Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen

Band: 29 (1969)

Artikel: Die verbesserte Seilpolygonmethode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Autor: Stüssi, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22926

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die verbesserte Seilpolygonmethode zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Improvement in the Method of the Funicular Polygon for the Numerical Solution of Differential Equations of the Second Order

Amélioration de la méthode du polygône funiculaire pour la résolution numérique des équations différentielles du second ordre

F. STÜSSI
Prof. Dr., Ehrenpräsident der IVBH

1. Problemstellung

Die Konstruktion von Kräfte- und Seilpolygon zur Berechnung der Biegungsmomente eines Balkens ist grundsätzlich auf Einzellasten orientiert. Übersetzen wir die graphische Konstruktion in die Sprache der Rechnung, so finden wir zwischen den Lasten P und den Momenten M den Zusammenhang

$$\frac{M_m - M_{m-1}}{\Delta x_m} - \frac{M_{m+1} - M_m}{\Delta x_{m+1}} = P_m$$

oder für konstante Feldweiten Δx

$$-M_{m-1} + 2\,M_m - M_{m+1} = P_m \,\Delta x\,.$$

Ist der Balken durch eine stetige Belastung p belastet, so treten die Knotenlasten $K(p)$ an Stelle der Einzellasten P; dabei ist es anschaulich, von der Vorstellung eines indirekt belasteten Balkens auszugehen. Hier ist somit

$$-M_{m-1} + 2\,M_m - M_{m+1} = \Delta x\, K_m(p). \tag{1}$$

Die Momente M gelten in den Knotenpunkten; das Seilpolygon liefert uns das Sehnenpolygon zur wirklichen Momentenfläche bei direkter Belastung. Die Knotenlasten $K(p)$ sind bei gegebenem Verlauf der Belastung p mit den Mitteln der Baustatik (als sekundäre Auflagerkräfte) einfach zu bestimmen.

Zwischen den Momenten M und der Belastung p eines Balkens besteht die Beziehung

$$M'' = -p\,;$$

wir können mit $y = M$, $y'' = -p$ die Gleichung (1) auf die Form

$$\underline{y_{m-1} - 2\,y_m + y_{m+1} = \Delta\, x\, K_m(y'')} \tag{2}$$

verallgemeinern. Wir nennen diese Beziehung die Seilpolygongleichung; sie ist streng gültig, unabhängig vom Verlauf der Belastungsfunktion y''.

Diese Seilpolygongleichung soll nun zur numerischen Lösung der totalen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\underline{y'' + b\,y' \pm c\,y \pm F(x) = 0} \tag{3}$$

verwendet werden. Bei einer solchen Lösung ist der entscheidende Schritt der, die Ableitungen y'' und y' zu eliminieren bzw. durch die gesuchte Funktion y selbst auszudrücken und damit die zu lösende Differentialgleichung (3) in ein Gleichungssystem mit aufeinanderfolgenden Werten y_{m-1}, y_m, y_{m+1} usw. zu übersetzen. Die Elimination der zweiten Ableitung y'' mit Hilfe der Seilpolygongleichung (2) gelingt, wenn wir in Gleichung (3) die Funktionswerte y, y', y'' und $F(x)$ durch die entsprechenden $\Delta\, x$-fachen Knotenlasten ersetzen:

$$\Delta\, x\, K_m(y'') + \Delta\, x\, K_m(b\,y') \pm \Delta\, x\, K_m(c\,y) \pm \Delta\, x\, K_m(F) = 0\,;$$

durch Einsetzen von $\Delta\, x\, K_m(y'')$ nach Gleichung (2) folgt

$$y_{m-1} - 2\,y_m + y_{m+1} + \Delta\, x\, K_m(b\,y') \pm \Delta\, x\, K_m(c\,y) \pm \Delta\, x\, K_m(F) = 0\,. \tag{4}$$

Wir haben nun noch die Knotenlasten $K_m(b\,y')$ und $K_m(c\,y)$ durch eine möglichst kleine Zahl von Funktionswerten y möglichst zutreffend auszudrücken. Dabei ist es offensichtlich naheliegend, sich auf drei aufeinanderfolgende Werte y_{m-1}, y_m und y_{m+1} zu beschränken, um ein möglichst einfach lösbares Gleichungssystem zu erhalten. Durch drei Punkte ist eine quadratische Parabel

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{5}$$

bestimmt; wir nennen diese Kurve y, aus der die Knotenlasten $K_m(b\,y')$ und $K_m(c\,y)$ berechnet werden sollen, die *Knotenlast-Kurve* für das Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$. Legen wir den Koordinatenursprung in den Punkt m (Fig. 1),

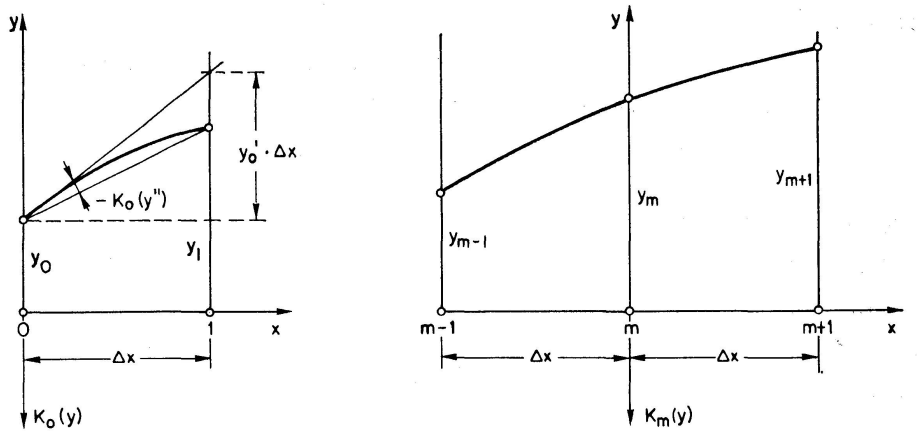

Fig. 1.

