

# Le problème du poids minimum d'armature des plaques en béton armé

Autor(en): **Sacchi, Giannantonio / Save, Marcel**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **29 (1969)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22924>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Le problème du poids minimum d'armature des plaques en béton armé

*Das Problem des minimalen Bewehrungsgewichtes in Stahlbetonplatten*

*The Problem of the Minimum Weight of Reinforcement for Reinforced Concrete Slabs*

GIANNANTONIO SACCHI

MARCEL SAVE

Faculté polytechnique de Mons, Belgique

## Avant-propos

Nous nous intéressons ci-après aux plaques fléchies de surface  $S$ , en béton armé, de hauteur  $h$  constante et armées de la même façon sur les deux faces \*). De telles plaques seront considérées comme orthotropes, avec un coefficient d'orthotropie

$$\gamma = \frac{\Omega_{x_1}}{\Omega_{y_1}},$$

$\Omega_{x_1}$  et  $\Omega_{y_1}$  étant les aires, par unité de longueur, des barres d'armature orientées selon deux directions orthogonales.  $x_1$  forme un angle  $\rho$  avec l'axe  $x$  de référence du système  $0, x, y$  choisi.

Si  $\rho = 0$  les barres d'acier sont orientées selon les axes  $x$  et  $y$ . Le problème de la recherche du poids minimum d'armature peut être résolu par voie directe, c'est-à-dire en minimisant l'intégrale:

$$v = \int_S (\Omega_{x_1} + \Omega_{y_1}) dS, \quad (1)$$

dans la classe des solutions complètes, au point de vue de l'analyse limite, pour une charge donnée  $\eta p$ . Il s'agit de la classe des solutions pour lesquelles on peut associer, à l'aide de la loi de l'écoulement plastique, un champ de

---

\*) Ce choix d'une telle classe de structures a pour but de faciliter l'exposé. Une fois la solution trouvée dans cette classe, on peut toujours en pratique enlever les armatures comprimées. Il faut évidemment dans ce cas augmenter de manière adéquate l'épaisseur de la plaque.

moments équilibrés ne violant pas la condition de plasticité à un champ des vitesses de courbure compatibles. On suppose, dans ce qui suit, que le matériau soit rigide parfaitement plastique et qu'on puisse adopter la condition de plasticité de JOHANSEN [1].

L'autre voie, sur laquelle nous portons notre attention dans la présente note, utilise des conditions suffisantes qui, en général, consistent à imposer que l'énergie dissipée par unité de volume d'acier soit constante, dans le mécanisme de ruine.

Ces conditions sont généralement des conséquences directes du théorème de DRUCKER et SHIELD [2], dont nous croyons utile de rappeler le principe ci-après (§ 2).

Dans le cadre de cette condition suffisante on peut adopter différents points de vue notamment celui de WOOD [3] et celui de MORLEY [4]. Ce dernier a été présenté par l'auteur [4] de façon autonome, sans une référence directe au théorème de DRUCKER et SHIELD.

Nous nous proposons de déduire les méthodes de MORLEY et de WOOD du théorème général et de faire apparaître les autres points de vue qui pourraient être envisagés.

### 1. Principe du théorème de Drucker et Shield

Soit une plaque de surface  $S$ , à l'état limite plastique sous les charges  $\eta p$ ,  $\eta$  étant le paramètre des charges. Soit  $W = W(x, y)$  la fonction scalaire qui définit la déformée de la plaque.

