Zeitschrift: IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen

Band: 13 (1973)

Artikel: Ordnungsstatistik in der Zuverlässigkeitsbeurteilung von Tragwerken unter wiederholter Belastung

Autor: Schuëller, G.I.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13776

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ordnungsstatistik in der Zuverlässigkeitsbeurteilung von Tragwerken unter wiederholter Belastung

Order Statistics in Reliability Assessment of Structures under Repeated Loadings

"Statistique d'ordre" pour l'appréciation de la fiabilité des charpentes soumises à des charges répétées

G.I. SCHUËLLER
Institut für Massivbau
Technische Universität München
München, BRD

1. EINFÜHRUNG

Das Problem der Zuverlässigkeitsbeurteilung von ermüdungsempfindlichen Tragwerken wird vielfach durch die Anwendung derselben Konzepte behandelt, die für die einmalige Aufbringung einer Last (Bruchlast) ausreichend sind.

Die Zuverlässigkeit unter Ermüdungsbelastung kann durch diese Methoden nicht befriedigend gelöst werden und zwar aus dem einfachen Grund, da die Verteilung von Ermüdungslebensdauer unter variablen (und sogar unter konstanten) Belastungsamplituden nicht mit der Verteilung der einer gewissen Lebensdauer zugeordneten Festigkeit, welche tatsächlich die Verteilung der "Residualfestigkeit" ist, in Beziehung gebracht werden kann.[1]

Daher muß die Zuverlässigkeit bei Ermüdungsbeanspruchung mit der Verteilung der Ermüdungslebensdauer, mit der Vorhersage der Ordnungsstatistik, bekannt als die "Zeit bis zum ersten Versagen"[2] und dem mit dieser Vorhersage verbundenen Risiko in Zusammenhang gebracht werden.

Die Zuverlässigkeitsanalyse, die auf dem Begriff der "Zeit bis zum ersten Versagen" aufbaut, ist besonders relevant bei Tragwerken, für welche die Vermeidung eines einzigen katastrophalen Versagens als primäres Bemessungskriterium gilt. Das Versagenskriterium kann aber hier auch allgemein als der Beginn einer Rißbildung oder die Erreichung eines bestimmten Zerstörungsniveaus festgelegt werden.

Das vorhin erwähnte Verfahren, das schon seit einiger Zeit zur Flugtragwerksbemessung verwendet wird, ist aber auch im Bauingenieurwesen von großer Wichtigkeit, da das Auswechseln von ermüdungsgeschädigten Konstruktionselementen z.B. bei Brücken oder Hochhäusern zum Teil mit viel größeren Schwierigkeiten und Kosten verbunden ist als bei Flugtragwerken.

Das Konzept der Zeit bis zum ersten Versagen hat mehrere praktische Vorteile. Diese sind u.a. die Möglichkeit der tatsächlichen Überprüfung während des Betriebes, die starke Beeinflussung der Ergebnisse durch verschiedene Verteilungen der Lebensdauer, die automatisch die Unterschiede der verschiedenen Versagensmechanismen re-

flektieren, und die Abhängigkeit von der Anzahl der betrachteten Konstruktionsdetails.

2. WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG DER ERMÜDUNGSLEBENSDAUER

Die Anzahl der Material- und Lebensdauerversuche von Tragwerken, die technisch und wirtschaftlich durchführbar sind, schließt eine Ableitung einer Verteilungsfunktion der Ermüdungslebensdauer aus Beobachtungen mit Methoden der statistischen Inferenz aus.

Es ist daher notwendig, aufgrund physikalischer Überlegungen probabilistische Modelle auszuwählen, die den physikalischen Phänomenen entsprechen. Erst dadurch wird eine Extrapolation von einer kleinen Anzahl von Versuchsergebnissen auf die für die Zuverlässigkeitsanalyse wichtigen niederen Bereiche vertretbar.

Die physikalische Annahme der mit zunehmender Anzahl von Lastaufbringungen zunehmenden Rißbildung kann in die probabilistische Form einer mit zunehmender Zeit t ansteigenden "Risikorate"[3]

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{1}$$

gebracht werden.

In Gl.(1) ist f(t) die Wahrscheinlichkeitsdichte und F(t) die Summenverteilung.

