

# Recherches sur le comportement au flambement de barres en aluminium

Autor(en): **Bernard, A. / Frey, F. / Janss, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen**

Band (Jahr): **33 (1973)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25616>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Recherches sur le comportement au flambement de barres en aluminium

*Forschungen über das Knickverhalten von Aluminiumstützen*

*Research on the Behaviour by Buckling of Aluminium Columns*

A. BERNARD

Assistant à l'Université de Liège

J. JANSSE

Chef de Travaux au C.R.I.F.

F. FREY

Premier Assistant à l'Université de Liège

CH. MASSONNET

Professeur à l'Université de Liège

## 1. Introduction et principes fondamentaux

Le Groupe de Travail «Méthodes de Calcul des Structures en Aluminium» créé par le C.I.D.A. (Centre International de Développement de l'Aluminium) en 1966, a reconnu, dès sa formation, les écarts considérables existant entre les courbes de flambement adoptées dans les diverses normes nationales et la nécessité de mettre sur pied des méthodes de calcul au flambement des barres comprimées en aluminium, qui puissent être acceptées sur le plan européen.

Dès juin 1967, le Professeur MASSONNET a présenté au Groupe de Travail un plan de recherches en vue d'atteindre l'objectif ci-dessus. Ce plan se basait sur certains principes généraux calqués sur ceux adoptés, dans le domaine de l'acier, par la Commission VIII (Instabilité) de la Convention Européenne de la Construction Métallique (CECM).

L'option fondamentale prise par la Commission VIII, suite aux vigoureux plaidoyers de J. DUTHEIL, a été d'abandonner le concept eulérien de barre idéalement parfaite, et de considérer de façon réaliste la force portante des barres industrielles, affectée de manière aléatoire par leurs imperfections géométriques et structurales.

L'avantage essentiel de cette option est de fournir les contraintes admissibles en divisant les contraintes de ruine par un *coefficient de sécurité constant*, tandis que, dans les normes en vigueur, on est obligé, pour assurer une sécurité homogène des barres réelles par rapport aux théories d'EULER et d'ENGESSER-SHANLEY, de faire varier le coefficient de sécurité avec l'élanement d'une manière critiquable.

Les principes fondamentaux retenus par la Commission VIII de la CECM (1) découlent directement de l'option fondamentale ci-dessus.

On peut les schématiser comme suit:

1. Étude expérimentale du comportement réel des barres industrielles, obtenue par des essais de flambement de familles suffisamment grandes de barres nominale-ment identiques, avec centrage purement géométrique des sections terminales; exploitation statistique des résultats et détermination des limites inférieures ( $\sigma^{(m)} - k s$ ) des contraintes d'affaissement ( $\sigma^{(m)}$  = contrainte moyenne;  $s$  = écart quadratique moyen;  $k$  = coefficient choisi de manière à assurer, dans une distribution statistique normale de LAPLACE-GAUSS, une probabilité de  $x$  % pour la contrainte d'affaissement de dépasser la valeur  $\sigma^{(m)} - k s$ .
2. Détermination des imperfections géométriques et structurales (contraintes résiduelles) des barres et détermination, par simulation sur ordinateur, des courbes de flambement des barres imparfaites.
3. Confrontation des résultats théoriques (point 2) et expérimentaux (point 1).

L'adoption de ces principes dans la nouvelle recherche était d'ailleurs indispensable pour obtenir l'acceptation des résultats du Groupe de Travail CIDA par la Convention Européenne de la Construction Métallique. A la suite de démarches entre le CIDA et la CECM, cette dernière créait d'ailleurs, dans le courant de 1967, une Sous-Commission 1.1. «Alliages Légers», dont la présidence est assurée par le Professeur MAZZOLANI.

Au cours des réunions suivantes du Groupe de Travail, le programme est progressivement mis au point. Le Professeur MASSONNET recommande l'usage généralisé de courbes de flambement non dimensionnelles, qui facilitent considérablement les comparaisons, et il propose de répartir, pour l'étude, les alliages d'aluminium en les trois catégories proposées par SUTTER, à savoir état recuit, état trempé, état trempé-revenu, correspondant respectivement aux valeurs de  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$  comprises dans les intervalles suivants: 2 - 1,06 - 1,045 - 1,03.

Des essais de compression préliminaires effectués aux laboratoires de l'Université de Liège au début 1969 sur des tronçons courts de profilés divers montrent, en particulier, la bonne représentation des courbes expérimentales contraintes-déformations ( $\sigma, \epsilon$ ) par la formule de RAMBERG-OSGOOD, ainsi que la similitude entre les courbes non dimensionnelles de flambement relatives à deux métaux aussi différents que l'acier doux et l'alliage AlZnMg. A la lumière de ces résultats, le Groupe de Travail considère qu'il faut rassembler des informations supplémentaires sur:

1. La forme du diagramme ( $\sigma, \epsilon$ ) des alliages d'aluminium pour structures.
2. La répartition géographique de la limite élastique en les divers points d'une section droite (la littérature technique est muette sur ce point).

3. La grandeur et la répartition des contraintes résiduelles.
4. La grandeur des imperfections géométriques.

Le plan détaillé des recherches a été présenté par le Professeur MASSONNET à la neuvième réunion du Groupe de Travail (Londres, 23 octobre 1969). Il fait intervenir des profilés en aluminium appartenant à six pays différents (Belgique – France – Italie – Norvège – Suède – Suisse).

Le détail en est donné au paragraphe 2; ce plan a été approuvé définitivement le 26 juin 1970 à Zurich par le Groupe de Travail CIDA, qui en confia l'exécution au Professeur CH. MASSONNET et à ses collaborateurs et en assura le financement.

## 2. Plan général des recherches

### 2.1. Choix des profils

Les profils en double-té et les tubes, très employés en pratique comme barres comprimées, sont retenus pour l'étude. Ils seront obtenus par filage à la presse (extrusion).

### 2.2. Classes d'alliages

Le tableau N° 1 ci-après donne les caractéristiques des alliages livrés par chacun des pays participants ainsi que les types de profils fournis.

### 2.3. Mesure des contraintes résiduelles

Elle sera exécutée par la technique du découpage d'un tronçon, tiré d'une barre appartenant à chacune des livraisons.

### 2.4. Détermination de la distribution des limites élastiques dans la section droite

Les valeurs des limites élastiques seront obtenues par des essais de traction sur des éprouvettes usinées à partir des languettes provenant du découpage des profils pour mesure de leurs contraintes résiduelles (point 2.3 ci-dessus).

### 2.5. Essais de compression axiale sur tronçons courts

Ces essais ont pour but de déterminer la courbe ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ) globale en compression, applicable au profil entier.

Les tronçons auront comme longueur  $l = 15i$ , où  $i$  est le rayon de giration minimum, et leurs extrémités seront fraisées perpendiculairement à l'axe longitudinal du profil.

Tableau N° 1

Pays participant	Belgique	France	Italie	Norvège	Suède	Suisse (2 livraisons)	Suisse
Type de profil et dimensions de la section (mm)	Tube 95 × 4	I 140 × 140 âme 10 mm sem. 10 mm	Tube 80 × 4	Tube 90 × 4,5	I 100 × 100 âme 7 mm sem. 10 mm	I 216 × 102 âme 8 mm sem. 11 mm	Tube 90 × 5
Désignation ISO de l'alliage	Al-Zn 5 Mg 1	Al-Mg 4,5	Al-Mg 2,5	Al-Si 1 Mg	Al-Mg Si	Al-Zn 5 Mg 1	Al-Si 1 Mg
Nombre de tronçons courts	12	12	12	10	12	2 × 12	12
Nombre de barres pour essais de flambement	5	9 + 1	3	8 + 4	—	3 × 8 + 4	8
Nombre et longueur des échantillons	3 × 6000 mm	6 × 6000 mm	10 × 1000 mm	4 × 6000 mm	16 × 450 mm 1 × 600 mm	12 × 300 mm 8 × 645 mm 8 × 1070 mm 8 × 1360 mm 8 × 1000 mm 6 × 300 mm	12 × 300 mm 1 × 600 mm 8 × 1520 mm

### 2.6. Essais de flambement

On essaiera trois échantillons statistiques de huit éprouvettes chacun, en accord avec le premier principe énoncé dans l'introduction.

L'élancement sera choisi dans la zone où la dispersion est reconnue être la plus grande, parce que l'influence des imperfections géométriques et structurales y est maximum.

Cette zone est définie par la relation

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1$$

où  $\lambda = \frac{l_{fl}}{i}$  est l'élancement de la barre;

$\lambda_E \equiv \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{0,2}}}$  est l'élancement d'Euler, c'est-à-dire l'élancement pour lequel la contrainte critique d'Euler d'une barre parfaite, flambant en régime élastique, est égale à la limite d'élasticité à 0,2% :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_{0,2}$$

$\bar{\lambda}$  est appelé l'élancement réduit.

Les alliages et types de profil retenus pour les essais de flambement sont indiqués au tableau N° 1.

Les extrémités des éprouvettes destinées au flambement seront fraisées perpendiculairement à l'axe longitudinal du profil.

Les déformations initiales de toutes les éprouvettes seront mesurées avec précision.

### 2.7. Etablissement de courbes de flambement par simulation sur ordinateur

Les courbes théoriques seront obtenues en simulant au mieux les caractéristiques des barres, fournies par les mesures des points 2.3, 2.4, et 2.5 ci-dessus.

De manière plus précise:

a) S'il appert que la flèche relative  $f/l$  de toutes les barres d'essai est inférieure à 0,001, on adoptera comme imperfection géométrique de l'axe de la barre

$$f/l = 0,001.$$

b) S'il appert que la dispersion, dans la section droite, de la limite élastique  $\sigma_{0,2}$  est suffisamment faible, on supposera dans les calculs que le matériau composant la barre est homogène. Ce matériau est défini par la courbe moyenne et la courbe caractéristique inférieure de la famille de courbes  $(\sigma, \epsilon)$  relevées expérimentalement sur les tronçons courts.

On comparera les courbes de flambement théoriques

$$\sigma_{ruine} = \frac{P_{ruine}}{A} = f(\lambda)$$

avec:

- a) les résultats des essais du point 2.6 ci-dessus;
- b) les résultats d'autres récents effectués en respectant les principes généraux énoncés dans l'introduction.

### 3. Etude de la loi de Ramberg-Osgood et de la classification de Sutter

On montre dans la présente étude que les diagrammes contraintes-déformations de tous les alliages d'aluminium étudiés sont représentables avec une grande précision par la loi

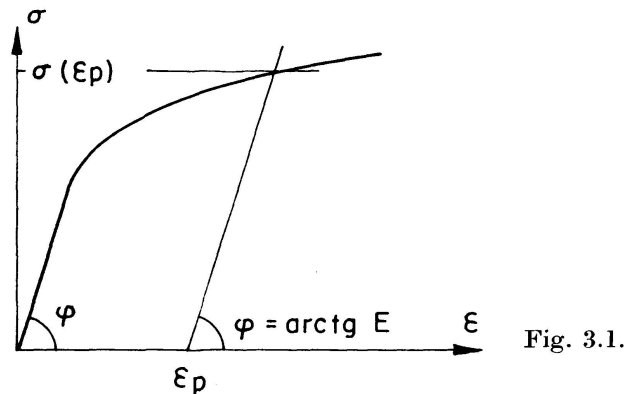
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n, \quad (3.1)$$

due à RAMBERG et OSGOOD (2).