Puisque nous sommes à l'état limite, nous aurons:

$$\eta \int_S p W dS = \int_V \mathfrak{D}(\kappa_{ij}) dV \quad (2)$$

où  $\mathfrak{D}(\kappa_{ij})$  est la puissance dissipée par unité de volume  $V$ ,  $\kappa_{ij}$  étant le tenseur des vitesses de courbure. Considérons maintenant une variation de volume de  $V$  à  $V_1$  telle que la plaque puisse supporter au moins  $\eta p$ . Nous aurons:

$$\int_V \mathfrak{D}(\kappa_{ij}) dV \leq \int_{V_1} \mathfrak{D}_*(\kappa_{ij}) dV_1, \quad (3)$$

où  $\mathfrak{D}_*(\kappa_{ij})$  est la puissance dissipée par unité de volume  $V_1$ . On voit facilement que si:

$$\mathfrak{D}(\kappa_{ij}) = \mathfrak{D}_*(\kappa_{ij}) = \text{constante} \quad (4)$$

on a:

$$\int_V dV \leq \int_{V_1} dV_1. \quad (5)$$

Donc si la condition (4) est remplie,  $V$  est le plus petit volume qui peut supporter  $\eta p$ .

Dans le cas des plaques en béton armé la condition (4) est:

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{(1+\gamma)\Omega_{x_1}} = \left[ (\cos^2 \alpha + \gamma \sin^2 \alpha) \frac{R_e h}{1+\gamma} |\dot{K}_1| + (\sin^2 \alpha + \gamma \cos^2 \alpha) \frac{R_e h}{1+\gamma} |\dot{K}_2| \right] = \text{const.} \quad (6)$$

$\dot{K}_1$  et  $\dot{K}_2$  étant les vitesses principales de courbure,  $\alpha$  l'angle de la direction principale 1 avec la direction  $x_1$ .  $R_e$  est la limite élastique de l'acier des armatures et  $D$  la puissance dissipée par unité de surface moyenne.

L'expression (6) de la puissance dissipée est une généralisation, présentée par SAVE dans la référence [1], de la puissance dissipée selon la condition de plasticité de JOHANSEN.

Il faut noter avant d'aller plus loin que le volume obtenu par la condition de dissipation constante ne sera un minimum absolu que si cette constance est assurée sans lier en aucune manière les variables de dimensionnement. C'est le cas des structures sandwich étudiées par SHIELD [5] où  $\mathfrak{D}$  est indépendante de l'épaisseur des feuilletts. La question est plus délicate pour les plaques en béton armé comme nous allons en discuter aux paragraphes suivants.

## 2. La valeur de $\alpha$ qui donne le poids minimum

D'après l'expression bien connue de la puissance dissipée dans une plaque en béton armé, nous savons qu'à l'état limite nous avons:

$$\begin{aligned} \eta \int_S p W dS = \int_S [ & |M_{px_1} \cos^2 \alpha + M_{py_1} \sin^2 \alpha| |\dot{K}_1| \\ & + |M_{px_1} \sin^2 \alpha + M_{py_1} \cos^2 \alpha| |\dot{K}_2| ] dS = \\ & \int_S R_e h [ |\Omega_{x_1} \cos^2 \alpha + \Omega_{y_1} \sin^2 \alpha| |\dot{K}_1| \\ & + |\Omega_{x_1} \sin^2 \alpha + \Omega_{y_1} \cos^2 \alpha| |\dot{K}_2| ] dS. \end{aligned} \quad (7)$$

Si on imagine orienter les barres en tous points selon les directions des courbures principales, on peut transformer l'équation (7) en la relation suivante:

$$\eta \int_S p W dS = \int_S R_e h [ |\Omega_1| |\dot{K}_1| + |\Omega_2| |\dot{K}_2| ] dS. \quad (8)$$

Nous pouvons remarquer, en comparant les équations (7) et (8), que:

$$|\Omega_{x_1} \cos^2 \alpha + \Omega_{y_1} \sin^2 \alpha| = |\Omega_1|, \quad |\Omega_{x_1} \sin^2 \alpha + \Omega_{y_1} \cos^2 \alpha| = |\Omega_2|, \quad (9)$$

mais puisque:

$$\begin{aligned} |\Omega_{x_1}| \cos^2 \alpha + |\Omega_{y_1}| \sin^2 \alpha &\geq |\Omega_{x_1} \cos^2 \alpha + \Omega_{y_1} \sin^2 \alpha|, \\ |\Omega_{x_1}| \sin^2 \alpha + |\Omega_{y_1}| \cos^2 \alpha &\geq |\Omega_{x_1} \sin^2 \alpha + \Omega_{y_1} \cos^2 \alpha|, \end{aligned} \quad (10)$$