so finden wir die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 aus der Bedingung, daß die Kurve durch die drei Punkte mit y_{m-1}, y_m und y_{m+1} gehen soll, aus

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad y_m &= a_0, \\ x = \Delta x: &\quad y_{m+1} &= a_0 + a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2, \\ x = -\Delta x: &\quad y_{m-1} &= a_0 - a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2 \end{aligned}$$

zu

$$a_0 = y_m, \qquad a_1 = \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2 \Delta x}, \qquad a_2 = \frac{y_{m+1} - 2 y_m + y_{m+1}}{2 \Delta x^2}. \tag{5a}$$

Bei der Berechnung der Knotenlasten ist zu beachten, daß nur die symmetrischen Anteile von y bzw. y' dazu Beiträge leisten, weil antimetrische Anteile sich herausheben. Es ist somit

$$\Delta x K_m(c y) = 2 \Delta x \int_m^{m+1} c\, y_{sym} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx.$$

Nehmen wir zunächst konstante Koeffizienten c für das Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$ an und führen wir die Abkürzung

$$\gamma = \frac{c \Delta x^2}{12}, \qquad c = \frac{12 \gamma}{\Delta x^2}$$

ein, so ist

$$\Delta x K_m(c y) = 2 \Delta x \frac{12 \gamma}{\Delta x^2} \int_m^{m+1} (a_0 + a_2 x^2) \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx,$$

$$\Delta x K_m(c y) = 2 \frac{12 \gamma}{\Delta x} \left[\frac{a_0 \Delta x}{2} + \frac{a_2 \Delta x^3}{12}\right]$$

und durch Einsetzen der Koeffizienten a_0 und a_2 aus Gleichung (5a) ergibt sich

$$\Delta x K_m(c y) = \gamma y_{m-1} + 10 \gamma y_m + \gamma y_{m+1}. \tag{6}$$

Analog folgt aus $y'_{sym} = a_1$ mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{b \Delta x}{2}, \qquad b = \frac{2 \beta}{\Delta x}$$

die Knotenlast $K_m(b y')$ zu

$$\Delta x K_m(b y') = 2 \Delta x \frac{2 \beta}{\Delta x} \int_m^{m+1} a_1 \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx = 4 \beta \frac{a_1 \Delta x}{2}$$

oder nach Einsetzen von a_1

$$\Delta x K_m(b y') = \beta (y_{m+1} - y_{m-1}). \tag{7}$$

Die Knotenlast $K_m(F)$ der Belastungsfunktion $F(x)$ läßt sich mit den bekannten Mitteln der Baustatik immer genügend genau bestimmen; ist $F(x)$ eine

stetige Kurve, so kann ihre Knotenlast mit der Parabelformel analog zu Gleichung (6) bei nicht zu großen Intervallen mit guter Genauigkeit zu

$$\Delta x K_m(F) = \frac{\Delta x^2}{12}(F_{m-1} + 10\, F_m + F_{m+1})$$

berechnet werden.

Damit folgt aus Gleichung (4) durch Einsetzen der Knotenlasten $\Delta x K_m(c\,y)$ und $\Delta x K_m(b\,y')$ die *Grundgleichung* zur Lösung der Differentialgleichung (3)

$$\underline{y_{m-1}(1-\beta \pm \gamma) - y_m(2 \mp 10\gamma) + y_{m+1}(1+\beta \pm \gamma) \pm \Delta x K_m(F) = 0.} \tag{8}$$

Die zu lösende Differentialgleichung (3) ist damit in ein leicht auflösbares dreigliedriges Gleichungssystem übersetzt.

Neben dieser Grundgleichung müssen noch die *Rand- oder Anfangsbedingungen* formuliert werden. Bei den in der Baustatik vorkommenden *Randwertaufgaben* sind normalerweise die beiden Randwerte y_A und y_B gegeben; dies ersetzt uns die entsprechenden Bestimmungsgleichungen. Ausnahmsweise können auch y'_A und y'_B gegeben sein; wir benötigen dann eine Beziehung, um aus y'_A (bzw. y'_B) den Wert von y_A (bzw. y_B) berechnen zu können. Bei *Anfangswertaufgaben* nach Gleichung (3) sind am Anfang des Integrationsbereichs in der Regel die beiden Werte y_0 und y'_0 gegeben; wir benötigen dann eine Beziehung, um neben y_0 auch den Wert von y_1 (s. Fig. 1) zu berechnen. Bei der Aufstellung einer solchen Randbedingung «y'_0 gegeben» ist es zweckmäßig, nur die beiden Funktionswerte y_0 und y_1 zu verwenden, aber zur Formulierung der Knotenlastkurve als quadratische Parabel auch den gegebenen Randwert y'_0 der ersten Ableitung der gesuchten Funktionen y beizuziehen.

Zur Formulierung der gesuchten Randbedingung «y'_0 gegeben» gehen wir aus von der aus der Baustatik bekannten Beziehung zwischen Querkraft Q, Biegungsmoment M und Belastung p im Randfeld von 0 bis 1:

$$Q_0 = \frac{M_1 - M_0}{\Delta x} + K_0(p)$$

oder in allgemeiner Formulierung mit $M = y$, $Q = M' = y'$, $p = -y''$

$$\underline{y'_0 \Delta x = y_1 - y_0 - \Delta x K_0(y'').} \tag{9}$$

Wir ersetzen y'' nach der zu lösenden Differentialgleichung (3),

$$y'' = -b\,y' \mp c\,y \mp F(x),$$

und erhalten damit

$$\underline{y'_0 \Delta x = y_1 - y_0 + \Delta x K_0(b\,y') \pm \Delta x K_0(c\,y) \pm \Delta x K_0(F).} \tag{9a}$$

