{M}(x)$ dans l'arc avant déformation n'est pas nul; l'équation (11) est remplacée par:

$$\mathfrak{M}(x) = m(x) + A + Bx - Qy.$$

En reprenant les calculs qui nous ont conduit à l'équation fondamentale, nous trouvons que $v(x)$ satisfait à l'équation:

$$D v'' + Q[v + \psi] = \mathfrak{M}(x) + \delta A + x \delta B - y \delta Q.$$

La solution générale de cette équation s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation fondamentale (21) une solution particulière de l'équation:

$$D v'' + Q[v + \psi] = \mathfrak{M}(x).$$

Les constantes qui interviennent sont, dans chaque cas, déterminées par les conditions aux limites. On obtient ainsi autant d'équations linéaires que de constantes, mais ces équations ne sont plus homogènes. La poussée critique est la plus petite valeur de pour laquelle le déterminant principal du système d'équations précédentes s'annule. Le moment fléchissant $\mathfrak{M}(x)$ n'intervient

donc pas dans le calcul de la poussée critique. *La poussée critique est donc une caractéristique de l'arc qui ne dépend pas des charges appliquées, mais seulement de la façon dont ces charges sont appliquées* (charges liées à l'arc ou charges liées à l'espace).

III. Méthode des approximations successives

1. Calcul de la poussée critique par approximations successives

Nous allons d'abord définir un opérateur linéaire Ω permettant d'associer, à toute représentation approchée $v_0(x)$ de la déformation au moment du flambement, une représentation plus précise $v_1(x)$.

Examinons d'abord le cas d'un *arc encastré* ou d'un *arc à deux* articulations (fig. 2). Donnons nous une fonction de départ v_0 vérifiant les conditions aux limites (7) ou (8); il lui correspond une fonction ψ_0 par l'opérateur L_1 ou par l'opérateur L_2 selon que les charges sont liées à l'arc ou liées à l'espace. La fonction v_1 est la fonction qui vérifie les conditions aux limites (7) ou (8) et dont la dérivée seconde a pour expression:

$$v_1'' = \frac{-(v_0+\psi_0)+\delta A+x\,\delta B-y\,\delta Q}{D}.$$

Il suffit pour déterminer la fonction v_1 d'intégrer deux fois l'expression précédente et de déterminer δA, δB, δQ et les deux constantes d'intégration au moyen des conditions aux limites (7) ou (8).

Dans le cas d'un *arc à une seule articulation* ou d'un *arc à trois articulations* (fig. 3), nous nous donnons une fonction v_0 égale à $(v_1)_0$ sur O_1A et à $(v_2)_0$ sur O_2A, les fonctions $(v_1)_0$ et $(v_2)_0$ vérifiant les conditions aux limites (9) ou (10); l'opérateur linéaire L_1 (ou L_2) associe aux fonctions $(v_1)_0$ et $(v_2)_0$ les fonctions $(\psi_1)_0$ et $(\psi_2)_0$. La fonction v_1 est égale à $(v_1)_1$ sur O_1A et à $(v_2)_1$ sur O_2A; les fonctions $(v_1)_1$ et $(v_2)_1$ vérifient les conditions aux limites (9) ou (10) et ont pour dérivées secondes:

$$(v_1)_1'' = \frac{-[(v_1)_0+(\psi_1)_0]+\delta A_1+x\,\delta B-y\,\delta Q}{D},$$

$$(v_2)_1'' = \frac{-[(v_2)_0+(\psi_2)_0]+\delta A_2-x\,\delta B-y\,\delta Q}{D}.$$

Il suffit pour déterminer les fonctions $(v_1)_1$ et $(v_2)_1$ d'intégrer deux fois les expressions précédentes et de déterminer δA_1, δA_2, δB, δQ et les quatre constantes d'intégration au moyen des conditions aux limites (9) ou (10).

Nous avons ainsi défini dans tous les cas un opérateur linéaire Ω permettant de calculer v_1 connaissant v_0:

$$v_1 = \Omega[v_0]. \tag{23}$$

On peut donc définir une suite de fonctions $v_0, v_1, v_2 \ldots v_n$ telles que:

$$v_1 = \Omega[v_0], \quad v_2 = \Omega[v_1), \ldots, \quad v_n = \Omega[v_{n-1}], \ldots$$

Ceci posé, supposons que $v_0(x)$ soit, à un facteur près, la déformation qui se produit au moment du flambement. Si nous multiplions $v_0(x)$ par la valeur Q_c de la poussée critique, nous obtiendrons une fonction:

$$\Omega[Q_c v_0] = Q_c \Omega[v_0] = Q_c v_1(x)$$

qui doit être identique à $v_0(x)$. Nous aurions donc:

$$Q_c = \frac{v_0(x)}{v_1(x)}. \tag{24}$$

Mais, puisque $v_0(x)$ n'est qu'une approximation de la déformation au moment du flambement, le second membre de (24) n'est pas une constante. On obtiendra cependant une valeur approchée de la poussée critique en donnant à x dans la formule (24) une valeur particulière (celle qui correspond par exemple aux plus grandes valeurs de v_0 et de v_1.