on obtient:

$$|\Omega_{x_1}| + |\Omega_{y_1}| \geq |\Omega_1| + |\Omega_2|. \quad (11)$$

On peut donc affirmer que, pour un mécanisme de ruine donné, si on oriente les barres d'acier selon les courbures principales, la quantité d'acier employée en chaque point est plus petite de la quantité qu'on aurait dû employer en posant les barres en réseau orthogonal en formant un angle  $\alpha = \alpha(x, y) \neq 0$  avec les directions principales des courbures.

Si on compare des solutions de poids minimum relatif d'armature, qui sont des solutions complètes en ce qui concerne le calcul limite, on peut donc affirmer que le minimum *absolu* sera atteint seulement si en chaque point de la plaque les barres sont orientées selon les courbures principales. Il s'agit d'une condition nécessaire, bien que non suffisante, de poids minimum absolu.

C'est donc un premier pas pour s'approcher du poids minimum d'armature. On doit remarquer tout de suite que cette condition peut être difficile à réaliser en pratique et que le prix d'une telle plaque pourrait être supérieur au prix de la plaque avec réseaux rectiglines.

### 3. Remarques sur l'influence du coefficient d'orthotropie

a) Le problème de minimisation directe du volume représenté par l'expression (1) peut se formuler de la façon suivante:

$$V = \int_S [\Omega_1 (1 + \gamma)] dS \rightarrow \min. \quad (12)$$

On doit donc trouver les fonctions  $\Omega_1$  et  $\gamma$  qui minimisent la fonctionnelle  $V = V[\Omega_1, \gamma]$ .

Si on considère maintenant la fonctionnelle  $V$ , affectée d'un condition:

$$f(\Omega, \gamma) = 0, \quad (13)$$

on peut affirmer de façon tout à fait générale que le minimum de la fonctionnelle conditionnée est supérieur ou égal à celui de la fonctionnelle non conditionnée, la classe de  $V$  conditionnée étant plus restreinte que la classe de  $V$ .

Pour atteindre le poids minimum absolu, une condition nécessaire est donc que le coefficient d'orthotropie ne soit pas soumis à des conditions préalablement fixées.

La remarque est utile en pratique parce que souvent des exigences de la construction portent à fixer à priori une valeur du coefficient d'orthotropie.

Même au point de vue théorique cette remarque n'est pas inutile, parce que souvent l'équation différentielle qu'on obtient, en imposant que la puissance dissipée par unité de volume soit constante, admet une solution particulière facile si on admet  $\gamma$  constant.

b) En introduisant le coefficient d'orthotropie  $\gamma$  nous écrivons l'équation (8) sous la forme:

$$\eta \int_S p W dS = \int_S R_e h [|\dot{K}_1| |\Omega_1| + |\dot{K}_2| \gamma |\Omega_1|] dS. \quad (14)$$

Supposons maintenant que  $\gamma$ ,  $\dot{K}_1$  et  $\dot{K}_2$  soient des constantes telles que:

$$\dot{K}_1 = K, \quad \dot{K}_2 = \beta K \text{ avec } 0 \leq \beta \leq 1. \quad (15)$$

De l'équation (14) et des relations (15) on tire:

$$\eta \int_S p W dS = R_e h K \frac{(1+\beta\gamma)}{(1+\gamma)} \int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS. \quad (16)$$

Si, tout en gardant le mécanisme caractérisé par  $W$  et  $K$ , les conditions d'équilibre indéfinies et au contour permettent que  $M_{p2}=0$ , et donc  $\gamma=0$ , nous pouvons écrire l'équation (16) de la façon suivante:

$$\eta \int_S p W dS = R_e h K \int_{S^*} \Omega_1 dS. \quad (17)$$

En comparant les équations (16) et (17), nous avons:

$$\frac{1+\beta\gamma}{1+\gamma} \int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS = \int_{S^*} \Omega_1 dS,$$

et, puisque

$$\frac{1+\beta\gamma}{1+\gamma} \leq 1.$$

$$\int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS \geq \int_{S^*} \Omega_1 dS. \quad (19)$$