Die Knotenlasten $K_0(b\,y')$ und $K_0(c\,y)$ sind nun wieder mit Hilfe einer Knotenlastkurve y zu bestimmen, für welche wir wieder eine quadratische Parabel,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{10}$$

einführen. Mit Koordinatenursprung im Anfangspunkt 0 ist

$$a_0 = y_0, \qquad a_1 = y_0', \qquad a_2 = \frac{y_1 - y_0 - y_0' \Delta x}{\Delta x^2}$$

und damit

$$y = y_0 + y_0'\left(x - \frac{x^2}{\Delta x}\right) + (y_1 - y_0)\frac{x^2}{\Delta x^2} \tag{10a}$$

und

$$y' = y_0'\left(1 - \frac{2x}{\Delta x}\right) + (y_1 - y_0)\frac{2x}{\Delta x^2}. \tag{10b}$$

Damit ergeben sich die gesuchten Knotenlasten zu

$$\Delta x K_0(cy) = \Delta x c \int_0^1 y\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx = \Delta x \frac{12\gamma}{\Delta x^2}\left[\frac{y_0 \Delta x}{2} + y_0' \frac{\Delta x^2}{12} + (y_1 - y_0)\frac{\Delta x^2}{12}\right],$$

$$\Delta x K_0(cy) = 5\gamma y_0 + \gamma y_1 + \gamma y_0' \Delta x \tag{11}$$

und

$$\Delta x K_0(by') = \Delta x b \int_0^1 y'\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx = \Delta x \frac{2\beta}{\Delta x}\left[\frac{y_0' \Delta x}{6} + \frac{y_1 - y_0}{3}\right],$$

$$\Delta x K_0(by') = -\frac{2\beta}{3} y_0 + \frac{2\beta}{3} y_1 + \frac{\beta}{3} y_0' \Delta x. \tag{12}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (9a) erhalten wir die gesuchte Randbedingung zu

$$\underline{-y_0\left(1 + \frac{2\beta}{3} \mp 5\gamma\right) + y_1\left(1 + \frac{2\beta}{3} \mp \gamma\right) - y_0' \Delta x\left(1 - \frac{\beta}{3} \mp \gamma\right) \pm \Delta x K_0(F) = 0.} \tag{13}$$

Für stetigen Verlauf des Belastungsgliedes $F(x)$ kann die Knotenlast in Analogie zu Gleichung (11) mit

$$\Delta x K_0(F) = \frac{\Delta x^2}{12}(5F_0 + F_1 + F_0' \Delta x)$$

eingesetzt werden.

Wir haben noch den Fall veränderlicher Koeffizienten b und c zu untersuchen. Ist der Koeffizient c veränderlich, so führen wir eine Knotenlastkurve cy als quadratische Parabel ein:

$$cy = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Für ein Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$ mit Koordinatenursprung in m ist

$$a_0 = c_m y_m, \qquad a_1 = \frac{c_{m+1} y_{m+1} - c_{m-1} y_{m-1}}{2\Delta x}, \qquad a_2 = \frac{c_{m+1} y_{m+1} - 2c_m y_m + c_{m-1} y_{m-1}}{2\Delta x^2}$$

und wir finden für symmetrische Anteile von cy die Knotenlast zu

$$\Delta x K_m(cy) = 2\int_m^{m+1} c y_{sym}\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx = 2\Delta x^2\left(\frac{c_m y_m}{2} + \frac{a_2 \Delta x^2}{12}\right),$$

$$\Delta x K_m(cy) = \gamma_{m-1} y_{m-1} + 10\gamma_m y_m + \gamma_{m+1} y_{m+1} \tag{6a}$$

mit $\gamma = \frac{c\Delta x^2}{12}$ wie bisher.

Für das Anfangsfeld mit Koordinatenursprung im Anfangspunkt 0 ist $a_0 = c_0 y_0$ und

$$(c\,y)' = c\,y' + c'\,y = a_1 + 2\,a_2\,x.$$

Setzen wir mit genügender Genauigkeit

$$c' = \frac{c_1 - c_0}{\Delta x},$$

so finden wir für $x = 0$

$$c_0\,y_0' + \frac{c_1 - c_0}{\Delta x}\,y_0 = a_1$$

und damit für $x = \Delta x$

$$c_1\,y_1 = c_0\,y_0 + \left[c_0\,y_0' + \frac{c_1 - c_0}{\Delta x}\,y_0\right]\Delta x + a_2\,\Delta x^2,$$

$$a_2\,\Delta x^2 = c_1\,(y_1 - y_0) - c_0\,y_0'\,\Delta x.$$

Damit ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung die gesuchte Knotenlast zu

$$\Delta x\,K_0\,(c\,y) = (4\,\gamma_0 + \gamma_1)\,y_0 + \gamma_1\,y_1 + \gamma_0\,y_0'\,\Delta x. \tag{11a}$$

Für veränderliche Koeffizienten b setzen wir die Knotenlastkurve y als Parabel ein. Für das Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$ ist damit nach den Gleichungen (5) und (5a)

$$y' = a_1 + 2\,a_2\,x.$$

Für den veränderlichen Koeffizienten b setzen wir linearen Verlauf über das Doppelfeld voraus:

$$b = b_m + \frac{b_{m+1} - b_{m-1}}{2\,\Delta x}\,x.$$

Aus

$$b\,y' = \left(b_m + \frac{b_{m+1} - b_{m-1}}{2\,\Delta x}\,x\right)(a_1 + 2\,a_2\,x)$$

kann die gesuchte Knotenlast unter Einführung der Abkürzung $\beta = \frac{b\,\Delta x}{2}$ zu

$$\Delta x\,K_m\,(b\,y') = -\frac{\beta_{m-1} + 2\,\beta_m}{3}\,y_{m-1} - \frac{\beta_{m+1} - \beta_{m-1}}{3}\,y_m + \frac{2\,\beta_m + \beta_{m+1}}{3}\,y_{m+1} \tag{7a}$$

berechnet werden.