Si l'approximation est jugée insuffisante parce que le second membre de (24) varie trop, on utilisera un des rapports de la suite:

$$\frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \quad \frac{v_2(x)}{v_3(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}, \quad \ldots$$

qui tend vers la poussée critique.

Il résulte de ce qui précède que la poussée critique est la plus petite valeur propre de l'équation:

$$v(x) = Q\Omega[v(x)]. \tag{25}$$

Il est possible de montrer, dans chaque cas particulier, que l'équation (25) est une équation intégrale de FREDHOLM dont le noyau a généralement une forme assez complexe.

Des simplifications de calcul sont possibles dans le cas des arcs ayant un axe de symétrie. On peut dans ce cas distinguer le flambement symétrique et le flambement antisymétrique correspondant à des déformations au moment du flambement $v(x)$ paires ou impaires, les abscisses x étant comptées à partir de l'axe de symétrie.

En général, la poussée critique d'un arc encastré ou d'un arc à deux articulations symétriques correspond au flambement antisymétrique, tandis que la poussée critique d'un arc à une seule articulation ou d'un arc à trois articulations correspond au flambement symétrique.

2. Majoration des efforts dans un arc non funiculaire

On démontre que l'équation intégrale (25) a une infinité de solutions non identiquement nulles $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ pour une infinité de valeurs croissantes de Q: $Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_i < \ldots$ dont la plus petite est égale à la poussée

critique Q_c. Les solutions $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ appelées fonctions fondamentales vérifient donc les identités:

$$V_1 = Q_1 \Omega [V_1], \quad V_2 = Q_2 \Omega [V_2], \ldots, \quad V_i = Q_i \Omega [V_i], \ldots$$

Ceci posé, reprenons l'équation (22) établie précédemment

$$D v'' + Q [v + \psi] = \mathfrak{M}(x) + \delta A + x \delta B - y \delta Q \tag{22}$$

et soit $v_0(x)$ la déformation calculée par les théories classiques de la Résistance des Matériaux, en négligeant les déformations pour écrire les équations d'équilibre. Nous avons:

$$D v_0'' = \mathfrak{M}(x)$$

et nous pouvons remplacer l'équation (22) par l'équation intégrale linéaire:

$$v(x) = v_0(x) + Q \Omega [v(x)]. \tag{26}$$

Développons $v_0(x)$ en série de fonctions fondamentales:

$$v_0(x) = a_1 V_1(x) + a_2 V_2(x) + \ldots + a_i V_i(x) + \ldots$$

et cherchons $v(x)$ sous forme d'une série de fonctions fondamentales:

$$v(x) = b_1 V_1(x) + b_2 V_2(x) + \ldots + b_i V_i(x) + \ldots$$

En reportant les expressions précédentes dans l'équation (26), on trouve sans peine que

$$b_i = \frac{a_i}{1 - \frac{Q}{Q_i}}$$

de sorte que:

$$v(x) = \frac{a_1}{1 - \frac{Q}{Q_1}} V_1(x) + \frac{a_2}{1 - \frac{Q}{Q_2}} V_2(x) + \cdots + \frac{a_i}{1 - \frac{Q}{Q_i}} V_i(x) + \cdots$$

Les coefficients a_i du développement de $v_0(x)$ sont donc multipliés par des facteurs supérieurs à l'unité et tendant vers l'unité lorsque i augmente indéfiniment.

Le terme $a_1 V_1(x)$ étant le terme prépondérant du développement de $v_0(x)$, il en résulte, avec une bonne approximation que:

Dans un arc de poussée critique Q_c, les efforts et déformations calculés par les théories classiques de la Résistance des Matériaux doivent être multipliés par le facteur $\frac{1}{1 - \frac{Q}{Q_c}}$ pour tenir compte de l'influence des déformations.