Si, au contraire, les conditions d'équilibre indéfinies et au contour sont telles qu'on peut admettre  $M_{p1}=0$ , et donc  $\Omega_1=0$ , de l'équation (16) on tire:

$$\eta \int_S p W dS = R_e h K \beta \int_{S^*} \Omega_2 dS, \quad (20)$$

et, en comparant cette équation avec l'équation (16), on obtient:

$$\frac{1+\beta\gamma}{1+\gamma} \int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS = \beta \int_{S^*} \Omega_2 dS. \quad (21)$$

Puisque

$$\frac{1+\beta\gamma}{1+\gamma} \geq \beta,$$

de la relation (21), on tire:

$$\int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS \leq \int_{S^*} \Omega_2 dS. \quad (22)$$

Des inégalités (19) et (22) on peut finalement déduire:

$$\int_{S^*} \Omega_1 dS \leq \int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS \leq \int_{S^*} \Omega_2 dS, \quad (23)$$

c'est-à-dire que, dans le cadre des hypothèses admises dans ce paragraphe, le poids minimum d'armature est obtenu si on place les barres d'acier seulement dans la direction de la courbure principale la plus grande. Si l'armature est placée, au contraire, seulement dans la direction de la courbure principale

plus petite, on obtient un poids plus grand que celui qu'on obtient en plaçant l'acier dans les deux directions.

Il faut remarquer que si  $\beta = 1$ , le coefficient d'orthotropie adopté n'a pas d'influence sur la valeur du poids minimum.

#### 4. Conditions suffisantes de poids minimum

a) Pour obtenir le poids minimum d'armature, nous pouvons donc utiliser la relation (6), et si nous voulons atteindre la valeur minimum absolue, nous devons nous rappeler l'inégalité (11) et écrire:

$$\frac{D}{(1+\gamma)\Omega_1} = \frac{R_e h}{1+\gamma} [|\dot{K}_1| + \gamma|\dot{K}_2|] = \text{const} = |C| R_e h \quad (24)$$

en sous-entendant que le système de référence suit les lignes principales de courbure.

Il s'agit maintenant de trouver,  $R_e$  et  $h$  étant constants, des fonctions  $\dot{K}_1$ ,  $\dot{K}_2$  et  $\gamma$  qui satisfassent la condition (24).

En général de (24) on tire:

$$\gamma = \frac{|C| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |C|} \quad (\gamma \geq 0). \quad (25)$$

$\gamma$  étant positif, la relation (25) admet des solutions seulement dans l'intervalle  $|\dot{K}_2| \geq |C| \geq |\dot{K}_1|$ . Si on donne deux fonctions  $|\dot{K}_1|$  et  $|\dot{K}_2|$  satisfaisant bien entendu aux conditions de mécanisme, le coefficient d'orthotropie  $\gamma$  est donné à la valeur de la constante  $|C|$  près.

En suivant la démonstration du théorème de DRUCKER et SHIELD nous écrivons pour une plaque à l'état limite:

$$\eta \int_S p W dS = \left[ \int_S \Omega_1 (1+\gamma) dS \right] R_e h |C|, \quad (26)$$

ou bien, compte tenu de la relation (25):

$$\eta \int_S p W dS = R_e h |C| \int_S \Omega_1 \left( 1 + \frac{|C| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |C|} \right) dS. \quad (27)$$

Considérons maintenant une variation de volume d'armature de  $\Omega_1$  à  $\bar{\Omega}_1$  et de  $\gamma$  à  $\bar{\gamma}$  telle que la plaque puisse supporter au moins  $\eta p$ . Après la variation, nous aurons:

$$\bar{\gamma} = \frac{|\bar{C}| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |\bar{C}|}. \quad (28)$$