Für das Anfangsfeld erhalten wir unter der gleichen Voraussetzung des linearen Verlaufes von b in zu früher analoger Berechnung

$$\Delta x\,K_0\,(b\,y') = \frac{\beta_0 + \beta_1}{3}\,(y_1 - y_0) + y_0'\,\Delta x\,\frac{2\,\beta_1 - \beta_0}{3}. \tag{12a}$$

Durch Einsetzen dieser Werte der Knotenlasten ergeben sich nun die Bestimmungsgleichungen für veränderliche Koeffizienten. Die Grundgleichung lautet

$$\begin{aligned} &y_{m-1}\left(1-\frac{\beta_{m-1}+2\beta_m}{3}\pm\gamma_{m-1}\right)-y_m\left(2+\frac{\beta_{m+1}-\beta_{m-1}}{3}\mp 10\gamma_m\right)\\ &+y_{m+1}\left(1+\frac{2\beta_m+\beta_{m+1}}{3}\pm\gamma_{m+1}\right)\pm\Delta x K_m(F)=0, \end{aligned} \tag{8a}$$

während sich die Randbedingung «y_0' gegeben» zu

$$\begin{aligned} &-y_0\left(1+\frac{\beta_0+\beta_1}{3}\mp(4\gamma_0+\gamma_1)\right)+y_1\left(1+\frac{\beta_0+\beta_1}{3}\pm\gamma_1\right)\\ &-y_0'\Delta x\left(1-\frac{2\beta_1-\beta_0}{3}\mp\gamma_0\right)\pm\Delta x K_0(F)=0 \end{aligned} \tag{13a}$$

ergibt.

Damit ist die «normale» Seilpolygonmethode rekapituliert, wie ich sie vor längerer Zeit zur numerischen Lösung von in der Baustatik vorkommenden Differentialgleichungen vorgeschlagen[1]) und weiter ausgebaut habe[2]). Bei den in der Baustatik vorherrschenden Aufgaben (Berechnung verankerter Hängebrücken, gemischte Torsion usw.) genügt die Genauigkeit der Methode den Anforderungen der Bemessungspraxis durchaus, wenn die Intervallgröße Δx nicht zu groß gewählt wird. So kann bei Randwertaufgaben ohne Dämpfungsglied by' festgestellt werden, daß der Fehler unter 0,1% liegt, sofern $\gamma \leqq 0{,}05$ ist. Der Fehler variiert annähernd mit γ^2. Etwas ungünstiger liegen die Verhältnisse bei Anfangswertaufgaben, bei denen sich die Fehler relativ ungünstig fortpflanzen, und vor allem bei großen Dämpfungskoeffizienten b. Wohl kann man durch Wahl genügend kleiner Feldweiten Δx die Fehlergröße in gewünschten Grenzen halten, doch kann es dabei vorkommen, daß dadurch die Zahl der zu lösenden Gleichungen unerwünscht groß wird.

Es ist deshalb für solche Fälle (und auch um die Fehlergröße zutreffend zu beurteilen) erwünscht, die Seilpolygonmethode zu verbessern. Da in den aufgestellten Gleichungen die zweiten Ableitungen y'' in aller Strenge eliminiert sind, können die auftretenden Fehler nur von einer ungenauen Erfassung der Knotenlasten $K(cy)$ und $K(by')$ herrühren; damit ergibt sich, daß eine Verbesserung der Genauigkeit durch eine Verbesserung der Knotenlastkurven anzustreben ist.

2. Verbesserte Knotenlastkurven

Die in den Gleichungen (5) und (10) eingeführten Knotenlastkurven sind quadratische Parabeln

---

[1]) F. Stüssi: Die Stabilität des auf Biegung beanspruchten Trägers. Abh. IVBH, Band 3, 1935.

[2]) S. z. B.: F. Stüssi: Grundlagen des Stahlbaues. Springer-Verlag, Berlin 1958. Oder F. Stüssi: Numerische Methoden der Baustatik. Schweiz. Bauzeitung, 79. Jg., Heft 17, 1961.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

als höchste algebraische Kurven, die durch drei Werte y_{m-1}, y_m, y_{m+1} oder y_0, y_1, y_0' eindeutig bestimmt werden können. Differenzieren wir diese Kurve y, so erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2 a_2 x, \\ y'' &= 2 a_2, \\ y''' &= 0. \end{aligned}$$

Differenzieren wir dagegen die zu lösende Differentialgleichung (3) (für konstante Koeffizienten b und c)

$$y''' = -b y'' \mp c y' \mp F'(x), \tag{3a}$$

so können wir offensichtlich den Grund für die erwähnten Ungenauigkeiten erkennen: das Verschwinden der dritten Ableitung y''' der Knotenlastkurve steht im Widerspruch zur zu lösenden Differentialgleichung. Damit ergibt sich aber auch die gesuchte Möglichkeit zur Verbesserung der Knotenlastkurve; diese muß so gewählt werden, daß der aufgezeigte Widerspruch verschwindet. Dies ist dadurch möglich, daß wir die neue Knotenlastkurve y aus Gleichung (3a) durch dreimalige Integration bestimmen, wobei wir die Werte y'' und y' aus der bisherigen Knotenlastkurve Gleichung (5) bzw. (10) entnehmen. Wir führen die Untersuchung zuerst für das Doppelfeld von $m-1$ bis $m+1$ durch. Für die Belastungsfunktion $F(x)$ setzen wir in diesem Bereich

$$F = F_m + f_1 x + f_2 x^2$$

mit
$$f_1 = \frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2 \Delta x}, \qquad f_2 = \frac{F_{m+1} - 2 F_m + F_{m+1}}{2 \Delta x^2};$$

es ist also
$$F' = f_1 + 2 f_2 x.$$

Führen wir wieder die Abkürzungen

$$b = \frac{2\beta}{\Delta x}, \qquad c = \frac{12\gamma}{\Delta x^2}$$

ein, so wird

$$y''' = -\frac{2\beta}{\Delta x} 2 a_2 \mp \frac{12\gamma}{\Delta x^2}(a_1 + 2 a_2 x) \mp (f_1 + 2 f_2 x),$$