Die Risikofunktionen verschiedener Verteilungsfunktionen haben einen sehr unterschiedlichen Charakter. Während die Funktion z.B. für eine Gammaverteilung asymptotisch zu einem konstanten Wert ansteigt, nimmt die Risikofunktion der Lognormalverteilung nach anfänglicher Zunahme wieder ab und konvergiert mit zunehmender Zeit langsam zu Null. Die zwei-Parameter-Weibullverteilung (asymptotische Verteilungsfunktion der kleinsten Werte),

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \text{ für unbekannte } \alpha,\ \beta > 0, \tag{2}$$

hingegen weist eine mit zunehmender Zeit monoton ansteigende Risikofunktion auf und entspricht daher den physikalischen Gegebenheiten am besten, da sich mit zunehmender Zeit, die eine zunehmende Rißbildung hervorruft, das Versagensrisiko erhöht.

Daher wurde den weiteren Ausführungen die Weibullverteilung als Modell der Ermüdungslebensdauer zugrunde gelegt.

3. FORMULIERUNG DES ORDNUNGSSTATISTISCHEN PROBLEMS

Aufgrund eines umfassenden experimentellen und analytischen Programms wurde in Ref.4 festgestellt, daß für eine große Mannigfaltigkeit von Tragwerken oder Tragwerksdetails und Belastungsarten die Streuungen der Logarithmen der Zeiten bis zum Versagen nahezu konstant sind. Dies bedeutet, speziell auf Gl.(2) bezogen, daß der streuungsbestimmende Formparameter α der Weibullverteilung einen konstanten Wert für eine Reihe von verschiedenen Bedingungen hat. Dieser unbekannte Wert der Weibullform α wurde durch eine Versuchsreihe von mehr als tausend anwendbaren Stichproben geschätzt und seine direkte Abhängigkeit von der Art des Materials festgestellt (für Aluminium $\alpha = 4$). Wenn dieser Formparameter genau festliegt, kann er für die weiteren Berechnungen als konstanter Wert angenommen werden.

Die zentrale Tendenz der Grundgesamtheit oder Größenparameter β in Gl.(2) wird vorteilhaft durch Ermüdungsversuche an Modellen in Originalgröße bestimmt. Von den verschiedenen für die statistische Schätzung der Parameter der Weibullverteilung anwendbaren Methoden wird von Mann[5] die "Maximum Likelihood" Schätzung als die beste rekommendiert. Die Punktschätzung der charakteristischen Weibull-Lebensdauer β mit bekanntem α ist:

$$\hat{\beta} = [\frac{1}{n_f} (\sum_{i=1}^{n_f} Y_i^{\alpha})]^{1/\alpha} \tag{3}$$

hierin bedeuten n_f die Anzahl der Versagensbeobachtungen in einer Versuchsstichprobe und Y_i die Variable der Zeit bis zum Versagen.

Gl.(3) ergibt eine Schätzung mit minimaler Varianz und ohne bias mit bekannter Stichprobenverteilung. In diesem Fall kann auch, wenn gewünscht, der niedere Grenzwert der Intervallschätzung berechnet werden. Die Stichprobenverteilung der Weibullschätzung $\hat{\beta}$ wird dann in Form eines Vertrauensniveaus, das auch die Stichprobengröße in Betracht zieht, angegeben.

Wenn nun die Zuverlässigkeit R eines aus einer Grundgesamtheit willkürlich gewählten Tragwerks oder Tragwerkdetails als ein geeignetes Maß für die Sicherheit oder reparaturfreie Periode beurteilt wird, würde die Angabe eines akzeptierbaren Wertes R genügen, um eine "sichere Lebensdauer" zu gewährleisten. Als "sichere Lebensdauer" wird hier jene Lebensdauer betrachtet, bei welcher die Wahrscheinlichkeit des anfänglichen Auftretens von Ermüdungsrissen in einem Detail genügend klein ist.

In vielen oder möglicherweise allen Fällen ist die willkürliche Festlegung eines annehmbaren Wertes R eine nicht ausreichende Grundlage für die Bestätigung einer sicheren Lebensdauer für eine Anzahl von Details oder Tragwerken.

Im Hinblick auf den sicheren oder reparaturfreien Betrieb von Tragwerken oder Details erwartet man für die <u>ganze</u> oder <u>nahezu ganze</u> Anzahl von Elementen eine akzeptierbare Zuverlässigkeit.

In Bezug zur sprichwörtlichen Kette, die nicht stärker als ihr schwächstes Glied sein kann, ist es nur eine Frage der Definition, die Zuverlässigkeit der Mehrheit der Elemente mit der Zuverlässigkeit des schwächsten der (angenommenen) unabhängigen nominell identischen Elemente gleichzusetzen. Es ist daher notwendig, die Verteilung der Ermüdungslebensdauer dieses schwächsten Gliedes zu bestimmen und aus dieser dann eine sichere Lebensdauer abzuleiten. Diese neue Zufallsvariable ist ein Beispiel einer Ordnungsstatistik.