Nous aurons alors d'après l'équation (27):

$$|C| \int_S \Omega_1 \left( 1 + \frac{|C| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |C|} \right) dS \leq |\bar{C}| \int_S \bar{\Omega}_1 \left( 1 + \frac{|\bar{C}| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |\bar{C}|} \right) dS. \quad (29)$$

Nous serons sûr que

$$\int_S \Omega_1 (1 + \gamma) dS \leq \int_S \bar{\Omega}_1 (1 + \bar{\gamma}) dS, \quad (30)$$

si  $|C| = |\bar{C}|$ , et donc  $\gamma = \bar{\gamma}$ . (31)

La condition (24) assure donc le poids minimum d'armature dans la classe des solutions obtenues en ne faisant varier que la fonction  $\Omega_1$ , la fonction  $\gamma$  demeurant inaltérée (voir paragraphe 3a). Il s'agit donc, si la solution existe, d'un minimum relatif.

Il faut remarquer que, en général, l'énergie dissipée n'a pas la même valeur en chaque barre, et que, si  $\dot{K}_1 = C_1$  et  $\dot{K}_2 = C_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  étant des constantes, on a, en vertu de la relation (25),  $\gamma = \text{const}$  par rapport à la position.

Ceci est la méthode que WOOD a utilisée dans certains cas étudiés [3].

On peut améliorer le poids minimum ainsi obtenu en minimisant l'intégrale:

$$V = \int_S \Omega_1 \left( 1 + \frac{|C| - |\dot{K}_1|}{|\dot{K}_2| - |C|} \right) dS, \quad (32)$$

mais comme  $|C|$ , et donc  $\gamma$ , sont reliés au mécanisme choisi dont  $\dot{K}_1$  et  $\dot{K}_2$  sont les courbures, on n'est pas sûr d'atteindre le poids minimum absolu.

b) Si dans la relation (25) on pose  $|\dot{K}_1| = |\dot{K}_2|$ , on trouve, étant donné que  $|\dot{K}_2| \geq |C| \geq |\dot{K}_1|$ :

$$|\dot{K}_1| = |\dot{K}_2| = |C|, \quad (33)$$

et, par conséquent, que  $\gamma$  est indéterminé.

Nous pouvons alors écrire la relation (27) de la façon suivante:

$$\eta \int_S p W dS = R_e h |C| \int_S \Omega_1 (1 + \gamma) dS, \quad (34)$$

et en donnant une variation de volume de  $\Omega_1$  à  $\bar{\Omega}_1$  et de  $\gamma$  à  $\bar{\gamma}$ , telle que la plaque puisse supporter au moins  $\eta p$ , nous aurons:

$$\int_S \Omega_1 (1 + \gamma) dS \leq \int_S \bar{\Omega}_1 (1 + \bar{\gamma}) dS, \quad (35)$$

quelle que soit la valeur de  $|C|$ .

La condition (35) assure donc le poids minimum d'armature dans la classe des solutions obtenues en faisant varier les fonctions  $\Omega_1$  et  $\gamma$  (cfr. § 3a). Il s'agit donc, si la solution existe, d'un minimum absolu.

Ceci est le point de vue de MORLEY [4]. On peut aisément remarquer que l'énergie dissipée par unité de volume est égale en chaque barre.

c) Considérons maintenant le cas, assez fréquent dans la pratique, où les barres sont posées selon un réseau orthogonal coïncidant avec un système de référence cartésien  $0, x, y$  ( $\rho = 0$ , cfr. § 1).