Cette loi est complètement définie par les trois paramètres  $E$ ,  $B$ ,  $n$  et correspond à une croissance monotone de  $\epsilon$  en fonction de  $\sigma$ .

Pour  $\sigma \ll B$  et  $n > 1$  la loi (3.1) se réduit à  $\epsilon = \sigma/E$ .  $E$  est donc le module d'élasticité longitudinale ou module de Young.

Pour faire ressortir la signification des paramètres  $B$  et  $n$ , cherchons la « limite d'élasticité à  $\epsilon_p$  »,  $\sigma(\epsilon_p)$ , c'est-à-dire la contrainte pour laquelle, après déchargement, il subsiste une dilatation permanente  $\epsilon_p$ .



La valeur de  $\sigma(\epsilon_p)$  est, comme le montre la figure 3.1, l'abscisse de l'intersection de la loi de RAMBERG-OSGOOD

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n$$

avec la droite d'équation

$$\epsilon = \epsilon_p + \frac{\sigma}{E}.$$

La résolution de ce système de deux équations donne:

$$\sigma(\epsilon_p) = B \sqrt[n]{\epsilon_p}. \quad (3.2)$$

En particulier, la limite d'élasticité à 0,002 est donnée par

$$\sigma_{0,2} = B \sqrt[n]{0,002}. \quad (3.3)$$

Tirant la valeur de  $B$  de cette formule pour l'introduire dans (3.1), on met la loi de RAMBERG-OSGOOD sous la forme

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n, \quad (3.4)$$

qui est particulièrement commode pour les alliages d'aluminium. La quantité  $\sigma_{0,2}$  peut donc se substituer à  $B$  comme paramètre de la loi.

Il est bon de rappeler que la limite  $\sigma_{0,2}$  n'est qu'une « limite » conventionnelle, sans véritable signification physique.

Le rapport  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$ , utilisé par SUTTER (3) pour classer les différents alliages d'aluminium, vaut d'après (3.3):

$$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}} = \sqrt[n]{2}. \quad (3.5)$$

Le caractère plus ou moins anguleux du « coude » de la loi de RAMBERG-OSGOOD est caractérisé aussi bien par l'exposant  $n$  que par le rapport  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$  de SUTTER. L'exposant  $n$  régit donc l'écroutissage du matériau vierge, nous le désignerons dans la suite par « indice d'écroutissage ».

Notons en passant qu'il est difficile d'obtenir une valeur précise du paramètre  $n$  par ajustement numérique de la formule (3.1) sur une loi expérimentale définie par des couples discrets de valeurs  $(\sigma_i, \epsilon_i)$ . En effet, ces couples représentent mal le diagramme dans sa zone de plus forte courbure.

Pour  $n$  tendant vers l'infini, le rapport  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$  tend vers 1, et l'on retrouve la loi caractéristique d'un matériau à palier tel que l'acier doux

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{B} \right)^\infty,$$

qui donne

pour $\sigma < B$	$\epsilon = \sigma/E,$
pour $\sigma = B$	$\epsilon$ indéterminé (palier) $\geq B/E,$
pour $\sigma > B$	$\epsilon$ infini.

De manière générale, le paramètre  $B$  définit donc la « hauteur du palier » de la loi de RAMBERG-OSGOOD.

SUTTER a proposé (3) une classification des alliages d'aluminium en trois catégories, à savoir:

catégorie I: état recuit:	$\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1} \geq 1,06,$
catégorie II: état trempé:	$1,06 > \sigma_{0,2}/\sigma_{0,1} \geq 1,045,$
catégorie III: état trempé-revenu:	$1,045 > \sigma_{0,2}/\sigma_{0,1} \geq 1,03.$

Si l'on adopte la loi de RAMBERG-OSGOOD pour représenter les alliages



d'aluminium, ceci revient, en vertu de la formule (3.5), à classer ces alliages d'après la valeur de l'exposant  $n$ .

De manière précise, la classification est donnée au tableau n° 2 suivant:

Tableau N° 2

Catégorie	Etat	$S = \sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$	$n$
I	recuit	$S \geq 1,06$	$n \leq 11,89$
II	trempe	$1,06 > S \geq 1,045$	$11,89 \leq n < 15,75$
III	trempe-revenu	$1,045 > S \geq 1,03$	$15,75 \leq n < 23,45$

#### 4. Mesures de définition des alliages et des barres

##### 4.1. Analyse chimique des alliages

L'analyse des échantillons a été faite par voies chimique et spectrographique, par les soins de la Société Industrielle de l'Aluminium (SIDAL) à Duffel (Belgique). Les résultats sont les suivants:

Tableau N° 3. Résultats des analyses chimiques

Provenance des échantillons		Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Ti	Zn
France	I	0,16	0,35	0,04	0,43	4,08	0,15	0,03	—
Suisse	I	0,18	0,28	—	0,39	1,16	0,21	0,01	4,18
Belgique	O	0,10	0,26	—	0,18	1,07	0,13	0,01	4,73
Italie	O	0,16	0,28	0,02	0,30	2,49	0,02	0,02	—
Norvège	O	1,07	0,18	0,02	0,51	0,88	—	0,01	—
Suisse	O	1,17	0,25	0,02	0,38	0,90	—	0,01	—
Suède	I	0,93	0,31	0,04	0,70	0,69	0,01	0,02	—

##### 4.2. Mesures préliminaires

Les dimensions des différentes sections transversales ont été mesurées au pied à coulisse au centième de mm.

La longueur des barres a été mesurée à la précision du mm et leur poids à la précision du gramme.

La déformée initiale des barres en double-té pour essais de flambement a été relevée par un dispositif spécial décrit en (4). Ce dispositif ne pouvant être utilisé pour les éprouvettes tubulaires, les déformées initiales de ces dernières ont été obtenues en posant les éprouvettes sur un marbre et en relevant, à l'aide de calibres, les déformations de quatre génératrices situées sur deux diamètres perpendiculaires.

L'ensemble de ces mesures de géométrie et de poids n'a pu être repris dans ce mémoire mais peut être obtenu sur demande à l'Université de Liège.

Bornons-nous à signaler ici que:

1. La flèche relative  $f/l$  a été trouvée inférieure à 1/1000 pour toutes les éprouvettes.
2. L'épaisseur des tubes a été trouvée suffisamment variable le long du pourtour pour entraîner une excentricité non négligeable de la charge. En effet, la barre est centrée dans la machine d'essais sur la circonférence extérieure de la section.

### 4.3. Essais de traction de définition

Les dimensions des éprouvettes sont conformes à la Norme Belge NBN 117.01. Les résultats des essais sont donnés dans le tableau 4 ci-après.

Tableau N° 4. Résultats des essais de traction de définition

Provenance et type de profilé	Nombre d'essais	Limite d'élasticité $\sigma_e$ à 0,2%; valeur moyenne en t/cm <sup>2</sup>	Contrainte de rupture $\sigma_r$ ; valeur moyenne en t/cm <sup>2</sup>	Allongement de rupture en pour cent sur $5,65\sqrt{A}$
France I	Semelle 8	1,849	3,063	11,7
	Ame 4	1,739	2,929	11,7
Suisse I (1re livraison)	Semelle 2	3,278	3,850	14,5
	Ame 1	3,112	3,695	14,1
Suède I	Semelle 2	2,977	3,016	9,3
	Ame 1	2,751	2,998	9,2
Italie O	1	1,960	2,280	11,1
Norvège O	4	2,412	3,018	26,4
Belgique O	3	3,118	3,486	15,8
Suisse O	1	2,953	3,277	15,4

### 5. Mesure des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont supposées purement longitudinales et uniformément réparties sur l'épaisseur des parois composant le profil. Dans ces conditions, on peut les déterminer en les libérant par découpage du profil en languettes longitudinales étroites.

Le processus détaillé des mesures est le suivant (5): sur des tronçons de profilé de 60 cm, on matérialise, par des empreintes sphériques faites par une bille d'acier de 0,2 cm, sur les deux faces des parois, une série de bases de mesure longitudinales de 10 cm de long. Ces bases sont mesurées au micron près par comparaison avec une base de référence en invar. Ensuite, on découpe

le profil en languettes longitudinales de 13 cm de long contenant chacune une base de mesure et on relève à nouveau la longueur de ces bases. Par différence, on déduit les dilatations  $\epsilon$  et, par la formule  $\sigma_{rés} = E \epsilon$ , les contraintes résiduelles  $\sigma_{rés}$  aux endroits des différentes bases de mesure.

La figure 5.1 donne les contraintes résiduelles relevées sur les trois profils en double-té et la figure 5.2 celles relevées sur les quatre profils tubulaires. Les

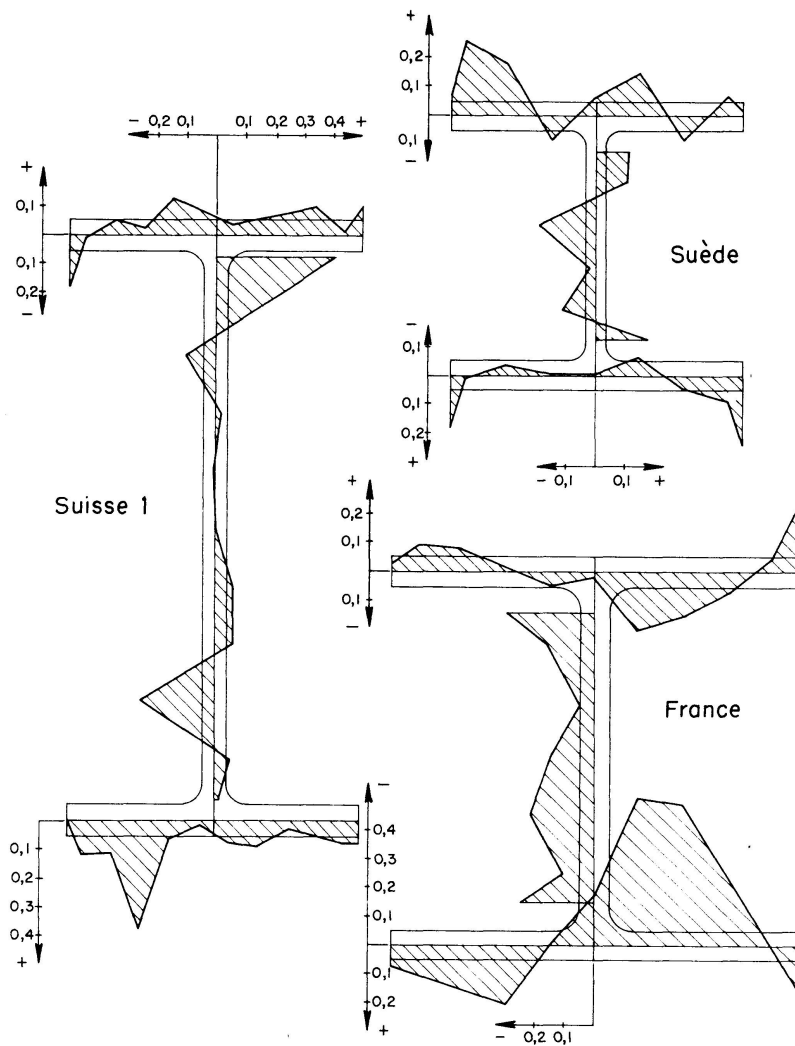


Fig. 5.1. Contraintes résiduelles ( $t/cm^2$ ). Relevés expérimentaux non corrigés.

contraintes données sont les valeurs brutes provenant des mesures exposées ci-dessus. Aucune tentative n'a été faite pour corriger les diagrammes de manière à respecter la condition d'équilibre évidente

$$\iint_A \sigma_{rés} dA = 0.$$

On peut estimer que la précision des mesures est de  $0,05 t/cm^2$ . Les contraintes résiduelles mesurées étant généralement inférieures à  $0,3 t/cm^2$ , la précision relative est faible.