IV. Méthode de l'énergie

Considérons l'arc funiculaire en équilibre sous les charges qui lui sont appliquées; cet équilibre sera stable si la fibre moyenne revient à sa position initiale d'équilibre après avoir subi une déformation, donc si le travail $\delta \mathfrak{T}$ des forces extérieures est inférieur à l'énergie δW emmagasinée dans l'arc au

cours de la déformation. La poussée critique s'obtiendra donc en écrivant que $\delta \mathfrak{T}$ est égal à δW.

1. Cas des charges liées à l'arc

Nous considérons un arc quelconque, et nous lui donnons une déformation compatible avec les liaisons imposées à l'arc. Dans chaque cas particulier étudié, la fonction $v(x)$ doit donc vérifier les conditions aux limites qui ont été indiquées précédemment.

Nous désignerons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions $v(x)$ vérifiant les conditions aux limites.

Calculons l'énergie δW emmagasinée dans l'arc au cours de la déformation; nous avons, les intégrales suivantes étant étendues d'une extrémité à l'autre de l'arc:

$$\delta W = \frac{1}{2}\int \frac{M^2\,ds}{EI} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2\,dx}{EJ} = \frac{1}{2}\int \frac{M^2\,dx}{D}$$

et, puisque $M = D\,v''$:

$$\delta W = \tfrac{1}{2}\int D\,v''^2\,dx. \tag{27}$$

Calculons maintenant le travail $\delta \mathfrak{T}$ des forces extérieures. Supposons l'arc funiculaire des charges appliquées, ce qui, comme nous l'avons montré précédemment n'a pas d'influence sur la valeur de la poussée critique. En désignant par $p(x)$ la densité de charge appliquée à l'arc, nous avons, les intégrales qui figurent dans les formules qui suivent étant étendues d'une extrémité à l'autre de l'arc:

$$\delta \mathfrak{T} = -\int p\,v\,dx$$

et, puisque l'arc est funiculaire nous avons $Q\,y'' = -p$ donc:

$$\delta \mathfrak{T} = Q\int v\,y''\,dx.$$

Intégrons par parties, nous obtenons, v étant toujours nul aux extrémités de l'arc:

$$\delta \mathfrak{T} = -Q\int v'\,y'\,dx$$

soit, compte tenu de la formule (1):

$$\delta \mathfrak{T} = Q\int [u' + \tfrac{1}{2}(1+y'^2)\,v'^2]\,dx$$

et, puisque u est toujours nul aux extrémités de l'arc:

$$\delta \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\,Q\int (1+y'^2)\,v'^2\,dx. \tag{28}$$

On remarquera qu'il est nécessaire de tenir compte des termes du second ordre pour calculer le travail des forces extérieures. Si l'on avait utilisé l'expression (2) au lieu de l'expression (1), on aurait trouvé une valeur nulle pour le travail des forces extérieures.

Le flambement a lieu dès que $\delta \mathfrak{T}$ dépasse δW; il en résulte immédiatement que la poussée critique Q_c a pour valeur:

$$Q_c = \underset{v \in \mathfrak{F}}{\text{Minimum}} \left[\frac{\int D v''^2 dx}{\int (1 + y'^2) v'^2 dx} \right]. \tag{29}$$

Si la déformation $v(x)$, appartenant à l'ensemble $\mathfrak{F}$, n'est pas exactement celle qui se produit au moment du flambement, la formule (29) donne une valeur par excès de la poussée critique. On obtiendra une grande précision en choisissant pour $v(x)$ les fonctions $v_0(x), v_1(x), \ldots$ obenues par la méthode des approximations successives exposée précédemment; on utilise ainsi toutes les valeurs des fonctions calculées.

Le calcul des variations permet de montrer l'équivalence de la méthode des approximations successives et de la méthode de l'énergie.

2. *Cas des charges liées à l'espace*

Conservons les définitions du paragraphe précédent; le calcul de l'énergie δW emmagasinée dans l'arc est inchangé, et la formule (27) est encore exacte.

Par contre, le calcul du travail $\delta \mathfrak{T}$ des forces extérieures soulève des difficultés parce qu'il est difficile d'imaginer une liaison permettant d'appliquer à l'arc, durant la déformation, une densité de charge dont les lignes d'action sont liées à l'espace. Par exemple, on pourrait être tenté de prendre pour valeur de $\delta \mathfrak{T}$:

$$\delta \mathfrak{T} = -\int p z \, dx = Q \int y'' z \, dx.$$

Ce résultat est inexact, parce qu'il correspond à la liaison indiquée sur la fig. 5; cette liaison donne lieu à une densité de charge verticale p et à une densité de charge horizontale $p y'$. Si l'on veut transmettre à l'arc une densité