On sait [6] que, en ce cas, l'expression de l'énergie dissipée par unité de volume est donnée par:



$$\begin{aligned}
\frac{D}{(1+\gamma)\Omega_x} = & \frac{1}{4} \frac{R_e h}{1+\gamma} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{\dot{K}_x - \dot{K}_y}{\sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}} \right) \right. \right. \\
& + \gamma \left( 1 - \frac{\dot{K}_x - \dot{K}_y}{\sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}} \right) \left. \right] |(\dot{K}_x + \dot{K}_y) + \sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}| \\
& + \left[ \left( 1 - \frac{\dot{K}_x - \dot{K}_y}{\sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}} \right) \right. \\
& \left. \left. + \gamma \left( 1 + \frac{\dot{K}_y - \dot{K}_x}{\sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}} \right) \right] |(\dot{K}_x + \dot{K}_y) - \sqrt{(\dot{K}_x - \dot{K}_y)^2 + 4\dot{K}_{xy}^2}| \right\}. \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\text{Si on pose:} \quad \dot{K}_x = \dot{K}_y = K(x, y), \quad (37)$$

de la relation (36) on tire:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{(1+\gamma)\Omega_x} = & \frac{1}{4} \frac{R_e h}{1+\gamma} \{ [1+\gamma] |2K + 2\dot{K}_{xy}| + [1+\gamma] |2K - 2\dot{K}_{xy}| \} = \\
& \frac{R_e h}{2} \{ |K + \dot{K}_{xy}| + |K - \dot{K}_{xy}| \}. \quad (38)
\end{aligned}$$

De la relation (38), on déduit que:

$$\frac{D}{(1+\gamma)\Omega_x} = R_e h K \quad \text{si } K \geq \dot{K}_{xy} \quad (39)$$

$$\text{et que:} \quad \frac{D}{(1+\gamma)\Omega_x} = R_e h K_{xy} \quad \text{si } \dot{K}_{xy} \geq K. \quad (39')$$

Si, dans le cas prévu dans la relation (39) on pose  $K = \text{const}$ , ou si dans le cas prévu dans la relation (39') on pose  $\dot{K}_{xy} = \text{const}$ , on obtient une condition suffisante de poids minimum. Il ne s'agit pas de minima absolus en vertu de la remarque du paragraphe 2, mais il s'agit tout de même des plus petites valeurs qu'on peut obtenir en gardant les réseaux des barres coïncidant avec un système cartésien orthogonal.

On peut aisément remarquer que, si on impose que les puissances par unité de volume exprimées par les équations (39) et (39') soient constantes, on formule des conditions qui assurent les poids minimum d'armature dans des classes de solutions obtenues en faisant varier les fonctions  $\Omega_x$  et  $\gamma$ .

Il s'agit donc, si la solution existe, d'un minimum *dans la classe des plaques armées avec réseaux caractérisés par  $\rho = 0$* .

## 5. Considérations pratiques

Nous pouvons discuter les résultats qui ont été tirés ci-avant sur un cas présenté dans la référence [6]. Il s'agit d'une plaque elliptique, appuyée sur le contour et uniformément chargée, dont  $a$  et  $b$  sont des demi axes. Soit  $a \geq b$ .

Supposons qu'elle soit armée avec un réseau orthogonal dirigé selon les axes  $x$  et  $y$  coïncidant avec les axes de l'ellipse.  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$  sont les aires, par unité de longueur, des sections droites des barres du réseau et  $\gamma = \frac{\Omega_y}{\Omega_x}$  est le coefficient d'orthotropie.

En supposant que le mécanisme de ruine soit représenté par la fonction:

$$\dot{W} = \alpha \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \tag{40}$$

$\dot{W}$  étant la vitesse transversale, on aura le champ des vitesses de courbures qui suit:

$$\dot{K}_x = \frac{2\alpha}{a^2}, \quad \dot{K}_y = \frac{2\alpha}{b^2}, \quad \dot{K}_{xy} = 0. \tag{41}$$

Si nous admettons  $\gamma = \text{const}$ , nous pouvons satisfaire la condition (6). Quelle que soit la valeur de  $\gamma$  choisie, la condition de WOOD est ainsi satisfaite. Nous serons capables de satisfaire la condition de MORLEY seulement en posant  $\gamma = \infty$ , sur la base de ce qui a été exposé au paragraphe 3b.