Ces deux remarques permettent d'interpréter des diagrammes complète-

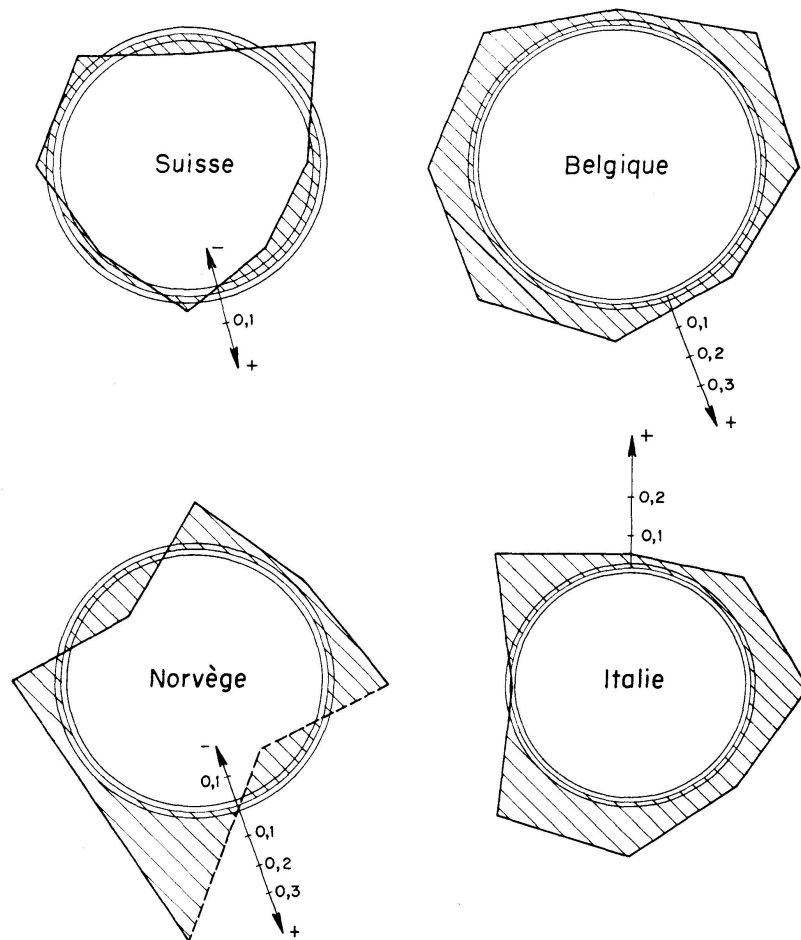


Fig. 5.2. Contraintes résiduelles ( $t/cm^2$ ). Relevés expérimentaux non corrigés.

ment en déséquilibre (Fig. 5.2) comme relevés de valeurs en-dessous des possibilités de mesure. Cette anomalie peut également être imputée partiellement au fait que les mesures ne se font que sur les faces du profilé.

Des figures 5.1 et 5.2 on peut conclure que:

1. Les contraintes résiduelles dans les profilés en aluminium filés à la presse sont faibles et leur influence par le processus de flambement est par conséquent pratiquement négligeable; ceci a été vérifié dans un cas particulier par des calculs de simulation sur ordinateur.
2. Des répartitions mesurées, il n'est pas possible de dégager une loi gouvernant la distribution de ces contraintes dans le profil.

## 6. Variation de la limite élastique dans la section droite

On a effectué des essais de traction sur des éprouvettes tirées des languettes obtenues après mesure des contraintes résiduelles.

La limite élastique  $\sigma_{0,2}$  étant peu variable pour les diverses languettes venant d'un même profil, il n'y a aucun intérêt à reproduire les diagrammes donnant la distribution géographique de  $\sigma_{0,2}$  dans les divers profils étudiés. C'est pour-

quoi on se borne à donner au tableau N° 5 ci-après les valeurs moyennes des limites élastiques  $\sigma_{0,2}$  et des contraintes de rupture, avec leur dispersion et l'écart relatif maximum par rapport à la moyenne.

Tableau N° 5. Résultats des essais complémentaires de traction

Provenance et type de profilé	Nombre d'essais	Limite d'élasticité $\sigma_{0,2}$ (t/cm <sup>2</sup> )			Contrainte de rupture (t/cm <sup>2</sup> )		
		moy.	s	e (%)	moy.	s	e (%)
Belgique O	7	3,10	0,076	± 3,1	3,66	0,241	+ 14,4
Italie O	8	1,70	0,019	- 2,1	1,98	0,034	+ 3,7
Norvège O	8	2,48	0,311	+ 18,4	3,12	0,421	+ 20,5
Suisse O	8	2,74	0,101	+ 6,5	3,11	0,138	- 5,9
France I	Semelle: 8	1,70	0,080	+ 5,4	2,87	0,086	- 4,5
	Ame: 5	1,61	(0,032)	- 3,2	2,81	(0,032)	+ 1,8
Suède I	Semelle: 14	2,68	0,052	- 5,8	2,93	0,054	- 5,2
	Ame: 3	2,69	(0,039)	- 1,6	2,89	(0,059)	- 2,3
Suisse I (Ire livraison)	Semelle: 10	3,07	0,128	+ 7,0	3,71	0,136	- 6,9
	Ame: 6	2,98	0,016	± 0,7	3,68	0,020	+ 1,0

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma^{(m)})^2}{N-1}} = \text{écart quadratique moyen.}$$

$\sigma^{(m)}$  = contrainte moyenne,

e = écart relatif maximum par rapport à la moyenne.

## 7. Essais de compression sur tronçons courts

### 7.1. Généralités

Afin d'assurer un essai de compression aussi correct que possible, les deux faces terminales des tronçons courts sont fraisées perpendiculairement à l'axe de ces tronçons. La longueur des tronçons courts ( $l/i_y = 15$ ) est prise assez petite pour écarter tout phénomène d'instabilité prématuré, mais assez grande pour permettre des mesures précises et conserver dans le tronçon l'essentiel des contraintes résiduelles affectant la base originale. L'aire  $A$  de la section droite de chaque profil est obtenue par pesée en tenant compte de la masse volumique de l'alliage, déterminée au picnomètre.

### 7.2. Descriptions des essais

Les tronçons courts ont été essayés sur une machine Tinius-Olsen de 30 t à dynamomètre muni de jauges de contrainte, et sur une machine AMSLER

de 150 tonnes (régimes 40, 100 et 150 tonnes) munie du dynamomètre à pendule Amsler.

Les appareils de mesure utilisés pour mesurer les dilatations  $\epsilon$  ont été

- a) des déformètres mécaniques à base de 25 cm et comparateur précis au micron;
- b) des jauges de contrainte à variation de résistance électrique.

Dans tous les essais, la vitesse de mise en charge a été maintenue constante et égale à

environ 0,1 t/cm<sup>2</sup>/minute sur la machine Tinius-Olsen;  
0,1 à 0,2 t/cm<sup>2</sup>/minute sur la machine Amsler.

Dans les essais exécutés avec déformètres mécaniques, ces derniers étaient fixés sur les profils à l'aide d'un cadre métallique comme indiqué sur la figure 7.1. Le diagramme  $(P, \delta)$  était relevé point par point par lecture des quatre comparateurs.

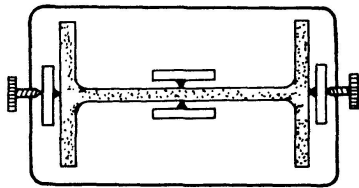


Fig. 7.1.

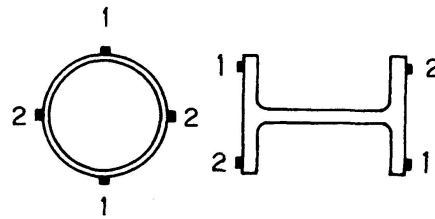


Fig. 7.2.

Dans les essais exécutés avec jauges de contrainte, on a enregistré le diagramme  $(P, \delta)$  de manière continue à l'aide de deux coordinatographes  $XY$ . Chaque coordinatographe donnait la moyenne des mesures des deux jauges 1-1 ou 2-2 placés symétriquement par rapport au centre de symétrie du tronçon court (Fig. 7.2).

### 7.3. Ajustement d'une loi de Ramberg-Osgood sur une loi $(\sigma, \epsilon)$ expérimentale

Toutes les données expérimentales, après avoir été contrôlées à la main, ont été traitées sur ordinateur. L'ajustement de la loi de RAMBERG-OSGOOD

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n, \quad (3.1)$$

$$= \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^n \quad (3.4)$$

à une série de points expérimentaux a été réalisée sur ordinateur par la méthode des moindres carrés appliquée aux écarts relatifs en contrainte, c'est-à-dire qu'on a cherché le minimum de l'expression

$$F(E, B, n) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\sigma_i - \sigma(\epsilon_i)}{\sigma_i} \right]^2,$$

avec:  $E, B, n$ : paramètres de la loi de RAMBERG-OSGOOD (inconnues du problème);

$N$ : nombre de points expérimentaux  $(\sigma_i, \epsilon_i)$  du diagramme;

$(\sigma_i, \epsilon_i)$ :  $i$ ème point du diagramme expérimental;

$\sigma(\epsilon_i)$ : contrainte correspondant à la déformation  $\epsilon_i$  par la loi de RAMBERG-OSGOOD.

Rappelons qu'un tel ajustement numérique donne une faible précision sur la valeur de  $n$ , parce que les couples discrets de valeurs  $(\sigma_i, \epsilon_i)$  représentent mal le diagramme dans sa zone de plus forte courbure. La précision sur la valeur de  $E$  est beaucoup plus élevée du fait de l'ajustement sur les écarts relatifs. La concordance entre les valeurs calculées de  $E$  et de  $\sigma_{0,2}$  et leur détermination graphique a été, dans tous les cas, parfaite à l'échelle du graphique.