und wir erhalten durch Integration der Reihe nach

$$\begin{aligned} y'' &= 2 C_2 - \frac{4\beta a_2}{\Delta x} x \mp \frac{12\gamma}{\Delta x^2}(a_1 x + a_2 x^2) \mp (f_1 x + f_2 x^2), \\ y' &= C_1 + 2 C_2 x - \frac{2\beta a_2}{\Delta x} x^2 \mp \frac{12\gamma}{\Delta x^2}\left(\frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3}\right) \mp \left(\frac{f_1 x^2}{2} + \frac{f_2 x^3}{3}\right), \\ y &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 - \frac{2\beta a_2}{\Delta x}\frac{x^3}{3} \mp \frac{\gamma}{\Delta x^2}(2 a_1 x^3 + a_1 x^4) \mp \left(\frac{f_1 x^3}{6} + \frac{f_2 x^4}{12}\right). \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_0, C_1 und C_2 sind so zu bestimmen, daß die neue Knotenlastkurve y wieder durch die drei vorgeschriebenen Punkte mit den Ordinaten y_{m-1}, y_m und y_{m+1} geht. Wir erhalten

für $x=0$: $y_m = C_0$,

für $x=\Delta x$: $y_{m+1} =$

$$y_m + C_1 \Delta x + C_2 \Delta x^2 - \frac{2\beta a_2 \Delta x^2}{3} \mp \gamma (2 a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2) \mp \left(\frac{f_1 \Delta x^3}{6} + \frac{f_2 \Delta x^4}{12}\right),$$

für $x=-\Delta x$: $y_{m-1} =$

$$y_m - C_1 \Delta x + C_2 \Delta x^2 + \frac{2\beta a_2 \Delta x^2}{12} \mp \gamma (-2 a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2) \mp \left(-\frac{f_1 \Delta x^3}{6} + \frac{f_2 \Delta x^2}{12}\right).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir durch Addition

$$y_{m+1} - 2 y_m + y_{m-1} = 2 C_2 \Delta x^2 \mp \gamma\, 2 a_2 \Delta x^2 \mp 2 \frac{f_2 \Delta x^4}{12}$$

und durch Subtraktion

$$y_{m+1} - y_{m-1} = 2 C_1 \Delta x - 2 \frac{2\beta a_2 \Delta x^2}{3} \mp 2\gamma\, 2 a_1 \Delta x \mp 2 \frac{f_1 \Delta x^3}{6}.$$

Damit ergeben sich die beiden noch gesuchten Integrationskonstanten

$$C_1 = a_1 + \frac{2\beta}{3} a_2 \Delta x \pm 2\gamma a_1 \pm f_1 \frac{\Delta x^2}{6},$$

$$C_2 = a_2 \pm \gamma a_2 \pm f_2 \frac{\Delta x^2}{12}.$$

Durch Einsetzen finden wir die verbesserte Knotenlastkurve zu

$$\begin{aligned} y = {} & y_m + a_1 x + a_2 x^2 + \frac{2\beta}{3} a_2 \Delta x \left(x - \frac{x^3}{\Delta x^2}\right) \pm 2\gamma a_1 \left(x - \frac{x^3}{\Delta x^2}\right) \\ & \pm \gamma a_2 \left(x^2 - \frac{x^4}{\Delta x^2}\right) \pm \frac{f_1 \Delta x^2}{6} \left(x - \frac{x^3}{\Delta x^2}\right) \pm \frac{f_2 \Delta x^2}{12} \left(x^2 - \frac{x^4}{\Delta x^2}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Zur Berechnung der Knotenlast $K_m(c\,y)$ sind nur die symmetrischen Anteile von y zu berücksichtigen; es ist wie früher

$$\Delta x K_m(c\,y) = 2 \Delta x\, c \int_m^{m+1} y_{sym} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx$$

oder mit

$$y_{sym} = y_m + a_2 x^2 \pm \gamma a_1 \left(x^2 - \frac{x^4}{\Delta x^2}\right) \pm \frac{f_2 \Delta x^2}{12} \left(x^2 - \frac{x^4}{\Delta x^2}\right)$$

wird

$$\Delta x K_m(c y) = 2 \Delta x \frac{12\gamma}{\Delta x^2}\left[\frac{y_m \Delta x}{2} + \frac{a_2 \Delta x^3}{12} \pm \gamma a_2 \frac{\Delta x^3}{20} \pm \frac{f_2 \Delta x^2}{12}\frac{\Delta x^3}{20}\right],$$

$$\Delta x K_m(c y) = \pm \gamma (y_{m-1} + 10 y_m + y_{m+1}) + \frac{3\gamma^2}{5}(y_{m+1} - 2 y_m + y_{m-1}) \pm \frac{\gamma f_2 \Delta x^4}{10}. \tag{15a}$$

Analog folgt aus

$$y'_{sym} = a_1 + \frac{2\beta}{3} a_2 \Delta x\left(1 - \frac{3x^2}{\Delta x^2}\right) \pm 2\gamma a_1\left(1 - \frac{3x^2}{\Delta x^2}\right) \pm \frac{f_1 \Delta x^2}{6}\left(1 - \frac{3x^2}{\Delta x^2}\right)$$

die Knotenlast

$$\Delta x K_m(b y') = 2 \Delta x \frac{2\beta}{\Delta x}\left[\frac{a_1 \Delta x}{3} + \frac{2\beta}{3} a_2 \frac{\Delta x}{4} \pm 2\gamma a_1 \frac{\Delta x}{4} \pm \frac{f_1 \Delta x^2}{6}\frac{\Delta x}{4}\right],$$

$$\Delta x K_m(b y') = \beta (y_{m+1} - y_{m-1}) + \frac{\beta^2}{3}(y_{m+1} - 2 y_m + y_{m-1}) \pm \beta\gamma (y_{m+1} - y_{m-1}) \pm \frac{\beta f_1 \Delta x^3}{6}. \tag{15b}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\epsilon_l = \frac{\beta^2}{3} + \frac{3\gamma^2}{5} \mp \beta\gamma, \qquad \epsilon_r = \frac{\beta^2}{3} + \frac{3\gamma^2}{5} \pm \beta\gamma$$