En effet, nous pouvons associer au champ des vitesses de courbure (41) le champ des moments suivant:

$$M_x = A \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) R_e h, \quad M_y = \gamma M_x, \quad M_{xy} = 0. \tag{42}$$

On remarque aisément qu'un tel champ peut satisfaire aux équations d'équilibre même dans le cas où  $M_x = 0$ . Selon MORLEY il faut armer la plaque seulement selon la direction  $y$ . La puissance dissipée est donc égale en chaque barre et a la valeur

$$\mathfrak{D} = R_e h \frac{2\alpha}{b^2}.$$

Il faut encore remarquer que, puisque  $M_{xy} = 0$ ,  $M_x$  et  $M_y$  sont moments principaux et que, par conséquent, la condition nécessaire de poids minimum absolu présentée au paragraphe 2 est remplie.

Dans le tableau qui suit sont données les valeurs des rapports  $V_W/V_M$  des poids minima selon WOOD et selon MORLEY pour différents rapports  $a/b$ .

$a/b$	$V_W/V_M$				
	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$	$\gamma = \infty$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,2	1,44	1,18	1,11	1,085	1,00
1,4	1,96	1,32	1,19	1,14	1,00
1,6	2,56	1,46	1,24	1,18	1,00
1,8	3,24	1,53	1,30	1,21	1,00
2,0	4,00	1,60	1,34	1,24	1,00

On remarquera que, si  $a=b$ , le champ de vitesses de courbure (41) satisfait aux conditions (33) et donc que, dans le cas de la plaque circulaire, les solutions de WOOD, quel que soit  $\gamma$ , sont identiques à la solution de MORLEY.

Il faut encore souligner que pour  $\gamma=0$  on a des solutions à dissipation par unité de volume de barre constante et égale dans toutes les barres.

Ces solutions ne sont néanmoins pas de poids minimum parce que les armatures sont placées selon la direction de courbure principale la plus petite. Elles conduisent en effet à des poids d'armature plus grands de ceux prévus par WOOD pour n'importe quelle autre valeur de  $\gamma$ .

### Bibliographie

- [1] M. SAVE: A consistent limit-analysis theory for reinforced concrete slabs. Magazine of concrete research. Vol. 19 N° 58, March 1967.
- [2] D. C. DRUCKER et R. T. SHIELD: Design for minimum Weight. Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussels, 1956.
- [3] R. H. WOOD: Plastic and elastic design of slabs and plates. London 1961.
- [4] C. MORLEY: The minimum reinforcement of concrete slabs. Int. Journ. Mech. Sciences. Vol. 8. April 1966.
- [5] R. T. SHIELD: On the optimum design of shells. J. appl. Mech. 27, 1960, p. 316-322.
- [6] O. DE DONATO et G. SACCHI: Soluzioni di minimo peso d'armatura metallica per piastre inflesse in cemento armato. Ist. Lomb. Scienza e Lettere. Milano 1968.

### Résumé

On s'intéresse aux plaques fléchies, en béton armé, de hauteur constante, avec armature orthotrope.

On étudie les méthodes de calcul de poids minimum d'armature, pour des charges limites données. On montre comment les méthodes proposées par MORLEY et WOOD découlent directement du théorème général de DRUCKER et SHIELD.

### Zusammenfassung

Behandelt werden Stahlbetonplatten konstanter Höhe und orthotroper Bewehrung. Gezeigt werden die Berechnungsverfahren für das minimale Bewehrungsgewicht unter gegebenen Traglasten. Weiterhin ergibt sich, wie sich die vorgeschlagenen Verfahren von MORLEY und WOOD direkt von DRUCKERS und SHIELDS allgemeinen Sätzen ableiten lassen.

### Summary

Deflected slabs constructed of reinforced concrete, of constant height and with orthotropic reinforcement, are considered.

The methods for the calculation of the minimum weight of reinforcement, for the given limit loads, are investigated. It is shown how the methods developed by MORLEY and WOOD follow directly from the general theory of DRUCKER and SHIELD.