L'écart relatif maximum en contrainte entre point expérimental et point ajusté a été trouvé de l'ordre du pour cent. On peut en conclure que la loi de Ramberg-Osgood représente de façon excellente la loi contraintes-déformations de tous les alliages étudiés dans la présente recherche, puisque l'erreur commise par l'ajustement est de l'ordre de grandeur de l'erreur expérimentale sur  $\sigma$ .

Notons encore que, la loi de RAMBERG-OSGOOD ne pouvant être écrite sous la forme  $\sigma = f(\epsilon)$ , on a dû rechercher les valeurs  $\sigma(\epsilon_i)$  sur ordinateur par un algorithme approprié.

#### 7.4. Ajustement de trois lois de Ramberg-Osgood sur le faisceau de courbes $(\sigma, \epsilon)$ expérimentales fournies par un type de profil

Pour chaque type de profil, on a exécuté 12 essais de compression sur tronçons courts. On s'est ainsi trouvé devant un faisceau de courbes  $(\sigma, \epsilon)$  présentant une certaine dispersion. On a alors décidé d'ajuster sur ce faisceau, non pas une, mais bien trois lois de RAMBERG-OSGOOD, l'une s'ajustant à la loi contraintes-dilatations moyenne (indice  $m$ ), et les deux autres aux limites de confiance supérieure et inférieure à 97,5% (indices  $s$  et  $i$ ) de la série de relevés.

Le calcul des moyennes  $\sigma^{(m)}(\epsilon)$  et dispersions  $s(\epsilon)$  a été fait à déformation constante. Pour les diagrammes continus relevés à l'aide de jauges de contrainte, ceci ne pose aucun problème.

Pour les diagrammes relevés à l'aide de déformètres mécaniques et obtenus point par point, il a d'abord fallu ajuster à chaque relevé expérimental une courbe de RAMBERG-OSGOOD, afin de déterminer les contraintes  $\sigma_i(\epsilon)$  à déformation  $\epsilon$  constante.

L'hypothèse de la normalité des populations  $\sigma_i(\epsilon)$  a été testée avec succès à plusieurs reprises en appliquant la théorie de la droite de HENRY (6). Les limites de confiance sont donc données par

$$\sigma^{(s)}(\epsilon) = \sigma^{(m)}(\epsilon) + k s(\epsilon),$$

$$\sigma^{(i)}(\epsilon) = \sigma^{(m)}(\epsilon) - k s(\epsilon),$$

où le facteur  $k$  dépend de la limite de confiance choisie (97,5%) et de la grandeur de l'échantillon  $\sigma_i(\epsilon)$  selon la loi de STUDENT-FISHER de distribution des petits échantillons issus d'une population normale (7).

### 7.5. Résultats

On donne dans le tableau N° 6 ci-dessous, pour chaque série d'essais, les caractéristiques des tronçons courts, la machine d'essais ainsi que le type d'appareil de mesure utilisé, les paramètres des lois de RAMBERG-OSGOOD ajustés à la moyenne et aux deux limites de confiance à 97,5%. Sur les figures 7.3 et 7.4 on donne les courbes  $\sigma^{(m)}$ ,  $\sigma^{(s)}$ ,  $\sigma^{(i)}$  de RAMBERG-OSGOOD pour les huit alliages étudiés. Les résultats norvégiens ont été éliminés, parce que les tubes présentaient une forte variation de l'épaisseur de la paroi, qui les met hors tolérances.

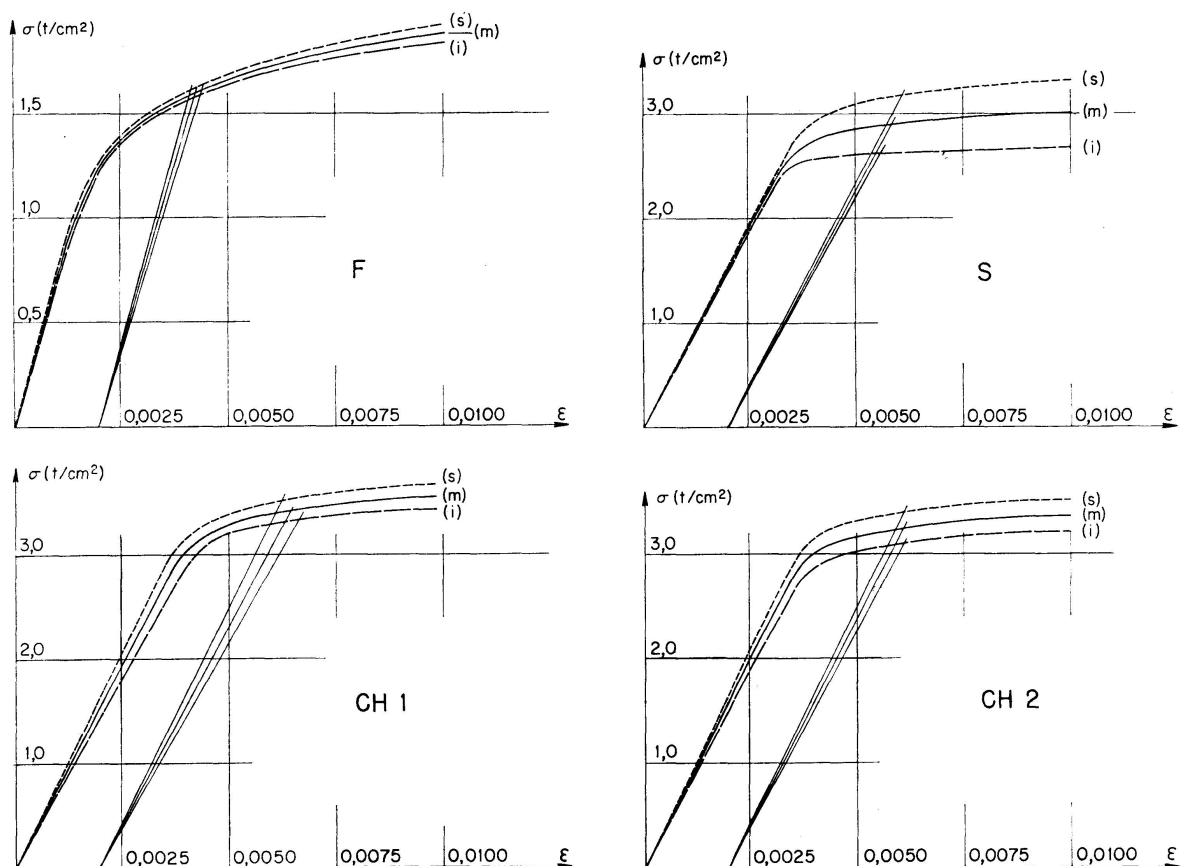


Fig. 7.3. Lois contraintes - dilatations en compression globale. Profils en double té.



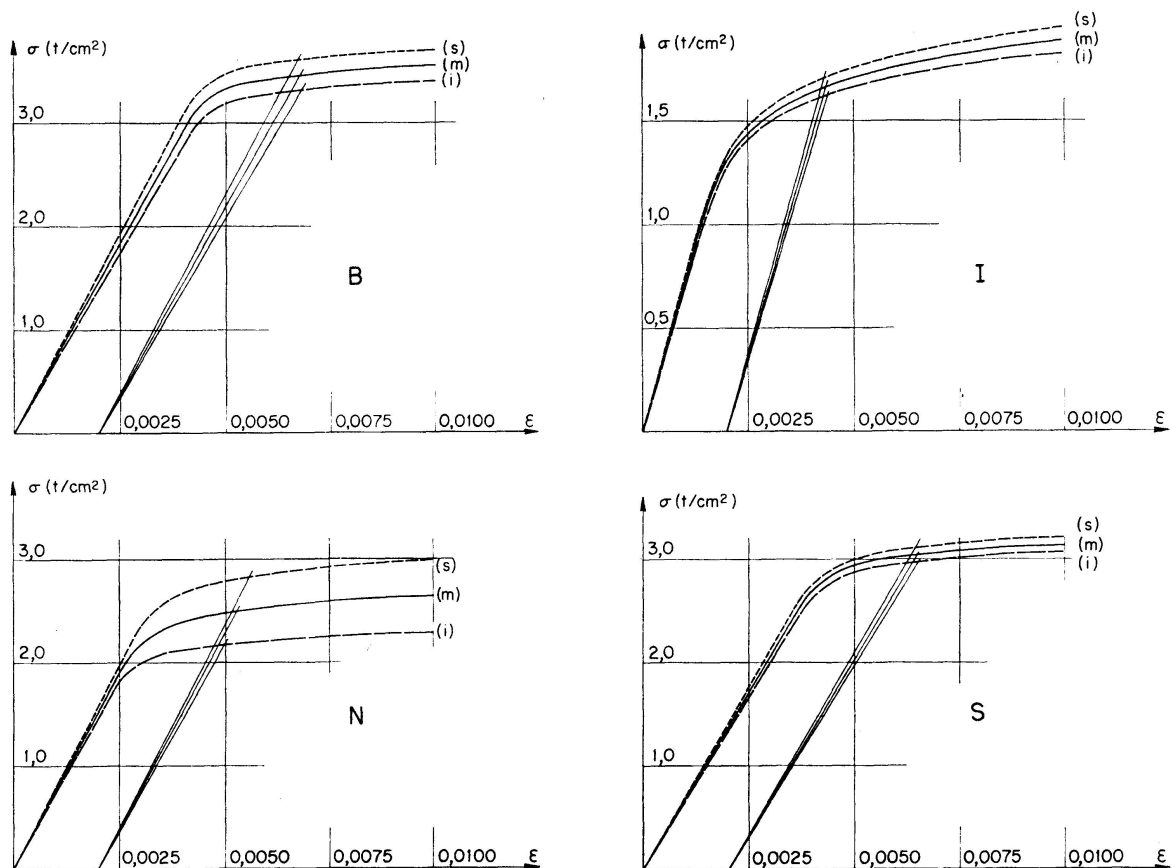


Fig. 7.4. Lois contraintes - dilatations en compression globale. Profils tubulaires.

Toutes les séries d'essais ont comporté 12 tronçons, sauf la série norvégienne (rejetée) qui n'en comportait que 10.

### 7.6. Discussion des résultats

Une première remarque à faire est que la classification de SUTTER suppose qu'il n'existe pas d'alliage d'aluminium ayant un rapport  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1} < 1,03$  ( $n > 23,45$ ), ce qui est en désaccord avec les essais ci-dessus. L'alliage belge, par exemple, est caractérisé par un  $n$  valant 35,78. Il y a donc lieu d'ajouter une quatrième catégorie pour  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1} < 1,03$  ( $n > 23,45$ ).

Ensuite, vu la sensibilité relativement faible de l'ajustement numérique d'une loi de RAMBERG-OSGOOD au paramètre  $n$ , on a élaboré un programme d'ajustement qui, à un relevé expérimental, ajuste une loi de RAMBERG-OSGOOD avec  $n$  fixé a priori. De ce fait, il n'y a plus d'itération sur  $n$  et le temps ordinateur par ajustement devient nettement moindre.