sowie

$$\Delta x \bar{K}_m(F) = \Delta x K_m(F) + \frac{\beta \Delta x^2}{12}(F_{m+1} - F_{m-1}) \pm \frac{\gamma \Delta x^2}{20}(F_{m+1} - 2 F_m + F_{m-1}),$$

$$\Delta x \bar{K}_m(F) = \frac{\Delta x^2}{12}\left[F_{m-1}\left(1 - \beta \pm \frac{3\gamma}{5}\right) + F_m\left(10 \mp \frac{6\gamma}{5}\right) + F_{m+1}\left(1 + \beta \pm \frac{3\gamma}{5}\right)\right],$$

so kann die Grundgleichung für konstante Koeffizienten wie folgt geschrieben werden:

$$y_{m-1}(1 - \beta \pm \gamma + \epsilon_l) - y_m(2 \mp 10\gamma + \epsilon_l + \epsilon_r) + y_{m+1}(1 + \beta \pm \gamma + \epsilon_r) \pm \Delta x \bar{K}_m(F) = 0. \tag{16}$$

Auch in der Randbedingung «y'_0 gegeben» sind die in Gleichung (9a) vorkommenden Knotenlasten gegenüber Gleichung (13) durch Einführung einer verbesserten Knotenlastkurve zu verbessern. Wir setzen auch hier

$$y''' = -b y'' \mp c y' \mp F'(x)$$

und führen die Ableitungen y' und y'' nach den Gleichungen (10) ein:

$$y' = (y_1 - y_0)\frac{2x}{\Delta x^2} + y'_0\left(1 - \frac{2x}{\Delta x}\right),$$

$$y'' = (y_1 - y_0)\frac{2}{\Delta x^2} - y'_0 \frac{2}{\Delta x}.$$

Setzen wir noch (analog zu y')

$$F' = (F_1 - F_0)\frac{2x}{\Delta x^2} + F_0'\left(1 - \frac{2x}{\Delta x}\right),$$

so wird

$$y''' = -\frac{2\beta}{\Delta x}\left(2\frac{y_1 - y_0}{\Delta x^2} - \frac{2y_0'}{\Delta x}\right) \mp \frac{12\gamma}{\Delta x^2}\left[2\frac{y_1 - y_0}{\Delta x^2}x + y_0'\left(1 - \frac{2x}{\Delta x}\right)\right]$$
$$\mp 2\frac{F_1 - F_0}{\Delta x^2}x \mp F_0'\left(1 - \frac{2x}{\Delta x}\right)$$

oder etwas anders geordnet

$$y''' = -\frac{y_1 - y_0}{\Delta x^2}\left(\frac{4\beta}{\Delta x} \pm \frac{24\gamma}{\Delta x^2}x\right)$$
$$+\frac{y_0'}{\Delta x}\left[\frac{4\beta}{\Delta x} \mp \frac{12\gamma}{\Delta x^2}(\Delta x - 2x)\right] \mp \left[2\frac{F_1 - F_0}{\Delta x^2}x + \frac{F_0'}{\Delta x}(1 - 2x)\right].$$

Durch dreimalige Integration unter Beachtung der Integrationskonstanten finden wir die verbesserte Knotenlastkurve y bzw. y' und wir können daraus die gesuchten Knotenlasten $K_0(cy)$ und $K_0(by')$ berechnen. Wir verzichten hier auf die Wiedergabe der zwar nicht schwierigen, aber doch eher umständlichen Zwischenrechnung und begnügen uns mit dem Ergebnis. Setzen wir

$$\epsilon_0 = \frac{\beta^2}{9} + \frac{3\gamma^2}{5} \pm \frac{8\beta\gamma}{15}, \qquad \bar{\epsilon}_0 = \frac{\beta^2}{9} - \frac{\gamma^2}{5} \pm \frac{\beta\gamma}{5}$$

sowie

$$\Delta x\,\bar{K}_0(F) = \frac{\Delta x^2}{12}\left[F_0\left(5 - \frac{4\beta}{15} \mp \frac{3\gamma}{5}\right) + F_1\left(1 + \frac{4\beta}{15} \pm \frac{3\gamma}{5}\right) + F_0'\,\Delta x\left(1 + \frac{\beta}{15} \pm \frac{\gamma}{5}\right)\right],$$

so lautet die gesuchte Bestimmungsgleichung

$$\underline{-y_0\left(1 + \frac{2\beta}{3} \mp 5\gamma + \epsilon_0\right) + y_1\left(1 + \frac{2\beta}{3} \pm \gamma + \epsilon_0\right)}$$
$$\underline{-y_0'\Delta x\left(1 - \frac{\beta}{3} \mp \gamma + \bar{\epsilon}_0\right) \pm \Delta x\,\bar{K}_0(F) = 0.} \tag{17}$$

Es zeigt sich aus der Durchführung dieser Rechnung, daß es wohl kaum möglich sein dürfte, bei der Berechnung der Korrekturglieder der Gleichungen (16) und (17) gegenüber den Gleichungen (8) und (13) veränderliche Koeffizienten auf einfache und übersichtliche Weise zu berücksichtigen. Bei veränderlichen Koeffizienten b und c dürfte es deshalb angezeigt sein, diese Korrekturglieder für die Mittelwerte von b und c im Bereich von $m-1$ bis $m+1$ für die Grundgleichung bzw. im Bereich des Anfangsfeldes für die Randbedingung zu bestimmen und diese in die Gleichungen (8a) und (13a) einzusetzen. Da diese Korrekturglieder an sich klein (aber sehr wirksam) sind, wird ein solches Vorgehen keine wesentliche Einbuße an Genauigkeit zur Folge haben.