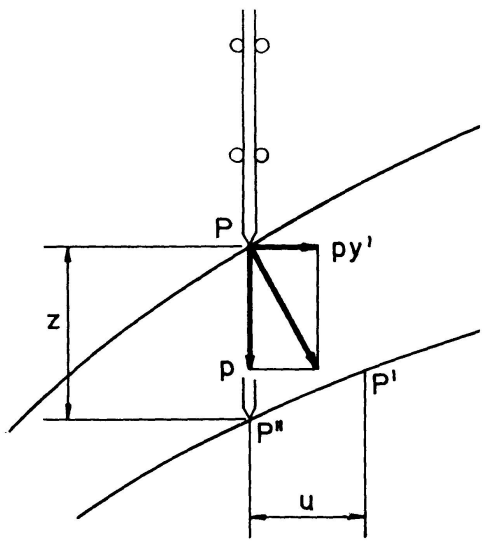

Fig. 5.

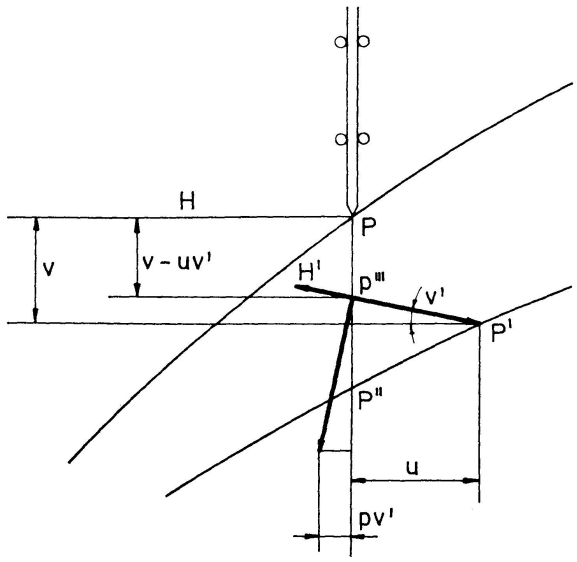

Fig. 6.

de charge verticale au moyen de la liaison indiquée sur la fig. 5, il faut que cette liaison soit une liaison avec frottement; il est alors nécessaire de tenir compte du travail négatif des forces de frottement dans l'évaluation de $\delta \mathfrak{T}$.

Pour appliquer au moyen d'un pointeau coulissant verticalement une densité de charge verticale à l'arc, on peut imaginer (fig. 6) qu'un élément indéformable horizontal PH a été soudé en P à la fibre moyenne. Après déformation cet élément vient en $P'H'$; P' est le même point matériel que P, et $P'H'$ n'est plus horizontal, mais a une pente $\varphi = v'$. Le pointeau s'abaissant de $PP''' = v - uv'$ le travail $\delta_1 \mathfrak{T}$ des forces exercées par le pointeau sur l'arc est

$$\delta_1 \mathfrak{T} = -\int p(v - uv')\,dx.$$

Mais, au cours de la déformation, si la densité de charge verticale appliquée à l'arc reste égale à p, la densité de charge horizontale appliquée à l'arc varie (linéairement si la déformation est petite) de 0 à pv'. Le travail $\delta_1 \mathfrak{T}$ est donc la somme du travail $\delta \mathfrak{T}$ de la composante verticale p (c'est le travail que nous cherchons), et du travail $\delta_2 \mathfrak{T}$ de la composante horizontale:

$$\delta_2 \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} \int p v' u\,dx.$$

Il en résulte que:

$$\delta \mathfrak{T} = \delta_1 \mathfrak{T} - \delta_2 \mathfrak{T} = -\int p(v - \tfrac{1}{2} u v')\,dx$$

ou, l'arc étant funiculaire de la densité de charge p:

$$\delta \mathfrak{T} = Q \int (v y'' - \tfrac{1}{2} u v' y'')\,dx.$$

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que:

$$\int v y''\,dx = \tfrac{1}{2} \int v'^2 (1 + y'^2)\,dx$$

donc, nous obtenons finalement:

$$\delta \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} Q \int [v'^2 (1 + y'^2) - u v' y'']\,dx. \tag{30}$$

Compte tenu de la valeur (5) de z, l'expression (30) peut également s'écrire:

$$\delta \mathfrak{T} = \tfrac{1}{2} \int v' z'\,dx.$$

Dans toutes les formules, les intégrales sont étendues d'une extrémité à l'autre de l'arc.