Comme valeurs fixées a priori de l'exposant  $n$  on a choisi celles qui correspondent aux valeurs centrales du rapport  $\sigma_{0,2}/\sigma_{0,1}$  de la classification de SUTTER.

Le programme choisit entre les quatre valeurs de  $n$  celle qui donne l'ajustement avec l'écart quadratique moyen relatif en contrainte minimum et range ainsi chaque alliage dans une des quatre catégories proposées.

Tableau N° 6. Résultats des essais sur tronçons courts

Pays; alliage; type de profil (mm)	Masse volumique (kg/dm <sup>3</sup> ); haut. (cm); contrainte moyenne de rupture (t/cm <sup>2</sup> )	Machine d'essais; appareils de mesure	$\sigma_{0,2}^{(s)} - \sigma_{0,2}^{(m)} - \sigma_{0,2}^{(t)}$ (t/cm <sup>2</sup> )	$E^{(s)} - E^{(m)} - E^{(t)}$ (t/cm <sup>2</sup> )	$B^{(s)} - B^{(m)} - B^{(t)}$ (t/cm <sup>2</sup> )	$n^{(s)} - n^{(m)} - n^{(t)}$
Belgique Al-Zn 5 Mg 1 O 95 x 4	2,784 33 3,605	Tinius Olsen 30 t; Jauges de contrainte	3,324 3,470 3,614	697,3 735,7 773,9	3,915 4,128 4,356	37,98 35,78 33,27
France Al-Mg 4,5 I 140 x 140 x 10 x 10	2,670 60 2,429	Amsler 150 t Déformètres	1,591 1,604 1,618	676,6 717,1 759,3	3,218 3,489 3,757	8,82 8,00 7,38
Italie Al-Mg 2,5 O 80 x 4	2,678 45 2,141	Tinius Olsen 30 t Jaug. contr.	1,618 1,660 1,700	681,5 706,2 731,7	2,857 3,045 3,243	10,93 10,24 9,62
Norvège Al-Si 1 Mg O 90 x 4,5	2,700 45 2,789	Amsler 150 t Déformètres	2,182 2,499 2,830	729,2 761,0 793,4	2,833 3,412 3,860	23,79 19,94 20,02
Suède Al-MgSi I 100 x 100 x 10 x 7	2,724 45 3,068	Tinius Olsen 30 t Jaug. contr.	2,605 2,878 3,160	728,6 751,4 773,4	2,905 3,547 4,105	57,03 29,70 23,77
Suisse 1 Al-Zn 5 Mg 1 I 215,9 x 101,6 x 11,11 x 7,94	2,785 30 et 45 3,471	Amsler 150 t Déformètres	3,331 3,420 3,505	719,8 773,5 828,0	4,030 4,424 4,695	32,59 24,15 21,26
Suisse 2 Al-Zn 5 Mg 1 I 215,9 x 101,6 x 11,11 x 7,94	2,785 30 3,337	Amsler 150 t Déformètres	3,098 3,254 3,411	759,9 797,8 835,8	3,850 4,112 4,410	28,60 26,56 24,18
Suisse Al-Si 1 Mg O 90 x 5	2,700 30 3,456	Tinius Olsen 30 t Jaug. contr.	2,985 3,049 3,113	664,6 686,1 707,6	3,660 3,765 3,872	30,47 29,45 28,45

Les tableau N° 7 ci-après donne les résultats (valeurs moyennes) des ajustements réalisés avec ce programme pour les relevés expérimentaux de compression sur les tronçons courts.

Ces ajustements n'ont qu'un caractère informatif.

Tableau N° 7. *Essais de compression sur tronçons courts. Ajustements à exposants fixes*

Provenance et type de profilé	$n$ choisi par le programme	Catégorie	Module d'élasticité $E$ (t/cm <sup>2</sup> )	$B$ (t/cm <sup>2</sup> )	Limite d'élasticité $\sigma_{0,2}$ (t/cm <sup>2</sup> )	Ecart relatif maximum en contrainte (en %)
France I	9,01	I	710,50	3,204	1,61	1,3
Suisse I (1re et 2e livraison)	18,83	III	786,54	4,661	3,35	1,0
Suède I	46,53	IV	749,40	3,246	2,84	4,2
Italie O	9,01	I	704,27	3,302	1,66	2,4
Norvège O	18,83	III	761,45	3,484	2,50	1,0
Belgique O	46,53	IV	753,21	3,813	3,34	4,0
Suisse O	46,53	IV	682,73	3,484	3,05	2,7

On constate que les alliages Al-Zn 5 MgI (tube belge et double T suisse) et Al-SilMg (tube suisse et norvégien) se retrouvent dans des classes différentes suivant leur provenance. Cette anomalie, due en partie à la faible incidence de la valeur de  $n$  sur la qualité de l'ajustement, nous fait suggérer, soit la révision du nombre et des limites des classes de SUTTER, soit l'adoption d'une valeur caractéristique de  $n$  pour chaque type d'alliage.

## 8. Essais de flambement

### 8.1. Description des essais

Les essais de flambement sont exécutés dans une machine Amsler de 500 tonnes munie de rotules spéciales sphériques à pression d'huile, alimentées par la pompe à trois pistons qui alimente le maître cylindre de la presse. Le centre de pivotement de chaque appui coïncide avec le centre de la taque plane de cet appui sur laquelle la pièce d'essai est fixée. L'excentricité résultant du fonctionnement des appuis est inférieure à 0,02 cm pour toute charge comprise entre 0 et 300 tonnes.

L'ensemble est décrit en détail aux pages 45 à 49 de la référence (5).

La vitesse de mise en charge de toutes les barres a été prise égale à 0,1 t/cm<sup>2</sup> par minute.

Pour le calcul des contraintes, on a pris en compte la section obtenue par pesée comme au paragraphe 7.1.

## 8.2. Résultats

Les résultats expérimentaux sont donnés dans les tableaux N° 8 et 9 ci-après. Ils sont également reportés graphiquement sur les courbes de flambement dimensionnelles établies au paragraphe 9.6.

Tableau N° 8. Résultats détaillés

Provenance et élanement $\lambda$	Charge de ruine $P_{ruine}$ (t)	Section mesurée $A$ (cm <sup>2</sup> )	Contrainte de ruine $\sigma_{cr}$ (t/cm <sup>2</sup> )	Provenance et élanement $\lambda$	Charge de ruine $P_{ruine}$ (t)	Section mesurée $A$ (cm <sup>2</sup> )	Contrainte de ruine $\sigma_{cr}$ (t/cm <sup>2</sup> )	
Belgique 41,15	32,30	11,67	2,767	France 69	45,50	40,89	1,113	
	31,60	11,67	2,707		45,50	40,97	1,111	
	32,50	11,60	2,802		40,70	40,89	0,995	
	31,20	11,60	2,691		48,50	41,00	1,183	
	32,60	11,60	2,810		38,00	40,97	0,928	
Italie 34,4	13,00	9,55	1,361	48,00	41,06	1,169		
	13,80	9,47	1,458	41,50	40,91	1,015		
	13,10	9,45	1,387	40,70	40,89	0,995		
Norvège 28,9	21,90	10,30	2,126	61,8	43,30	40,82	1,061	
	20,80	10,19	2,042		44,50	440,85	1,089	
	20,80	10,31	2,017		Suisse Première livraison 48,3	91,00	39,49	2,304
	20,00	10,19	1,964	102,50		39,32	2,607	
	17,20	10,31	1,668	106,00		39,50	2,684	
	16,30	10,31	1,581	112,00		39,50	2,835	
	20,00	10,25	1,951	Suisse Deuxième livraison 64,5		72,00	39,47	1,824
	16,70	10,32	1,619			79,50	39,47	2,014
	16,60	10,62	1,563			90,50	39,47	2,293
	17,10	10,25	1,668		72,00	39,47	1,824	
16,20	10,37	1,562	86,50		39,47	2,192		
16,50	10,31	1,601	65,00		39,47	1,647		
Suisse (tubes) 51,2	27,30	13,28	2,056		64,00	39,34	1,627	
	26,50	13,16	2,014		67,00	39,47	1,697	
	27,70	13,16	2,105		101,00	39,41	2,563	
	29,50	13,16	2,242		115,00	39,32	2,925	
	27,60	13,28	2,078	105,00	39,14	2,683		
	26,30	13,28	1,980	97,00	39,32	2,467		
	27,20	13,16	2,067	105,00	39,32	2,671		
	27,50	13,28	2,071	105,00	39,14	2,683		
	48,3	Suisse (tubes) 51,2	13,28	2,071	103,00	39,32	2,620	
					113,00	39,32	2,874	
116,00					39,25	2,956		
115,50					39,25	2,943		
119,50					39,25	3,045		
124,50					39,39	3,161		
114,00					39,53	2,884		
113,50					39,25	2,892		
121,50					39,53	3,074		
118,00					39,25	3,007		
32,4	Suisse (tubes) 51,2	13,28	2,071	48,3	105,00	39,32	2,874	

Tableau N° 9. Résultats statistiques

Pays	Type de profil	Nombre d'échantillon	Masse volumique (kg/dm <sup>3</sup> )	Elongement $\lambda$	Coefficient $k$ de la formule (8.1) (7)	Résultats statistiques		
						Contrainte moyenne $\sigma^{(m)}$ (t/cm <sup>2</sup> )	Ecart standard $s$ (t/cm <sup>2</sup> )	Limite inférieure de la contrainte de ruine (t/cm <sup>2</sup> )
Belgique	O	5	2,784	41,15	2,776	2,755	0,054	2,605
France	I	9	2,670	69	2,306	1,063	0,0868	0,863
Italie	O	3	2,678	34,4	4,303	1,402	0,050	1,186
Norvège	O	4 8	2,700	28,9 51,9	3,182 2,365	2,037 1,652	0,0675 0,128	1,822 1,349
Suisse	I	4 8 8 8	2,785	48,3 48,3 32,4 64,5	3,182 2,365 2,365 2,365	2,608 2,686 2,995 1,890	0,223 0,151 0,0953 0,252	1,897 2,328 2,770 1,295
Suisse	O	8	2,700	51,2	2,365	2,077	0,077	1,894

Lorsque le nombre d'essais est suffisant, on calcule la limite inférieure de la contrainte d'affaissement

$$\sigma^{(i)} = \sigma^{(m)} - k s \quad (8.1)$$

où le coefficient  $k$  est choisi en fonction du nombre d'essais et sur la base d'une confiance de 97,5% (7).

Le tableau 9 met bien en évidence l'influence de la petitesse de l'échantillon sur la grandeur de la fourchette statistique. Le coefficient  $k$ , qui vaut 1,96 pour un grand échantillon, prend une valeur nettement supérieure dans les cas étudiés ici.

#### *Remarque importante*

Les tubes norvégiens présentent une épaisseur fortement variable le long du périmètre, comprise entre 3,5 et 4,4 mm.

La grande majorité des barres tirées de ces profils a flambé suivant une direction privilégiée, celle de l'épaisseur minimale.