Es soll noch kurz auf die Anwendung der verbesserten Methode an einem Zahlenbeispiel hingewiesen werden. Wir wählen dafür ein von M. G. SALVADORI und M. C. BARON[3]) angegebenes Anfangswertproblem aus der Elektrotechnik,

$$y'' + 7{,}0\,(1 + 0{,}5 \sin x)\, y' + 36\, y = \cos 6\, x$$

mit den Anfangsbedingungen $y_0 = 0$, $y_0' = 0$. Wählen wir $\Delta x = 0{,}10$, so ist

$$\beta = 0{,}35\,(1 + 0{,}5 \sin x), \qquad \gamma = 36 \frac{0{,}10^2}{12} = 0{,}03.$$

Wir verzichten darauf, die Zahlenrechnung hier vorzuführen und beschränken uns darauf, in der folgenden Tabelle den Verlauf von β und von $-F(x) = \cos 6\, x$ mit den Ergebnissen y der verbesserten Gleichungen (8a) und (13a) zusammenzustellen.

x	β	$-F(x)$	y	x	β	$-F(x)$	y
0	0,350000	1,000	0	0,7	0,462739	−0,49026	−0,016874
0,1	0,367470	0,82534	0,003751	0,8	0,475538	0,08750	−0,018747
0,2	0,384767	0,36236	0,009985	0,9	0,487083	0,63469	−0,014444
0,3	0,401716	−0,22720	0,012602	1,0	0,497257	0,96017	−0,005560
0,4	0,418149	−0,73739	0,009051	1,1	0,505962	0,95024	0,004769
0,5	0,433900	−0,98999	0,000501	1,2	0,513107	0,60836	0,013022
0,6	0,448812	−0,89676	−0,009475			usw.	

Vergleichsrechnungen zeigen, daß die verbesserte Seilpolygonmethode bei gleicher Intervallgröße Δx in bezug auf die erreichte Genauigkeit anderen numerischen Methoden[4]) mindestens gleichwertig und der von SALVADORI-BARON selber angegebenen Lösung deutlich überlegen ist.

3. Weitere Verbesserungen

Die verbesserte Knotenlastkurve Gleichung (14) ist grundsätzlich erst eine verbesserte Annäherung an die genaue Knotenlastkurve. Eine weitere Verbesserung könnten wir dadurch erhalten, daß wir, ausgehend von Gleichung (14), die verbesserten Ableitungen von y' und y'' zur Bestimmung von y''' der neuen Knotenlastkurve verwenden und uns so der genauen Kurve in sukzessiver Approximation immer weiter annähern. Diese Berechnung ist an sich nicht schwierig, wird aber umständlich und wenig übersichtlich. Wir dürfen

---

[3]) M. G. SALVADORI, M. L. BARON: Numerical Methods in Engineering, Prentice Hall, 2. ed., 1961, p. 134.

[4]) S. z. B. F. STÜSSI: Zur numerischen Lösung von linearen totalen Differentialgleichungen. Festschrift für H. Beer und K. Sattler, Springer-Verlag, Wien-New York, 1965.

auf diese Weiterführung für den allgemeinen Fall der Gleichung (3) verzichten, weil die untersuchte Verbesserungsstufe schon sehr wirksam ist und weil nötigenfalls durch eine Verkleinerung der Intervallgröße Δx die gleiche Verbesserung der Genauigkeit erreicht werden kann wie durch weitere Verbesserungsstufen. Auch ist es durch Vergleichsrechnungen mit verschiedenen Intervallgrößen möglich, die erreichte Genauigkeit zu überprüfen und gegebenenfalls zu verbessern.

Dagegen dürfte es von Interesse sein, die weiteren Verbesserungen für die vereinfachte Differentialgleichung

$$y'' \pm c\,y \pm F(x) = 0 \tag{3a}$$

für den Fall $F'(x) = 0$ (gleichmäßig verteilte Belastung) zu untersuchen, weil dieser Fall in der Baustatik besondere Bedeutung besitzt.

Zunächst vereinfacht sich für $b = 0$ die Lösung dadurch, daß hier

$$\epsilon_l = \epsilon_r = \epsilon$$

wird, und die Grundgleichung läßt sich allgemein für konstante Koeffizienten c in der Form

$$\underline{y_{m-1}(1 \pm \gamma + \epsilon) - y_m(2 \mp 10\gamma + 2\epsilon) + y_{m+1}(1 \pm \gamma + \epsilon) \pm \Delta x\, K_m(F) = 0} \tag{16a}$$

anschreiben. Für das Korrekturglied ϵ finden wir durch wiederholte Berechnung den Wert

$$\epsilon = \frac{3\gamma^2}{5} \pm \frac{2\gamma^3}{7} + \frac{3\gamma^4}{25} \pm \frac{18\gamma^5}{385} + \frac{15202\gamma^6}{875875} + \cdots \tag{18}$$

oder auch

$$\epsilon = \frac{3\gamma^2}{5}\left(1 \pm \frac{10}{21}\gamma + \frac{1}{5}\gamma^2 \pm \frac{6}{77}\gamma^3 + \frac{15202}{525525}\gamma^4 + \cdots\right) \tag{18a}$$

Die Reihe konvergiert bei größeren Werten von γ nur relativ langsam, doch läßt sich die Konvergenz dadurch verbessern, daß wir den reziproken Wert des Klammerausdruckes von Gleichung (18a) einführen. Wir erhalten damit

$$\underline{\epsilon = 0{,}600\,\gamma^2 \frac{1}{1 \mp 0{,}47619\,\gamma + 0{,}02676\,\gamma^2 \pm 0{,}00457\,\gamma^3 + 0{,}00065\,\gamma^4}}. \tag{18b}$$

Die Randbedingung «y_0' gegeben» lautet für den untersuchten Sonderfall

$$\underline{-y_0(1 \mp 5\gamma + \epsilon_0) + y_1(1 \pm \gamma + \epsilon_0) - y_0'\Delta x(1 \mp \gamma - \bar{\epsilon}_0) \pm \Delta x\, K_0(F) = 0}. \tag{17a}$$