Glücklicherweise ist bei Unabhängigkeit der Versuche die genaue Berechnung der ordnungsstatistischen Verteilung von irgendeiner angenommenen, geschätzten oder bekannten Verteilung der Grundgesamtheit relativ einfach.

Aus grundlegenden ordnungsstatistischen Betrachtungen erhält man

$$1 - F_{Y_1}(y_1) = [1 - F_Y(y)]^N \tag{4}$$

wobei F_{Y_1} die Summenverteilung der Zeit bis zum ersten Versagen, F_Y die Summenverteilung der Grundgesamtheit und N die Anzahl der betrachteten Details oder Tragwerke bedeuten.

Speziell für die Weibullverteilung (Gl.2) ist

$$1 - F_{Y_1}(y_1) = \exp [- \frac{y_1}{\beta_1}]^{\alpha} \tag{5}$$

hierin bedeutet $\beta_1 = \beta N^{-\frac{1}{\alpha}}$. Dies zeigt, daß für diese Verteilung die Funktion $(1 - F_{Y_1}(y_1))$ selben Extremaltyps ist wie $(1 - F_Y(y))$ und zwar mit identischem Formparameter α, aber mit einem um

$(N^{-\frac{1}{\alpha}})$ reduzierten charakteristischen Wert ß.
Gl.(5) ergibt nach y_1 aufgelöst:

$$Y_1 = \beta_1 \{\ln(\frac{1}{1-F_{Y_1}(y_1)})\}^{1/\alpha} \tag{6}$$

Setzt man nun für $1 - F_{Y_1}(y_1) = R$ in die obige Gleichung, so erhält man:

$$Y_R = \beta_1 \{\ln(\frac{1}{R})\}^{1/\alpha} \tag{7}$$

wobei Y_R gleich der sicheren Lebensdauer für eine bestimmte Zuverlässigkeit R ist. Gl.(7) kann auch als "umgekehrte Zuverlässigkeitsfunktion" bezeichnet werden.

4. DER STREUUNGSFAKTOR

Die im Kapitel 3 entwickelten Formulierungen finden in der Bemessung ermüdungsbeanspruchter Tragwerke oder Details in Form eines sogenannten "Streuungsfaktor" ihren Niederschlag[6]. Dieser ist das Verhältnis zwischen getesteter oder berechneter Durchschnittslebensdauer oder charakteristischer Lebensdauer und der Bemessungs- oder sicheren Lebensdauer.

Der für die Anzahl der ermüdungsbeanspruchten Details und spezifizierte Zuverlässigkeit Rechnung tragende Streuungsfaktor ist

$$S_R = \frac{\hat{\beta}}{Y_R} \tag{8}$$

wie auch in Bild 1 gezeigt wird.

5. ERGEBNISSE UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die zur Durchführung der Analyse notwendigen experimentellen Daten wurden aus Ref.4 entnommen. Bild 2 zeigt jene Einflüsse an, welche die Anzahl der Details, das Zuverlässigkeitsniveau und der Formparameter der Weibullverteilung auf den Streuungsfaktor ausüben. Hierbei wird die starke Abhängigkeit des Streuungsfaktors von der Anzahl der Details, die im Betrieb der Ermüdungsbeanspruchung ausgesetzt sind, ersichtlich. Zusätzlich sei hier bemerkt, daß dieses Verhältnis logarithmisch linearer Natur ist. Die Ergebnisse zeigen weiterhin deutlich die Möglichkeit und den Vorteil einer direkten Einflußnahme auf das Risikoniveau bei der Bemessung ermüdungsbeanspruchter Tragwerke.

Das zur Bestimmung des Formparameters α in Ref.4 für Aluminium durchgeführte Versuchsprogramm (α = 4.o) sollte auch auf konventionelle Baustähle ausgedehnt werden.

6. LITERATUR

1. FREUDENTHAL, A.M. und E.J. GUMBEL: "The Physical and Statistical Aspects of Fatigue", Advances in Applied Mechanics, Vol.4, Academic Press, 1956.

2. FREUDENTHAL, A.M.: "Reliability Analysis Based on Time to the First Failure", Aircraft Fatigue, Pergamon Press, London-New York, 1972, pp 13 - 48.