## **9. Etablissement des courbes de flambement par ordinateur**

### *9.1. Introduction*

Les calculs sur ordinateur définissent le comportement d'une barre imparfaite tout au long de sa mise en charge. Ils donnent l'évolution avec l'effort  $P$  de compression de toutes les caractéristiques de la barre: flèches, courbures, contraintes, dilatations, etc. ... comme le ferait une expérience réelle de laboratoire, et s'appellent pour cette raison «calculs de simulation».

La méthode adoptée est, en principe, celle exposée par BATTERMAN et JOHNSTON (8). Le programme original de ces auteurs a été considérablement remanié en vue de le rendre plus général et plus performant.

La méthode itérative utilisée pour résoudre numériquement les équations gouvernant le flambement est exposée en détail dans la référence (9). Elle emploie les différences finies.

### *9.2. Domaine d'application*

Le domaine d'application du programme simulant le flambement est le suivant:

- la barre est mise hors service par un flambement d'ensemble dans un plan donné, à l'exclusion de tout autre phénomène d'instabilité (torsion, voilement local des parois, déversement);
- les extrémités de la barre sont parfaitement articulées;
- la charge axiale agit dans le plan de flambement, avec ou sans excentricité;

- la section transversale de la barre est quelconque;
- la barre peut avoir une déformée initiale ou non (courbure de l'axe); en particulier, si elle est initialement rectiligne, le calcul met en évidence l'effet SHANLEY (10);
- la barre peut être le siège d'une distribution quelconque de contraintes résiduelles;
- le matériau composant la barre est isotrope et suit une loi  $(\sigma, \epsilon)$  quelconque;
- la dispersion des caractéristiques mécaniques du matériau sur la section peut être prise en compte.

### 9.3. Objet de la présente étude

#### 9.3.1. Cas envisagés

Conformément au plan général des recherches (par. 2), l'étude porte sur les cas suivants:

- a) Les barres, dont il faut établir les courbes de flambement, sont des profilés de construction en aluminium filés à la presse.
- b) On envisage les huit alliages différents définis au tableau N° 1.
- c) Il y a deux types de section transversale: le tube et le double té; pour ce dernier, on n'envisage que le flambement autour de l'axe d'inertie minimum, donc dans le plan des ailes.
- d) La charge agit centriquement aux deux extrémités de la barre.

#### 9.3.2. Imperfections

Il y a deux types d'imperfections: les imperfections géométriques (relatives à la forme de la barre) et structurales (relatives au matériau).

- a) *Imperfections géométriques*: en accord avec les travaux de la Commission VIII de la CECM et les relevés de flèches initiales faits à Liège, on adopte une déformée initiale sinusoïdale caractérisée par le rapport  $f/l$  (de la flèche au centre sur la longueur) valant 1/1000.
- b) *Imperfections structurales*: en employant les courbes contraintes-dilatations  $(\sigma, \epsilon)$  obtenues par les essais de compression sur tronçons courts, on tient compte d'une façon globale des imperfections structurales suivantes:
  - dispersion du module d'élasticité  $E$ ,
  - dispersion de la limite élastique  $\sigma_{0,2}$ ,
  - présence des contraintes résiduelles  $\sigma_{rés}$ .

#### 9.3.3. Courbes moyennes et caractéristiques

Pour chaque alliage, le tableau N° 6 fournit trois courbes  $(\sigma, \epsilon)$  de compression sur tronçons courts; à chacune d'elles correspond une courbe de flambement; il a été décidé de n'en calculer que deux, correspondant respec-

tivement à la courbe statistique moyenne et à la courbe caractéristique inférieure (à 97,5% de confiance).

Comme on dispose de huit alliages, on doit donc établir 16 courbes de flambement.

Ces courbes sont portées d'une part dans un diagramme dimensionnel  $\sigma_{cr} - \lambda$  classique, et d'autre part dans le diagramme non-dimensionnel  $\bar{N} - \bar{\lambda}$  où  $\bar{N}$  est la force portante relative (ou contrainte de ruine relative) et  $\bar{\lambda}$  l'élanement relatif, défini par

$$\bar{N} = \frac{P_{ruine}}{N_P} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{0,2}},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} \text{ avec } \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{0,2}}}$$

avec:

- $N_P$  = effort normal plastique =  $A \sigma_{0,2}$ ;
- $\sigma_{0,2}$  = limite élastique à 0,2%;
- $\sigma_{cr}$  = contrainte critique =  $P_{ruine}/A$ ;
- $A$  = aire de la section;
- $E$  = module d'élasticité;
- $P_{ruine}$  = charge de ruine de la barre;
- $\lambda$  = élanement.

#### 9.4. Quelques aspects techniques du calcul

##### 9.4.1. Traitement de la loi $(\sigma, \epsilon)$

Conformément au par. 9.3.3., la loi  $(\sigma, \epsilon)$  expérimentale introduite dans le programme est, soit la loi statistique moyenne, soit la loi statistique inférieure de RAMBERG-OSGOOD, sous les formes (3.1) ou (3.4):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n,$$

$$= \frac{\sigma}{E} + 0,002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}}\right)^n, \quad (9.1)$$

où  $\sigma_{0,2}$ ,  $E$ ,  $B$  et  $n$  sont définis par le tableau N° 6.

Cette loi est représentée à la figure 9.1. Elle est irréversible, c'est-à-dire que, si une fibre a atteint le point  $A$  ( $\epsilon^*$ ,  $\sigma^*$ ) et qu'ensuite elle est déchargée, ce déchargement se fait élastiquement selon la droite  $AB$  de pente  $E$ , dont l'équation est

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon^*) + \sigma^*. \quad (9.2)$$

Au point de vue numérique, l'équation (9.1) présente le désavantage d'être non linéaire: quand on connaît  $\epsilon$ , on ne peut trouver  $\sigma$  que par approximations successives. Or, c'est précisément cette circonstance qui se produit dans le calcul des charges de ruine.



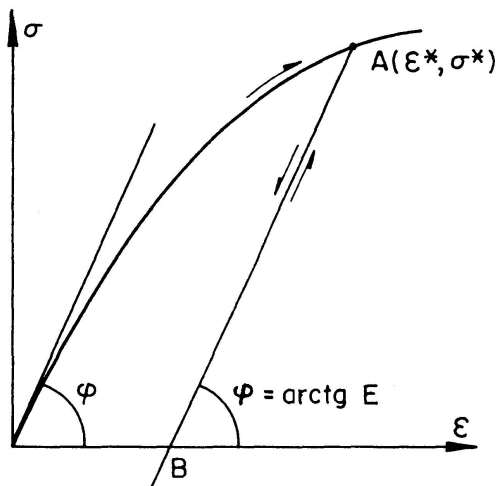
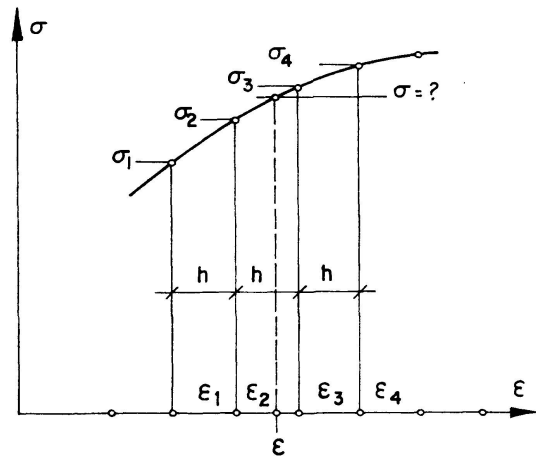
Fig. 9.1. Loi  $\sigma$ - $\epsilon$  réversible.

Fig. 9.2. Interpolation quadratique.

Pour éviter de devoir résoudre l'équation (9.1) par itérations, plusieurs milliers de fois au cours d'un même calcul de charge de ruine, on tabule une fois pour toutes cette équation par pas constants  $\Delta \epsilon = h$  (Fig. 9.2); puis, à partir des couples de valeurs  $(\epsilon_i, \sigma_i)$ , on trouve une quelconque valeur  $\sigma$  intermédiaire par interpolation quadratique selon la formule de STIRLING-BESSEL: soient  $(\epsilon_i, \sigma_i, i=1,4)$  les quatre points entourant un couple  $(\epsilon, \sigma)$  cherché; connaissant  $\epsilon$ , on calcule (Fig. 9.2)

$$m = (\epsilon - \epsilon_2)/h$$

et  $\sigma$  est donné par la formule d'interpolation quadratique

$$\sigma = \sigma_2 + m(\sigma_3 - \sigma_2) + \frac{m(m-1)}{4}(\sigma_4 - \sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1) \quad (9.3)$$

où le second terme donne la correction linéaire (interpolation linéaire) et le troisième celle quadratique.

Enfin, lorsque certaines fibres sont tendues, on fait l'hypothèse que la courbe  $(\sigma, \epsilon)$  est la même en traction qu'en compression.

#### 9.4.2. Subdivisions

La longueur  $L$  de la barre est divisée en 20 intervalles égaux. La section transversale est divisée (Fig. 9.3):

- pour un double-té, en 10 tranches dans chaque semelle et dans l'âme; on néglige les congés de raccordement entre âme et semelles;
- pour un tube, en 20 secteurs.

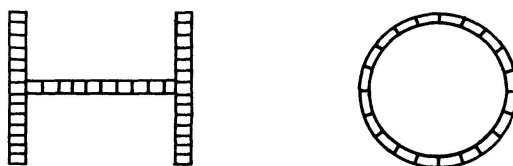


Fig. 9.3.

Le calcul numérique montre que les subdivisions offrent une précision tout à fait suffisante pour un temps de calcul modéré.

#### 9.4.3. Calcul d'une courbe de flambement

Chaque courbe de flambement est obtenue par la détermination numérique d'une quinzaine de ses points au moins, correspondant aux élancements suivants:

$$\lambda = 20, 30, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90, 100, 120, 140, 160, 180 \text{ et } 200.$$

Le temps de calcul nécessaire à obtenir ces quinze points est de l'ordre de 5 minutes, sur l'ordinateur IBM-360-65 du Centre de Calcul et de Traitement de l'Information de l'Université de Liège; ce temps ne comprend pas les temps de la compilation, du linkage editor et des entrées-sorties.

#### 9.4.4. Programme

Le programme est écrit en langage FORTRAN 4G et comporte quelques 400 instructions. Il travaille uniquement en mémoire centrale où il occupe environ 95 000 bytes (1 mot = 1 variable simple précision = 4 bytes). Les variables flottantes sont en double précision (8 bytes = 16 chiffres décimaux).

Ce programme comprend essentiellement trois parties:

- a) Le programme principal, qui effectue les calculs d'itérations.
- b) Un sous-programme relatif au matériau, c'est-à-dire traitant l'équation  $(\sigma, \epsilon)$  (acier, aluminium, ...).
- c) Un sous-programme relatif au type de la section transversale (double-té, tube, ...).

Ces divers sous-programmes sont interchangeable sans modifier le programme principal, ce qui permet de traiter toute barre faite d'un quelconque matériau.