Dabei ist $\epsilon_0 = \epsilon$ und

$$\underline{\bar{\epsilon}_0 = 0{,}200\,\gamma^2 \frac{1}{1 \mp 0{,}28571\,\gamma - 0{,}00408\,\gamma^2 \mp 0{,}00032\,\gamma^3}}. \tag{18c}$$

Zur Veranschaulichung der mit diesen weiteren Verbesserungen erreichbaren Genauigkeit sei noch das Anfangswertproblem

$$y'' \pm y = 0$$

untersucht. Wir kennen dafür die genauen Lösungen; es ist nämlich für

a)	$y''+y=0$:	$y_0 = 0$,	$y_0' = 1{,}0$:	$y = \sin x$,
b)		$y_0 = 1{,}0$,	$y_0' = 0$:	$y = \cos x$,
c)	$y''-y=0$:	$y_0 = 0$,	$y_0' = 1{,}0$:	$y = \operatorname{Sinh} x$,
d)		$y_0 = 1{,}0$,	$y_0' = 0$:	$y = \operatorname{Cosh} x$,
e)		$y_0 = 1{,}0$,	$y_0' = 1{,}0$:	$y = e^x$,
f)		$y_0 = 1{,}0$,	$y_0' = -1{,}0$:	$y = e^{-x}$.

Alle diese Funktionen lassen sich somit aus der Rekursionsformel

$$y_{m+1} = \frac{2 \pm 10\gamma + 2\epsilon}{1 \pm \gamma + \epsilon} y_m - y_{m-1}$$

und der Randbedingung

$$-y_0(1 \mp 5\gamma + \epsilon_0) + y_1(1 \pm \gamma + \epsilon_0) - y_0' \Delta x (1 \mp \gamma - \bar{\epsilon}_0) = 0$$

berechnen.

Wir wählen ein sehr großes Intervall,

$$\Delta x = 1{,}20, \quad \gamma = 0{,}12.$$

Für den Fall $y''+y=0$ wird

$$\epsilon = 0{,}0091598, \quad \bar{\epsilon}_0 = 0{,}0029823,$$
$$y_{m+1} = 0{,}7247155\, y_m - y_{m-1},$$
$$y_1 = 0{,}3623578\, y_0 + 0{,}776699\, y_0' \Delta x,$$

während sich für $y''-y=0$ die Werte

$$\epsilon = 0{,}0081701, \quad \bar{\epsilon}_0 = 0{,}0027845,$$
$$y_{m+1} = 3{,}6213111\, y_m - y_{m-1},$$
$$y_1 = 1{,}810656\, y_0 + 1{,}257885\, y_0' \Delta x$$

ergeben. Die Ergebnisse der Berechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

x	$y_a = \sin x$	$y_b = \cos x$	$y_c = \mathrm{Sinh}\, x$	$y_d = \mathrm{Cosh}\, x$	$y_e = e^x$	$y_f = e^{-x}$
0	0	1,000000	0	1,000000	1,000	1,000
1,2	0,932039	0,362358	1,509462	1,810656	3,320117	0,301194
2,4	0,675463	−0,737394	5,466230	5,556947	11,023177	0,090718
3,6	−0,442520	−0,896758	18,285457	18,312778	36,598236	0,027324
4,8	−0,996165	0,087499	60,75110	60,75932	121,51042	0,008230
6,0	−0,279416	0,960170	201,71317	201,71562	403,42880	0,002479

Ein Vergleich mit den Tabellenwerten in Ingenieurhandbüchern zeigt, daß unsere verbesserten Gleichungen eine erstaunlich gute Genauigkeit besitzen. Die Bedeutung der verbesserten Seilpolygonmethode liegt selbstverständlich nicht darin, daß wir damit vorhandene Tabellenwerte mit großer Genauigkeit nachrechnen können, sondern darin, daß sie uns erlaubt, solche Probleme numerisch zutreffend zu lösen, für die keine gebrauchsfertigen Tabellenwerte oder genaue analytische Lösungen existieren.

Zusammenfassung

Die Seilpolygongleichung eignet sich deshalb gut zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, weil die zweite Ableitung y'' der gesuchten Funktion y durch Bildung von Knotenlasten in aller Strenge eliminiert, bzw. durch Funktionswerte y ausgedrückt werden kann. Durch die Einführung von Knotenlasten geht die zu lösende Differentialgleichung in ein dreigliedriges Gleichungssystem über. Ungenauigkeiten können bei grösseren Intervallen zwischen aufeinanderfolgenden Knotenpunkten dadurch entstehen, dass die Knotenlasten von y (und auch von y') mit der «Parabelformel» für y nicht genau, sondern nur angenähert durch drei aufeinanderfolgende Funktionswerte y erfaßt werden können. In der vorliegenden Untersuchung wird eine wirksame Verbesserung der Genauigkeit entwickelt.

Summary

The funicular polygon equation is suitable for the numerical solution of differential equations of the second order, because it is possible to eliminate, in a correct manner, the second differential coefficient y'' of the function, y, that is sought, by means of nodal loads respectively to express it by means of the dependent variable, y. By the introduction of nodal loads, the differential equation, for which a solution is to be found, is converted into a system of equations with three unknowns. As the nodal loads for y (and for y'), calculated with three values of y and by means of the parabola formula, are only approximate, some degree of inaccuracy becomes apparent, when the intervals between the points become considerable. The present study establishes a definite improvement in the exactness.

Résumé

L'équation du polygône funiculaire est à sa place pour la résolution numérique des équations différentielles du second ordre, parce que l'on peut éliminer de manière exacte la deuxième dérivée y'' de la fonction cherchée y au moyen des charges nodales, soit l'exprimer par la fonction y. Par l'introduction de charges nodales, on transforme l'équation différentielle à résoudre en un système d'équations à trois inconnues. Comme les charges nodales pour y (et pour y') calculées avec trois valeurs de y et à l'aide de la formule de la parabole ne sont qu'approximatives, une certaine inexactitude apparaît lorsque les intervalles entre les points deviennent grands. La présente étude développe une nette amélioration de l'exactitude.