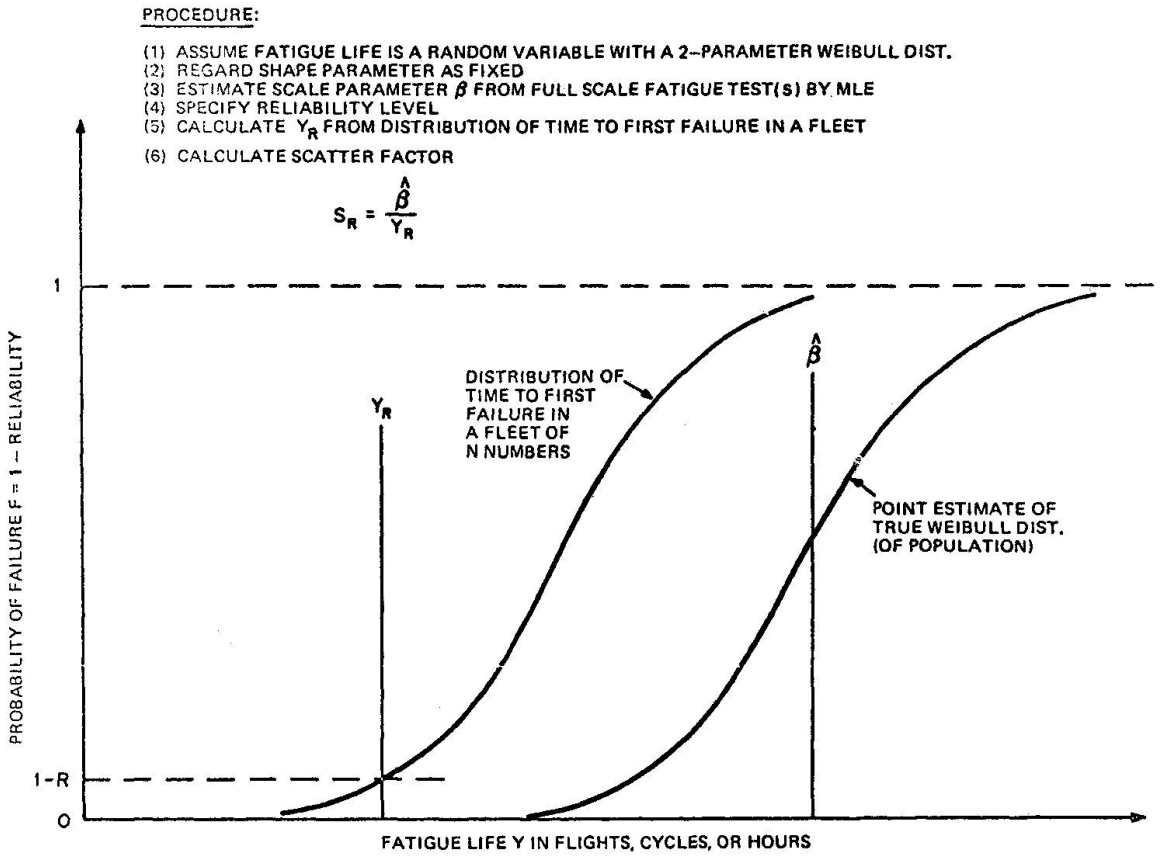

FIGURE 1 SCHEMATIC REPRESENTATION OF RELIABILITY PLAN

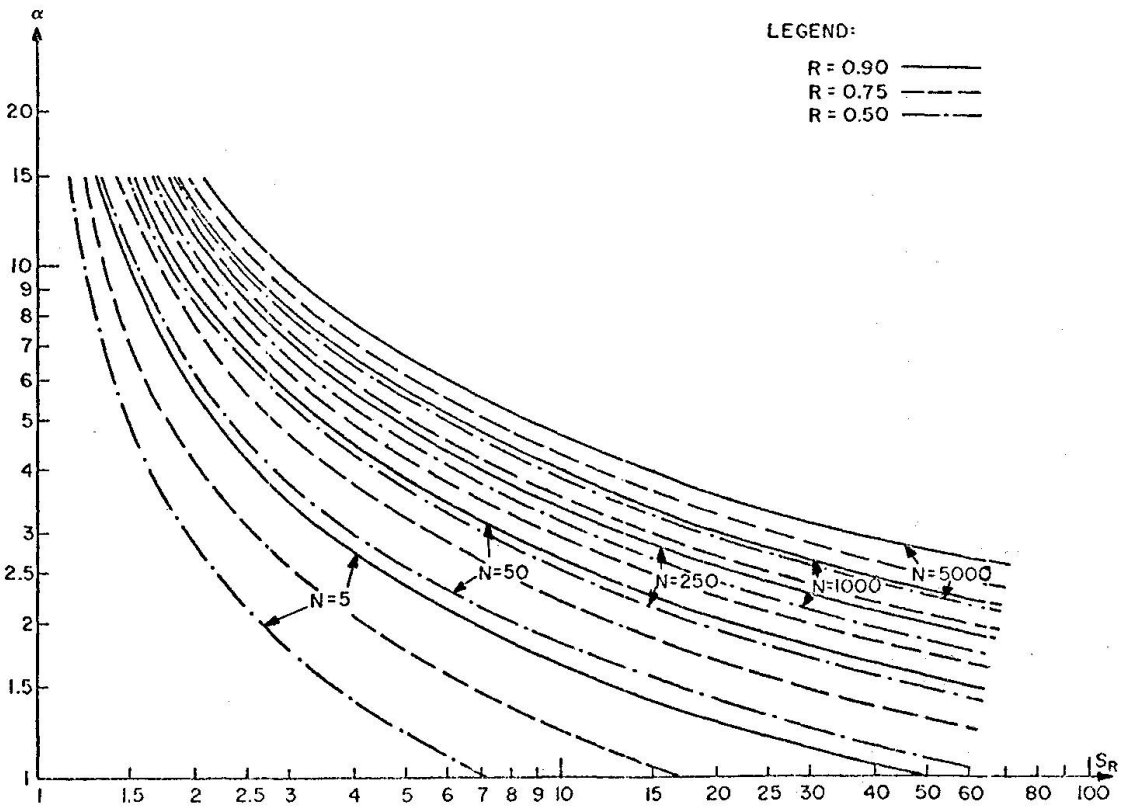

FIGURE 2 SHAPE PARAMETER VERSUS SCATTER FACTOR

3. FREUDENTHAL, A.M.: "Prediction of Fatigue Life", J.Appl.Phys., Vol.31, No.12, Dec.196o.

4. WHITTAKER, I.C. und P.M. BESUNER: "A Reliability Analysis Approach to Fatigue Life Variability of Aircraft Structures", AFML-TR-69-65, Air Force Mat.Lab., Aeron.Syst.Div., Air Force Syst.Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA.

5. MANN, N.R.: "Point Interval Estimation Procedures for the Two-Parameter Weibull and Extreme-Value Distributions", Technometrics 1o, May 1968, pp 231 - 276.

6. SCHÜELLER, G.I. und A.M. FREUDENTHAL: "Scatter Factor and Reliability of Aircraft Structures", NASA Report CR-21oo, Nov.1972.

ZUSAMMENFASSUNG

Eine ordnungsstatistische Methode der Risikobeurteilung von Tragwerken, die wiederholten Belastungen ausgesetzt sind, wird vorgeschlagen. Die zwei-Parameter Weibullverteilung (asymptotische Verteilung der kleinsten Werte) wird als probabilistisches Modell der Ermüdungslebensdauer verwendet. Der Begriff der "Zeit bis zum ersten Versagen" wird für die Berechnung der sicheren Lebensdauer angewandt. Das Verhältnis dieser beiden Variablen wird als "Streuungsfaktor" bezeichnet und in der tatsächlichen Bemessung verwendet. Ein numerisches Beispiel zeigt das gegenseitige Verhältnis zwischen dem Formparameter der Weibullverteilung, der Anzahl der einer Ermüdungsbeanspruchung ausgesetzten Details und der Zuverlässigkeit auf.

SUMMARY

An orderstatistical approach in the risk assessment of structures which are subjected to repeated loadings is proposed. The two-parameter Weibull distribution (asymptotic distribution of the smallest values) is utilized to model fatigue life. The concept of the time to first failure is applied to calculate the certifiable life. The ratio of these two variables is then termed as "scatterfactor", to be used in actual design. A numerical example shows the interrelationship between the shape parameter of the Weibull distribution, the fleetsize and the reliability.

RESUME

On propose dans ce travail une méthode de statistiques d'ordre pour juger les risques auxquels est soumise une structure sous l'action de charges répétées. La répartition à deux paramètres de Weibull (répartition asymptotique des plus petites valeurs) est utilisée comme modèle probabiliste de la résistance à la fatigue. Le concepte de "temps jusqu'à la première fissure" est employé pour le calcul de la durée de vie la plus sûre de la structure. Le rapport de ces deux variables est appelé coefficient de dispertion et est utilisé pour le dimensionnement réel. Un exemple numérique montre le rapport réciproque entre le paramètre de forme de la répartition de Weibull, le nombre d'éléments soumis à un effort de fatigue et la sûreté de la méthode.