### 9.5. Résultats

#### 9.5.1. Caractéristiques géométriques et mécaniques

Les caractéristiques géométriques de la section des barres (hauteur, largeur des ailes, épaisseur des ailes et de l'âme pour un double-té; diamètre extérieur et épaisseur de la paroi pour un tube) sont données aux tableaux 1 et 6. Pour les profilés en double-té, les calculs de simulation sont exécutés sans tenir compte des congés de raccordement entre âme et semelles. Les tubes ont été supposés géométriquement parfaits, c'est-à-dire définis par deux cercles concentriques.

Comme caractéristiques mécaniques du matériau (module d'élasticité  $E$ , limite élastique  $\sigma_{0,2}$  ou valeur du paramètre  $B$ , valeur de l'indice d'écroutissage  $n$ ) on a introduit celles données pour les divers alliages, par les essais de com-

pression globale sur tronçons courts et renseignées au tableau 6. Les courbes dimensionnelles de flambement, bien que calculées électroniquement, présentent par conséquent un caractère semi-expérimental.

### 9.5.2. Courbes dimensionnelles de flambement

On donne aux figures 9.4 et 9.5 les courbes dimensionnelles de flambement calculées par simulation sur ordinateur pour les divers alliages étudiés.

Sur les diagrammes réalisés en premier lieu, on donne la courbe moyenne et la courbe caractéristique inférieure à 97,5%. Ces deux courbes étant presque confondues sur les diagrammes non dimensionnels on n'a calculé, dans la suite, que la courbe caractéristique inférieure.

Il est bon de noter qu'il n'y a rien d'illogique à ce qu'une courbe dépasse l'ordonnée  $\bar{N} = 1$ , puisque la limite  $\sigma_{0,2}$  prise en compte est conventionnelle et n'a de limite que le nom.

### 9.6. Comparaison entre résultats expérimentaux et simulation sur ordinateur

On a reporté sur les diagrammes dimensionnels (fig. 9.4 et 9.5) les essais de flambement ainsi que la «fourchette statistique» donnant la moyenne et les caractéristiques statistiques inférieure et supérieure.

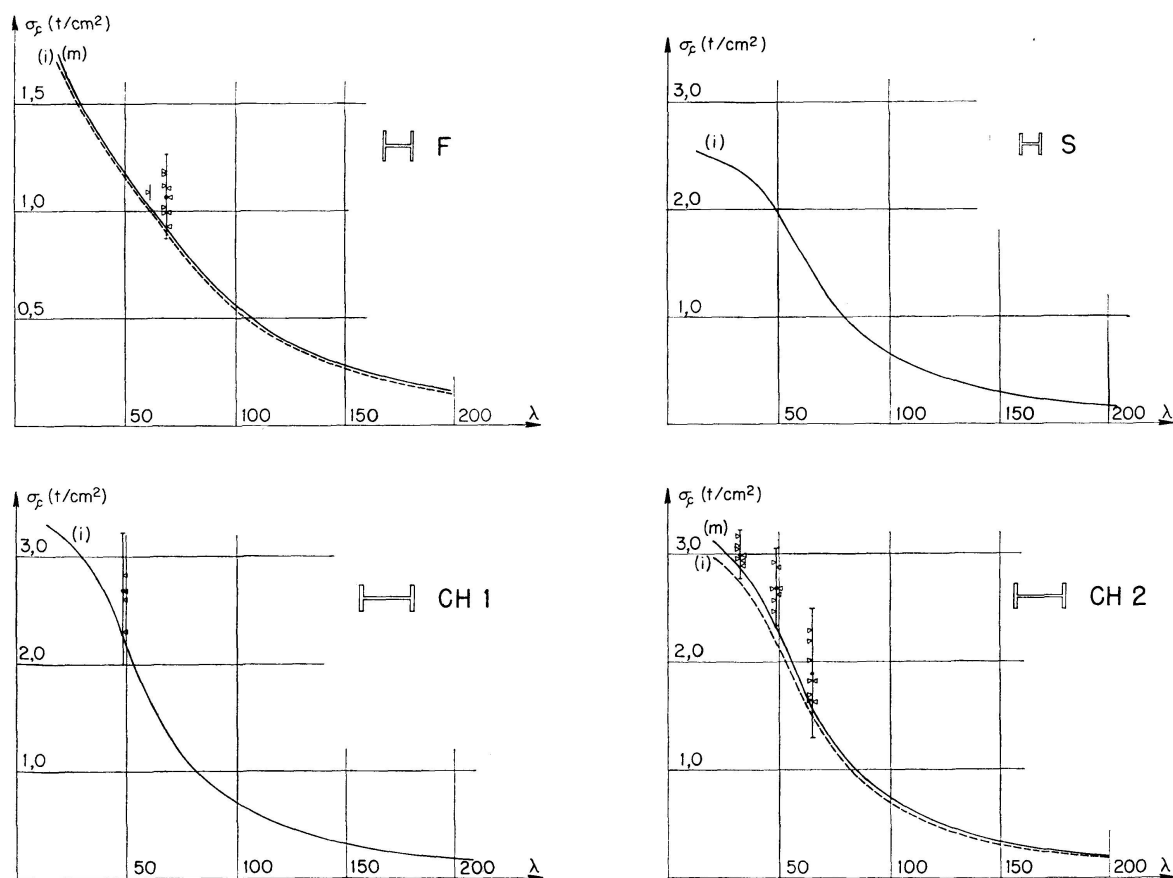


Fig. 9.4. Courbes dimensionnelles de flambement. Profils en double té.

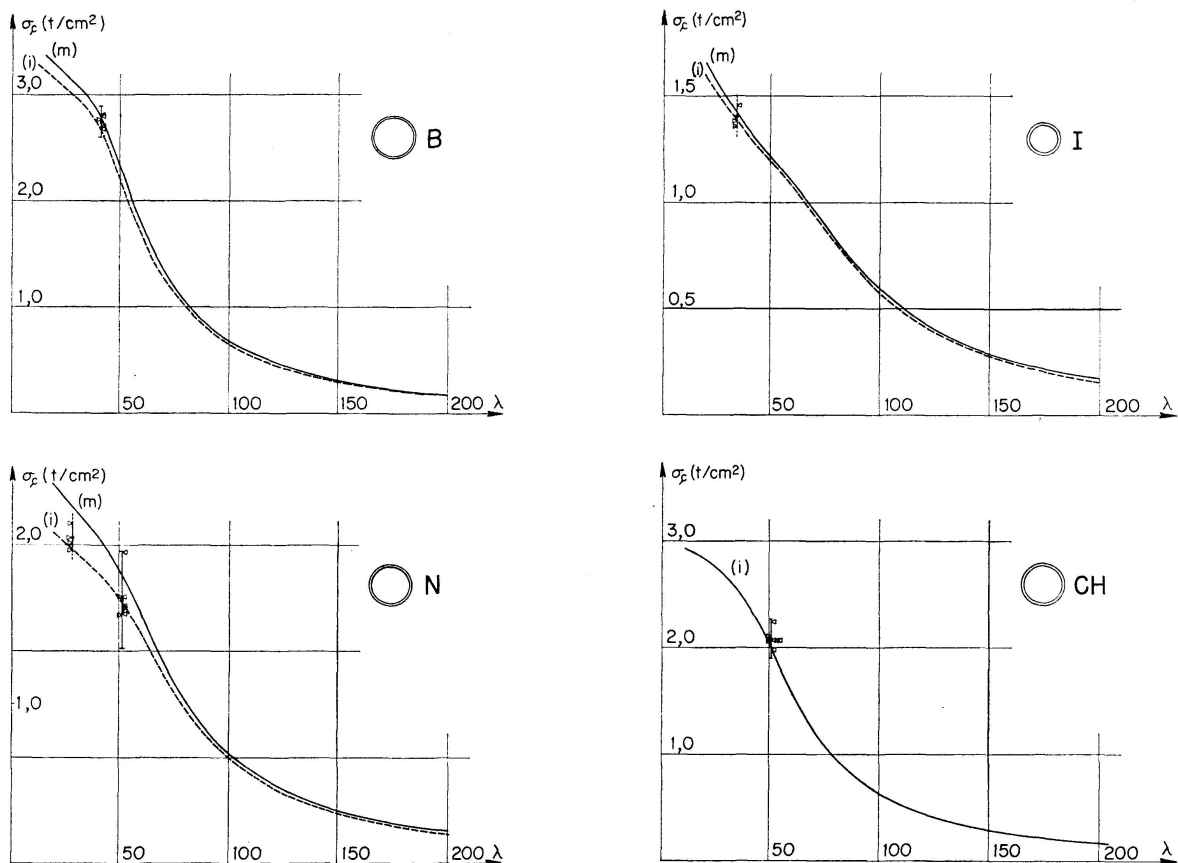


Fig. 9.5. Courbes dimensionnelles de flambement. Profils tubulaires.

Dans presque tous les cas, cette « fourchette statistique » se prolonge jusqu'en dessous de la courbe caractéristique inférieure calculée par le programme de simulation. La cause en est essentiellement, le nombre assez réduit d'essais par élancement (huit maximum) et la confiance très grande (97,5%).

Dans la formule

$$P_{ruine}^{(i)} = P_{ruine}^{(m)} - k s$$

donnant la valeur caractéristique inférieure de la charge de ruine, on a donc une dispersion  $s$  et un facteur  $k$  élevés et il n'y a rien d'étonnant à trouver une valeur expérimentale  $P_{ruine}^{(i)}$  légèrement inférieure à celle prévue par le calcul de simulation.

D'autre part, le calcul sur ordinateur ne tient évidemment pas compte de toute une série d'imperfections aléatoires existant réellement dans les barres, telles que: centrage imparfait, section droite variable, matériau inhomogène le long du profil, etc. ... L'expérience peut cependant faire ressortir les défauts les plus graves; dans le cas des tubes par exemple, il y a des résultats expérimentaux qui sont inférieurs aux valeurs *minimales* calculées. La variation de l'épaisseur que *tous* les tubes essayés présentaient sur leur pourtour en est indubitablement la cause; cette imperfection géométrique entraîne, outre un

plan de moindre résistance au flambement, une excentricité de la mise en charge puisqu'on centre les barres sur leur pourtour extérieur.

Une telle imperfection, une fois décelée, peut évidemment être prise en compte par le calcul; les tubes en aluminium filés à la presse exigent de ce fait une étude spéciale, en fonction de leurs tolérances de fabrication, étude qui est en cours actuellement.

Enfin, quelques essais de flambement (pour  $\lambda = 32,4$ ) sur poutrelles double-té suisses de la deuxième livraison, situés au-dessus de la courbe caractéristique inférieure calculée pour cette livraison, se situent en-dessous de la courbe caractéristique inférieure calculée pour la première livraison, alors que ces deux livraisons devraient, en principe, présenter des caractéristiques identiques. Cette constatation nous apprend que le traitement statistique présente une lacune du fait qu'il ne porte que sur les caractéristiques mécaniques d'éprouvettes issues d'une même fabrication et non prises, «au hasard», dans un grand nombre de fabrications différentes.