Le flambement a lieu dès que $\delta \mathfrak{T}$ dépasse δW; il en résulte immédiatement que la poussée critique Q_c a pour valeur:

$$Q_c = \underset{v \in \mathfrak{F}}{\text{Minimum}} \left[\frac{\int D v''^2\,dx}{\int [(1 + y'^2) v'^2 - u v' y'']\,dx} \right]. \tag{31}$$

Le calcul des variations permet encore de montrer l'équivalence de la méthode des approximations successives et de la méthode de l'énergie.

Conclusion

Nous avons donné deux méthodes de calcul numérique de la poussée critique d'un arc, tant dans le cas pratique des charges liées à l'arc que dans le cas théorique des charges liées à l'espace. La méthode des approximations successives donne lieu à des calculs d'intégration numérique beaucoup plus longs que la méthode de l'énergie; elle paraît cependant indispensable pour trouver une déformation approchée $v(x)$ correcte, et non choisie au hasard, afin de pouvoir appliquer la méthode de l'énergie.

Dans le cas particulier d'un arc de fibre moyenne quelconque et de loi d'inertie quelconque, on obtiendra une valeur suffisamment précise de la poussée critique en opérant de la façon suivante:

a) En prenant pour fonction de départ $v_0(x)$ la déformation de la théorie élémentaire de l'arc parabolique d'inertie réduite constante, on déterminera, par intégration numérique, la première déformation $v_1(x)$ de la méthode des approximations successives.

b) On calculera la poussée critique par la méthode de l'énergie en prenant pour déformation $v_1(x)$.

Nous avons appliqué les méthodes précédentes aux arcs symétriques d'inertie réduite constante J à fibre moyenne parabolique. En désignant par $2a$ la portée de l'arc et par f sa flèche, la valeur approchée de la poussée critique peut se mettre dans tous les cas sous la forme:

$$Q_c = m \frac{\pi^2 E J}{a^2} \frac{1}{1 + K\left(\frac{f}{2a}\right)^2}. \tag{32}$$

m et K étant des constantes données dans le tableau suivant:

Type d'Arc	m	K pour des charges liées		Observations
		à l'arc	à l'espace	
Arc encastré	2,0458	3,35	4,01	Flambement
Arc à 2 articulations	1	6,14	6,95	antisymétrique
Arc à 1 articulation	1,1132	1,15	1,36	Flambement
Arc à 3 articulations	0,7527	1,99	2,27	symétrique

Résumé

La théorie élémentaire du flambement des arcs néglige les déplacements horizontaux des points de la fibre moyenne de l'arc; cette théorie ne donne de résultats suffisamment précis que pour les arcs très surbaissés. Dès que la

flèche de l'arc est importante, elle conduit à surestimer beaucoup la poussée critique de l'arc et de ce fait est dangereuse.

Deux méthodes correctes de calcul numérique de la poussée critique sont données: la méthode des approximations successives et la méthode de l'énergie, tant dans le cas des charges liées à l'arc que dans le cas des charges liées à l'espace. Les différentes liaisons pouvant être imposées à l'arc ont été examinées: arc encastré, arc à deux articulations, arc à une seule articulation et arc à trois articulations.

Zusammenfassung

Die elementare Theorie der Knickung von Bogen vernachlässigt die waagrechten Verschiebungen der Nullachsen-Punkte des Bogens. Diese Theorie ergibt nur für sehr flache Bogen genügend genaue Ergebnisse. Sobald die Pfeilhöhe maßgebend wird, führt dies zu einer gefährlichen Überschätzung des kritischen Horizontalschubes.

Es werden zwei fehlerfreie Methoden der numerischen Berechnung des kritischen Schubes angegeben: Die fortgesetzte Annäherung sowie die Energiemethode. Sowohl für den Fall der in der Bogenebene liegenden Belastung als auch für räumliche Belastung. Verschiedene Bogenausbildungen wurden untersucht, nämlich den eingespannten, den Eingelenk-, Zweigelenk- und Dreigelenkbogen.

Summary

The elementary theory of the buckling of arches neglects the horizontal movements of the mean fibre of the arch; this theory gives sufficiently accurate results only for drop arches. As soon as the rise of the arch becomes considerable, it leads to a marked overestimation of the critical thrust of the arch and is therefore dangerous.

Two correct methods of numerical calculation of the critical thrust are given: the method of successive approximations and the energy method, both in the case of loads bound with the arch and in the case of loads bound with space. The different connections that can be imposed on the arch were examined: fixed arch, two-hinged arch, arch with a single hinge and three hinged arch.

Leere Seite
Blank page
Page vide