### 9.7. Comparaison des courbes non dimensionnelles de flambement

Les courbes non dimensionnelles caractéristiques inférieures, données à la figure 9.6, sont déduites des courbes dimensionnelles correspondantes par introduction des caractéristiques mécaniques minimales (module d'élasticité  $E$ , limite élastique  $\sigma_{0,2}$ ) données par les essais de compression globale sur tronçons courts (tableau 6). Ces courbes présentent donc, elles aussi, un caractère semi-expérimental.

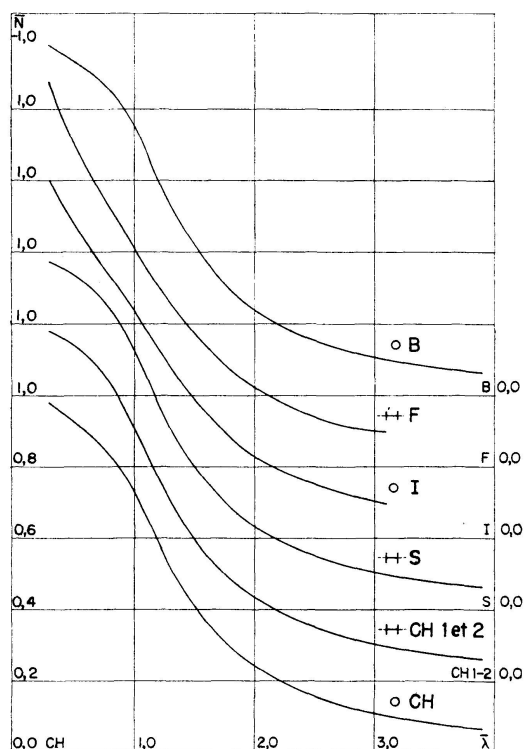


Fig. 9.6. Courbes non-dimensionnelles de flambement.

La figure 9.7 compare ces mêmes courbes dans la zone des petits élancements. On constate qu'elles se groupent en deux faisceaux, l'un correspondant aux fortes valeurs, l'autre aux faibles valeurs de l'indice d'écroutissage  $n$  introduit au paragraphe 3.

L'allure des courbes non dimensionnelles semble donc dépendre essentiellement de la valeur de cet indice et n'être que peu influencée par la forme géométrique (double-té ou tube) de la section droite.

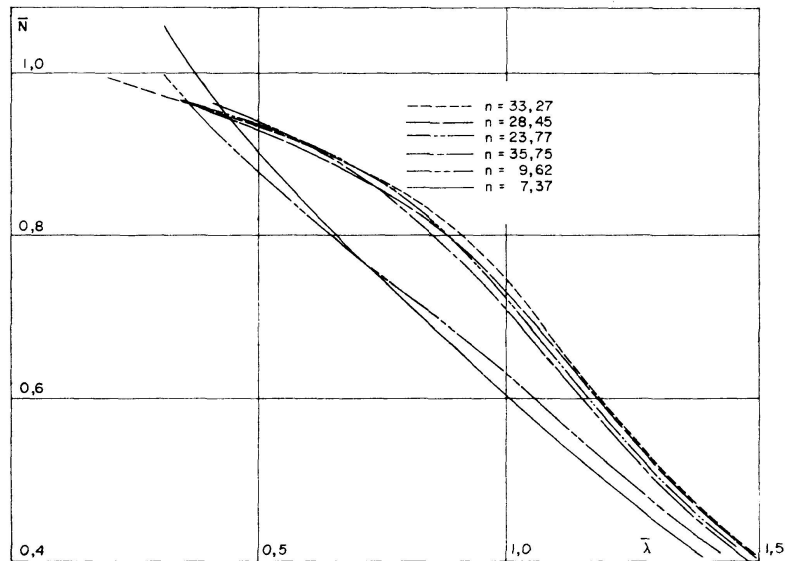


Fig. 9.7. Courbes non dimensionnelles de flambement (comparaison).

## 10. Conclusions

### 1. Essais sur matériau

1.1. Les alliages étudiés ont des diagrammes  $(\sigma, \epsilon)$  de formes très diverses. Toutes ces formes sont représentables avec une grande précision par une loi de RAMBERG-OSGOOD à trois paramètres, qui sont  $E$ ,  $\sigma_{0,2}$  et  $n$ . La valeur du paramètre d'écroutissage  $n$  introduit au paragraphe 3 permet directement de situer l'alliage dans une des trois classes de SUTTER, en vertu de la formule

$$\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_{0,1}} = \sqrt[n]{2}.$$

1.2. La dispersion des propriétés mécaniques ( $\sigma_{0,2}$  et contrainte de rupture) dans la section droite est modérée et nettement moindre que celle obtenue pour des profils laminés en acier.

1.3. Les contraintes résiduelles sont faibles (pointes de l'ordre de  $0,4 \text{ t/cm}^2$ ) et ne semblent obéir à aucune loi de distribution déterminée.

## *2. Forme géométrique des barres*

Tous les tubes testés dans la présente recherche présentent une variation sensible de l'épaisseur sur le pourtour. Comme les essais de flambement l'ont mis en évidence, cette imperfection, non seulement entraîne un plan de moindre résistance au flambement, mais surtout provoque sur les barres une excentricité appréciable de la mise en charge.

## *3. Courbes de flambement obtenues par simulation*

3.1. Les courbes non dimensionnelles ont une forme qui dépend essentiellement de la valeur de l'indice d'écroutissage  $n$  mais très peu de la forme (tube ou double-té) du profil étudié.

Les courbes obtenues pour ces profils et pour  $21 < n < 34$  se superposent pratiquement. Elles diffèrent nettement, par contre, des courbes obtenues pour le tube italien ( $n = 9,6$ ) et le double-té français ( $n = 7,4$ ).

3.2. Les courbes non dimensionnelles correspondant aux diagrammes  $(\sigma, \epsilon)$  moyens et caractéristiques inférieurs sont pratiquement confondues.

## *4. Essais de flambement et comparaison avec les calculs de simulation*

4.1. Vu l'imperfection des tubes analysés au point 2 ci-dessus, il n'est pas étonnant qu'un certain nombre de résultats d'essai tombent sous les courbes théoriques.

4.2. Pour les barres en double-té, aucun résultat d'essai ne tombe en-dessous de la courbe théorique correspondante. La limite inférieure de la fourchette de dispersion se situe souvent sous la courbe théorique, mais cela est dû à la petitesse de l'échantillon, au choix d'une confiance très élevée (97,5%) et, pour une moindre part, au fait que les calculs ne tiennent pas compte de toutes les imperfections existant réellement.

4.3. Compte tenu des conclusions précédentes, l'accord entre les courbes théoriques et les résultats d'essais peut être considéré comme satisfaisant. Cet accord donne confiance dans la méthode de simulation, qui peut être appliquée à n'importe quel profil de n'importe quel alliage.

## **II. Recommandations**

1. L'effet de l'excentricité des tubes sur leur résistance au flambement fait actuellement l'objet d'une étude détaillée.
2. En vue de préparer le travail de la Commission chargée de rédiger les normes, il faudrait:

- a) Déterminer systématiquement les valeurs de l'indice d'écroûissage  $n$  de tous les alliages d'aluminium employés en construction.
- b) Etudier systématiquement l'effet de  $n$  sur la forme des courbes de flambement non dimensionnelles.

### Bibliographie

1. H. BEER et G. SCHULTZ: Bases théoriques des courbes européennes de flambement. Construction métallique N° 3, p. 37-57, 1970.
2. W. RAMBERG et W. R. OSGOOD: Description of stress-strain curves by three parameters. N.A.C.A. Techn. Note N° 902, 1943.
3. K. SUTTER: Die theoretischen Knickdiagramme bei Aluminiumlegierungen. Technische Rundschau, Bern (Suisse), Numéros 20-24, 1959.
4. CH. MASSONNET et E. MAS: Détermination expérimentale de la courbe de destruction par flambement des colonnes comprimées centriquement. Publication C.R.I.F. MT 5, juin 1964, Fabrimétal, Bruxelles.
5. F. CAMPUS et CH. MASSONNET: Bull. du Cérés, Liège, t. VII, p. 119 à 335, 1957 et Compte-rendu de recherches de l'IRSIA N° 17, avril 1956.
6. DUMAS: Principes de l'application des méthodes statistiques à la production et à la recherche (Eyrolles, 1942).
7. G. W. SNEDECOR: Statistical methods. Iowa State College Press, 1956.
8. R. H. BATTERMAN et B. G. JOHNSTON: Behaviour and maximum strength of metal columns. Proc. A.S.C.E., Journ. Struct. Div., avril 1967, p. 205-230.
9. F. FREY: Calcul au flambement des barres industrielles. Bull. techn. de la Suisse romande. 97e année, N° 11, mai 1971, p. 239-258.
10. F. FREY: Note sur l'effet SHANLEY, à paraître dans Schweizerische Bauzeitung, 1973.

### Résumé

Ce rapport présente les résultats et conclusions d'une recherche CIDA, effectuée à Liège, préliminaire à l'établissement de courbes européennes de flambement par divergence des profilés en alliages légers. Les principes fondamentaux sont ceux adoptés, dans le domaine de l'acier, par la Commission VIII de la C.E.C.M. La partie expérimentale du travail, qui porte sur des profilés extrudés (tube et double té), montre une bonne concordance avec les résultats obtenus à l'aide du programme numérique de simulation mis au point par les auteurs. Par ailleurs, la loi de RAMBERG-OSGOOD apparaît comme parfaitement adaptée pour représenter la loi contraintes-dilatations des différents alliages d'aluminium.

### Zusammenfassung

Dieser Bericht stellt die Ergebnisse und Schlussfolgerungen einer an der Universität Lüttich ausgeführten CIDA-Forschungsarbeit dar, die der Aufstellung von europäischen Knickkurven für Leichtmetallprofile vorausgeht.



Die fundamentalen Prinzipien sind jene welche die Kommission VIII der EKSU auf dem Gebiete des Stahls angenommen hat. Der experimentelle Teil der Arbeit betrifft extrudierte Rohr- und Doppel-T-Profile. Die Übereinstimmung der experimentellen und der mittels des von den Autoren aufgestellten numerischen Simulierungsprogramms auf Computer gerechneten Knickkurven ist mehr als zufriedenstellend. Ausserdem bewährt sich die RAMBERG-OSGOOD-Kurve als sehr angemessen zur Darstellung des Spannungs-Dehnungsdiagramms der verschiedenen Aluminiumlegierungen.

### Summary

This report presents the results and conclusions of a CIDA research conducted at the University of Liège prior to establishing European buckling curves for aluminium alloy columns. The general principles are those used for steel by the Committee VIII of the ECCS. The experimental part of the work, performed on extruded tube and H-shape sections, shows a more than satisfactory concordance with the results computed by the numerical simulation program written by the authors. The RAMBERG-OSGOOD curve is shown to fit very well the stress-strain relationship of the different aluminium alloys.